BAOU
Education for All

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી

(ગુજરાત સરકાર દ્વારા સ્થાપિત)

NAAC ACCREDITED A++ GRADE 3.55/4

માસ્ટર ઓફ આર્ટ્સ- અર્થશાસ્ત્ર

Semester - I

અર્થશાસ્ત્રની પરિમાણાત્મક પદ્ધતિઓ - I

MAECON 103

સ્વાધ્યાયનું અજવાળું

ભારતના સંવિધાનના સર્જક ભારત રત્ન ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકરની પાવન સ્મૃતિમાં ગરવા ગુજરાતમાં ગુજરાત સરકારશ્રીએ ઇ.સ. 1994 માં યુનિવર્સિટી ગ્રાન્ટ્સ કમિશન અને ડિસ્ટન્સ એજ્યુકેશન કાઉન્સિલની માન્યતા મેળવી અમદાવાદમાં ગુજરાતના એક માત્ર મુક્ત વિશ્વ વિદ્યાલય ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટીની સ્થાપના કરી છે.

ડૉ. બાબા સાહેબ આંબેડકરની 125 મી જન્મજયંતીના અવસરે જ ગુજરાત સરકાર દ્વારા યુનિવર્સિટી માટે અદ્યતન સગવડ સાથે, શાંત જગ્યા મેળવી, જ્યોતિર્મય પરિસરનું નિર્માણ કરી આપ્યું. BAOU ના સત્તા મંડળે પણ યુનિવર્સિટીના ઉજ્જવળ ભવિષ્ય માટે ખૂબ સહયોગ આપ્યો છે.

શિક્ષણ એટલે માનવમાં થતું મૂડી રોકાણ. શિક્ષણ લોકસમાજની ગુણવત્તા સુધારવામાં અધિક ફાળો આપી શકે છે. અહીં મને સ્વામી વિવેકાનંદનું શિક્ષણ વિષયક દર્શન યાદ આવે છે : 'જેનાથી ચારિત્ર્યઘડતર થાય, માનસિક ક્ષમતાનું નિર્માણ થાય, જેનાથી બૌદ્ધિક વિકાસ સાધી શકાય અને જેના થકી વ્યક્તિ પગરભર બની શકે તેને શિક્ષણ કહેવાય.'

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી શિક્ષણમાં આવા ઉમદા વિચારને વરેલી છે. તેથી વિદ્યાર્થીઓને ગુણવત્તાયુક્ત, વ્યવસાયલક્ષી, જીવનલક્ષી શિક્ષણની સગવડ ઘરે બેઠા મળી રહે એવા પ્રયત્નો મક્કમતા પૂર્વક કરે છે. સમાજના વિશાળ વર્ગને ઉચ્ચ શિક્ષણ પ્રાપ્ત થાય, છેવાડાના માણસોને ઉત્તમ કેળવણી એમનાં રોજિંદાં કામો કરતાં પ્રાપ્ત થતી રહે. વ્યાવસાયિક લોકોને આગળ ભણતરની ઉત્તમ તક સાંપડે અને જીવનમાં પોતાની ક્ષમતાઓ, કૌશલ્યોને પ્રગટ કરી સારી કારકિર્દી ઘડે, સ્વાવલંબી બની ઉત્તમ જીવન જીવતાં સમાજ અને રાષ્ટ્ર નિર્માણમાં પોતાનું પ્રદાન આપે એ માટે પ્રયાસરત છે.

'સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ' સૂત્રને ઓપન યુનિવર્સિટીએ કેન્દ્રમાં રાખીને પ્રવેશ મેળવતાં છાત્રોને સ્વઅધ્યયન માટે સરળતાથી સમજાય એવો ગુણવત્તાલક્ષી શૈક્ષણિક અભ્યાસક્રમ ઉપલબ્ધ કરાવી આપે છે. દરેક વિષયની પાયાની સમજણ મળે તેની કાળજી રાખવામાં આવે છે. વિદ્યાર્થીઓને રસ પડે અને રુચિ કેળવાય તેવાં પાઠ્ય પુસ્તકો નિષ્ણાત અધ્યાપકો દ્વારા તૈયાર કરવામાં આવે છે. દૂરવર્તી શિક્ષણ પ્રાપ્ત કરવા ખેવના રાખતા કોઈ પણ ઉંમરના છાત્રોને માટે અભ્યાસ સામગ્રી તૈયાર કરવા માટે શિક્ષણવિદો સાથે પરામર્શન કરવામાં આવે છે. એ પછી જ માળખુ રચી, અભ્યાસ સામગ્રી તૈયાર કરી પુસ્તક સ્વરૂપે છાત્રોનાં કર કમળોમાં આપે છે. જેનો ઉપયોગ કરીને વિદ્યાર્થી સંતોષપ્રદ અનુભવ કરી શકે છે.

યુનિવર્સિટીના તજજ્ઞ અધ્યાપકો ખૂબ કાળજીથી આ અભ્યાસક્રમોનું લેખન કરે છે, વિષય નિષ્ણાત પ્રોફેસરો દ્વારા એમનું પરામર્શન થાય પછી જ પરિણામલક્ષી અભ્યાસ સામગ્રી યુનિવર્સિટીના વિદ્યાર્થીઓને પહોંચે છે. ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી જ્ઞાનનું કેન્દ્રબિંદુ રહી છે. વિદ્યાર્થીઓને 'સ્વાધ્યાય ટેલિવિઝન', 'સ્વાધ્યાય રેડિયો' જેવા દૂરવર્તી ઉપાદાનો થકી પણ એમના ઘર સુધી શિક્ષણ પહોંચાડવાનો પુરુષાર્થ થઈ રહ્યો છે. ઉમદા હેતુ, શ્રેષ્ઠ ધ્યેયને આંબવા પરિશ્રમરત યુનિવર્સિટીના જ્ઞાનની પરબમાં અધ્યાપકો તેમજ કર્મઠ કર્મચારીગણને અભિનંદન આપવા સાથે અમારી યુનિવર્સિટીના વિદ્યાર્થીઓ સફળ થવા ખૂબ મહેનત કરી, જીવન સફળ કરવાની સાથે જીવન સાર્થક કરે એવી પરમેશ્વરને પ્રાર્થના કરું છું.

અસ્તુ !

પ્રો. (ડૉ.) અમી ઉપાધ્યાય

કુલપતિ

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, જ્યોતિર્મય પરિસર,

સરખેજ-ગાંધીનગર હાઈવે, છારોડી અમદાવાદ

Dr. Babasaheb Ambedkar Open University, Ahmedabad
Quantitative Method in Economics - I

નિર્દેશન : પ્રો. ડૉ. યોગેન્દ્ર પારેખ, નિયામક સ્કૂલ ઓફ હ્યુમેનિટીઝ એન્ડ સોસીયલ સાયન્સીસ,
ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ

સંપાદક : ડૉ. કૃતિ છાયા, આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, અર્થશાસ્ત્ર, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ

સહસંપાદક : ડૉ. જીવરાજ ઝાંપડીયા, આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ
ડૉ. દિલીપચંદ્ર ચાવડા, આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ

વિષય સમિતિ :

ડૉ. કૃતિ છાયા, આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, અર્થશાસ્ત્ર, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ

ડૉ. ગૌરાંગ રામી, પ્રોફેસર અને હેડ, અર્થશાસ્ત્ર વિભાગ, વીર નર્મદ સાઉથ ગુજરાત યુનિવર્સિટી, સુરત

ડૉ. જી.ડી. ત્રિપાઠી, પ્રિન્સિપાલ, સી.એન. આર્ટ્સ અને બી.ડી. કોમર્સ કોલેજ, કડી.

ડૉ. મંજુલા લક્ષ્મણ, પ્રોફેસર, અર્થશાસ્ત્ર વિભાગ, ગુજરાત વિદ્યાપીઠ, અમદાવાદ.

ડૉ. વિજય ઝરીવાલા, એસોસિએટ પ્રોફેસર, અર્થશાસ્ત્ર વિભાગ, એસ.પી. યુનિવર્સિટી, વલ્લભવિદ્યાનગર

ડૉ. હિમાની જોશી, આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, સ્કૂલ ઑફ લિબરલ સ્ટડીઝ, પંડિત દીનદયાલ એનર્જી યુનિવર્સિટી ગાંધીનગર

ડૉ. રણીતા નગર, પ્રોફેસર, ગુજરાત નેશનલ લૉ યુનિવર્સિટી, ગાંધીનગર

ડૉ. હિમાંશુ પટેલ, આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, સ્કૂલ ઓફ કમ્પ્યૂટર સાયન્સ ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી અમદાવાદ.

ડૉ. ઓમ તેરૈયા, એસોસિએટ પ્રોફેસર, આત્મીય યુનિવર્સિટી રાજકોટ

ડૉ. મહેન્દ્ર મૈસુરિયા, એસોસિએટ પ્રોફેસર, સિટી સી. યુ. શાહ કોમર્સ કોલેજ, અમદાવાદ

વિષય પરામર્શન : ડૉ. મહેન્દ્ર મૈસુરિયા, એસોસિએટ પ્રોફેસર, સિટી સી. યુ. શાહ કોમર્સ કોલેજ, અમદાવાદ

ભાષા પરામર્શન : ભક્તિ પુલસ્ત્ય વોરા, સેટેલાઈટ, અમદાવાદ.

લેખન :

ડૉ. મહેન્દ્ર મૈસુરિયા, એસોસિએટ પ્રોફેસર, સીટી સી. યુ. શાહ કોમર્સ કોલેજ, લાલ દરવાજા, અમદાવાદ

ડૉ. દિનેશ પટેલ, એસોસિએટ પ્રોફેસર, શ્રી એચ. કે. કોમર્સ કોલેજ, આશ્રમ રોડ, અમદાવાદ

ડૉ. મૌલિક પટેલ, આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, શ્રી એચ. કે. કોમર્સ કોલેજ, આશ્રમ રોડ, અમદાવાદ

ડૉ. હિમાંશુ રાચ્છ્ એસોસિએટ પ્રોફેસર, શ્રી સ્વામિનારાયણ આર્ટ્સ કોલેજ, શાહે આલમ ટોલનાકા, અમદાવાદ

ડૉ. દીપા ગોસાઈ, પ્રિન્સિપાલ, આર.સી.કોલેજ ઓફ કોમર્સ, દિલ્લી ચકલા, અમદાવાદ

પ્રકાશક : કુલ સચિવ, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી

પ્રથમ આવૃત્તિ વર્ષ 2025 **ISBN : 978-93-5598-983-3**

MA SEM-I અર્થશાસ્ત્રની પરિમાણાત્મક પદ્ધતિઓ - I

એકમ	એકમનું નામ	અભ્યાસક્રમની વિગત
1.	આંકડાશાસ્ત્રનો પરિચય	આંકડાશાસ્ત્રનો અર્થ, કર્યો, ઉપાયો, મર્યાદા, આંકડાશાસ્ત્ર પર અવિશ્વાસ અને તેને દૂર કરવાના ઉપાયો અને માહિતીનો અર્થ અને પ્રકારો.
2.	વર્ગીકરણ અને કોષ્ટક રચના	વર્ગીકરણનો અર્થ, વર્ગીકરણના નિયમો, સતત અને અસતત આવૃત્તિ વિતરણ, દ્વિચલ અને સંચય આવૃત્તિ વિતરણ, કોષ્ટક રચનાની વ્યાખ્યા ઉપાયો, કોષ્ટક રચનાના ભાગ અને પ્રકારો.
3.	આંકડાશાસ્ત્રીય માહિતીનું, આલેખી નિરૂપણ	આંકડાશાસ્ત્રીય માહિતીનું આલેખી નિરૂપણ, આકૃતિના પ્રકારો અને આવૃત્તિ વિતરણના આલેખો.
4.	મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના માપ	મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના માપનો અર્થ અને મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના માપો.
5.	પ્રસારમાનના માપ	પ્રસારમાનનો અર્થ, અગત્યતા અને પ્રસારમાનના માપો.
6.	વિષમતાના માપ	વિષમતાનો અર્થ, વિષમતાની કસોટીઓ, વિષમતાના પ્રકારો અને વિષમતાના માપ.
7.	નિદર્શન પદ્ધતિઓ	સમષ્ટિ અને નિદર્શનો અર્થ, સમષ્ટિ અને નિદર્શ તપાસ, નિદર્શનની જરૂરિયાત, કદ અને ફાયદા તથા મર્યાદાઓ, પુરવણી સહિત અને રહિત નિદર્શન.
8.	નિદર્શનના પ્રકારો	નિદર્શ લેવાની રીતો, નિદર્શ લેવામાં કમ્પ્યુટરનો ઉપયોગ, સ્તરિત અને પદિક અને નિદર્શન.
9.	ગણ	ગણનો ખ્યાલ અને તેના ઘટકો, ગણના પ્રકારો, ગણ ઉપરની પ્રક્રિયાઓ.
10.	ક્રમચય સંચય અને દ્રીપદી વિસ્તરણ (પ્રમેય)	ક્રમચય, સમરૂપ વસ્તુઓના ક્રમચયનો અર્થ, પુનરાવર્તિત ક્રમચયનો અર્થ, સંચય અને દ્વિપદી વિસ્તરણ.
11.	વિધેય	વિધેયનો અર્થ, પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર, વિધેયના પ્રકારો, સુરેખ વિધેય અને દ્વિઘાતી વિધેય.
12.	લક્ષ	'ને' અનુલક્ષે છે નો અર્થ અને વિધેયનું લક્ષ અર્થ, કોષ્ટક રચના કરી લક્ષની કિંમત શોધવી, લક્ષના નિયમો અને લક્ષ શોધવાની પદ્ધતિઓ
13.	વિકલન	વિકલનનો અર્થ, ઉપયોગ વિધેયના વિકલનફળના પ્રમાણિત રૂપો, વિકલનના નિયમો અને દ્વિતીય વિકલન.
14.	દ્વિતીય વિકલન અને વિકલનના અર્થશાસ્ત્રમાં ઉપયોગો.	દ્વિતીય વિકલનફળનો અર્થ અને અર્થશાસ્ત્રમાં વિકલનનો ઉપયોગ.

અનુક્રમણિકા

એકમ-1 આંકડાશાસ્ત્રનો પરિચય

: રૂપરેખા :

1.0 ઉદ્દેશો

(1) આંકડાશાસ્ત્રનો અર્થ સમજી શકશો.

(2) આંકડાશાસ્ત્રની ઉપયોગીતા સમજી શકશો.

(3) આંકડાશાસ્ત્રની મર્યાદાઓને ધ્યાને લઇ ભવિષ્યમાં સંશોધન માટે યોગ્ય નિર્ણય લઇ શકશો.

(4) માહિતી મેળવવાની રીતો જાણી શકશો.

(5) માહિતીના પ્રકારોની સમજ કેળવાશે.

1.1 પ્રાસ્તાવિકઃ

આધુનિક યુગમાં આંકડાશાસ્ત્ર એટલે એક વૈજ્ઞાનિક પદ્ધતિ છે. જેમાં માહિતીનું સંકલનકરવું, વર્ગીકરણ કરવું રજૂઆત કરવી અને વિશ્લેષણ કરવું એમ થાય છે. આંકડાશાસ્ત્ર જર્મન શબ્દ

Statistik, લેટીન શબ્દ Status અને ઇટાલિયન શબ્દ Statista વગેરે પરથી આકડાંશાસ્ત્ર Statistics શબ્દ બનેલ જણાય છે. આ બધા શબ્દનો અર્થ રાજ્ય [Political State] થાય છે. Statistics શબ્દનો સૌ પ્રથમ ઉપયોગ જર્મન લેખક Gottfrred Achenwall એ ઇ.સ. 1749 માં કર્યા હતો. વિશ્વના લગભગ બધા જ દેશોમાં લગભગ આંકડાઓનું સંકલન રાજકીય ક્ષેત્રે વ્યાપક પ્રમાણમાં થતું હતું. જેમ જેમ સમય પસાર થયો તેમ તેમ જુદા જુદા આંકડાશાસ્ત્રીઓએ જેવા કે

આર. એ. ફિશર, જેકોબી બર્નોલી, ગોલ્ટન, કાર્લ પિયર્સન વગેરે એ આંકડાશાસ્ત્રના વિકાસમાં ફાળો આપ્યો. ભારતમાં આંકડાશાસ્ત્રના વિકાસમાં પ્રો.પી.સી. મહાલોનોબિસનો ફાળો વિશેષ છે. તેથી તેને ભારતમાં આંકડાશાસ્ત્રના પિતા તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેમના જન્મ દિવસે એટલે કે 29મી જૂને ભારતમાં 'આંકડાશાસ્ત્ર દિવસ' તરીકે ઉજવવામાં આવે છે.

1.2 આંકડાશાસ્ત્રનો અર્થ અને વ્યાખ્યા (Meaning and Definition of Statistics)

જેમ ઘણા બધા શબ્દનો અર્થ જુદો જુદો હોય છે તેમ 'આંકડા' શબ્દનો અર્થ પણ જુદો જુદો થયેલો જોવા મળે છે. સાદા (કાચા) આંકડા (Row Data) માંથી અગત્યની અને ઉપયોગી હોય તેવી માહિતી ને આંકડા કહેવામાં આવે છે. એટલે કે 'કોઇક નશ્ચિત હેતુને લક્ષમાં લઇ એકત્રિત કરેલી માહિતી' ને આંકડા કહેવાય છે. દા.ત. આપણા ઘરનું બજેટ બનાવવું હોય તો જીવન જરૂરી ખર્ચ, મોજશોખનો ખર્ચ, બાળકોના શિક્ષણનો ખર્ચ વગેરે માહિતીને ધ્યાનમાં લઇએ છીએ, ભારતમાં ખેત પેદાશના આંકડા, જન્મ-મરણના આંકડા, રાજ્યના બજેટમાં શૈક્ષણિક, આરોગ્ય, કૃષિ, સંરક્ષણ વગેરે આ બધી માહિતીને આંકડા કહેવાય છે. આ સાંખ્યકીય માહિતીનું સંકલન કરી તેને યોગ્ય રીતે રજૂઆત કરી, વર્ગીકરણ કરવું અને તેની ધારણાઓની ચકાસણી કરી, વિશ્લેષણ કરી નિર્ણય કરવાની પદ્ધતિને આંકડાશાસ્ત્ર કહે છે.'

આંકડા શાસ્ત્રની વ્યાખ્યાઓ જુદા જુદા ઘણા આંકડાશાસ્ત્રીઓએ આપેલ છે. જેમાંની કેટલીક નીચે દર્શાવેલ છે.

(A) Prof. Horace secrist definition :

''By Statistics we mean aggretate of facts affected to a marked extent by multiplicity of causes numerically experessed, enumerated of estimated according to reasonable standards of accuracy, callected in a systematic manner for a pre-determined purpose and placed in relation to each other''.

પ્રો. હોરેસ એકિસ્ટની વ્યાખ્યા.

''પૂર્વ નિર્ધારિત હેતુ અનુસાર અનેક પરિબળોથી અસર પામતી પરસ્પર સંબંધ ધરાવતી સંખ્યાત્મક માહિતી એકત્ર કરી તેનું વર્ગીકરણ અને પૃથક્કરણ કરી સામાન્ય નિયમો કે અગત્યના તારણો તારવવાની અને સ્વીકૃતતા ચકાસવાની ગાણિતિક પદ્ધતિઓના અભ્યાસને આંકડાશાસ્ત્ર કહે છે.''

(B) According to webster :

"Statistics are classfied facts representing The condition of the people in a stat... especially these facts which can be stated in number or in tables of numbers or in any tabular or classified arrangement"

વેબ્સ્ટર નામને ''આંકડા એ રાજ્યના લોકોની સ્થિતિનું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતી હકીકતો છે... ખાસ કરીને આ હકીકતો જે સંખ્યામાં અથવા સંખ્યાઓના કોષ્ટકમાં દર્શાવી શકાય અથવા વર્ગીકૃત ગોઠવણીમાં ગોઠવી શકાય છે.''

(C) According To Prof. Boddington : "Statistics is the science of estimates and probabilities."

પ્રો. બોડીગ્ટનના મતે ''આંકડા એ અનુમાન અને સંભાવનાઓનું વિજ્ઞાન છે.''

(D) આ ઉપરાંત ડબલ્યુ. આઇ. કિંગના મતે ''આંકડાઓનું વિજ્ઞાન એટલે ગણતરી પરથી કે એકત્રિત કરેલ માહિતીના વિશ્લેષણમાંથી પ્રાપ્ત થયેલા પરિણામ દ્વારા સામૂહિક, નૈસર્ગિક અથવા સામાજિક સમૂહગત ઘટનાઓ પર નિર્ણય આપવાની પદ્ધતિનું વિજ્ઞાન છે.''

(E) ડૉ. એ.એલ. બાઉલીએ જુદી જુદી વ્યાખ્યાઓ આપી છે.

(1) ''આંકડાઓ એકબીજાના સંબંધિત કોઇપણ તપાસ વિભાગમાં હકીકતોનું આંકડાકીય નિવેદન છે.''

(2) ''આંકડાશાસ્ત્ર એટલે ગણતરીનું વિજ્ઞાન છે.''

(3) ''આંકડાશાસ્ત્ર એટલે સરેરાશ કિંમતોનું વિજ્ઞાન છે.''

1.3 આંકડાશાસ્ત્રના કાર્યો (Functions of statistics) :

આંકડાશાસ્ત્ર માનવ સમાજને ઉપયોગી ઘણા કાર્યો કરે છે. રોબર્ટ બેગર્સ આંકડાશાસ્ત્રનાં કાર્યોને સંક્ષેપમાં રજૂ કરેલ છે કે, ''આંકડાશાસ્ત્રના પાયાનો સિદ્ધાંત અજ્ઞાન, મનસ્વી, અપરિપક્વ, અંદાજિત નિર્ણયો, અંધશ્રદ્ધાઓ કે રીત રિવાજોમાં ક્ષેત્રને ઘટાડી સંખ્યાત્મક માહિતીના પૃથ્થકરણ પર આધારિત નિર્ણયો અને સિદ્ધાંતોના ક્ષેત્રને વધારવાનો છે.'' આંકડાશાસ્ત્રના મુખ્ય કાર્યોને સંક્ષિપ્તમાં નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય.

(1) આંકડાશાસ્ત્ર હકિકતોને અલગ પાડે છે :

માહિતી સાદા આંકડાઓમાં હોય તેમાંથી ઉપયોગી કે હેતુલક્ષી માહિતીને અલગ તારવી માહિતી એકત્રીત કરવાનું કાર્ય આંકડાશાસ્ત્ર કરે છે.

(2) જટિલ માહિતીને સરળ બનાવે છે :

કેટલીક વખત માહિતી ખૂબ જ જટિલ કે વિશાળ સ્વરૂપની હોય છે. તે માહિતીને વર્ગીકરણ દ્વારા સંક્ષિપ્તમાં રજૂ કરી સરળ બનાવે છે.

(3) સરખામણી કરવામાં મદદરૂપ થાય છે.

આંકડાશાસ્ત્રનું સરખામણી કરવાનું કાર્ય ખૂબ જ ઉપયોગી છે. આંકડાશાસ્ત્રીય સાધનો જેવા કે સરેરાશ, ચલનાંક, પ્રમાણિત દોષ વગેરે દ્વારા માહિતીઓની સરખામણી કરી શકાય છે.

(4) આંકડા વિવિધ હકિકતો વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવામાં મદદ કરે છે.

જેમ કે વસ્તુની કિંમત, માંગ, પુરવઠો, કોઇ કંપનીનું વેચાણ, નફો, ખર્ચ વગેરે માહિતી વચ્ચેના સંબંધ દ્વારા એકમોમાં થતી વધઘટ જાણી શકાય છે.

(5) આંકડાઓ જ્ઞાન અને અનુભવ વધારે છે.

કોઇપણ ક્ષેત્રમાં યોગ્ય નિર્ણયો લેવાની વિચારસરણી બદલવામાં આંકડાઓ ઉપયોગી પુરવાર થાય છે. નિર્ણયો તારવવામાં આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓનો આધાર અનિવાર્ય બને છે. સામાન્ય રીતે વ્યક્તિઓને આવી પદ્ધતિઓનો અભ્યાસ કરવો પડે છે. પરિણામે તેમનાં જ્ઞાન અને અનુભવમાં વધારો થાય છે.

(6) આંકડાઓ વિવિધ ક્ષેત્રોમાં નિતિ ઘડતરમાં મદદ કરે છે.

આંકડા શાસ્ત્ર જુદાં જુદાં ક્ષેત્રે જેમ કે રાજકીય, વાણિજ્ય, વેપારીક્ષેત્રે વગેરેમાં નિતિ ઘડતર અને યોગ્ય માળખું બનાવવામાં ખૂબ જ ઉપયોગી કાર્ય કરે છે.

(7) આંકડાશાસ્ત્ર પુર્વધારણાઓનું પરીક્ષણ કરે છે.

કોઇપણ સંશોધનમાં શરૂઆતમાં અમુક ધારણાઓ લેવામાં આવે છે. આવી પૂર્વધારણાઓનું આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓ દ્વારા પરીક્ષણ કરી નિર્ણયો લેવામાં આવે છે.

(8) આંકડાશાસ્ત્ર અનુમાનો અને આગાહીઓ કરવામાં મદદરૂપ થાય છે.

ભૂતકાળની માહિતીના આધારે ભવિષ્યમાં બનવાની ઘટનાઓ અંગેના અનુમાનો અને આગાહીઓ કરવા માટેના સાધનો આંકડાશાસ્ત્ર પૂરા પાડે છે.

1.4 આંકડાશાસ્ત્રના ઉપયોગો : (Use of Statistics)

આધુનિક સમયમાં આંકડાશાસ્ત્રનું મહત્વ ખૂબ જ વધ્યું છે. આંકડાશાસ્ત્રના સાધનો વગર કોઇપણ સંશોધન અધુરૂં પુરવાર થાય છે. દરેક ક્ષેત્ર જેવા કે ગણિતશાસ્ત્ર, અર્થશાસ્ત્ર, સમાજશાસ્ત્ર, માનસશાસ્ત્ર, વેપાર-વાણિજ્ય, ઉદ્યોગ, ખગોળશાસ્ત્ર વગેરેમાં આંકડાશાસ્ત્રનો ઉપયોગ વિશાળ

પ્રમાણમાં થાય છે. આંકડાશાસ્ત્ર જો એક સાધન છે જેનો ઉપયોગ પ્રયોગ મૂલક પૂછપરછના લગભગ દરેક ક્ષેત્રમાં ઉદ્ભવતી સમસ્યાઓ પર આક્રમણ(હૂમલો) કરી સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવામાં થાય છે.

આમ જુદાં જુદાં ક્ષેત્રમાંથી મુખ્યત્વે નીચેના ક્ષેત્રનાં આંકડાશાસ્ત્રનો ઉપયોગ વધુ જોવા મળે છે.

(1) અર્થશાસ્ત્રમાં આંકડાશાસ્ત્રનો ઉપયોગ :

આર્થિક વિશ્લેષણમાં આંકડાકીય માહિતી અને તેની પદ્ધતિઓ અસરકારક રીતે સહાય કરે છે. અર્થશાસ્ત્રનું કામ આર્થિક સિદ્ધાંતો ઘડવાનું છે, તેથી અર્થશાસ્ત્રીઓ આર્થિક પ્રગતિને માપવા આંકડાશાસ્ત્રીય માપો પર આધાર રાખે છે, દા.ત. ગરીબી રેખા નીચેના લોકો, શહેરી અને ગ્રામ્ય ક્ષેત્રે વિકાસ, વસ્તુઓના ભાવો કેમ વધ્યા, અર્થશાસ્ત્રના મૉડલો તૈયાર કરવા, આર્થિક અનુમાનો, પોલિસીઓનું માળખું (દા.ત. GST નું માળખું તૈયાર કરવું), કુલ ઉત્પાદન, વપરાશ, બચત રોકાણ, ખર્ચ રૂપિયાના મૂલ્યમાં ફેરફાર વગેરે. માટે અર્થશાસ્ત્રના સિદ્ધાંતો ચકાસવા અને પૂર્વધારણાઓ ચકાસવા માટે આંકડાકીય પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ કરે છે.

વ્યવહારું અર્થશાસ્ત્રનું એક મહત્વનું અંગ આંકડાશાસ્ત્ર છે. છેલ્લા કેટલાક વર્ષોથી અર્થશાસ્ત્ર, ગણિતશાસ્ત્ર અને આંકડાશાસ્ત્ર આ ત્રણેયના સંગમથી અર્થમિતિશાસ્ત્ર નામનો એક નવો વિષય અસ્તિત્વમાં આવ્યો છે. જેમાં અર્થશાસ્ત્રના જુદાજુદા મૉડેલો, આર્થિક વ્યવહારો, આર્થિક પ્રશ્નોનો યોગ્ય ઉકેલ વગેરે અનેક વિધ ઉપયોગો જોવા મળે છે.

(2) આયોજનમાં આંકડાશાસ્ત્રનો ઉપયોગ :

આયોજનનું અસ્તિત્વ સંપૂર્ણ રીતે આંકડાઓ પર આધારિત છે. દરેક ક્ષેત્રમાં નિર્ણય નીતિઓના ઘડતર માટે આયોજન કરવું ખૂબ જ જરૂરી છે, આંકડાશાસ્ત્ર વગર આયોજન કરવાની કલ્પના કરવી અઘરી છે. જુદા જુદા દેશોની આર્થિક યોજનાઓ વિશેની જાણકારી મેળવીએ તો ખબર પડશે કે આ યોજનાઓ હકીકતે તેમનાં આર્થિક સાધનોનો આંકડાશાસ્ત્રીય અભ્યાસ છે.

ભારતમાં પંચવર્ષિય યોજનાઓ અમલમાં મૂકવામાં આવી હતી. તેમાં પણ વિવિધ આર્થિક સમસ્યામાં આંકડાશાસ્ત્રીય ફાળો વિશાળ પ્રમાણમાં જોવા મળે છે. રાષ્ટ્રીય નિદર્શ સર્વે (NSS) ની શરૂઆત 1950માં ભારતમાં આયોજન માટે આંકડાકીય માહિતી એકત્રિત કરવા થઈ હતી. આ ઉપરાંત દરેક ક્ષેત્રના આયોજનમાં આંકડાશાસ્ત્ર ઉપયોગી ભૂમિકા ભજવે છે.

(3) વેપાર અને વાણિજ્ય ક્ષેત્રે :

વેપાર, વાણિજ્ય અને ઉદ્યોગ સંબંધિતક્ષેત્રે પ્રવૃત્તિઓ દિવસે દિવસે વિસ્તરતી જાય છે. વસ્તુનું કેટલું ઉત્પાદન કરવું. માંગ કેટલી હશે ? ભાવનું અનુમાન કરવું, કેટલો નફો થશે? વગેરેની આગાહી કરવા સામયિક શ્રેણીનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. પહેલાના જમાનામાં વેપાર ખૂબ જ નાના પાયા પર ચાલતો હોવાથી વેપારી જાતે જ નિર્ણય લઇ શકતો હતો. પરંતુ વેપારનું કદ વધતાં વ્યક્તિઓની અભિરૂચી, ખરીદશક્તિ વગેરેની જાણકારી સરળતાથી મેળવી, શકતો નથી તેથી જુદા-જુદા વિભાગ બનાવી જુદા જુદા વ્યક્તિઓની નિમર્ણૂંક કરી આંકડાશાસ્ત્રના સંભાવતાના સિદ્ધાંતને આધારે વેપારીઓ નિર્ણય લઇ શકે છે.

ગ્રાહકોમાં વસ્તુની ગુણવત્તાની જાગૃતતા વધી હોવાથી વસ્તુની ગુણવત્તા ના ધોરણો નક્કી કરવા માટે આંકડાશાસ્ત્રીય ગુણવત્તા નિયંત્રણની પદ્ધતિનો ઉપયોગ બધા જ ઉદ્યોગોમાં જોઇ શકાય છે. આ ઉપરાંત જુદા જુદા પ્રશ્નો જેવા કે કેટલું ઉત્પાદન કરવું, ઉત્પાદિત જથ્થા

વેચાણ કેન્દ્રો પર પહોંચાડવા કર્મચારીઓની નિયુક્તિ કરવી, યંત્રોની ફેરબદલી કરવી, જથ્થાનું નિયંત્રણ કરવું વગેરે આંકડાશાસ્ત્રીય રીતો કાર્યાત્મક સંશોધન મદદથી ઉકેલી શકાય છે.

(4) રાજકીય ક્ષેત્ર :

પ્રાચીન સમયમાં રાજ્યના કારોબારમાંથી આંકડાશાસ્ત્રનો ઉદ્‌ભવ થયો જેમાં રાજ્યની વસ્તી, સૈનિકોની સંખ્યા, સાધન-સંપત્તિ, યુદ્ધના સાધનો વગેરે આંકડાઓ એકત્રિત કરવામાં આવતા. રાજ્યનું કાર્યક્ષેત્ર વિસ્તરતુ હોવાથી તેનો વહીવટ કરવો, કર વસુલ કરવો, ગુનાખોરીનું નિયંત્રણ કરવું, બજેટ બનાવવું, રાજ્યના લોકો માટે કલ્યાણકારી યોજનાઓ બનાવવી, શિક્ષણ આપવું, આરોગ્યની જાળવણી કરવી વગેરેના આયોજન માટે આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

(5) સામાજિક વિજ્ઞાન ક્ષેત્રે :

સામાજિક વિજ્ઞાન જેમ કે સમાજશાસ્ત્ર, માનસશાસ્ત્ર, અર્થશાસ્ત્ર, રાજ્યશાસ્ત્ર વગેરેમાં આંકડાશાસ્ત્રનું મહત્વ રહેલું છે. દા.ત. સમાજશાસ્ત્રમાં લોકોના રીતરિવાજો, અંધશ્રદ્ધાઓ વગેરેમાં સુધારો કરવા માહિતી એકત્રિત કરી તેમાં આંકડાશાસ્ત્રીય માપોના ઉપયોગથી ઘણા સુધારાઓ થઇ શકે છે.

(6) યુદ્ધ ક્ષેત્રે :

આંકડાશાસ્ત્રનો એક ભાગ કાર્યાત્મક સંશોધનનો ઉદ્‌ભવ યુદ્ધમાંથી થયો હતો. યુદ્ધમાં જુદી જુદી વ્યૂહરચનાઓ તૈયાર કરવી અને તેનો અમલ કરવો તથા ભવિષ્યની યુદ્ધનીતિના ઘડતરમાં આંકડાશાસ્ત્ર ઉપયોગી પુરવાર થાય છે.

(7) અન્ય શાસ્ત્રોમાં :

સંશોધન ક્ષેત્રે, ગણિતશાસ્ત્રમાં, આંકડાઓનું વિશ્લેષણ કે વર્ગીકરણ કરવા, જીવવિજ્ઞાનમાં, ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં, રસાયણ વિજ્ઞાનમાં, ભૂસ્તરશાસ્ત્રમાં, તબીબી શાસ્ત્રમાં કે ખગોળ શાસ્ત્રી તારા અને નક્ષત્રની જાણકારી માટે આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓના ઉપોયગથી યોગ્ય નિર્ણયો તારવવામાં આવે છે.

1.5 આંકડાશાસ્ત્રની મર્યાદાઓ : (Limitation of Statistics)

આંકડાશાસ્ત્રએ ખૂબ જ મૂલ્યવાન સંશોધન સાધન તરીકે ઉપયોગમાં લેવામાં આવે છે, પરંતુઅન્ય શાસ્ત્રોની જેમ આંકડાશાસ્ત્રને પણ કેટલીક મર્યાદાઓ જોવા મળે છે. જેને દૂર કરવી શક્ય નથીતેથી તેમનો ઉપયોગ ધ્યાન પૂર્વક કરવો જરૂરી છે.

(1) આંકડાશાસ્ત્ર ગુણાત્મક, ઘટનાઓના અભ્યાસમાં નિષ્ફળ જાય છે એટલે કે આંકડાશાસ્ત્ર ફક્ત સંખ્યાત્મક માહિતીનો અભ્યાસ કરે છે. જે માહિતીને સંખ્યાત્મક રીતે રજૂ કરી શકાતી ન હોય દા.ત. ગરીબી, પ્રેમ, સૌંદર્ય, પાતળા, જાડા, પ્રમાણિકતા, બુદ્ધિચાતુર્ય વગેરેમાં આંકડાશાસ્ત્રનો ઉપયોગ કરવો મુશ્કેલ છે. પરંતુ જો તેને સંખ્યાત્મક સ્વરૂપ આપી શકાતું હોય તો આંકડાશાસ્ત્ર ઉપયોગી છે.

(2) આંકડાશાસ્ત્ર વ્યક્તિગત નહિ પણ સમૂહનો અભ્યાસ કરે છે. આંકડા એ હકીકતોનો સમૂહ છે અને તેના નિર્ણયો સમૂહને લાગુ પાડી શકાય છે. વ્યક્તિગત રીતે જોતાં તે નિષ્ફળ જાય છે. દા.ત. ક્રિકેટ ટીમ કોઇ એક સ્થાને બધી જ, મેચો જીતી હોય અને હવે જો ત્યાં મેચ રમાય તો તે મેચ પણ જીતશે જ એમ ન કહી શકાય તેજ રીતે વિરાટ કોહલીના ટેસ્ટ મેચમાં સરેરાશ રન 60 છે. તેથી એમ ન કરી શકાય કે હવે પછીની મેચમાં તે પૂરા 60 રન કરશે. આમ વ્યક્તિગત એકવસ્તુ માટે તેના ઉપયોગ કરવો શક્ય નથી. આમ, પરિણામો સરેરાશ ધોરણે સાચા પડે છે.

(3) આંકડાકીય માહિતી એકરૂપતા વાળી હોવી જોઇએ.

આંકડાકીય માહિતી સરખા ગુણધર્મોવાળી હોવી જોઇએ. નહિતર તેમની વચ્ચેની તુલના નિરર્થક પુરવાર થાય છે. જેમ કે હાથી અને પોપટની સરખામણી કરવી યોગ્ય નથી.

(4) આંકડાકીય અનુમાનો સંદર્ભ વગરનું પરિણામ ખોટું હોઇ શકે માહિતીને પૂર્ણ સ્વરૂપે ચકાસણી કર્યા વગર લીધેલ નિર્ણય ખોટો સાબિત થઇ શકે છે. દા.ત. એક વિદ્યાર્થીઓ એક પરીક્ષામાં 98 ગુણ મેળવ્યા. આ અધુરી માહિતી પરથી નિર્ણય ન લઇ શકાય કેમ કે કેટલા ગુણમાંથી એ આપણે જાણતા નથી. જો બે કંપનીનો સરેરાશ નફો રૂ. 2 લાખ છે. એમ કહેવામાં આવે તો નિર્ણય ખોટો લઇ શકાય હવે છેલ્લા ત્રણ વર્ષનો નફો જોઇએ તો કંપની A: 3 લાખ, 2 લાખ, 1 લાખ કંપની B: 1 લાખ, 2 લાખ, 3 લાખ હવે આ માહિતીના સંદર્ભના આધારે કરી શકાય કે કંપની A નો નફો ઘટતો જાય છે જ્યારે કંપની B નો નફો વધતો જાય છે તેથી કંપની B સારી ગણાય.

(5) આંકડાશાસ્ત્રનો ઉપયોગ મોટા નિષ્ણાતો દ્વારા કરી શકાય છે.

અકુશળ અને બિનઅનુભવી વ્યક્તિઓના હાથમાં આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓ સૌથી ખતરનાક સાધન છે. દા.ત. GDP નો અભ્યાસ કરવો, કંપનીઓના ડિવિડન્ડની વહેંચણી અંગે નિર્ણય કરવો. વગેરેમાં GDP અને ડિવિડન્ડની જાણકારી અતિ આવશ્યક છે.

(6) આંકડાઓનો દૂરપયોગ થઇ શકે છે. આંકડાઓ ખોટા છે કે સાચા તેની કોઇ ટ્રેડમાર્ક કે છાપ હોતી નથી તેથી કેટલાક વ્યક્તિઓ કે સંસ્થાઓ આવા આંકડાઓનો દુરોપયોગ કરે તો ગંભીર પરિણામો આવે છે.

(7) આંકડાશાસ્ત્ર એ સામાન્ય જ્ઞાન (Common Sence) નો વિકલ્પ નથી. આંકડાશાસ્ત્રના ઉપયોગમાં Common Sence હોવું જરૂરી છે. નહિતર તેના પરિણામો ખરાબ જોવા મળે છે. દા.ત. એક કુટુંબ ચોમાસા દરમિયાન નદી પાર કરવા ઇચ્છે છે. આ તમામ લોકોની સરેરાશ ઊંચાઇ 5 ફૂટ છે અને પાણીની ઊંડાઇ 4.5 ફૂટ છે. તેથી સરેરાશ ઊંચાઇ કરતા નદીના પાણીની ઊંડાઇ ઓછી છે તેથી સરળતાથી નદી પાર થશે એમ નિર્ણય લઇ લેવામાં આવે તો જે બાળકો 4.5 ફૂટ કરતાં નાના છે તેમનો ડૂબવાની શક્યતા સૌથી વધુ છે.

1.6 આંકડાશાસ્ત્ર પર અવિશ્વાસ (Distrust of Statistics) :

માનવ કલ્યાણ માટે આંકડાશાસ્ત્રની ઉપયોગીતાના બે અભિપ્રાયો ન હોઈ શકે, આંકડાશાસ્ત્રની વ્યાપક ઉપયોગીતા હોવા છતાં અમુક લોકો તેના પર અવિશ્વાસ રાખે છે. હાસ્ય લેખક માર્ક ટ્વેઈન લખે છે કે, ''જુઠાણના ત્રણ પ્રકાર છે. જુંઠાણુ, હળહળતું જુઠાણું અને આંકડાશાસ્ત્ર'' પરંતુ આંકડાશાસ્ત્રનો વિવેક પૂર્ણ ઉપયોગ કરવામાં આવે તો તે ખૂબ જ ઉપયોગી પુરવાર થઈ શકે છે. આંકડાશાસ્ત્ર પર અવિશ્વાસના કેટલાક કારણો નીચે મુજબ છે.

(1) આંકડાઓ ખોટા એકત્રિત કરવા :

મૂળ માહિતી જ ખોટી હોય તો તેનો આધારે લેવાયેલ નિર્ણયો પણ ખોટા પુરવાર થાય છે. એમાં આંકડાશાસ્ત્રનો દોષ શું છે ? તે પ્રશ્ન ઉપસ્થિત થાય છે.

(2) આંકડાશાસ્ત્રની મર્યાદાઓ તરફ ઉદાશીનતા :

સામાન્ય રીતે આંકડાશાસ્ત્રની મર્યાદાઓની કાળજી લીધા વગર તેનો ઉપયોગ કરે તેથી પરિણામોમાં વિસંગતતા જોવા મળે છે.

(3) આંકડાઓની વિશેષ જાણકારી મેળવવામાં આવતી નથી.

(4) આંકડાઓની ચોક્સાઇ વિશે જ્ઞાન મેળવવામાં આવતું નથી.

(5) અંતિમ પરિણામો વચ્ચે વિરોધાભાસ જોવા મળે છે.

(6) આંકડાઓનો દૂરપયોગ થતો જોવા મળે છે, સામાન્ય રીતે કોઇપણ સાધનનો ઉપયોગ

યોગ્ય રીતે ના થાય તો પરિણામ ભયંકર આવી શકે છે. જેમ નાના બાળકોના હાથમાં ચપ્પુ કે ગન મશીન હોય.

આ ઉપરાંત અનુચિત તુલનાઓ, અસ્પષ્ટ અને બદલાતો ખ્યાલ, ખોટી ટકાવારી અને સરેરાશ, અગણીય ભૂલો, પૂર્વગ્રહ, અપૂરતું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતા આંકડા, અયોગ્ય માપોનો ઉપયોગ વગેરે અનેક પરિબળો આંકડાશાસ્ત્ર પર અવિશ્વાસના કારણો હોઇ શકે છે.

1.7 આંકડાશાસ્ત્ર પર અવિશ્વાસ દૂર કરવાના ઉપાયો : (Precautions/Methods of Removing Distrust) :

આંકડાશાસ્ત્ર પરના અવિશ્વાસને કેટલાક ઉપયોગથી ઘટાડી શકાય છે.

(1) આંકડાઓ ચોક્સાઇ પૂર્વક, વ્યવસ્થિત પદ્ધતિથી મેળવવામાં આવે.

(2) આંકડાશાસ્ત્રની પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ તાલીમી વ્યક્તિઓ દ્વારા વ્યાજબી રીતે કરવામાં આવે.

(3) આંકડાશાસ્ત્રીમાં આત્મ-નિયંત્રણ ખૂબ જ જરૂરી છે. કેમ કે આંકડાશાસ્ત્રનું વિજ્ઞાન એ સૌથી વધુ ઉપયોગી સેવક છે, પરંતુ તેવા ઉપયોગને સમજનાર લોકોમાં નિખાલસ કે ખુલ્લા મને ચર્ચા થવી જોઇએ.

(4) આંકડાશાસ્ત્રની મર્યાદાઓ અને ધારણાઓ ધ્યાનમાં રાખવી જોઇએ.

આ ઉપરાંત માહિતી વચ્ચે સંબંધ, પૂર્વગ્રહયુક્ત માહિતી મેળવવી વગેરે સાવચેતીઓ રાખવામાં આવે તો આંકડાશાસ્ત્ર પરનો અવિશ્વાસ દૂર કરી શકાય છે.

1.8 માહિતીના પ્રકાર અથવા માહિતીનું એકત્રિકરણ (Type of data or Collection of Data) :

કોઇપણ સંશોધન કરવા માટે સૌ પ્રથમ માહિતીની જરૂરીયાત ઉદ્ભવે છે, આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ કરવા માટે આંકડાશાસ્ત્રીય માહિતી એકત્રિત કરવી ખૂબ જ જરૂરી છે. આ માહિતી સંશોધનની આધારશિલા છે. તેથી માહિતી એકત્રિત કરવામાં જેટલી ચોક્સાઇ રાખવામાં આવે તેટલા ચોક્કસ તારણો તારવી શકાય છે. દા.ત. કોઇ કંપનીની પ્રગતિનો અભ્યાસ કરવા માટે કંપનીમાં કુલ મૂડીરોકાણ, ઉત્પાદન, ઉત્પાદનખર્ચ, વેચાણ, નફો, કર્ચારીઓની સંખ્યા, કર્મચારીઓની સુખાકારી વગેરે માહિતી મેળવવી જરૂરી બને છે. મેળવવામાં આવતી માહિતી બે પ્રકારની હોય છે. (A) પ્રાથમિક માહિતી (B) ગૌણ માહિતી

(A) પ્રાથમિક માહિતી (Primary Data) :

સંશોધક જાતે, કોઇ અધિકૃત સંસ્થા દ્વારા કે કોઇ વ્યક્તિની મદદથી પ્રથમ વખત માહિતી મેળવે તો તે માહિતીને પ્રાથમિક માહિતી કહે છે. દા.ત. ભારતમાં દર દસ વર્ષે થતી વસ્તી ગણતરીથી મેળવેલ માહિતી દર પાંચ વર્ષે થતી પશુધન ગણતરી, કોઇ કંપનીના ઉત્પાદિત વસ્તુઓમાં ખામીની સમસ્યાના નિવારણ માટે કંપનીએ જુદા જુદા વિસ્તારમાં પોતાના પ્રતિનિધિઓ મોકલાવીને કે ગ્રાહકોની મુલાકાતો યોજીને મેળવેલ માહિતી. આમ સંશોધકે સ્વતંત્ર રીતે સૌ પ્રથમ વખત મેળવેલી મૌલિક માહિતીને પ્રાથમિક માહિતી કહેવાય છે.

(B) ગૌણમાહિતી (Secondary Data) :

જ્યારે કોઇ સંશોધકે, બીજી કોઇ સંસ્થાએ કે વ્યક્તિએ એકત્રિત કરેલી માહિતીનો ઉપયોગ કરે એટલે કે માહિતી એકવાર ઉપયોગમાં લેવાયેલી હોય અને સામાન્ય રીતે સામયિકો, મેગેઝિનો, સમાચાર પત્રો, અહેવાલોમાં મેળવવામાં આવી હોય તેને ગૌણ માહિતી કહેવામાં આવે છે. દા.ત. કોઇ સંશોધક કંપનીના અભ્યાસ માટે કંપનીના વાર્ષિક અહેવાલોમાંથી માહિતી મેળવે, રિઝર્વબેંક બુલેટિનમાંથી ઇન્ડિયન જર્નલ ઓફ ઇકોનોમિક્સ જેવા પ્રકાશનોમાંથી મેળવેલ માહિતી ગૌણ માહિતી કહેવાય છે.

1.9 પ્રાથમિક અને ગૌણ માહિતી વચ્ચેનો તફાવત :

પ્રાથમિક અને ગૌણમાહિતી વચ્ચે એક સાપેક્ષ તફાવત છે. કારણ કે એક સંશોધકે તેના સંશોધન માટે મેળવેલ માહિતી પ્રાથમિક માહિતી છે. જે માહિતી અન્ય કોઈ સંશોધક માટે ગૌણમાહિતી બની જાય છે. તેમ છતાં પ્રાથમિક અને ગૌણ માહિતી વચ્ચે કેટલાક મહત્વના તફાવતો સ્પષ્ટ થાય છે, જે નીચે મુજબ છે.

તફાવતના મુદ્દા	પ્રાથમિક માહિતી	ગૌણ માહિતી
અર્થ	સૌ પ્રથમ વખત મેળવીને સંશોધનમાં ઉપયોગ થતી માહિતી પ્રાથમિક માહિતી કહે છે.	જે માહિતી એક વખત ઉપયોગમાં લેવાયેલી હોય કે પ્રકાશિત થયેલ હોય તેને સંશોધક તેના સંશોધન માટે ઉપયોગ કરે તેને ગૌણ માહિતી કહે છે.
મૌલિકતા	પ્રાથમિક માહિતી નવેસરથી મેળવેલી હોવાથી તે મૌલિક હોય છે.	ગૌણ માહિતી ભૂતકાળમાં કોઈ વ્યક્તિઓ મેળવેલ કે ઉપયોગમાં લીધેલ હોવાથી મોટેભાગે મૌલિક હોતી નથી.
કોણ એકત્રિત કરે.	સંશોધક પોતે કે કોઈ અધિકૃત સંસ્થા દ્વારા પ્રારંભિક અવલોકનો દ્વારા સ્વતંત્ર રીતે માહિતી મેળવે છે.	ગૌણ માહિતી પહેલેથી એકત્રિત કરવામાં આવેલ હોય તે ફરી વખત ઉપયોગ કરે છે.
સમય અને ખર્ચ	આગણકો જાતે માહિતી મેળવતા હોવાથી સમય વધુ જાય છે. તેમજ ખર્ચ પણ વધુ થાય છે.	ગૌણ માહિતી ઓછા સમયમાં અને પ્રકાશનોમાંથી ઓછા ખર્ચે મેળવી શકાય છે.
હેતુને પરિપૂર્ણતા	પ્રાથમિક માહિતી સંશોધનના હેતુને અનુરૂપ હોય છે.	ગૌણ માહિતી અન્ય સંશોધકે તેના હેતુ અનુરૂપ મેળવેલ હોવાથી સંશોધનના હેતુને અનુરૂપ ન પણ હોય.
સ્વરૂપ	પ્રાથમિક માહિતી વિશાળ અને અવ્યવસ્થિત સ્વરૂપમાં હોય છે.	ગૌણ માહિતી સંક્ષિપ્ત અને વ્યવસ્થિત સ્વરૂપમાં હોય છે.
વિશ્વસનીયતા	માહિતીમાં વિશ્વાસપાત્રતાના અને ચોક્સાઈની માત્રા ઊંચી હોઈ પસંદ કરવા યોગ્ય છે.	ગૌણ માહિતી પ્રાથમિક માહિતી જેટલી વિશ્વાસપાત્ર ગણી શકાય નહિ.
માહિતીની મર્યાદા	પ્રાથમિક માહિતીની કેટલીક મર્યાદાઓથી સંશોધક પરિચિત હોય છે, તેથી તે માટે યોગ્ય પગલા લે છે.	ગૌણમાહિતી કોણે મેળવી છે. કયા હેતુ માટે મેળવવામાં આવી છે. તેમજ તેની મર્યાદાઓ વિશે સંશોધકને પૂરી જાણકારી હોતી નથી.
ઉદાહરણ	ભારત સરકાર દ્વાર દર દસ વર્ષે કરવામાં આવતી વસ્તી ગણતરીનાં આંકડા એ પ્રાથમિક માહિતીનું ઉદાહરણ છે.	વસ્તી ગણતરીના અહેવાલો, પ્રકાશનો સામયિકો, મેગેઝિનો વગેરે માંથી પ્રાપ્ત કરેલ માહિતી ગૌણમાહિતી છે.

1.10 પ્રાથમિક માહિતી એકઠી કરવાની રીતો (Methods of Collection of Primary Data) :

પ્રાથમિક માહિતી મેળવવા માટેની મુખ્ય રીતો નીચે મુજબ છે.

(A) પ્રત્યક્ષ તપાસની રીત (Direct Inquiry Method) :

આ રીતમાં સંશોધકે જેની પાસેથી માહિતી મેળવવાની હોય તેમના સ્થળે કે તે વ્યક્તિ પાસે જાય છે. જે હેતુ માટે માહિતી જોઇતી હોય તેને અનુરૂપ જરૂરી પ્રશ્નો પૂછી પોતાને જોઇતી માહિતી એકત્ર કરે છે, માહિતી મેળવવાની આ રીતને પ્રત્યક્ષ તપાસની રીત કહેવામાં આવે છે, દા.ત. શેરડી પકવતા ખેડૂતોની આર્થિક સ્થિતિનો અભ્યાસ કરવો હોય, એવા ખેડૂતોના સ્થળે જઇ તેમની રૂબરૂ મુલાકાત દ્વારા માહિતી એકત્રિત કરે તે તપાસને પ્રત્યક્ષ તપાસ કરે છે, તપાસનું કાર્યક્ષેત્ર મર્યાદિત હોય ત્યારે આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો હિતાવહ છે. આ પદ્ધતિના ફાયદા અને મર્યાદાઓ નીચે મુજબ વર્ણવી શકાય.

- **પ્રત્યક્ષ તપાસના ફાયદા :**

(1) સંશોધક લોકોને રૂબરૂ મળતો હોવાથી, લોકો માહિતી આપવા ઉત્સુક હોય છે, તેથી તેના કાર્યમાં સારો આવકાર મળે.

(2) માહિતી ચોક્કસ રીતે વિશ્વસનીય હોય છે. કારણ કે સંશોધકે જાતે જઇ તપાસ કરીને નોંધેલી હોય છે.

(3) કેટલાક પ્રશ્ન માહિતી આપનારને ગેરસમજ થતી હોય, શંકા કે વહેમ ઉદ્‌ભવે તો તેને તરત જ દૂર કરી શકાય છે.

(4) તપાસનું ક્ષેત્ર મર્યાદિત હોય ત્યાં આ પદ્ધતિ ખૂબ જ ઉપયોગી પુરવાર થાય છે.

(5) માહિતી આપનારની અંગત બાબતોને સ્પર્શે એવી માહિતી રૂબરૂમાં પૂરક પ્રશ્નો દ્વારા મેળવી શકાય છે.

- **પ્રત્યક્ષ તપાસની મર્યાદાઓ :**

(1) જ્યારે માહિતી મેળવવાનું ક્ષેત્ર વિશાળ હોય કે જુદા જુદા વિસ્તારમાં વહેંચવાયેલું હોય ત્યારે આ પદ્ધતિ બિન ઉપયોગી નીવડે છે.

(2) સંશોધક પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાત ધરાવતો હોય તો સાચી માહિતી મળી શકતી નથી.

(3) આ રીતમાં જાત તપાસ કરવાની હોવાથી વધારે સમય તેમજ શક્તિ અને નાણાંનો વ્યય થતો જોવા મળે છે.

(4) આગણકો અનુભવી, તાલીમી કે પ્રમાણિક ન હોય તો આ રીત દ્વારા મળતી માહિતી નકારાત્મક અસર કરે છે.

(5) માહિતી આપનારને સંશોધનના પ્રશ્નમાં રસ ન હોય તો તે પૂર્વગ્રહ યુક્ત કે ખોટા જવાબો આપે તો માહિતીની વિશ્વસનીયતા રહેતી નથી.

B. પરોક્ષ તપાસની રીત (Indirect Inquiry Method) :

સંશોધકનું ક્ષેત્ર ઘણું વિશાળ હોય, ત્યારે પ્રત્યક્ષ તપાસની રીત ઉપયોગી નીવડતી નથી. ત્યારે સંશોધક જેની પાસેથી માહિતી મેળવવાની હોય તેનો સીધો સંપર્ક સાધવાને બદલે તેના સંપર્કમાં રહેનાર અથવા તેને જાણનાર વ્યક્તિ કે સંસ્થા દ્વારા માહિતી એકત્રિત કરે છે. આ રીતને પરોક્ષ તપાસની રીત કહે છે. દા.ત. વ્યસની વ્યક્તિઓ માહિતી એકત્રિત કરવી હોય તો વ્યસની વ્યક્તિ જાતે માહિતી આપે જ નહિ તેવા સંજોગોમાં વિક્રેતા, પડોશીઓ કે મિત્રો પાસેથી માહિતી મેળવવામાં આવે છે. તેજ રીતે કોઇ વિદ્યાર્થીની વર્તણૂક, હોશિયારી વગેરે માહિતી મેળવવી હોય તો શિક્ષક પાસેથી મેળવી શકાય છે. આ

પદ્ધતિમાં જેની પાસેથી માહિતી મેળવવામાં આવે છે. તેને ×સાક્ષી× કહેવામાં આવે છે. પરોક્ષ તપાસના ફાયદા અને મર્યાદાઓ નીચે મુજબ છે.

- **પરોક્ષ તપાસના ફાયદા :**

(1) માહિતી મેળવવાનું કાર્યક્ષેત્ર વિશાળ હોય ત્યારે પરોક્ષ તપાસ થઇ શકે છે.

(2) આ રીતમાં સમય, શ્રમ અને નાણાંનો બચાવ થાય છે.

(3) જે વ્યક્તિ કે સંસ્થા પાસેથી માહિતી મેળવવામાં આવે છે. તે વ્યક્તિ કે સંસ્થા સહકાર આપે ત્યારે આ રીત વધુ ઉપયોગી પુરવાર થાય છે.

(4) માહિતી આપનાર સાક્ષી જાણકાર અને તટસ્થ હોય તો આ રીતથી સચોટ પરિણામો મેળવી શકાય છે.

(5) અન્ય પદ્ધતિથી મેળવેલ માહિતી આ પદ્ધતિથી ચકાસી શકાય છે.

- **પરોક્ષ તપાસની મર્યાદાઓ :**

(1) માહિતી આપનાર સાક્ષી યોગ્ય જાણકારી કે પૂર્વગ્રહ મુક્ત ન હોય તો માહિતીની ચોક્સાઇનું ધોરણ જળવાતું નથી.

(2) પ્રશ્નકર્તામાં યોગ્ય પ્રશ્નો પૂછી જોઇતી માહિતી કઢાવવાની આવડત ન હોય તો માહિતીની ચોક્સાઇ જોખમાય છે.

(3) ઘણી વખત માહિતી આપનાર સાક્ષીને પ્રશ્ન વિશેની પૂરતી જાણકારી હોતી નથી પરિણામે સાચી માહિતી એકત્રિત થઇ શકતી નથી.

C. આગણકો કે ખબરપત્રીઓ દ્વારા માહિતી : (Information from Correspondents)

આ પદ્ધતિમાં સંશોધક જે તે સ્થાનિક વિસ્તારોમાં ખબરપત્રીઓ કે આગણકોની નિમર્ણૂક કરે છે. આ આગણકો પોતપોતાના વિસ્તારમાંથી માહિતી સંકલન કરી સંશોધક યોગ્ય તારણો મેળવે છે. અખબારના તંત્રીઓ સામાન્ય રીતે આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરે છે. દા.ત. હડતાલ, હુલ્લડ, અતિવૃષ્ટિ, ભૂકંપ, અકસ્માત વગેરે આકસ્મિક બનાવોના અભ્યાસ માટે જેને વિસ્તારના આગણકો માહિતી એકત્ર કરી મુખ્ય ઓફિસે પહોંચાડે છે. ઉપરાંત સરકારી ખાતાઓમાં પણ નિયમિત માહિતી આ પદ્ધતિ દ્વારા મેળવાય છે. આ પદ્ધતિના ફાયદા અને મર્યાદાઓ નીચે મુજબ છે.

- **ફાયદા :-**

(1) જ્યારે અભ્યાસનું ક્ષેત્ર વિવિધ વિસ્તારોમાં વિજ્ઞાન ક્ષેત્રે વહેંચાયેલું હોય ત્યારે આ રીત ઉપયોગી છે.

(2) આગણકો અનુભવિ, ઉત્સાહી, તટસ્થ અને ફરજનિષ્ઠ હોય ત્યારે માહિતીની ચોકસાઇ જળવાય છે.

(3) માહિતી ખૂબ જ ઝડપથી અને ઓછા ખર્ચે પ્રાપ્ત કરી શકાય છે.

(4) માહિતી નિયમિત પણે મળતી રહે છે.

- **મર્યાદાઓ:-**

(1) આગણકો હંમેશા પ્રમાણિક અને કાર્યક્ષમ હોતા નથી.

(2) આગણકોના પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાતથી માહિતી મુક્ત રહી શક્તી નથી.

(3) સંશોધક આગણકના પ્રત્યક્ષ સંપર્કમાં ન હોય ત્યારે માહિતીની વિશ્વસનીયતા જાણી શકાતી નથી.

(4) આગણકોની પોતાની મર્યાદાઓ માહિતી પર પ્રતિબિંબિત થાય છે.

આ બધી મર્યાદાઓ હોવા છતાં વિજ્ઞાન ક્ષેત્રમાંથી ઓછા ખર્ચે અને ઝડપથી માહિતી મળે છે. જ્યાં ચોકસાઈની ઊંચી માત્રા અપેક્ષિત ન હોય ત્યાં આ પધ્ધતિનો ઉપયોગ વ્યાપક થાય છે.

D. પ્રશ્નાવલીની રીત (Questionnairy Method)

વિજ્ઞાન કાર્યક્ષેત્રમાંથી ઓછા ખર્ચે માહિતી મેળવવાની આ એક સારી રીત છે. આ રીતમાં હેતુને અનુરૂપ પ્રશ્નો તૈયાર કરીને તર્કબધ્ધ રીતે ગોઠવી તેમની સામે જવાબો લખવા કે ટીક કરવા માટે ખાલી જગ્યા રાખી ફોર્મ તૈયાર કરવામાં આવે છે. આ ખાલી જગ્યામાં માહિતી આપનારે પ્રશ્નોના જવાબો આપવાના રહે છે. આ રીતે માહિતી મેળવવામાં આવે તેને પ્રશ્નાવલીની રીત કહેવામાં આવે છે. મુખ્યત્વે ખાનગી વ્યક્તિઓ, સંશોધકો, સરકારી કે બિન સરકારી સંસ્થાઓ આ રીતનો વ્યાપક ઉપયોગ કરે છે. આ રીતમાં બે પ્રકારે માહિતી એકઠી કરવામાં આવે છે. (i) ટપાલ દ્વારા(ii) આગણક દ્વારા, પરંતુ આધુનિક યુગમાં ઈન્ટરનેટ દ્વારા પણ આ રીતનો ઉપયોગ થતો જોવા મળે છે.

(i) ટપાલ દ્વારા :

આ પધ્ધતિમાં સંશોધક હેતુને અનુરૂપ પ્રશ્નાવલી તૈયાર કરી માહિતી આપનારને પોસ્ટ દ્વારા મોકલવામાં આવે છે. આ પ્રશ્નાવલીમાં માહિતી આપનાર વ્યક્તિ પોતાની જાતે માહિતી ભરે છે. આ પ્રશ્નાવલી સાથે સંશોધકનો અતિ સંક્ષિપ્ત પરિચય, સંશોધનનો હેતુ, માહિતીની ગોપનીયતા, તેનો દુરુપયોગ નહિ થાય તેની ખાતરી, પ્રશ્નાવલી જલદી ભરીને મોકલવાની વિનંતી વગેરે બાબતોને આવરી લેતો એક પત્ર પણ મોકલે છે. તદ્ઉપરાંત સંશોધકતા નામ સરનામાવાળું ટિકિટ લગાયેલું પરબીડીયું પણ મોકલવામાં આવે છે. તેની માહિતી આપનારને ખર્ચ કરવો પડતો નથી.

- **ફાયદા :-**

(1) સંશોધનનું ક્ષેત્ર વિશાળ કે વેરવિખેર હોય ત્યારે આ રીત વધુ અનુકુળ આવે છે.

(2) માહિતી આપનાર યોગ્ય સહકાર આપે તો આ પદ્ધતિ પ્રમાણમાં ઓછી ખર્ચાળ અને વધુ ઝડપી છે.

(3) પ્રશ્નાવલીની રચના કાળજીપૂર્વક કરવામાં આવે તો સરળતાથી અને ચોક્સાઇ પૂર્વક માહિતી મેળવી શકાય છે.

(4) માહિતી આપનાર શિક્ષિત અને તટસ્થ હોય તો આ રીતથી ખૂબ જ સચોટ પરિણામો મેળવી શકાય છે.

(5) માહિતી આપનાર જુદી જુદી વ્યક્તિઓને જુદા જુદા પ્રશ્નો દ્વારા સાચી માહિતી મેળવી શકાય છે, અને તેની ચકાસણી પણ કરી શકાય છે.

- **મર્યાદાઓ :-**

(1) અશિક્ષિત વર્ગ પાસેથી માહિતી મેળવી શકાતી નથી.

(2) પ્રશ્નાવલી પરત થશે કે કેમ તે વિશે અનિશ્ચિતતા હોય છે.

(3) માહિતી આપનાર વ્યક્તિ ઘણી વખત અધૂરી કે કોરી માહિતી આપી પ્રશ્નાવલી પરત કરે છે.

(4) સામાન્ય રીતે વ્યક્તિઓ મૌખિક જવાબો આપવાની તૈયારી બતાવે છે, પણ લેખિત જવાબો આપવામાં ઉદાસીનતા દાખવે છે.

(5) માહિતી પત્રકો જાતે જઇને ભરાયેલ હોતા નથી, તેથી માહિતી સાચી છે કે ખોટી તેની ખાતરી થઇ શકતી નથી.

(ii) આગણકો દ્વારા :

આ પદ્ધતિમાં સંશોધક આગણકોની નિમર્ણૂક કરે છે. આ આગણકો પ્રશ્નાવલી લઇ માહિતી આપનાર પાસે રૂબરૂ જાય છે. ત્યારબાદ આ પ્રશ્નાવલીઓ સંશોધકને મોકલી આપે છે. ટપાલની રીત અને આ રીત વચ્ચે મૂળભૂત તફાવત એ છે કે આ પદ્ધતિમાં પ્રશ્નાવલી

પોસ્ટ દ્વારા મોકલવાને બદલે આગણકો જાતે પોતાની સાથે પ્રશ્નાવલીઓ લઈ માહિતી આપનાર પાસે જાય છે. ભારતમાં દર દસ વર્ષે વસ્તી ગણતરી કરવામાં આવે છે, તેમાં આ રીતને ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

- **ફાયદા :-**
  - (1) અશિક્ષિત વર્ગ પાસેથી પણ માહિતી મેળવી શકાય છે.
  - (2) આગણકો માહિતી આપનારને રૂબરૂ મળતા હોવાથી માહિતી અધુરી રહેવાનો પ્રશ્ન રહેતો નથી.
  - (3) કુશળ, તાલીમી અને અનુભવી આગણકો ઓછા સમયમાં અને ચોકસાઇ પૂર્વક માહિતી મેળવી શકે છે.
  - (4) વિશાળ ક્ષેત્રને આવરી લેતી આ રીતમાં ચોક્સાઇનાં વાજબી ધોરણો જળવાય છે.
  - (5) પ્રશ્નાવલીમાં કોઇ પ્રશ્ન અધુરો હોય કે શંકા ઉપજાવે તેવો હોય તો આગણક પોતાની આવડતથી આ બાબતોનું નિરાકરણ કરી સાચી માહિતી મેળવી શકે છે.
- **મર્યાદાઓ :-**
  - (1) વિશાળક્ષેત્રમાંથી માહિતી મેળવવા માટે મોટી સંખ્યામાં આગણકો નિમવા પડે છે. જેથી વધુ સમય અને ખૂબ જ ખર્ચ થાય છે.
  - (2) આગણકોની વ્યક્તિગત આવડત અલગ અલગ હોવાથી માહિતીમાં એકરૂપતા રહેતી નથી.
  - (3) આગણકો પોતાની અનુકૂળતાએ માહિતી આપનાર પાસે જાય છે. તેથી સમય વધુ લાગે છે.
  - (4) આગણકો તાલીમ પામેલા ન હોય તો સાચી માહિતી મળી શકતી નથી.
  - (5) હંમેશા શાંત, સરળ સ્વભાવના, વિનમ્ર, વ્યવહારું કે સંશોધનના હેતુથી સતત સભાન હોય એવા આગણકો મળવા મુશ્કેલ છે. જેથી સાચી માહિતી મળતી નથી.
- **આદર્શ પ્રશ્નાવલીના લક્ષણો :**

  સંશોધનની સફળતાનો સમગ્ર આધાર પ્રશ્નાવલીની યોગ્ય રચના પર રહેલો છે. તેથી પ્રશ્નાવલી અનુભવી અને કુશળ વ્યક્તિઓ દ્વારા કાળજી પૂર્વક તૈયાર કરેલી હોવી જોઇએ. પ્રશ્નાવલી ઘડતરના કોઇ ચોક્કસ નિયમો નથી પરંતુ કેટલીક ખાસિયતો પ્રશ્નાવલીમાં હોવા આવશ્યક છે.
  - (1) સંશોધનના હેતુને અનુરૂપ પ્રશ્નો હોવા જોઇએ.
  - (2) પ્રશ્નોની ભાષા સરળ હોવી જોઇએ જેથી માહિતી આપનાર વ્યક્તિ પ્રશ્નને સરળતાથી સમજી શકે.
  - (3) પ્રશ્નાવલીમાં દ્વિઅર્થી શબ્દનો ઉપયોગ નહિ કરવો જોઇએ. કે જેના કારણે માહિતી, આપનાર મૂંઝવણ અનુભવે.
  - (4) પ્રશ્નો ટૂંકા, સાદા અને સ્પષ્ટ હોવા જોઇએ, પ્રશ્નાના લાંબા જવાબો માટે માહિતી આપનાર તૈયાર હોતા નથી. જેથી પ્રશ્નોના જવાબો 'હા', 'ના' અથવા સંખ્યામાં દર્શાવી શકાય તેવા હોવા જોઇએ.
  - (5) શક્ય હોય ત્યાં સુધી પ્રશ્નની સાથે જવાબોના સંબંધિત વિકલ્પો આપવા જોઇએ.
  - (6) શક્ય હોય તો પ્રશ્નો ઓછા હોવા જોઇએ. પરંતુ જો વધુ પ્રશ્નો પૂછવાનું આવશ્યક હોય તો પ્રશ્નાવલી બે કે વધુ વિભાગોમાં વહેંચવી જોઇએ.
  - (7) પ્રશ્નાવલીમાં પ્રશ્નો સુસંગત અને તાર્કિક રીતે ગોઠવાયેલા હોવા જોઇએ દા.ત. કોઇ વ્યક્તિએ રોજગારી મેળવેલ છે કે નહિ તે પૂછ્યા પહેલાં તેની આવક વિશે પૂછવું અતાર્કિક લાગે છે.

(8) અંગત જીવનને સ્પર્શતા પ્રશ્નોના જવાબો આપવામાં વ્યક્તિ ક્ષોભ અનુભવે છે. પરંતુ આવા પ્રશ્નો અનિવાર્ય હોય તો પ્રશ્નો ઘડવામાં ખૂબ જ કાળજી રાખવી જોઇએ.

(9) માહિતી આપનારની લાગણી દુભાય, તેને ગુસ્સો આવે, તેના મનમાં શંકા ઉદ્‌ભવે તેવા પ્રશ્નો હંમેશા ટાળવા જોઇએ. અને વધુ ને વધુ વિશ્વાસ સંપાદન કરે તેવા પ્રશ્નો હોવા જોઇએ.

(10) લાંબા ભૂતકાળને લગતા પ્રશ્નો પૂછવા જોઈએ નહિ કે જેથી માહિતી આપનારની સ્મરણશક્તિ તાણ અનુભવે.

(11) માહિતી આપનારને અઘરી ગણતરી કરવી પડે તેવા પ્રશ્નો ટાળવા જોઈએ. દા.ત. ગુણોતર, ટકાવારીમાં જવાબો આપવા પડતા હોય.

(12) માહિતીની ચકાસણી માટે પૂરક પ્રશ્નો પૂછવા જોઈએ.

(13) હકીકતના પ્રશ્નો પૂછવા જોઈએ, અભિપ્રાયના પ્રશ્નો નહિ.

(14) પ્રશ્નની ભાષા નમ્ર અને વિનંતી પૂર્ણ હોવી જોઈએ, જેથી માહીતી આપનારને સહકાર મળી રહે.

(15) પ્રશ્નાવલી તૈયાર થઈ ગયા પછી અજમાયશી ધોરણે તેની ગુણવત્તાની કસોટી કરવી જોઈએ અને તે દ્વારા પ્રશ્નાવલીમાં રહેલી ખામીઓ દૂર કરી તેને સર્વાંગ સંપૂર્ણ બનાવી શકાય.

(16) પ્રશ્નાવલીમાં ફોર્મ સાથે વિનંતી પત્ર હોવો જોઈએ. જેમાં સંશોધનનો હેતુ, સંશોધન કરનાર વ્યક્તિનો પરિચય, માહિતીની ગુપ્તતા વગેરે સમાવેશ કરેલ હોય.

1.11 ગૌણ માહિતી મેળવવાની રીતો (The Method of Collecting secondary Data)

આપણે જાણીએ છીએ કે અન્ય વ્યક્તિ કે સંસ્થાઓએ સૌ પ્રથમ એકત્રિત કરેલ હોય અને જેનો ફરીવાર ઉપયોગ કરવામાં આવતો હોય તેને ગૌણ માહિતી કહે છે. આ માહિતી વ્યવસ્થિત રીતે સંક્ષિપ્તમાં રજુ કરાયેલી હોય છે. જેને અભ્યાસ માટે સાધારણ ફેરફાર સાથે ઉપયોગ કરી શકાય છે.જેથી સમય, શક્તિ અને નાણાંનો બચાવ થાય છે. આવી માહિતી મેળવવાના અનેક સાધનો છે. જેમાનાં મુખ્યત્વે નીચે મુજબ છે.

(A) સરકારી પ્રકાશનો :

ભારત સરકાર કે રાજ્યોની સરકારોના વિવિધ ખાતાઓ દ્વારા તેમના વહિવટી કાર્યો દરમિયાન મેળવેલી માહિતીનું નિયમિત પણે પ્રકાશન કરે છે. દા.ત. વસ્તી ગણતરીની માહિતીના પ્રકાશનો, પશુધન ગણતરીના પ્રકાશનો, આયાત-નિકાશના આંકડા, જન્મ-મરણના આંકડા, ખેતીક્ષેત્રના આંકડા,ઔધૌગિક ક્ષેત્રના આંકડા વગેરે માહિતી સરકાર નિયમિત રીતે મેળવી પ્રકાશિત કરે છે. આવા પ્રકાશનો માંથી માહિતી મેળવી શકાય છે.

(B) અર્ધસરકારી પ્રકાશનો :

અર્ધસરકારી સંસ્થાઓ જેવી કે મહાનગર પાલિકાઓ,નગરપાલિકાઓ, પંચાયતો, જીવન વિમા કોર્પોરેશન, વિધુત બોર્ડ, ઈન્ડિયન ઓઈલ કોર્પોરેશન વગેરે તરફથી પ્રકાશિત થયેલા પ્રકાશનોમાંથી માહિતી મેળવી શકાય છે.

(C) આંતર રાષ્ટ્રીય પ્રકાશનો :

આંતરરાષ્ટ્રીય બેંકો, સંયુક્ત રાષ્ટ્રસંઘ, આંતર રાષ્ટ્રીય નાણાં ભંડોળ વગેરે સંસ્થાઓનાં પ્રકાશનો માંથી ગૌણ માહિતી મળી રહે છે.

(D) વેપારી અને વ્યવસાયી પ્રકાશનો :

ચેમ્બર ઓફ કોમર્સ, બેન્કો, શેરબજાર, મજૂર મંડળો વિવિધ ઉદ્યોગોના મંડળો વગેરે. વેપાર અને વ્યવસાયને લગતી માહિતીનું પ્રકાશન કરે છે. આવા પ્રકાશનો ગૌણ માહિતી મેળવવાના સાધન બને છે.

(E) સામયિકો અને સમાચાર પત્રો :

જુદા જુદા સામયિકો અને સમાચાર પત્રોમાંથી ગૌણ માહિતી મળી રહે છે. દા.ત. ઇકોનોમિક એન્ડ પોલિટિકલ વિકલી વ્યાપાર, ઇકોનોમિક ટાઇમ, ઇન્ડિયન જર્નલ ઓફ ઇકોનોમિક, રિઝર્વ બેન્ક ઓફ ઇન્ડિયાના બુલેટિનો વગેરે.

(F) ખાનગી સંસ્થાના પ્રકાશનો :

કેટલીક ખાનગી સંસ્થાઓ પોતાના સંશોધનને લગતી માહિતી નિયમિત પણે પ્રકાશિત કરે છે. દા.ત. યુનિવર્સિટીના સંશોધન કેન્દ્રો, ખાનગી પ્રકાશનો વગેરે.

(G) અન્ય અહેવાલો :

જુદાં જુદાં હેતુ અનુસાર નિમવામાં આપેલા તપાસ પંચો, અભ્યાસ કરીને વિષયલક્ષી અહેવાલો તૈયાર કરે છે. તે અહેવાલો પ્રકાશિત કરવામાં આવે છે. એમાંથી ગૌણમાહિતી મળી રહે છે.

(H) બિન પ્રકાશિત માહિતી :

કેટલીક આંકડાકીય માહિતી પ્રકાશિત થયેલી હોતી નથી. તેવી માહિતી પણ ગૌણ માહિતી તરીકે ઉપયોગ કરી શકાય છે. દા.ત. સરકારી કે ખાનગી ઓફિસના રેકોર્ડ પરની માહિતી, અપ્રકાશિત સંશોધન કાર્યો, અપ્રકાશિત લેખો, નિબંધો વગેરે.

આ ઉપરાંત આધુનિક યુગમાં ઇન્ટરનેટ એટલે કે ગુગલ પરથી પણ માહિતી મેળવી શકાય છે. જેમાં જુદી જુદી વેલસાઇટો પર જઇ દરેક પ્રકારની ગૌણ માહિતી ઉપલબ્ધ હોય તે લઇ શકાય છે.

\- **પ્રશ્નાવલીનો નમૂનો :**

ગુજરાત યુનિવર્સિટીની સ્નાતક કારકિર્દીની તપાસ અંગેની પ્રશ્નાવલી :

(1) વિદ્યાર્થીનું નામ : ....

(2) ઉંમર : .... વર્ષ : ....

(3) જાતિ : પુરૂષ ☐ સ્ત્રી ☐

(4) હાલનું રહેઠાણ : શહેરમાં ☐ ગ્રામ્યમાં ☐

(5) આપ કઇ ડિગ્રી ધરાવો છે ?

(A) આર્ટ્સ ☐ (B) કોમર્સ ☐ (C) સાયન્સ ☐ (D) અન્ય ☐

(6) યુનિવર્સિટીના ડીગ્રી કયા વર્ષમાં મેળવી ? વર્ષ ....

(7) તમે ડિગ્રી કયા વર્ગમાં મેળવી ?

(A) ડિસ્ટ્રીકશન ☐ (B) પ્રથમ ☐ (C) બીજો ☐ (D) પાસ ☐

(8) તમારો વ્યવસાય :

(A) સરકારી નોકરી ☐ (B) ખાનગી નોકરી ☐

(C) ધંધો ☐ (D) અન્ય ☐

(9) તમારી માસિક આવક રૂપિયામાં ....

(10) તમે સ્નાતકની ડિગ્રી મેળવ્યા બાદ કેટલા સમયમાં નોકરી કે વ્યવસાયમાં જોડાયા ?

(11) તમે સ્નાતક પછી બીજી કોઈ ડિગ્રી મેળવી છે. હા ☐ ના ☐ જો 'હા' હોય તો કઇ ?

(12) તમારૂં હાલનું કાર્ય તમારી શૈક્ષણિક લાયકાતને સુસંગત છે ? હા ☐ ના ☐

(13) તમે તમારા વ્યવસાયથી સંતુષ્ટ છો ? હા ☐ ના ☐ જો ના હોય તો કેમ ?

(14) તમે બે રોજગાર હોવ તો

(i) તમે રોજગાર કચેરીમાં નામ નોંધાયેલ છે ? ☐

(ii) ન નોંધાવ્યું હોય તો કારણો જણાવો. ☐

(iii) તમારી પસંદગીનો વ્યવસાય કયો છે ? ☐

(iv) તમને ઓછામાં ઓછા કેટલા વેતનની અપેક્ષા છે ? ☐

(15) સ્નાતક કક્ષાના શિક્ષણથી તમને શું મળ્યું છે ?

(i) તમારા જ્ઞાનમાં વધારો થયો છે ? હા ☐ ના ☐

(ii) તમારા વ્યવહારિક જીવનમાં ઉપયોગી છે ? હા ☐ ના ☐

(iii) નોકરી વ્યવસાયમાં ઉપયોગી થાય છે ? હા ☐ ના ☐

(iv) તમારા કોઇ સૂચના હોય તો જણાવો.

સ્થળ

તારીખઃ **વિદ્યાર્થીની સહી**

1.12 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

1.12.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.(1) આંકડાશાસ્ત્રનો અર્થ સમજાવી. આંકડાશાસ્ત્રની વ્યાખ્યાઓ લખો.(2) આંકડાશાસ્ત્રની ઉપયોગીતા અને મર્યાદાઓ જણાવો.

(3) આંકડાશાસ્ત્રના કાર્યો સમજાવો.

(4) 'કાર્યક્ષમ નાગરિકત્વ માટે આંકડાશાસ્ત્રીય વિચારધારાનુ મહત્ત્વ એક દિવસ લખવા વાંચવાના કૌશલ્ય જેટલું જ અંકાશે' આ વિધાને આંકડાશાસ્ત્રની ઉપયોગિતાના સંદર્ભમાં ચર્ચા.

(5) અર્થશાસ્ત્રમાં આકડાશાસ્ત્રના મહત્ત્વની ચર્ચા કરો.

(6) 'અકુશળ અને બિનઅનુભવી વ્યક્તિના હાથે આંકડાશાસ્ત્રનો ઉપયોગ ઊંટવૈદું કરવા સમાન છે.' આંકડાશાસ્ત્રની મર્યાદામાં આ કથનની ચર્ચા કરો.

(7) 'આંકડાઓ કાચી માટી સમાન છે જેમાંથી તમે ધારો તો ભગવાન કે શેતાન સર્જી શકો' સમજાવો.

(8) આંકડાશાસ્ત્ર પર અવિશ્વાસનાં મુખ્ય કારણો દર્શાવી તેના ઉપાયો સૂચવો.

(9) પ્રાથમિક માહિતી અને ગૌણ માહિતી એટલે શું ?

(10) પ્રાથમિક માહિતી અને ગૌણ માહિતી વચ્ચેનો તફાવત સ્પષ્ટ કરો.

(11) પ્રાથમિક માહિતી મેળવવાની જુદી જુદી રીતો જણાવી તેને ટૂંકમાં સમજાવો.

(12) ગૌણ માહિતી પ્રાથમિક માહિતી જેટલી વિશ્વાસ પાત્ર નથી આ વિધાનની ચર્ચા કરો.

(13) ગૌણ માહિતીના ઉદ્‌ભવસ્થાનો વર્ણવો.

(14) પશ્નાવલી એટલે શું ? માહિતી એકઠી કરવાની પ્રશ્નાવલીની રીતનું વર્ણન કરો.

(15) તપાસની અન્ય પદ્ધતિઓની સરખામણીમાં પ્રત્યક્ષ તપાસ કઇ રીતે ચઢિયાતી છે તે જણાવો.

(16) ટપાલ દ્વારા તપાસ અને આગણકો દ્વારા તપાસની પ્રશ્નાવલીની રીતની તુલનાત્મક ચર્ચા કરો.

(17) આદર્શ પ્રશ્નાવલી એટલે શું? તેના લક્ષણો જણાવો.

(18) 'સંશોધનની સફળતાનો આધાર સંશોધક પર અવલંબે છે.' આ વિધાનની ચર્ચા કરો.

(19) ટૂંકનોંધ લખો : (1) આંકડાશાસ્ત્રના લક્ષણો (2) આદર્શ પ્રશ્નાવલી (3) પ્રત્યક્ષ તપાસ અને પરોક્ષ તપાસ

1.12.2 યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.(1) 'આંકડા એ અનુમાન અને સંભાવનાઓનું વિજ્ઞાન છે.' આ વ્યાખ્યા કોણે આપેલ છે?(A) બાઉલી

(B) પ્રો. હોરેસ સેક્રિસ્ટ

(C) આર.એ. ફિશર (D) બોડીંગ્ટન

(2) નીચેનામાંથી કઇ વ્યાખ્યા બાઉલીની નથી?

(A) આંકડાઓ એકબીજાના સંબંધીત કોઇપણ તપાસ વિભાગમાં હકીકતોનું આંકડાકીય નિવેદન છે.

(B) આંકડાશાસ્ત્ર એટલે ગણતરીનું વિજ્ઞાન

(C) આંકડા એ અનુમાન અને સંભાવનાઓનુ વિજ્ઞાન છે.

(D) આંકડાશાસ્ત્ર એટલે સરેરશ કિંમતોનું વિજ્ઞાન છે.

(3) બૂટ બનાવતી જુદી જુદી કંપનીઓના તુલનાત્મક અભ્યાસ માટે સંશોધક કંપનીના વાર્ષિક અહેવાલોમાંથી માહિતી લે છે તેને કઇ માહિતી કહેવાય ?

(A) પ્રાથમિક માહિતી (B) ગૌણ માહિતી

(C) પ્રત્યક્ષ તપાસ (D) કોઇપણ નહિં.

(4) કોઇ એક ન્યૂઝ ચેનલ લોકસભાની ચૂંટણીના વ્યૂહ જાણવા માટે જુદા જુદા આગણકો દ્વારા માહિતી મળવે છે. આ રીત કઇ રીત કહેવાય ?

(A) આગણકોની રીત (B) પરોક્ષતપાસની રીત

(C) ગૌણ માહિતીની રીત (D) આપેલ માંથી એકપણ નહિં.

(5) બિન પ્રકાશિત સંશોધન લેખો માંથી મેળવેલ માહિતી કઇ રીત ગણાય ?

(A) ગૌણ માહિતી (B) પ્રાથમિક માહિતી

(C) પ્રત્યક્ષ તપાસ રીત (D) આપેલ માંથી એકપણ નહિં.

(6) નીચેનામાંથી કયા આદર્શ પ્રશ્ના વલીના લક્ષણો છે ?

(A) પ્રશ્નાવલીના પ્રશ્નો તાર્કિક અને સુસંગત રીત ગોઠવેલા હોવા જોઇએ.

(B) સંશોધનના હેતુને અનુરૂપ પ્રશ્નો હોવા જોઇએ.

(C) પ્રશ્નોની ભાષા દ્વિઅર્થી ન હોવા જોઇએ.

(D) ઉપરના બધા જ

જવાબો : (1) D (2) C (3) B (4) A (5) A (6) D

1.13 પારિભાષિક શબ્દો

સંશોધક : કોઈ પણ વિષય પર સંશોધન કરનાર વ્યક્તિ

આગણકો : સંશોધકે માહિતી મેળવવા માટે નિમેલ વ્યક્તિ

સાક્ષી : પરોક્ષ તપાસમાં જે વ્યક્તિની માહિતી મેળવવી હોય તેના વતી બીજી વ્યક્તિ પરથી માહિતી મેળવવા આવે તેને સાક્ષી કહે છે.

પ્રત્યક્ષ તપાસ : સીધી પૂછપરછ કરી માહિતી મેળવવી.

પરોક્ષ તપાસ : બીજા દ્વારા માહિતી મેળવવી.

1.14 સંદર્ભસૂચિ

1. Fundamentaks of statistics
S. C. Srivastava
Sangya Srivastava
Anmol Publication PVT. Ltd.
New Delhi-2

2. ધંધાકીય સંશોધન પદ્ધતિઓ
ડૉ. મહેન્દ્ર એચ. મૈસુરીયા અને ડૉ. દિનેશ એમ. પટેલ
અક્ષર પબ્લિકેશન, અમદાવાદ.

એકમ-2 વર્ગીકરણ અને કોષ્ટક રચના

: રૂપરેખા :

2.0 ઉદ્દેશો :

આ પ્રકરણનો મુખ્ય ઉદ્દેશ સંશોધન માટે મળેલ માહિતીનું વિવિધ લક્ષણો ધરાવતા જૂથોનું યોગ્ય વર્ગીકરણ કરી તેને સુવ્યવસ્થિત કોષ્ટકો દ્વારા કેવી રીતે સમજવાનો છે તે રજૂ કરી શકાય.

સાદા અને જટિલ કોષ્ટકોની રચના કરી માહિતીને સરળતાથી સમજી અને સમજાવી શકાય.

2.1 પ્રસ્તાવના :

આંકડાશાસ્ત્રની કોઈપણ સમસ્યાની યોગ્ય તપાસ કરવા માટે માહિતી મેળવી તેનું યોગ્ય વર્ગીકરણ અને કોષ્ટીકરણ કરવું ખૂબ જ જરૂરી છે. કારણ કે આ માહિતી પ્રશ્નાવલી સ્વરૂપે કે લાંબી વર્ણનાત્મક સ્વરૂપે હોય છે. આમ આવી માહિતીને અલગ અલગ સમૂહો કે વર્ગોમાં વર્ગીકરણ કરી તેને કોષ્ટક સ્વરૂપે રજૂઆત કરવાથી તેને સરળતાથી સમજી શકાય છે અને યોગ્ય રજૂઆત કરી શકાય છે.સંશોધનકાર સંશોધન દરમ્યાન જે માહિતી એકઠી કરે છે. તેમાં વધારાની અને નકામી માહિતી વર્ગીકરણની મદદથી દૂર કરી શકે છે અને યોગ્ય પરિણામ મેળવી શકે છે. આમ, વર્ગીકરણ અને કોષ્ટકરચના એ અત્યંત અગત્યનું પ્રકરણ છે.

~~10.2 વર્ગીકરણનો અર્થ :~~

આપેલ માહિતીનું સમાન લક્ષણો ધરાવતા જૂથોમાં સુવ્યવસ્થિત ક્રમબદ્ધ રીતે ગોઠવવાની રીતને માહિતીના વર્ગીકરણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. માહિતીનું વર્ગીકરણએ ગુણધર્મો કે વર્ગોને આધારે કરવામાં આવતુ હોય છે. તેમા જે માહિતીને વર્ગોને આધારે વહેંચવામાં આવેલી હોય છે તેને વર્ગીકૃત માહિતી તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

2.2.1 વર્ગીકરણનો હેતુ :

સંશોધનકાર સંશોધન દરમ્યાન માહિતીનું વર્ગીકરણ કરે છે. તેનો મુખ્ય હેતુ તેના સંશોધનના હેતુ સાથે સંકળાયેલો હોય છે. જે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

(1) વિસ્તૃત સ્વરૂપે મળેલ માહિતીનું સંક્ષેપીકરણ કરી સરળતાથી સમજી શકાય તેવા સ્વરૂપમા રૂપાંતરીત કરવાનો.

(2) સંશોધન હેતુ સિવાયની વધારાની માહિતી શોધી તેને દૂર કરવાનો.

(3) સંશોધન માટે જરૂરી માહિતીઓ શોધી મુખ્ય મુદ્દાઓ અલગ કરી તેની મહત્તા સમજાવવાનો.

(4) એકત્રિત માહિતીને ગુણધર્મો કે વર્ગો અનુસાર વર્ગીકૃત કરી તે વચ્ચેનો તફાવત શોધવા કે સરખામણી કરવાનો.

(5) એકત્રિત કરેલ માહિતીનું યોગ્ય વર્ણન કરી ભવિષ્યના નિર્ણયમાં ઉપયોગી બનાવવાનો.

2.2.2 વર્ગીકરણના ફાયદા કે લાભો :

એકત્રિત માહિતીનું વર્ગીકરણ કરવાથી નીચે મુજબના લાભો થાય છે જેને આદર્શ વર્ગીકરણના લાભો તરીકે ગણી શકાય છે.

(1) એકત્રિત માહિતી વિશાળ સ્વરૂપમાં હોય તો તેને ખૂબ ટૂંકમાં વર્ણવી શકાય.

(2) એકત્રિત માહિતીને યોગ્ય ગુણધર્મો કે વર્ગો મુજબ ગોઠવી શકાય.

(3) એકત્રિત માહિતીને યોગ્ય ક્રમબદ્ધ મુજબ ગોઠવી શકાય.

(4) એકત્રિત માહિતીને ગુણધર્મો કે લક્ષણો અનુસાર પરસ્પર સરખાવી શકાય.

(5) એકત્રિત માહિતીમાંથી વિરોધાભાસી માહિતી શોધી તેના કારણો શોધી શકાય.

(6) એકત્રિત માહિતીમાંથી સંશોધનને અનુરૂપ ન હોય તેવી નકામી માહિતી શોધી દૂર કરી શકાય.

(7) યોગ્ય વર્ગીકરણ કરવાથી સંશોધનકાર પોતાનો બીન જરૂરી શ્રમ, સમય અને નાણાનો દુરઉપયોગ થતો બચાવી શકે છે.

(8) એકત્રિત માહિતીનું સાચું ચિત્ર રજૂ કરી તેનું યોગ્ય અર્થઘટન કરી શકે છે.

2.2.3 વર્ગીકરણના પ્રકારો :

એકત્રિત કરેલ માહિતીને નીચે દર્શાવ્યા મુજબ અલગ અલગ ચાર પ્રકારે વર્ણવી શકાય :

(1) કાલક્રમાનુસાર (સમયાનુસાર) વર્ગીકરણ

(2) ભૌગોલિક પરિસ્થિતિ અનુસાર વર્ગીકરણ

(3) ગુણધર્મો અનુસાર વર્ગીકરણ

(4) સંખ્યાત્મક સ્વરૂપ અનુસાર વર્ગીકરણ

(1) કાલક્રમાનુસાર (સમયાનુસાર) વર્ગીકરણ :

એકત્રિત કરેલ માહિતી વર્ષ, માસિક, અઠવાડિક કે દૈનિક સ્વરૂપે હોય તો તેને સમયાનુસાર માહિતી કહેવાય અને તેના વર્ગીકરણને કાલક્રમાનુસાર કે સમયાનુસાર વર્ગીકરણ તરીકે ઓળખી શકાય. આંકડાશાસ્ત્રમા આ પ્રકારની શ્રેણીને સામાયિક શ્રેણી તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

દા.ત.

(A) એક કંપનીનું વાર્ષિક ઉત્પાદનનું વર્ગીકરણ નીચે મુજબ કરવામાં આવે તો તેને સમાયાનુસાર વર્ગીકરણ કહી શકાય.

વર્ષ	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**
ઉત્પાદન લાખ ટનમાં	120	132	152	163	160

(B) એક કંપનીનો માસિક નફો નીચે મુજબ દર્શાવવામાં આવે તો તેને સમાયાનુસાર વર્ગીકરણ તરીકે ઓળખી શકાય.

માસ	જાન્યુ	ફેબ્રુ	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જુન	જુલાઈ	ઓગસ્ટ	સપ્ટે	ઓક્ટો	નવે	ડીસે.
નફો (રૂપિયા હજારમાં)	12	15	13	10	12	11	12	12.5	13	14	14.5	13.5

તેવી જ રીતે એકત્રિત કરેલ માહિતીને અઠવાડિક કે દૈનિક સ્વરૂપે પણ વર્ગીકૃત કરી શકાય છે.

(2) ભૌગોલિક પરિસ્થિતિ અનુસાર વર્ગીકરણ :

એકત્રિત કરેલી માહિતી સ્થળ કે વિસ્તાર સ્વરૂપે હોય અને તેને સ્થળ કે વિસ્તાર અનુસાર વર્ગીકૃત કરવામાં આવે તો આવા વર્ગીકરણને ભૌગોલિક પરિસ્થિતિ અનુસાર વર્ગીકરણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. આવુ વર્ગીકરણ દેશ, શહેર, ગામ વગેરે સ્થળો અનુસાર નીચે મુજબ વર્ગીકૃત કરી શકાશે.

(A) આંતર રાષ્ટ્રીય સેમીનારમાં સંશોધન પત્ર રજૂ કરનાર વિવિધ દેશના પ્રાધ્યાપકોની સંખ્યાનું વર્ગીકરણ નીચે મુજબ કરી શકાય.

દેશ	અમેરિકા	ભારત	ચીન	કેનેડા	ન્યુઝીલેન્ડ
પ્રાધ્યયાપકોની સંખ્યા	14	4	8	12	3

(B) Ses & Mes કંપનીનો જુદા જુદા શહેરમાં થયેલ નફાનું વર્ગીકરણ નીચે મુજબ કરી શકાય.

શહેર	વાપી	વલસાડ	સુરત	ભરૂચ	અમદાવાદ
નફો રૂા.કરોડમાં	2	2	3	4	12

(C) નવસારી જીલ્લાના જલાલપોર તાલુકાનાં વિવિધ ગામડાઓમાં કોળી પટેલની વસ્તીનું વર્ગીકરણ નીચે મુજબ કરી શકાય.

ગામનું નામ	દાંડી	મછાડ	મટવાડ	બોદાલી	કરાડી
વસ્તી (હજારમાં)	4	3	2	5	4

આમ એકત્રિત કરેલી માહિતીને ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ વર્ગીકરણ કરવામાં આવે તો તેને ભૌગોલિક પરિસ્થિતિ અનુસાર વર્ગીકરણ તરીકે વર્ણવી શકાય.

(3) ગુણધર્મો અનુસાર વર્ગીકરણ :

જો એકત્રિત કરેલ માહિતી વર્ણનાત્મક સ્વરૂપે હોય તો તેનું વર્ગીકરણ કરતી વખતે તેના લક્ષણો કે ગુણધર્મો ધ્યાનમાં લઈ તેનું લક્ષણો કે ગુણધર્મો મુજબ વર્ગીકરણ કરવામાં આવે તો તેને ગુણધર્મો અનુસાર વર્ગીકરણ તરીકે ઓળખી શકાય. વર્ણનાત્મક માહિતી (જેવી કે પ્રેમ, બુદ્ધિ, હોશિયારી, ચપળતા, સૌંદર્ય, જાતિ વગેરે)ને સંખ્યામાં રજુ કરી શકાતી નથી પરંતુ તેને ગુણધર્મો અનુસાર વહેંચી કે વર્ગીકૃત કરી શકાય છે. દા.ત. બાબા સાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીમાં ભણતા વિદ્યાર્થીઓને પાસ અને નાપાસ એમ બે પ્રકારે વહેંચી શકાય. આ પ્રકારના વર્ગીકરણમાં સરખા લક્ષણો કે ગુણધર્મ ધરાવતી માહિતી એક વર્ગમાં અને વિરોધાભાસી લક્ષણો કે ગુણધર્મ ધરાવતી માહિતીને બીજા વર્ગમાં મુકવામાં આવે છે. આ પ્રકારના વર્ગીકરણને મુખ્યત્વે બે પ્રકારે વહેંચી શકાય.

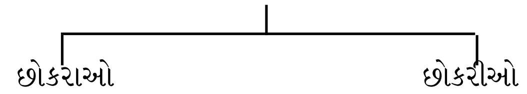
(i) સાદુ વર્ગીકરણ (ii) બહુવિધ વર્ગીકરણ

(i) સાદુ વર્ગીકરણ :

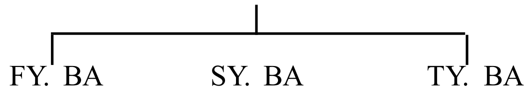
એકત્રિત કરેલ માહિતીને કોઈ એક જ લક્ષણ કે ગુણધર્મ લઈને વર્ગીકૃત કરવામાં આવે તો તેને સાદુ વર્ગીકરણ કહે છે. દા.ત. બાબા સાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીમાં એસ.વાય.

બી.એ.માં અભ્યાસ કરતાં વિદ્યાર્થીઓને જાતિ પ્રમાણે છોકરા અને છોકરીઓ એમ બે વિભાગમાં વર્ગીકૃત કરવામાં આવે તો તેને સાદુ વર્ગીકરણ કરી શકાય. અહીં વિદ્યાર્થીઓની જાતિ એમ એક જ ગુણધર્મ પ્રમાણે વર્ગીકરણ કરવામાં આવે છે. જે નીચેના ચાર્ટ ઉપરથી સમજી શકાય.

દા.ત. (1) બાબા સાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીમાં અભ્યાસ કરતાં S.Y.B.A. ના વિદ્યાર્થીઓ



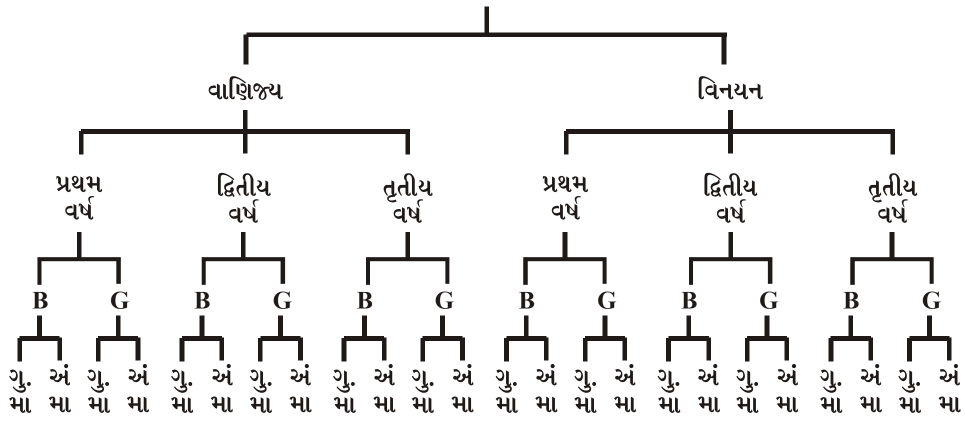
(2) BAOU ના આર્ટ્સ પ્રવાહમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓ



(ii) બહુવિધ વર્ગીકરણ :

એકત્રિત કરેલ માહિતીને એક કરતા વધુ ગુણધર્મો કે લક્ષણો લઈને વર્ગીકૃત કરવામાં આવે તો તેને બહુવિધ વર્ગીકરણ કહે છે. દા.ત. BAOU ના વિદ્યાર્થીઓને અભ્યાસનો પ્રવાહ, વર્ગ, જાતિ અને માધ્યમ અનુસાર વર્ગીકૃત કરવામાં આવે તો તેવા વર્ગીકરણને બહુવિધ વર્ગીકરણ તરીકે ઓળખી શકાય. ધારોકે વિદ્યાર્થીઓના અભ્યાસના પ્રવાહને વાણિજ્ય પ્રવાહ અને વિનિમય પ્રવાહ એ બે વિભાગમાં વહેંચવામાં આવે અને આ બંને પ્રવાહને પ્રથમ વર્ષ, દ્વિતીય વર્ષ, તૃતીય વર્ષ, એમ ત્રણ વર્ગમાં વહેંચવામાં આવે. દરેક વર્ગને છોકરાઓ અને છોકરીઓ એમ બે જાતિઓમાં વહેંચવામાં આવે અને દરેક છોકરાઓ છોકરીઓને ગુજરાતી માધ્યમ અને અંગ્રેજી માધ્યમ એમ બે વિભાગમાં વહેંચવામાં આવે તો આ પ્રકારના વર્ગીકરણને બહુવિધ વર્ગીકરણ તરીકે ઓળખાવી શકાય જે નીચે દર્શાવેલ ચાર્ટ ઉપરથી સમજી શકાય છે.

BAOU યુનિવર્સિટીમાં ચાલતા અભ્યાસનો પ્રવાહ



(**નોંધ :** B = છોકરાઓ, G = છોકરીઓ, ગુ.મા. = ગુજરાતી માધ્યમ, અં.મા. = અંગ્રેજી માધ્યમ)

(4) સંખ્યાત્મક સ્વરૂપ અનુસાર વર્ગીકરણ :

એકત્રિત કરેલ માહિતીને સંખ્યાત્મક સ્વરૂપે વર્ગીકૃત કરવામાં આવે તો તેને સંખ્યાત્મક સ્વરૂપ અનુસાર વર્ગીકરણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. દા.ત. વસ્તુના ભાવ, ઉત્પાદન, ઊંચાઈ, પગાર, તાપમાન વગેરે માહિતી સંખ્યાત્મક સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય છે અને તેને માપી પણ શકાય છે સંખ્યાત્મક માહિતીના વર્ગીકરણમાં ચલની કિંમતો ધ્યાનમાં લેવામાં આવતી હોવાથી તેને ચલનાત્મક વર્ગીકરણ તરીકે પણ ઓળખી શકાય છે. આવી ચલનાત્મક માહિતીને બે પ્રકારે વહેંચવામાં આવે છે.

(1) અસતત ચલ (2) સતત ચલ

(1) અસતત ચલ :

જે ચલ આપેલી મર્યાદાની અંદર મર્યાદિત કિંમતો જ ધારણ કરે એટલે કે બધી કિંમતો ધારણ ન કરે તો તેને અસતત ચલ કહે છે. આ પ્રકારની માહિતી માત્ર પૂર્ણાંક સંખ્યામાં જ દર્શાવી શકાય છે. તેમા બે ચલોની કિંમતો વચ્ચે સાતત્ય જળવાતુ નથી. એટલે કે તેના ભાગ પાડી શકાતા નથી. તેને ચોક્કસ રીતે માપી શકાય છે. દા.ત. કુટુંબમાં બાળકોની સંખ્યા, વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા, બાગમાં ફૂલોની સંખ્યા વગેરે.

સામાન્ય રીતે અસતત ચલને 'x' વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને ચલના દરેક પ્રાપ્તાંકનું કેટલી વખત પુનરાવર્તન થાય છે તે દર્શાવતા અંકને આવૃત્તિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેને f વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને તેની ઉપરથી મળતા આવૃત્તિ વિતરણને અસતત આવૃત્તિ વિતરણ કહે છે. જે નીચેના ઉદાહરણ પરથી સમજી શકાય છે.

બાળકોની સંખ્યા (x)	0	1	2	3 કે તેથી વધુ	કુલ
કુટુંબોની સંખ્યા (f)	10	25	10	5	50

(2) સતત ચલ :

જે ચલ આપેલી મર્યાદાની અંદર બધી જ કિંમતો ધારણ કરે તેને સતત ચલ કહે છે. આ પ્રકારની માહિતી પૂર્ણાંક કે અપૂર્ણાંક ગમે તે કિંમતમાં દર્શાવી શકાય છે. આ પ્રકારના ચલની કિંમતોને ચોક્કસ રીતે માપી શકતા નથી. તેને વર્ગલંબાઈ સ્વરૂપે દર્શાવવામાં આવે છે. દા.ત., વજન, ઊંચાઈ, ઊંમર, પગાર, આવક, તાપમાન વગેરે.

સામાન્ય રીતે સતત ચલ ઉપરથી મળતા વિતરણને સતત આવૃત્તિ વિતરણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેને મુખ્યત્વે બે વિભાગમાં વહેંચી શકાય છે.

(1) નિવારક વર્ગ (2) અનિવારક વર્ગ

(1) નિવારક વર્ગ :

આ પ્રકારના વિતરણાં વર્ગોની વર્ગલંબાઈ એક સમાન હોય છે અને કોઈપણ વર્ગની ઉપલી હદ ત્યાર પછીના વર્ગની નીચલી હદ બને છે. દા.ત. 100 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ નીચે મુજબ દર્શાવેલ હોય તો તે વિતરણને નિવારક આવૃત્તિ વિતરણ તરીકે ઓળખાવી શકાય.

ગુણ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	14	12	16	18	20	20

(2) અનિવારક વર્ગ :

આ પ્રકારના વિતરણમાં વર્ગોની લંબાઈ એક સમાન હોતી નથી અથવા કોઈપણ વર્ગની ઉપલી હદ પછીના વર્ગની નીચલી હદ બનતી નથી.

દા.ત. 100 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ નીચે મુજબ દર્શાવેલ હોય તો તે વિતરણને અનિવારક આકૃતિ વિતરણ તરીકે ઓળખાવી શકાય.

(A) અસમાન વર્ગલંબાઈનું ઉદાહરણ

ગુણ	0-20	20-30	30-50	50-60
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	34	32	16	18

(B) સમાન વર્ગલંબાઈનું ઉદાહરણ

ગુણ	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	16	18	34	16	16

2.3 વર્ગીકરણના નિયમો :

(1) **સ્પષ્ટ :** એકત્રિત કરેલ માહિતીને વર્ગીકરણમાં સ્પષ્ટ અને સમજાય તે રીતે દર્શાવવી જોઈએ. અસ્પષ્ટ માહિતી ભવિષ્યના સંશોધન કે નિર્ણય ઉપર અસર કરે છે.

(2) **સુસંગત :** એકત્રિત કરેલ માહિતીનું સંશોધનના હેતુ સાથે સુસંગત થાય તે રીતે વર્ગીકરણ કરવું જોઈએ. અસંગત માહિતી દૂર કરવી જોઈએ.

(3) **સ્થિર :** એકત્રિત કરેલ માહિતી સ્થિર હોવી જોઈએ એટલે કે વર્ગીકરણની એક સરખી પેટર્ન અપનાવેલી હોવી જોઈએ એક સરખી માહિતી માટે અલગ અલગ પેટર્ન અપનાવી શકાય નહી.

(4) **સુધારી શકાય તેવા :** એકત્રિત કરેલ માહિતીનું વર્ગીકરણ એ રીતે કરવું જોઈએ કે જેથી ભવિષ્યમાં ગમે તેવો પ્રશ્ન ઊભો થાય તો તેમાં સુધારો કરી શકાય.

(5) **વિસ્તૃત :** એકત્રિત કરેલ માહિતીનું વર્ગીકરણ કોઈ એક વર્ગો કે કેટેગરીના હોય.

2.4 સતત અને અસતત આવૃત્તિ વિતરણની રચના :

આપણે સતત અને અસતત આવૃત્તિ વિતરણ કોને કહેવાય તે શીખ્યા તેના ઉદાહરણોપણ વાંચ્યા હવે એકત્રિત થયેલ માહિતીનું વર્ગીકરણ કરી આવૃત્તિ વિતરણ કેવી રીતેતૈયાર કરી શકાય તે નીચેના ઉદાહરણો પરથી સમજીશું.

ઉદાહરણ-1 નીચેના ફકરામાં આવતા શબ્દોનું તેમાં આવતા અક્ષરોની સંખ્યા પ્રમાણે વર્ગીકરણ કરી આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

વિવિધ પ્રકારની સામાયિક શ્રેણી સાથે સંકળાયેલી ઉદ્યોગ અને આર્થિક પ્રવૃત્તિઓ વિકાસના ત્રણ તબક્કાઓમાં વહેંચાયેલી હોય છે. જેમા ત્રીજો તબક્કો અતિ ઉપયોગી હોય છે.''

જવાબ : અહીં નાનામાં નાનો શબ્દ 1 અક્ષરનો છે અને મોટામાં મોટો શબ્દ 6 અક્ષરનો છે. તેથી પ્રાપ્તાંકોનું મૂલ્ય 1 થી 6 સુધી લખી નીચે મુજબ આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરીશું.

અક્ષરોની સંખ્યા	**આવૃત્તિ ચિહ્ન**	**આવૃત્તિ (શબ્દોની સંખ્યા)**
1	॥	2
2	~~||||~~ ||||	9
3					3
4	~~||||~~		6
5	॥	2
6			1
	કુલ	23

ઉદા.2 (અસતત આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરવું)

એક બગીચામાં ગુલાબના 30 છોડ ઉપર ખીલેલ ગુલાબની સંખ્યા નીચે મુજબ છે. તે પરથી આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

0	3	2	3	4	3
3	4	2	2	3	4
5	0	3	4	2	5
1	4	5	2	4	5
1	0	5	5	4	2

જવાબ: (સમજૂતી)

બગીચામાં ફુલોની સંખ્યા એ અસતત ચલનું ઉદાહરણ છે. તેથી સૌ પ્રથમ આપેલ માહિતીમાંથી નાનામાં નાની કિંમતથી મોટામાં મોટી કિંમત સુધીના પ્રાપ્તાંકોને ચઢતા ક્રમમાં ઊભા સ્તંભમાં લખો અને તેને x વડે દર્શાવો અને નીચે મુજબ લખો.

x **(ફુલોની સંખ્યા)**

0

1

2

3

4

5

ત્યારબાદ દરેક પ્રાપ્તાંક સામે આવૃત્તિ મેળવવા ચલની જે તે કિંમત સામે આવૃત્તિ ચિહ્ન । નીચે દર્શાવ્યા મુજબ મુકો અહી પ્રથમ ચાર ચિહ્નો માટે । નિશાની અને ત્યારબાદ પાંચમા ચિહ્ન માટે આડી / નિશાની કરો અને તે દરેકનો સરવાળો કરી જે તે પ્રાપ્તાંકની સામે લખો તેને આવૃત્તિ વડે દર્શાવો. આમ, કરવાથી નીચે મુજબ આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર થશે.

ફુલોની સંખ્ય	**આવૃત્તિ ચિહ્ન**	**આવૃત્તિ**
0					3
1				2
2	𝍸		6
3	𝍸		6
4	𝍸 ||	7
5	𝍸		6
	કુલ	**30**

નોંધઃ સતત આવૃત્તિ વિતરણની રચના કરતા પહેલાં નીચેના પદોની સમજૂતી મેળવીશું.

(1) **વર્ગ :** વર્ગ એટલે પ્રાપ્તાંકોના વર્ગીકરણ માટે પાડવા પડતા વિભાગો દા.ત. 10-20, 20-30, 30-40 વર્ગો સમાન, અસમાન કે ખુલ્લા છેડાવાળા ગમે તે લઈ શકાય વગેરે.

(2) **વર્ગ લંબાઈ :** વર્ગ લંબાઈ એટલે પ્રાપ્તાંકો સમાવવાની સંખ્યાકીય ક્ષમતા'
વર્ગ લંબાઈ એટલે આવૃત્તિ વિતરણના કોઈપણ વર્ગના ઉર્ધ્વસીમા બિંદુ અને અધઃસીમાબિંદુની કિંમતો વચ્ચેનો તફાવત.
વર્ગલંબાઈ સમાન લેવી વધુ હિતાવહ છે. પરંતુ ફરજીયાત નથી.

- **નિવારક વર્ગની ક્ષમતા :**

ધારો કે કોઈ એક નિવારક વર્ગ 10-20 આપેલો હોય તો તે વર્ગમાં 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 એમ કુલ દશ પ્રાપ્તાંકો સમાયેલા છે અને તેની વર્ગલંબાઈ = 10 કહેવાય. અહીં ઊપલી સીમાની કિંમત 20 નો સમાવેશ ત્યાર પછીના વર્ગમાં થશે.

- **અનિવારક વર્ગની ક્ષમતા :**

ધારો કે કોઈ એક અનિવારક વર્ગ 10-19 આપેલો હોય તો તે વર્ગમાં 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,19 એમ કુલ દશ પ્રાપ્તાંકો સમાયેલ છે અને તેની વર્ગલંબાઈ = 10 કહેવાય. અહીં ઉપલી સીમાની કિંમતને તે જ વર્ગમાં સમાવવામાં આવે છે.

વર્ગોની સંખ્યા :

$$\text{વર્ગોની સંખ્યા} = \frac{\text{વિસ્તાર}}{\text{વર્ગ લંબાઈ}}$$

$$= K = \frac{R}{i}$$

જ્યાં વિસ્તાર = સૌથી મોટો પ્રાપ્તાંક – સૌથી નાનો પ્રાપ્તાંક

નોંધ : વર્ગોની સંખ્યા કુલ કેટલા અવલોકનોનું વર્ગીકરણ કરવાનું છે તે ઉપરથી નક્કી થાય છે. વ્યવહારમાં મોટેભાગે 6 થી 15 જેટલા વર્ગો ઉપયોગમાં લેવામાં આવે છે.

ઉર્ધ્વ સીમા અને અધઃસીમા બિંદુ :

જો કોઈ એક વર્ગ 30-40 (નિવારક વર્ગ) આપેલો હોય તો 30 એ અધઃસીમા છે અને 40 એ ઉર્ધ્વ સીમા છે.

જો આવૃત્તિ વિસ્તારના વર્ગો 30-39, 40-49, ... આપેલા હોય તો તેને –0.5 અને + 0.5 કરી 29.5-39.5 મેળવવામાં આવે તો તે નિવારક વર્ગ બને છે.

(30-39 અને 40-49 ઉપલી સીમા = $\frac{39+40}{2} = \frac{79}{2} = 39.5$)

ઉદા.3 **BAOU ના S.Y.B.A. અર્થશાસ્ત્ર વિષયમાં 50 વિદ્યાર્થીઓએ પ્રાપ્ત કરેલ ગુણ નીચે મુજબ છે તે ઉપરથી આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.**

50	35	50	88	54	43	25	38	76	49
40	65	37	92	42	40	82	27	52	49
49	46	94	73	33	30	65	84	45	78
23	64	74	97	66	21	63	66	86	53
52	53	75	48	79	51	44	64	39	67

જવાબ. અહીં વર્ગલંબાઈ કે વર્ગોની સંખ્યા આપેલ નથી તેથી સૌપ્રથમ વિસ્તાર શોધીશું.

વિસ્તાર = સૌથી મોટો પ્રાપ્તાંક – સૌથી નાનો પ્રાપ્તાંક

= 97 – 21

= 76

ધારો કે વર્ગલંબાઈ = 10

∴ વર્ગોની સંખ્યા = $\frac{\text{વિસ્તાર}}{\text{વર્ગ લંબાઈ}} = \frac{76}{10} = 7.6$

એટલે કે વર્ગોની સંખ્યા 7 કે 8 જેટલી લઈ શકાય. (યાદ રાખો કે વ્યવહારમાં તેની સંખ્યા 6 થી 15ની વચ્ચે હોય છે.) ધારો કે વર્ગોની સંખ્યા = 8 લઈએ તો સૌથી નાનો પ્રાપ્તાંક 21 થી શરૂ કરી સૌથી મોટો પ્રાપ્તાંક 97 સુધી એક સરખા 8 ભાગ થશે કે જેની વર્ગ લંબાઈ 10 હોય તેથી પ્રથમ વર્ગ 21-30 અને છેલ્લો વર્ગ 91-100 મળશે. હવે દરેક વર્ગમાં સમાયેલા પ્રાપ્તાંકો સામે પ્રથમ ચાર પ્રાપ્તાંક માટે ઊભી । નિશાની અને પાંચમાં પ્રાપ્તાંક પ્રાપ્તાંક માટે / આડી નિશાની કરી તે નીશાનીઓનો સરવાળો કરી આવૃતિ વિતરણ મેળવીશું.

- **અનિવારક વર્ગવાળું આવૃત્તિ વિતરણ**

વર્ગો	આવૃત્તિ ચિહ્ન	આવૃત્તિ (f)
21-30	𝍸	5
31-40	𝍸 II	7
41-50	𝍸 𝍸 I	11
51-60	𝍸 I	6
61-70	𝍸 III	8
71-80	𝍸 I	6
81-90	IIII	4
91-100	III	3
	કુલ	**50**

ઉપરના અનિવારક વર્ગવાળા આવૃત્તિ વિતરણને નિવારક વર્ગવાળા આવૃત્તિ વિતરણમાં ફેરવવા માટે નીચલી સીમા (અધઃસીમા)માં –0.5 અને ઉપલીસીમા (ઉર્ધ્વસીમા)માં +0.5 કરો. (બે વર્ગો વચ્ચેનો તફાવત 1 જેટલો છે. $\therefore \frac{1}{2} = 0.5$ જેમ કે 21-30, 31-40

$\therefore$ 31-30 = 1)

- **નિવારક વર્ગવાળુ આવૃત્તિ વિતરણ**

વર્ગો	**આવૃત્તિ**
20.5 - 30.5	5
30.5 - 40.5	7
40.5 - 50.5	11
50.5 - 60.5	6
60.5 - 70.5	8
70.5 - 80.5	6
80.5 - 90.5	4
90.5 - 100.5	3
કુલ	**50**

ઉદા.4 એક કોલેજમાં નોકરી કરતા 50 કર્મચારીઓની પૂરા વર્ષમાં દર્શાવેલી ઉંમર સંબંધી માહિતીને આધારે એક વર્ગ 30-34 અને વર્ગલંબાઈ 5 લઈ આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

28	32	37	47	28	40	54	32	28	52
41	38	28	57	27	45	27	29	43	31
42	33	27	59	47	35	29	43	43	58
29	29	40	27	36	42	30	50	37	32
45	46	56	33	58	33	46	52	53	57

જવાબ : ન્યૂનત્તમ કિંમત = 28 મહત્તમ કિંમત = 59

ઊંમર વર્ષમાં	**આવૃત્તિ ચિહ્ન**	**આવૃત્તિ f**
25 - 29	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
30 - 34	~~IIII~~ III	8
35 - 39	~~IIII~~	5
40 - 44	~~IIII~~ III	8
45 - 49	~~IIII~~ I	6
50 - 54	~~IIII~~	5
55 - 59	~~IIII~~ I	6
	કુલ	**50**

ઉદા.5 નીચે આપેલ માહિતી30 અઠવાડિયામાં થતા અકસ્માત અંગેની છે. તો એક વર્ગ 40-50 લઈ સતત (નિવારક) આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

12	28	30	72	64	68
21	15	17	27	38	55
23	22	32	14	53	56
41	54	56	43	61	63
50	42	52	69	77	75

જવાબ: અહીં એક વર્ગ 40-50 આપેલ છે. તેથી વર્ગલંબાઈ 10 છે. સૌથી મોટો પ્રાપ્તાંક 77 છે, આપેલ એક વર્ગની શરત મુજબ નાનામાં નાનો પ્રાપ્તાંક 12ને સમાવે તેવો વર્ગ 10-20 અને મોટામાં મોટો પ્રાપ્તાંક 77 ને સમાવે તેવો વર્ગ 70-80 મળે છે. તેથી નિવારક આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ બનશે.

વર્ગ	આવૃત્તિ ચિહ્ન	આવૃત્તિ f
10 - 20	IIII	4
20 - 30	~~IIII~~	5
30 - 40	IIII	4
40 - 50	III	3
50 - 60	~~IIII~~ I	6
60 - 70	~~IIII~~	5
70 - 80	III	3
	કુલ	**30**

ઉદા.6 40 વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ (સે.મી.માં.)ને લગતી નીચે દર્શાવેલી માહિતીને 6 વર્ગોમાં વર્ગીકરણ કરી અનિવારક આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

142, 145, 152, 153, 157, 162, 147, 165, 141, 149, 146, 153, 149, 154, 158, 157, 148, 160, 149, 148, 162, 152, 168, 153, 145, 162, 149, 161, 162, 141, 150, 151, 145, 159, 155, 152, 148,150, 148, 163.

જવાબ: અહીં સૌથી નાનો પ્રાપ્તાંક 141 અને સૌથી મોટો પ્રાપ્તાંક 168

$\therefore$ વિસ્તાર = 168 – 141 = 27

હવે વર્ગોની સંખ્યા = 6 આપેલ છે.

$$\therefore \text{ વર્ગલંબાઈ } = \frac{\text{વિસ્તાર}}{\text{વર્ગોની સંખ્યા}}$$

$$= \frac{27}{6} = 4.5 = 5 \text{ લગભગ}$$

$\therefore$ વર્ગલંબાઈ = 5 લઈશું

નાનામાં નાનો પ્રાપ્તાંક 141 ને સમાવતો વર્ગ 140-144 અને મોટામાં મોટો પ્રાપ્તાંક 168 ને સમાવતો વર્ગ 165-169 મળે છે તેથી અનિવારક આવૃતિ વિતરણ નીચે મુજબ છે.

ઊંચાઈ (સેમી)	આવૃત્તિ ચિહ્નો	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા f
140 - 144	|||	3
145 - 149	𝍸 𝍸 |||	13
150 - 154	𝍸 𝍸	10
155 - 159	𝍸	5
160 - 164	𝍸 ||	7
165 - 169	||	2
	કુલ	**40**

ઉદા.7 30 વિદ્યાર્થીઓના દૈનિક ખર્ચની વિગતો નીચે મુજબ છે. તે પરથી વર્ગલંબાઈ 1 લઈ અનિવારક આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

4.25, 3.75, 0.00, 4.85, 1.80, 4.10, 5.50, 5.15, 1.10, 4.70, 1.70, 4.00, 3.10, 2.30, 2.00, 5.25, 5.45, 3.50, 3.90, 4.75, 3.00, 5.90, 4.50, 4.10, 5.00, 2.75, 6.25, 3.25, 3.20, 2.25

અહીં નાનામાં નાનો પ્રાપ્તાંક 0.00 અને મોટામાં મોટો પ્રાપ્તાંક 6.25

$\therefore$ વિસ્તાર = 6.25 − 0.00 = 6.25

વર્ગલંબાઈ = 1 લઈએ તો નાનામાં નાનો પ્રાપ્તાંક 0.00 ને સમાવતો વર્ગ 0.00 થી 0.90 મળે. અને મોટામાં મોટો પ્રાપ્તાંક 6.25 ને સમાવતો વર્ગ 6.00 થી 6.90 મળે એટલે કે કુલ 7 વર્ગો મળશે.

અથવા

$$\therefore \text{ વર્ગોની સંખ્યા} = \frac{\text{વિસ્તાર}}{\text{વર્ગલંબાઈ}} = \frac{6.25}{1} = 6.25$$

$\therefore$ લગભગ 7 વર્ગો

તેથી અનિવારક સતત આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ તૈયાર થાય.

દૈનિક ખર્ચ રૂા.	આવૃત્તિ ચિહ્ન	આવૃત્તિ f
0.00-0.99			1
1.00-1.99	|||	3
2.00-2.99	||||	4
3.00-3.99	𝍸 ||	7
4.00-4.99	𝍸 |||	8
5.00-5.99	𝍸		6
6.00-6.99			1
	કુલ	**30**

- **સ્ટર્જનો નિયમઃ**

વર્ગીકૃત માહિતીના વર્ગોની સંખ્યા નક્કી કરવા માટે નીચે દર્શાવેલ સ્ટર્જનો નિયમ ખૂબ પ્રચલિત છે.

$k = 1 + 3.322.log_{10}n$

જ્યાં, k = વર્ગોની સંખ્યા

n = અવલોકનોની સંખ્યા

ઉદા.8 એક કારખાનાના 50 કારીગરોની દૈનિક આવક અંગેની માહિતી રૂપિયામાં નીચે મુજબ છે. સ્ટર્જના નિયમનો ઉપયોગ કરી વર્ગલંબાઈ નક્કી કરો અને નિવારક સતત આવૃત્તિ વિતરણ નક્કી કરો.

89, 100, 110, 128, 135, 147, 150, 149, 168, 180, 183, 70, 115, 140, 80, 100, 140, 120, 118, 120, 85, 88, 120, 125, 136, 95, 105, 135, 132, 148, 164, 138, 110, 98, 150, 170, 95, 165, 70, 160, 130, 170, 110, 145, 184, 65, 80, 110, 100, 85

જવાબ: અવલોકનોની કુલ સંખ્યા = n = 50

સ્ટર્જનો નિયમ :

$$\begin{aligned} k &= 1 + 3.322.log\ n \\ &= 1 + 3.322.log\ 50 \\ &= 1 + 3.322.(1.6990) \\ &= 1 + 5.4742 \end{aligned}$$

વર્ગોની સંખ્યા k = 6.4742 = 6 લગભગ

નાનામાં નાનો પ્રાપ્તાંક 65, મોટામાં મોટો પ્રાપ્તાંક 184

વિસ્તાર = 184 – 65 = 119

$$\text{વર્ગલંબાઈ} = \frac{\text{વિસ્તાર}}{\text{વર્ગસંખ્યા}} = \frac{119}{6} = 19.8 = 20$$

નાનામાં નાનો પ્રાપ્તાંક 65ને સમાવતો વર્ગ 65-85 અને મોટામાં મોટો પ્રાપ્તાંક 184ને સમાવતો વર્ગ 165-185 મળશે તથા નિવારક સતત આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ તૈયાર થશે.

દૈનિક આવક	**આવૃત્તિ ચિહ્ન**	**કારીગરોની સંખ્યા f**
65-85	$\cancel{||||}$	5
85-105	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$	10
105-125	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$	10
125-145	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$	10
145-165	$\cancel{||||}$ |||	8
165-185	$\cancel{||||}$ ||	7
	કુલ	50

2.5 દ્વિચલ આવૃત્તિ વિતરણ :

જ્યારે એકત્રિત કરેલ માહિતી દ્વિ ચલીય હોય ત્યારે તે માહિતીનું વર્ગીકરણ કરીને આવૃત્તિ વિતરણ સ્વરૂપે સંક્ષિપ્તમાં રજૂઆત કરવામાં આવે તો આ પ્રકારના આવૃત્તિ વિતરણને દ્વિચલ આવૃત્તિ વિતરણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. જે નીચેના ઉદાહરણ ઉપરથી સમજી શકાય.

ઉદા.9 એક પ્રશ્નપત્રમાં બે વિભાગો A અને B આપેલા છે. તેના પ્રત્યેક વિભાગમાં 1 થી 5 એમ કુલ દશ પ્રશ્ન લખવાના હતા. 20 વિદ્યાર્થીઓ બંને વિભાગમાં કેટકેટલા પ્રશ્ન લખ્યા તેની માહિતી નીચે પ્રમાણે છે તો તે ઉપરથી દ્વિચલ-આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

(1, 4) (3, 1) (4, 3) (5, 3) (2, 3) (4, 3) (5, 2) (3, 1) (4, 1) (3, 2) (5, 1) (3, 3) (3, 4) (5, 2) (2, 3) (3, 5) (2, 4) (2, 4) (2, 3) (5, 1)

જવાબ: અહીં 20 વિદ્યાર્થીઓએ એક પ્રશ્નપત્રના બે વિભાગો A અને B માંથી લખેલા પ્રશ્નોની સંખ્યા આપેલ છે. જેમાં A = પહેલા વિભાગમાંથી લખેલ પ્રશ્નોની સંખ્યા અને B = બીજા વિભાગમાંથી લખેલ પ્રશ્નોની સંખ્યા તેની ઉપર આપેલ જોડ (A, B) છે. (એટલે કે પ્રથમ જોડકું (1,4) = A વિભાગ અને પ્રશ્ન નં.1 તથા B વિભાગ અને પ્રશ્ન નં.4 એવુ સમજવું). અહીં આપેલ માહિતીમાં વિભાગ A = ચલ x અને વિભાગ B = ચલ y ધારીશું તેથી પ્રથમ જોડકું (x = 1, y = 4) થશે બીજુ અહીં જે માહિતી આપેલી છે તેમાં ચલ x અને ચલ y એમ બંનેમાં 1, 2, 3, 4, 5 કિંમતો છે. તેથી નીચે મુજબ આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરીશું તેને અસતત દ્વિચલ આવૃત્તિ વિતરણ તરીકે ઓળખીશું.

20 વિદ્યાર્થીઓએ એક પ્રશ્નપત્રના બે વિભાગોમાં લખેલા પ્રશ્નની સંખ્યા દર્શાવતુ દ્વિચલ આવૃત્તિ વિતરણ

વિભાગ A માં લખેલ પ્રશ્નો x	વિભાગ B માં લખેલ પ્રશ્નો Y					કુલ વિદ્યાર્થીઓ
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	
1.	–	–	–	I=1	–	1
2.	–	–	III=3	II=2	–	5
3.	II=2	I=1	I=1	I=1	I=1	6
4.	II=1		II=2	–	–	3
5.	II=2	II=2	I=1	–	–	5
કુલ વિદ્યાર્થીઓ	5	3	7	4	1	20

ઉદા.10 ક્રિકેટના ખેલાડીઓની ઉંમર અને તેમણે કરેલા રન અંગેની માહિતી નીચે મુજબ છે. તો બંને બાજુ વર્ગ લંબાઈ 10 લઈ દ્વિચલ આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

ખેલાડી નંબર	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ખેલાડી ઊંમર	55	36	42	36	33	34	28	31	32	44	38	27	24	47	38
રનોની સંખ્યા	105	118	108	115	122	115	125	114	112	116	128	112	112	126	129

જવાબ: અહીં વર્ગ લંબાઈ 10 આપેલ છે. ઊંમરમાં સૌથી નાનો પ્રાપ્તાંક 24 અને સૌથી મોટો પ્રાપ્તાંક 55 છે. તેથી પ્રથમ વર્ગ 20-30 અને છેલ્લો વર્ગ 50-60 લઈશું. જ્યારે રનમાં સૌથી નાનો પ્રાપ્તાંક 105 અને સૌથી મોટો પ્રાપ્તાંક 129 છે. તેથી પ્રથમ વર્ગ 100-110 અને છેલ્લો વર્ગ 120-130 લઈશું.

ધારો કે ઊંમર $= x$

રન $= y$

15 ખેલાડીઓની ઊંમર અને રનની માહિતી દર્શાવતુ દ્વિચલ આવૃત્તિ વિતરણ

ઉંમર	રન -Y			
x	100 - 110	110 - 120	120 - 130	**કુલ**
20 - 30	–	‖ = 2	| = 1	3
30 - 40	–	||| = 5	||| = 3	8
40 - 50	| = 1	| = 1	| = 1	3
50 - 60	| = 1	–	–	1
કુલ	2	8	5	15

2.6 સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ :

સંચયી આવૃત્તિ એટલે જે તે વર્ગના આગળના વર્ગો તેમજ તે વર્ગની આવૃત્તિઓનો સરવાળો.

સંચયી આવૃત્તિ વિતરણો બે પ્રકારે શોધી શકાય છે.

(1) થી ઓછા પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ

(2) થી વધુ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ

સંચયી આવૃત્તિ કેવી રીતે શોધી શકાય તે નીચેના ઉદાહરણો ઉપરથી સમજીશું.

ઉદા.11 નીચે આપેલા આવૃત્તિ વિતરણ ઉપરથી સંચયી આવૃત્તિ શોધો.

વર્ગો	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
આવૃત્તિ	5	15	20	25	15	20

જવાબઃ

વર્ગ	**આવૃત્તિ**	**સંચયી આવૃત્તિ**
10 - 20	5	= 5
20 - 30	15	5 + 15 = 20
30 - 40	20	20 + 20 = 40
40 - 50	25	40 + 25 = 65
50 - 60	15	65 + 15 = 80
60 - 70	20	80 + 20 = 100

સમજૂતી : પ્રથમ વર્ગ 0-10 ની આવૃત્તિ = 5 તેથી સંચયી આવૃત્તિ = 5 ત્યારબાદ બીજો વર્ગ 10-20 ની આવૃત્તિ=15 જે પ્રથમ વર્ગની સંચયી આવૃત્તિમાં ઉમેરતા 15 + 5 = 20 તેવી રીતે મળેલ સંચયી આવૃત્તિની કિંમતમાં ત્યાર પછીના વર્ગની આવૃત્તિની કિંમત ઉમેરતા જાવ.

ઉદા.12 નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી 'થી વધુ' અને 'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

x_1	0	1	2	3	4	5	6	કુલ
$f_1 a$	1	9	13	16	12	6	3	60

જવાબઃ 'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ

'થી ઓછા'	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
0 કે તેથી ઓછા	1	1
1 કે તેથી ઓછા	9	1 + 9 = 10
2 કે તેથી ઓછા	13	10 + 13 = 23
3 કે તેથી ઓછા	16	23 + 16 = 39
4 કે તેથી ઓછા	12	39 + 12 = 51
5 કે તેથી ઓછા	6	51 + 6 = 57
6 કે તેથી ઓછા	3	57 + 3 = 60

- **થી વધુ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ**

થી વધુ	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
0 કે તેથી વધુ	1	60
1 કે તેથી વધુ	9	60 – 1 = 59
2 કે તેથી વધુ	13	59 – 9 = 50
3 કે તેથી વધુ	16	50 – 13 = 37
4 કે તેથી વધુ	12	37 – 16 = 21
5 કે તેથી વધુ	6	21 – 12 = 9
6 કે તેથી વધુ	3	9 – 6 = 3
કુલ	**60**	

(**નોંધ :** કુલ આવૃત્તિની સંખ્યા 60 માંથી આવૃત્તિની સંખ્યા બાદ કરતા જવાથી થી વધુ પ્રકારની સંચયી આવૃત્તિ મળશે.)

ઉદા.13 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી થી ઓછા અને થી વધુ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ મેળવો.

x	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	કુલ
f	4	20	40	26	10	100

જવાબઃ અહીં અનિવારક વર્ગ આપેલ છે તેથી નીચલી હદમાં –0.5 અને ઉપલી હદમાં +0.5 કરી વર્ગ ફરીથી લખતા.

વર્ગ	આવૃત્તિ
–0.5-9.5	4
9.5-19.5	20
19.5-29.5	40
29.5-39.5	26
39.5-49.5	10
કુલ	**100**

થી ઓછા પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ

તેથી ઓછા	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
9.5	4	= 4
19.5	20	4 + 20 = 24
29.5	40	24 + 40 = 64
39.5	26	64 + 26 = 90
49.5	10	90 + 10 = 100

થી વધુ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ

કે તેથી વધુ	**આવૃત્તિ**	**સંચયી આવૃત્તિ**
–0.5	4	= 100
9.5	20	100 – 4 = 96
19.5	40	96 – 20 = 76
29.5	26	76 – 40 = 36
39.5	10	36 – 26 = 10
-	100	-

2.7 કોષ્ટક રચનાની વ્યાખ્યા અને ઉપયોગો :

2.7.1 કોષ્ટક રચનાની વ્યાખ્યા : એકત્રિત માહિતીને વર્ગીકૃત કર્યા બાદ કોષ્ટક સ્વરૂપે દર્શાવવામાં આવે છે. કોષ્ટકની રચના કરતા પહેલા જે બાબત કે હેતુ માટે કોષ્ટકની રચના કરવાનીહોય તે બાબત કે હેતુ સિવાયની બિનજરૂરી માહિતી દૂર કરવામાં આવે છે અને જરૂરીમાહિતીને તેના લક્ષણો કે ગુણધર્મો અનુસાર તાર્કિક ક્રમમાં હાર અને સ્તંભ મુજબગોઠવણ કરવામાં આવે છે. જુદા જુદા લેખકોએ આપેલ વ્યાખ્યામાં નીચે મુજબ સમજીશકાય છે.

(1) પ્રો. એલ. આર. કોન્નોરના જણાવ્યા મુજબ કોષ્ટક એટલે ''સાંખ્યાકીય માહિતીને ક્રમિક અને સુવ્યવસ્થિત સ્વરૂપે રજુ કરવાની પ્રક્રિયા'' તેની મદદથી સંશોધનની સમસ્યા યોગ્ય

રીતે પ્રકાશિત કરી શકાય.

(2) પ્રો. એમ. એમ. બ્લૈરના જણાવ્યા મુજબ કોષ્ટક એટલે ''વિસ્તૃત માહિતીને તાર્કિક અને ક્રમબદ્ધ રીતે ગોઠવવી.''

ટૂંકમાં કોષ્ટક રચનાએ માહિતી એકઠી કરવાની પ્રક્રિયા અને એકત્રિત કરેલ માહિતીનું અંતિમ પૃથક્કરણ કરવાની પ્રક્રિયાને જોડતી કડી છે. તેમાં એકત્રિત કરેલ માહિતીનું વર્ગીકરણ કર્યા પછી હાર કે સ્તંભમાં ગોઠવી, યોગ્ય શીર્ષક સાથે સંક્ષિપ્તમાં સુવ્યવસ્થિત અને સચોટ રજૂઆત કરવામાં આવે છે.

2.7.2 કોષ્ટક રચનાના ઉપયોગો : કોષ્ટક રચનાની વ્યાખ્યા ઊપરથી તેના વિવિધ ઉપયોગો નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય.

(1) **ટૂંકાણમાં રજૂઆત :** વર્ગીકૃત માહિતીને યોગ્ય હેતુ અનુસાર કોષ્ટક દ્વારા ટૂંકાણમાં રજૂ કરી શકાય છે.

(2) **અયોગ્ય માહિતી :** એકત્રિત કરેલ માહિતીને વર્ગીકૃત કર્યા પછી તેમા રહેલ બીનજરૂરી કે અયોગ્ય માહિતી દૂર કરી કોષ્ટકની રચના કરવામાં આવે છે ઉપરાંત ભુલ ભરેલી માહિતી પણ શોધી શકાય છે.

(3) **આલેખો દ્વારા રજૂઆત અને પૃથક્કરણ :** કોષ્ટક રચનાની મદદથી વર્ગીકૃત માહિતીને આલેખો દ્વારા રજૂ કરી તેનું પૃથક્કરણ સરળતાની સમજી કે સમજાવી શકાય છે.

(4) **આકર્ષક માહિતી :** કોષ્ટકની રચના કરવાથી માહિતીને આકર્ષક બનાવી સરળતાથી યાદ રાખી શકાય છે.

(5) **અલગ નોંધ :** કોષ્ટકની રચના કર્યા પછી માહિતીને સુસ્પષ્ટ કરવા અલગ નોંધ કરવાની જરૂરિયાત ઉદ્ભવતી નથી.

(6) **ભુલ શોધી શકાય :** કોષ્ટક રચનામાં કોઈ માહિતીમાં ભુલ હોય તો હાર કે સ્તંભની મદદથી ઝડપભેર શોધી શકાય છે.

2.8 કોષ્ટક રચનાના ભાગો :

કોષ્ટક રચના વખતે તેને જુદા જુદા ભાગોમાં દર્શાવવામાં આવે છે. જે પૈકી અગત્યના ભાગોનું વર્ણન નીચે મુજબ કરી શકાય.

(1) કોષ્ટકનો ક્રમ : કોષ્ટક રચના દરમ્યાન તેને સરળતાથી શોધી કાઢવા એક સંદર્ભ તરીકે તેને ક્રમ આપવામાં આવે છે. જે કોષ્ટકની ઉપર, નીચેના ભાગમાં, મધ્યમ ભાગમાં કે ડાબી બાજુ મુખ્ય શીર્ષકની આજુબાજુ ક્રમબદ્ધ રીતે લખવામાં આવે છે.

(2) મુખ્ય શીર્ષક : કોષ્ટકની રચના જે હેતુ માટે કરવામાં આવી હોય તે હેતુને કોષ્ટકની ઉપર સુવાચ્ય અક્ષરોમાં સ્પષ્ટ અને સમજી શકાય તે રીતે લખવામાં આવે છે તેને મુખ્ય શીર્ષક તરીકે ઓળખાવી શકાય.

(3) મુખ્યનોંધ અને પેટાનોંધ : કોષ્ટકમાં દરેક સ્તંભ કે હારને ટૂંકુ અને સ્પષ્ટ મથાળુ આપવામાં આવે છે તેને મુખ્ય નોંધ તરીકે ઓળખાવી શકાય, જ્યારે મુખ્ય નોંધની સામે જે પેટા મથાળા આપવામાં આવે છે. તેને પેટાનોંધ તરીકે ઓળખી શકાય. આ નોંધો કોષ્ટકમાં મધ્યમાં કે હારમાં સ્પષ્ટ રીતે સમજી શકાય તે રીતે લખવામાં આવે છે.

(4) વિભાગીય નોંધ : કોષ્ટકને અલગ અલગ વિભાગમાં વિભાજીત કરવામાં આવેલ હોય તો આ પ્રકારની વિભાગીય નોંધ કરવામાં આવે છે જે નાના અક્ષરોમાં સ્તંભના મધ્ય ભાગમાં ટૂંકાણ સ્વરૂપે લખાય છે.

(5) માળખું કે બોડી : એકત્રિત કરેલ માહિતીને વર્ગીકૃત કર્યા પછી તેને સાંખ્યકીય સ્વરૂપમાં વિવિધ સ્તંભો કે હારોમાં સુવ્યવસ્થિત રીતે ગોઠવવામાં આવે છે. તેને કોષ્ટકનું માળખુ કે બોડી તરીકે ઓળખાવી શકાય. આ માળખામાં માહિતીને સામાન્ય રીતે હારમાં ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ અને સ્તંભમાં ઊપરથી નીચે તરફ દર્શાવવામાં આવે છે.

(6) પાદનોંધ : આ નોંધ એ કોષ્ટક પૂર્ણ થયા પછી કોષ્ટકના નીચેના ભાગમાં દર્શાવવામાં આવે છે. તેની મદદથી જે માહિતી કોષ્ટકમાં રજૂ ન કરી શકાય તેમ હોય અને અસ્પષ્ટ હોય તેની વધુ સ્પષ્ટતા કરી શકાય છે. પાદનોંધ એ શીર્ષકનો જ એક ભાગ છે.

(7) માહિતીના સ્ત્રોતનોંધ : કોષ્ટકની રચના કરતી વખતે એકત્રિત કરેલ માહિતી ક્યાંથી મળેલ છે તે દર્શાવવા કોષ્ટકની નીચે સ્રોત નોંધ કરવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે તેમાં મળેલ માહિતીનું સ્થળ, પ્રકાશનનો સંદર્ભ, વેબસાઈટનું નામ, ગ્રંથનું નામ, પાના નંબર, સામાયિકોનું નામ વગેરે સંદર્ભો લખવામાં આવે છે.

2.9 કોષ્ટકના પ્રકારો :કોષ્ટકને મુખ્યત્વે ત્રણ પ્રકારે વહેંચી શકાય જે નીચે મુજબ છે.

(૧) ચલની દ્દષ્ટિએ (૨) હેતુની દ્દષ્ટિએ (૩) માહિતીના પ્રકારની દ્દષ્ટિએ

(1) ચલ કે ગુણધર્મની દ્દષ્ટિએ :

ચલ કે ગુણધર્મની દ્દષ્ટિએ કોષ્ટકના મુખ્ય બે પ્રકાર પાડી શકાય.

(A) સાદુ કોષ્ટક (B) જટિલ કોષ્ટક

(A) સાદુ કોષ્ટક : સમષ્ટિ કે સમુહના કોઈ એકાદ ગુણધર્મ કે ચલને ધ્યાનમાં રાખીને વર્ગીકૃત કરેલ માહિતીને કોષ્ટક સ્વરૂપે રજૂ કરવામાં આવે તો તેને સાદું કોષ્ટક તરીકે ઓળખી શકાય. દા.ત., બાબા સાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીમાં આર્ટસ પ્રવાહમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓનું અભ્યાસના વર્ષ મુજબ વર્ગીકરણ કરી નીચે મુજબ કોષ્ટકમાં રજૂ કરવામાં આવે તો તેને સાદું કોષ્ટક કહી શકાય.

આર્ટસ પ્રવાહમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા દર્શાવતુ કોષ્ટક

અભ્યાસનું વર્ષ	**વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા**
પ્રથમ વર્ષ બી.એ.	200
દ્વિતીય વર્ષ બી.એ.	180
તૃતીય વર્ષ બી.એ.	120
કુલ	500

(B) જટિલ કોષ્ટક :

સમષ્ટિ કે સમુહના બે કે તેથી વધુ ગુણધર્મ કે ચલને ધ્યાનમાં રાખીને વર્ગીકૃત કરેલ માહિતીને કોષ્ટક સ્વરૂપે રજૂ કરવામાં આવે તો તેને જટિલ કોષ્ટક તરીકે ઓળખી શકાય. દા.ત., બાબા સાહેબ આંબેડકર યુનિ.માં આર્ટસ પ્રવાહમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓને અભ્યાસનું વર્ષ અને જાતિ એમ બે ગુણધર્મો મુજબ વર્ગીકરણ કરી નીચે મુજબ કોષ્ટકમાં રજૂ કરવામાં આવે તો તેને જટિલ કોષ્ટક કહી શકાય.

અભ્યાસનું વર્ષ અને જાતિ મુજબ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા દર્શાવતુ કોષ્ટક

અભ્યાસનું વર્ષ	**જાતિ**		
	છોકરા	**છોકરી**	**કુલ**
પ્રથમ વર્ષ બી.એ	100	100	200
દ્વિતીય વર્ષ બી.એ	80	100	180
તૃતીય વર્ષ બી.એ.	40	80	120
કુલ	**220**	**280**	**500**

(2) **હેતુની દ્રષ્ટિએ :** તેને બે પ્રકારે વહેંચી શકાય જે નીચે મુજબ છે.

(A) સામાન્ય સંદર્ભ કોષ્ટક (B) ટૂંકક્ષાર કોષ્ટક

(A) **સામાન્ય સંદર્ભ કોષ્ટક :** આ પ્રકારના કોષ્ટકની રચના સામાન્ય હેતુઓનો સંદર્ભ દર્શાવતું હોય એ રીતે તૈયાર કરવામાં આવે છે.

(B) **ટૂંક ક્ષાર કોષ્ટક :** આ પ્રકારના કોષ્ટકની રચના માહિતીના તમામ હેતુઓની ટૂંકાણમાં વ્યવસ્થિત રજૂઆત કરી, અભ્યાસના મુખ્ય હેતુઓ સમજી શકાય તે રીતે તૈયાર કરવામાં આવે છે.

(3) **માહિતીના પ્રકારની દ્રષ્ટિએ** તેને મુખ્યત્વે બે પ્રકારે વહેંચી શકાય છે. જે નીચે મુજબ છે.

(A) મૂળભૂત કોષ્ટક (B) ગૌણ કે ઉત્પન્ન કરેલ કોષ્ટક

(A) **મૂળભૂત કોષ્ટક :** પ્રાથમિક માહિતી ભેગી કરીને જે કોષ્ટકની રચના કરવામાં આવે છે તે મૂળભૂત કોષ્ટક તરીકે ઓળખાય છે.

(B) **ગૌણ કે ઉત્પન્ન કરેલ કોષ્ટક :** મૂળભૂત કોષ્ટકની મદદથી અન્ય કોષ્ટક મેળવવામાં આવે કે તૈયાર કરવામાં આવે તો તેને ગૌણ કે ઉત્પન્ન કરેલ કોષ્ટક તરીકે ઓળખી શકાય.

ઉદા.14 **એક કોલેજમાં કુલ 1000 વિદ્યાર્થીઓ અભ્યાસ કરે છે. જેમાં છોકરીઓની સંખ્યા 700 છે તથા નાપાસ થયેલા છોકરાઓ અને છોકરીઓની સંખ્યા અનુક્રમે 100 અને 260 છે તો તે ઉપરથી કોષ્ટકની રચના કરો.**

જવાબ: પરિણામ અને જાતિ પ્રમાણે વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા દર્શાવતુ કોષ્ટક

	પરિણામ		
જાતિ	**પાસ**	**નાપાસ**	**કુલ**
છોકરાઓ	200	100	300
છોકરીઓ	440	260	700
કુલ	640	360	1000

- **સમજૂતી :**

કુલ વિદ્યાર્થીઓ 1000 છે. તેમાંથી છોકરીઓ 700 બાદ કરતા છોકરાઓની સંખ્યા = 300

નાપાસ થયેલા છોકરાઓ 100 જે કુલ 300 છોકરાઓમાંથી બાદ કરતાં પાસ થયેલ છોકરાઓ = 200

નાપાસ થયેલ છોકરીઓ 260 જે કુલ 700 છોકરીઓમાંથી બાદ કરતા પાસ થયેલ છોકરીઓની સંખ્યા = 440

પાસ અને નાપાસ વિદ્યાર્થીઓમાં છોકરા અને છોકરીનો સરવાળો કરો

આડો અને ઊભો સરવાળો 1000

ઉદા.15 બે શહેરો x અને y માં ચાની આદતવાળા મનુષ્યો અંગેની માહિતી નીચે મુજબ છે : શહેર x માં કુલ પુરૂષોની સંખ્યા કુલ વસ્તીના 52% હતી જે પૈકી 50% પુરૂષો ચાની આદતવાળા તેમજ કુલ વસ્તીના 60% લોકો ચાની આદતવાળા છે. જ્યારે શહેર y માં કુલ પુરૂષોની સંખ્યા 60% હતી જે પૈકી 60% પુરૂષો ચાની આદતવાળા છે. તેમજ કુલ વસ્તીના 70% લોકો ચાની આદત ધરાવે છે તો તે ઉપરથી કોષ્ટકની રચના કરો.

જવાબ: અહીં ત્રણ ગુણધર્મો આપેલા છે.

(1) વિસ્તાર - શહેર x અને y શહેર

(2) જાતિ - પુરૂષો અને સ્ત્રીઓ

(3) ચાની આદત - ચાની આદતવાળા અને ચાની આદત વિનાના

નોંધ : અહીં બંને શહેરોની કુલ વસ્તી આપેલ નથી. તેથી

શહેર x ની કુલ વસ્તી = 100 અને

શહેર y ની કુલ વસ્તી = 100 ધારીશું

શહેર x અને y માં ચાની આદતવાળા મનુષ્યોની સંખ્યા દર્શાવતુ કોષ્ટક

વિસ્તાર →	**શહેર x**			**શહેર y**			**કુલ વસ્તી**		
જાતિ → **ચાની આદત ↓**	**પુરુષ**	**સ્ત્રી**	**કુલ**	**પુરુષ**	**સ્ત્રી**	**કુલ**	**પુરુષ**	**સ્ત્રી**	**કુલ**
ચાની આદતવાળા	26	34	60	36	34	70	62	68	130
ચાની આદતવાળા વિનાના	26	14	40	24	06	30	30	20	70
કુલ	52	48	100	60	40	100	112	88	200

સમજૂતી

શહેર x :

શહેરની કુલ વસ્તી 100 ધારતા તેના 52% પુરુષોની સંખ્યા = 100 × 52% = 52 મળશે

તેવી બાકીની સંખ્યાએ કુલ સ્ત્રીઓની સંખ્યા = 48

52 પુરૂષો પૈકી 50% પુરૂષો ચાની આદતવાળા છે. તેથી 52 × 50% = 26 પુરૂષો ચાની આદતવાળા અને 26 પુરૂષો ચાની આદત વિનાના મળશે.

હવે કુલ વસ્તીના 60% ચાની આદતવાળા છે. તેથી ચાની આદતવાળા મનુષ્યોની સંખ્યા

= 60 જેમાંથી 26 પુરુષો ચાની આદતવાળા અને બાકીના 34 સ્ત્રીઓ ચાની આદતવાળા મળશે.

કુલ સ્ત્રીઓની સંખ્યામાં 48 માંથી ચાની આદતવાળી સ્ત્રીઓની સંખ્યામાં 34 બાદ કરતાં ચાની આદત વિનાની સ્ત્રીઓની સંખ્યા 14 મળશે.

તેવી જ રીતે શહેર y માં પણ સમજી શકાય. ત્યાર બાદ બંને શહેરોના પુરૂષો, સ્ત્રીઓ અને કુલનો સરવાળો કરો. તેવી જ રીતે બંને શહેરમાં ચાની આદતવાળા અને આદત વિનાના સ્ત્રી, પુરૂષો અને કુલનો સરવાળો કરી કોષ્ટક તૈયાર કરો. ટૂંકમાં આડો-ઊભો સરવાળો કરો.

ઉદા.16 એક કોલેજમાં કુલ 1000 વિદ્યાર્થીઓ હતા જેમા પ્રથમ વર્ષ બી.એ., દ્વિતીય વર્ષ બી.એ. અને તૃતીય વર્ષ બી.એ.માં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓનું પ્રમાણ 2:1:1 હતું પ્રથમ વર્ષ બી.એ.માં અભ્યાસ કરતા કુલ વિદ્યાર્થીઓ પૈકી 20% છોકરાઓ હતા અને દ્વિતીય વર્ષમાં અભ્યાસ કરતી છોકરીઓની સંખ્યા છોકરાઓ કરતા ચારગણી હતા જ્યારે તૃતીય વર્ષમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓમાં છોકરીઓની સંખ્યા 210 જેટલી હતી. આ માહિતીને કોષ્ટકમાં દર્શાવી યોગ્ય શીર્ષક આપો.

જવાબ: અહીં બે ગુણધર્મો આપ્યા છે.

(1) અભ્યાસનું વર્ષ : પ્રથમ વર્ષ બી.એ. દ્વિતીય વર્ષ બી.એ. તૃતીય વર્ષ બી.એ.

(2) જાતિ : છોકરાઓ અને છોકરીઓ

શીર્ષક : એક કોલેજના વિદ્યાર્થીઓનું અભ્યાસના વર્ષ અને જાતિ અનુસાર સંખ્યા દર્શાવતુ કોષ્ટક

અભ્યાસનું	**જાતિ**		**કુલ**
વર્ષ	**છોકરા**	**છોકરી**	**વિદ્યાર્થીઓ**
પ્રથમ વર્ષ બી.એ.	100	400	500
દ્વિતીય વર્ષ બી.એ.	50	200	250
તૃતીય વર્ષ બી.એ.	40	210	250
કુલ વિદ્યાર્થીઓ	190	810	1000

સમજૂતી.કુલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા = 1000

અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓનું પ્રમાણ 2 : 1 : 1 છે.

$\therefore$ પ્રથમ વર્ષમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓ

$$= 1000 \times \frac{2}{4}$$

$$= 500$$

$\therefore$ દ્વિતીય વર્ષમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓ

$$= 1000 \times \frac{1}{4}$$

$$= 250$$

$\therefore$ તૃતીય વર્ષમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓ

$$= 1000 \times \frac{1}{4}$$

$$= 250$$

પ્રથમ વર્ષમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓના 20% છોકરા

$\therefore$ પ્રથમ વર્ષમાં અભ્યાસ કરતા છોકરા = 500 × 20% = 100

$\therefore$ પ્રથમ વર્ષમાં અભ્યાસ કરતી છોકરીઓ = 400

દ્વિતીય વર્ષમાં છોકરીઓની સંખ્યા છોકરાઓ કરતાં ચાણ ગણી છે.

$\therefore$ ધારોકે છોકરાઓની સંખ્યા = x

તેથી છોકરીઓની સંખ્યા = $4x$

કુલ સંખ્યા = $5x$

હવે દ્વિતીય વર્ષમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા = 250

$$\therefore \quad x + 4x = 250$$
$$5x = 250$$
$$x = \frac{250}{5} = 50$$ જે દ્વિતીય વર્ષના છોકરાઓની સંખ્યા છે.

દ્વિતીય વર્ષના છોકરીઓની સંખ્યા = $4x = 4 \times 50 = 200$

તૃતીય વર્ષમાં છોકરીઓની સંખ્યા = 210

છોકરાઓની સંખ્યા = $250 - 210 = 40$

2.10 સ્વાધ્યાય

(1) કોઈ એક બગીચામાં ગુલાબના 25 છોડ પર ખીલેલ ગુલાબની સંખ્યાની માહિતી નીચે મુજબ છે.તે ઉપરથી આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

5, 5, 4, 1, 0, 3, 4, 5, 1, 2, 4, 5, 5, 3, 1, 0, 5, 2, 4, 4, 2, 2, 1, 1, 3

જવાબ:

ફૂલોની સંખ્યા : x	0	1	2	3	4	5
આવૃત્તિ : f	2	5	4	3	5	6

(2) બાબા સાહેબ આંબેડકર યુની.માં પ્રથમ વર્ષ બી.એ.માં અભ્યાસ કરતાં 30 વિદ્યાર્થીઓએ અર્થસાસ્ત્રની પરીક્ષામાં મેળવેલ ગુણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી પ્રથમ વર્ગ 5-9 અને વર્ગ લંબાઈ 5 રાખી આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

29, 22, 15,13, 9, 25, 28, 30, 25, 26, 25, 25, 23, 30, 22, 27, 32, 21, 33, 30, 16, 20, 22, 31, 15, 17, 14, 11, 7, 34

જવાબ:

વર્ગ (x)	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34
આવૃત્તિ (f)	2	3	4	6	8	7

(3) 30 વેપારીઓએ મેળવેલ માસિક નફો (હજારમા રૂા. માં) નીચે આપેલ છે તો તે ઉપરથી આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

36, 33, 25, 48, 31, 17, 34, 37, 33, 28, 36, 31, 35, 32, 29, 30, 47, 25, 17, 40, 30, 16, 35, 11, 18, 29, 40, 12, 19, 41

જવાબ:

વર્ગ	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50
આવૃત્તિ	2	5	2	5	8	4	2	2

(4) 60 વ્યક્તિઓની નીચેની માહિતી ઉપરથી 3 વર્ગલંબાઈવાળુ આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો અને તે ઉપરથી સંચયી આવૃત્તિ શોધો.

86, 81, 73, 78, 75, 82, 78, 80, 81, 80, 80, 83, 76, 77, 86, 90, 83, 81, 78, 83,85, 81, 78, 80, 75, 78, 77, 84, 75, 76, 81, 89, 90, 70, 76, 78, 85, 76, 78, 84, 71, 71, 81, 74, 90, 86, 82, 88, 70, 84, 72, 73, 73, 83, 84, 76, 77, 81, 84, 78, 71

જવાબ:

વર્ગ	70-72	73-75	76-78	79-81	82-84	85-87	88-90
આવૃત્તિ	6	6	16	11	11	5	5
સંચયી આવૃત્તિ	6	12	28	39	50	55	60

(5) એક કારખાનાના 40 કારીગરોની દૈનિક આવક અંગેની માહિતી રૂપિયામાં નીચે મુજબ છે. સ્ટર્જના નિયમના ઉપયોગથી વર્ગલંબાઈ નક્કી કરી આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

100, 150, 136, 98, 125, 110, 120, 138, 65, 80, 110, 100, 85, 70, 95, 170, 140, 105, 95, 120, 135, 165, 118, 132, 70, 120, 130, 88, 164, 85, 80, 183, 115, 140, 110, 184, 148, 170, 145, 160

જવાબ: $k = 1 + 3.22.\log 40$

$= 1 + 3.22\ (1.6021)$

$= 1 + 5.322$

$k = 6.322 = 6$ વર્ગલંબાઈ = 20

x	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185
f	5	8	9	8	5	5

(6) 30 વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ (સે.મી.માં) નીચે દર્શાવ્યા મુજબ મળેલ હોય તો વર્ગોની સંખ્યા 6 લઈ અનિવારક આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

150, 152, 145, 141, 162, 163, 148, 159, 150, 161, 148, 155, 151, 162, 145, 149, 154, 160, 162, 153, 165, 141, 153, 143, 158, 158, 149, 148, 152, 162

$$\text{વર્ગ લંબાઈ} = \frac{\text{કુલ વિદ્યાર્થીની સંખ્યા}}{\text{વર્ગની સંખ્યા}}$$

$$= \frac{30}{6}$$

$$= 5$$

$\therefore$ વર્ગ લંબાઈ 5 છે.

વર્ગ	આવૃત્તિ
141-145	05
146-150	07
151-155	07
156-160	04
161-165	07
166-170	00

(7) એક પ્રશ્નપત્રના બે વિભાગમાં પ્રત્યેક વિભાગમાં 1 થી 6 એમ કુલ બાર પ્રશ્નના જવાબ લખવાના હતા. 25 વિદ્યાર્થીઓએ બંને વિભાગમાં કેટકેટલા પ્રશ્ન લખ્યા તેની માહિતી નીચે પ્રમાણે છે. તો તે પરથી દ્વિચલ આવૃત્તિ વિતરણની રચના કરો.

(2, 4) (3, 1) (2, 5) (2, 3) (5, 5) (4, 1) (4, 3) (6, 2) (5, 3) (3, 5) (2, 4) (6, 2) (5, 1) (6, 5) (3, 3) (2, 6) (3, 2) (6, 4) (1, 4) (5, 2) (3, 4) (3, 6) (5, 4) (5, 2) (6, 2)

જવાબ:

પ્રથમ		**બીજો વિભાગ**					
વિભાગ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**કુલ**
1	-	-	-	1	-	-	1
2	-	-	1	2	1	1	5
3	1	1	1	1	1	1	6
4	1	-	1	-	-	-	2
5	1	2	1	1	1	-	6
6	-	3	-	1	1	-	5
કુલ	3	6	4	6	4	2	25

(8) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી 'થી ઓછા' અને 'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

xi	0	1	2	3	4	5
fi	5	15	25	32	18	5

જવાબ : થી ઓછા પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ

કે તેથી ઓછા	0	1	2	3	4	5
સંચયી આવૃત્તિ	5	20	45	77	95	100

થી વધુ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ

કે તેથી વધુ	0	1	2	3	4	5
સંચયી આવૃત્તિ	100	95	80	55	23	5

(9) 'થી ઓછા' અને 'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

xi	10-15	16-19	20-24	25-29	30-34
fi	2	8	22	13	5

જવાબ: થી ઓછા પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ

તેથી ઓછા	15.5	19.5	24.5	29.5	34.5
સંચયી આવૃત્તિ	2	10	32	45	50

થી વધુ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ

કે તેથી વધુ	9.5	15.5	19.5	25.5	30.5
સંચયી આવૃત્તિ	50	48	40	18	5

(10) એક કોલેજમાં કુલ 1000 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 120 વિદ્યાર્થીઓને આંખમાં ખામી જણાય છે. તે કોલેજમાં કુલ 300 છોકરીઓ હોય અને તેમાંથી 50 છોકરીઓને આંખમાં ખામી માલુમ પડે તો તે ઉપરથી યોગ્ય કોષ્ટકની રચના કરો.

જવાબ:

જાતિ	**છોકરા**	**છોકરી**	**કુલ**
આંખોમાં ખામી	70	50	120
આંખો સારી	650	250	880
કુલ	**700**	**300**	**1000**

(11) એક નિબંધ સ્પર્ધામાં બે કોલેજ x અને y ના કુલ 75 વિદ્યાર્થીઓએ ભાગ લીધો જેમાં છોકરા અને છોકરીઓનું પ્રમાણ 8 : 7 હતું, x કોલેજની છોકરીઓ કરતાં y કોલેજની છોકરીઓની સંખ્યા 5 વધુ હતી. x કોલેજમાં કુલ 60% વિદ્યાર્થીઓ અભ્યાસ કરતા હતા તો તે ઉપરથી કોષ્ટકની રચના કરો.

જવાબ:

	જાતિ		
કોલેજ	**છોકરા**	**છોકરી**	**કુલ**
x	30	15	45
y	10	20	30
કુલ	40	35	75

(12) બાબા સાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીના એક અભ્યાસક્રમમાં 2000 વિદ્યાર્થીઓ અભ્યાસ કરતા હતા જેમાં 30% છોકરીઓ હતી. તેમજ છોકરાઓની કુલ સંખ્યામાં 1050 પરિણીત હતા જે પૈકી 120 બેકાર હતી. અપરિણીત છોકરાઓમાં 220 નોકરીવાળા હતી. છોકરીઓમાં 30% અપરિણીત હતા. જેમાં 50 બેકાર હતી. પરિણીત છોકરીઓમાં 30 બેકાર હતા તો તે ઉપરથી કોષ્ટકની રચના કરો.

જવાબ:

જાતિ વૈવાહિક દરજ્જો	છોકરા			છોકરી			કુલ		
વ્યવસાય	પરિણિત	અપરિણિત	કુલ	પરિણિત	અપરિણિત	કુલ	પરિણિત	અપરિણિત	કુલ
નોકરી વાળા	930	220	1150	390	130	520	1320	350	1670
બેકાર	120	130	250	30	50	80	150	180	330
કુલ	1050	350	1400	420	180	600	1470	530	2000

(13) નીચે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

(1) નીચેનામાંથી સ્ટર્જનો નિયમ કયો છે ?

(*a*) $k = 2.233\log_{10}{}^{n}$ (*b*) $k = 1 + 3.322\log_{10}{}^{n}$

(*c*) $k = 1 + 2.233\log_{10}{}^{n}$ (*d*) એકપણ નહીં.

(2) નીચેનામાંથી કયા સૂત્રની મદદથી વર્ગલંબાઈ શોધી શકાય.

(*a*) $i = \frac{K}{R}$ (*b*) $k = \frac{i}{R}$ (*c*) $i = \frac{R}{K}$ (*d*) એકપણ નહીં.

(3) નીચેનામાંથી .... વર્ગીકરણને કોષ્ટક રચના કહે છે.

(*a*) આલેખીય (*b*) ગુણાત્મક (*c*) આવૃત્તિય (*d*) એકપણ નહી

(4) માહિતીના ગુણાત્મક વર્ગીકરણને .... કહે છે.

(*a*) કોષ્ટક રચના (*b*) આલેખ રચના (*c*) આવૃત્તિ રચના (*d*) એકપણ નહી

(5) બે ચલની માહિતીના વર્ગીકરણ કરવાથી મળતુ કોષ્ટક .... તરીકે ઓળખાય છે.

(*a*) સાદું કોષ્ટક (*b*) દ્વિચલ કોષ્ટક (*c*) દ્વિવિધ કોષ્ટક (*d*) એક પણ નહી

(6) વર્ગ 20-29 ની ઊર્ધ્વ સીમા ....

(*a*) 20 (*b*) 49 (*c*) 29 (*d*) એકપણ નહી

(7) વર્ગ 20-29 ની અધઃ સીમા ....

(*a*) 20 (*b*) 49 (*c*) 29 (*d*) એકપણ નહી

(8) વર્ગીકરણના .... પ્રકારો છે.

(*a*) બે (*b*) ત્રણ (*c*) ચાર (*d*) એકપણ નહી

(9) સંચયી આવૃત્તિ વિતરણના .... પ્રકારો છે.

(*a*) ત્રણ (*b*) ચાર (*c*) પાંચ (*d*) ત્રણમાંથી એકપણ નહી

(10) વર્ગની લઘુતમ કિંમતને વર્ગની .... સીમા કહે છે.

(*a*) અધઃ (*b*) ઉર્ધ્વ (*c*) મધ્ય (*d*) એકપણ નહી

(11) વર્ગની મહત્તમ કિંમતને વર્ગની .... સીમા કહે છે.

(*a*) અધઃ (*b*) ઉર્ધ્વ (*c*) મધ્ય (*d*) એકપણ નહી

(12) વર્ગ 121-149 ની મધ્યકિંમત = ...

(*a*) 28 (*b*) 135 (*c*) 14 (*d*) એકપણ નહી

(13) મધ્યકિંમત શોધવાનું સૂત્ર

(*a*) $\frac{\text{ઉપલી હદ} + \text{નીચલી હદ}}{2}$ (*b*) $\frac{\text{ઉપલી હદ} - \text{નીચલી હદ}}{2}$

(*c*) ઉપલી પદ – નીચલી પદ (*d*) એકપણ નહી

(14) જો આવૃત્તિ વિતરણના વર્ગો 25-29.9, 30-34.9, ..., એ પ્રમાણે હોય તો વર્ગ 25-29.9 નું ઉર્ધ્વસીમા બિંદુ ....

(*a*) 29.5 (*b*) 29.95 (*c*) 30.5 (*d*) એકપણ નહી

(15) ઉપલી સીમાનું બીજું નામ .... છે.

(*a*) અધઃસીમા (*b*) ઉર્ધ્વસીમા (*c*) મધ્યસીમા (*d*) એકપણ નહી

(16) નીચલી સીમાનું બીજું નામ .... છે.

(*a*) અધઃસીમા (*b*) ઉર્ધ્વસીમા (*c*) મધ્યસીમા (*d*) એકપણ નહી

(17) વર્ગલંબાઈને .... સંકેત વડે દર્શાવાય છે.

(*a*) d (*b*) k (*c*) i (*d*) એકપણ નહી

(18) માહિતીનાં બે ચલ લક્ષણોના મુલ્ય અનુસાર વર્ગીકરણ કરવાથી મળતા આવૃત્તિ વિતરણને .... આવૃત્તિ વિતરણ કહે છે.

(*a*) બહુવિધ (*b*) દ્વિચલ (*c*) ત્રિચલ (*d*) એકપણ નહી

જવાબઃ (1) *b* (2) *c* (3) *b* (4) *a* (5) *b* (6) *c* (7) *a* (8) *a* (9) *d* (10) *a* (11) *b* (12) *b* (13) *a* (14) *b* (15) *b* (16) *a* (17) *c* (18) *b*

(14) વર્ગીકરણ એટલે શું ? તેના પ્રકારો જણાવો.

(15) કોષ્ટક રચના એટલે શું ? તેની ઉપયોગિતા જણાવો.

(16) અસતત આવૃત્તિ વિતરણ એટલે શું ?

(17) સતત આવૃત્તિ વિતરણ એટલે શું ?

(18) સતત આવૃત્તિ વિતરણના પ્રકારો સમજાવો.

(19) કોષ્ટકના પ્રકારો લખો.

(20) કોષ્ટકના ભાગો સમજાવો.

2.11 ચાવીરૂપ શબ્દો

વર્ગીકરણ	:	સમાન લક્ષણોની ક્રમબદ્ધ ગોઠવણ
સમાયાનુસાર	:	સમય અનુસાર
બહુવિધ વર્ગીકરણ	:	એકથી વધુ ગુણધર્મોનું વર્ગીકરણ
દ્વિચલ	:	બે ચલો
જટિલ કોષ્ટક	:	બે થી વધુ ચલોનું વર્ગીકરણ દર્શાવતું કોષ્ટક

2.12 સંદર્ભસૂચિ

1. 'Basic Statatistics' S. Chand & Sons, Delhi
2. ધંધાકીય સંશોધન પદ્ધતિઓ

   ડૉ. મહેન્દ્ર એચ. મૈસુરીયા અને ડૉ. દિનેશ એમ. પટેલ

   અક્ષર પબ્લિકેશન, અમદાવાદ.

❖

એકમ-૩ આંકડાશાસ્ત્રીય માહિતીનું આલેખી નિરૂપણ

: રૂપરેખા :

3.0 ઉદ્દેશો :

આ પ્રકરણનો મુખ્ય ઉદ્દેશ વિદ્યાર્થીઓને આંકડાશાસ્ત્રીય માહિતીને યોગ્ય આકૃતિઓ અને આલેખોમાં કેવી રીતે રજૂ કરી શકાય તે શીખવવાનો છે.

3.1 પ્રસ્તાવના :

અગાઉના પ્રકરણમાં વર્ગીકરણ અને કોષ્ટકમાં માહિતીઓ કેવી રીતે દર્શાવી શકાય તે શીખ્યા પરંતુ સામાન્ય રીતે ઓછું ભણેલ વ્યક્તિઓને કોષ્ટકો સમજવામાં મુશ્કેલી અનુભવતા હોય છે. તેથી આ પ્રકારની મુશ્કેલીઓ દૂર કરવા એકઠી કરેલી માહિતીને કોષ્ટકો સ્વરૂપે ન દર્શાવતા આલેખ કે આકૃત્તિઓ દ્વારા રજૂ કરવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે જટિલ માહિતીને કોષ્ટકો સ્વરૂપે રજૂ કરવી કંટાળા જનક નીવડે છે, ત્યારે આવી માહિતીનું આલેખી નિરૂપણ કરી ઉપયોગમાં લેવામાં આવે છે. અર્થશાસ્ત્ર, સમાજશાસ્ત્ર, મનોવિજ્ઞાન વગેરે વિષયોમાં આલેખની મદદથી વિગતો સ્પષ્ટ કરવી જરૂરી બનતી હોય છે. દા.ત. સમાજશાસ્ત્રી આકૃતિની મદદથી લોકોના માનસ ઉપર ધારી અસર ઊપજાવી સામાજિક સુધારાઓને અસરકારક બનાવતા હોય છે.

3.2 આકૃત્તિના પ્રકારો :

આકૃતિને મુખ્યત્વે ત્રણ ભાગોમાં વહેંચી શકાય. (A) સ્તંભાકૃત્તિ (B) વર્તુળાકૃત્તિ (C) ચિત્રાકૃત્તિ

આ પ્રકારની આકૃત્તિઓ એકત્રિત કરેલ માહિતીના વિવિધ લક્ષણો અને પ્રકારને અનુરૂપ તૈયાર કરવામાં આવે છે.જે નીચે મુજબ સમજીશું.

3.2.1

(A) **સ્તંભાકૃતિ :** આ પ્રકારની આકૃત્તિઓ સ્તંભોની રચના કરીને દોરવામાં આવે છે. તેને મુખ્ય ચાર ભાગમાં વહેંચી શકાય જેને એકમાપી આકૃત્તિ પણ કહે છે.

(i) એક લક્ષણ સ્તંભાકૃતિ (ii) પાસ-પાસેની સ્તંભાકૃત્તિ (iii) વિભાજીત સ્તંભાકૃત્તિ (iv) પ્રતિશત વિભાજીત સ્તંભાકૃત્તિ

(i) એક લક્ષણ સ્તંભાકૃત્તિ :

આ પ્રકારની સ્તંભાકૃત્તિ એટલે એકત્રિત કરેલ માહિતીને એક જ ચલ લક્ષણને આધારે આકૃત્તિના સ્વરૂપમાં દર્શાવવી. જેની મદદથી વિવિધ વસ્તુઓ, સ્થળો કે સમયોની સરખામણી કરી શકાય છે. સ્તંભાકૃતિની રચના નીચે મુજબ સમજી શકાય.

Step-I વિવિધ વસ્તુઓ, સ્થળો કે સમયે અંગેની માહિતીને X અક્ષ ઉપર સરખા અંતરે લો.

Step-II તે માહિતીઓના જથ્થા કે માપને પ્રમાણસર ઊંચાઈના સ્તંભો દોરો.

Step-III Y અક્ષ ઉપર યોગ્ય સ્કેલ લઈ સ્તંભની ઊંચાઈ નક્કી કરો.

Step-IV સ્તંભની પહોળાઈ યોગ્ય અને આકર્ષક દેખાય તે રીતે નક્કી કરો.

Step-V દરેક સ્તંભો વચ્ચેનું અંતર સરખું રાખો.

Step-VI દરેક સ્તંભો તાર્કિક ક્રમબદ્ધ રીતે ગોઠવો પરંતુ જો માહિતી સમયના ક્રમમાં આવી હોય તો તે ક્રમ બદલવો નહી.

આમ, સ્તંભાકૃત્તિ તૈયાર થશે તેની મદદથી વિવિધ વસ્તુઓ, સ્થળો કે સમય વચ્ચે સરખામણી કરી તારણો મેળવવામાં આવે છે.

ઉદા.1 બાબા સાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીમાં 2016-17ના વર્ષમાં કાર્ય કરતા કર્મચારીઓની વિદ્યાશાખા વાર સંખ્યા નીચે મુજબ હતી. યોગ્ય આલેખ રજૂ કરો.

વિદ્યાશાખા	વિનયન	વિજ્ઞાન	વાણિજ્ય	કાયદાશાસ્ત્ર	તબીબી	ઈજનેરી	અન્ય
કર્મચારીઓની સંખ્યા	180	102	122	40	60	15	10

જવાબ :

Step-I X અક્ષ ઉપર વિદ્યાશાખાઓ સરખા અંતરે લો.

Step-II દરેક કર્મચારીઓની સંખ્યાના પ્રમાણમાં સ્તંભની ઊંચાઈ નક્કી કરો.

Step-III Y અક્ષ પર 1 સેમી = 20 કર્મચારીઓ સ્કેલ લઈ સ્તંભો દોરો.

$\therefore$ વિનિયન શાખા માટે સ્તંભની ઊંચાઈ $= \frac{180}{20} = 9.0$ સે.મી.

વિજ્ઞાન શાખા માટે સ્તંભની ઊંચાઈ $= \frac{102}{20} = 5.1$ સે.મી.

વાણિજ્ય શાખા માટે સ્તંભની ઊંચાઈ $= \frac{122}{20} = 6.1$ સે.મી.

કાયદાશાસ્ત્ર શાખા માટે સ્તંભની ઊંચાઈ $= \frac{40}{20} = 2.0$ સે.મી.

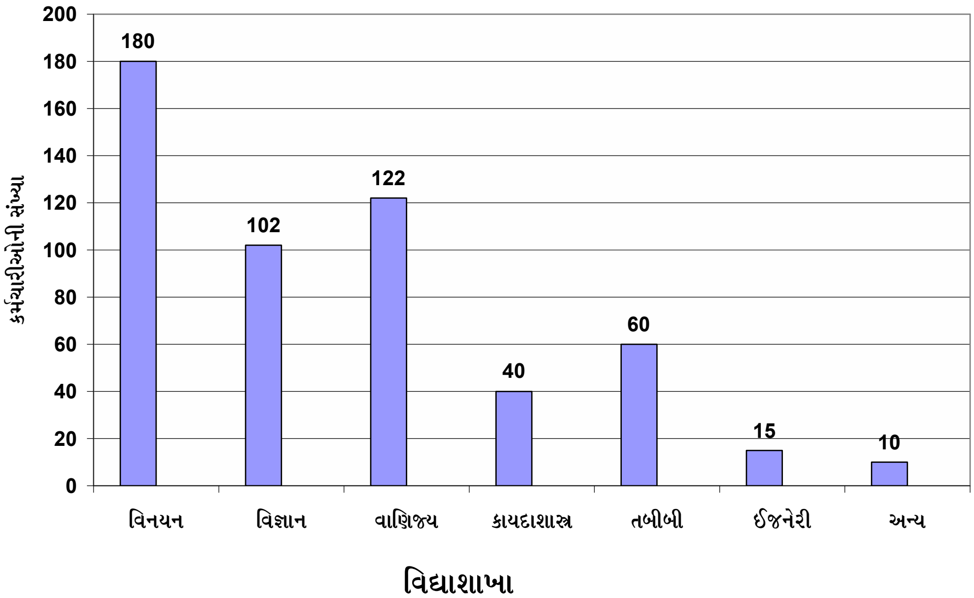
તબીબી શાખા માટે સ્તંભની ઊંચાઈ $= \frac{60}{20} = 3.0$ સે.મી.

ઈજનેરી શાખા માટે સ્તંભની ઊંચાઈ $= \frac{15}{20} = 0.75$ સે.મી.

અન્ય શાખા માટે સ્તંભની ઊંચાઈ $= \frac{10}{20} = 0.5$ સે.મી.

સ્તંભોને ઊંચાઈના તાર્કિક ક્રમમાં ગોઠવતા સ્તંભાકૃતિ નીચે મુજબ દોરો.
આલેખનો તાર્કિક કર્મ : વિનિયન,વાણિજ્ય, વિજ્ઞાન, તબીબી, કાયદાશાસ્ત્ર, ઈજનેરી, અન્ય.

બાબા સાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીમાં વર્ષ 2016-17ના વર્ષમાં કાર્ય કરતાં કર્મચારીઓની વિદ્યાશાખાવાર સંખ્યા દર્શાવતી સ્તંભાકૃતિ

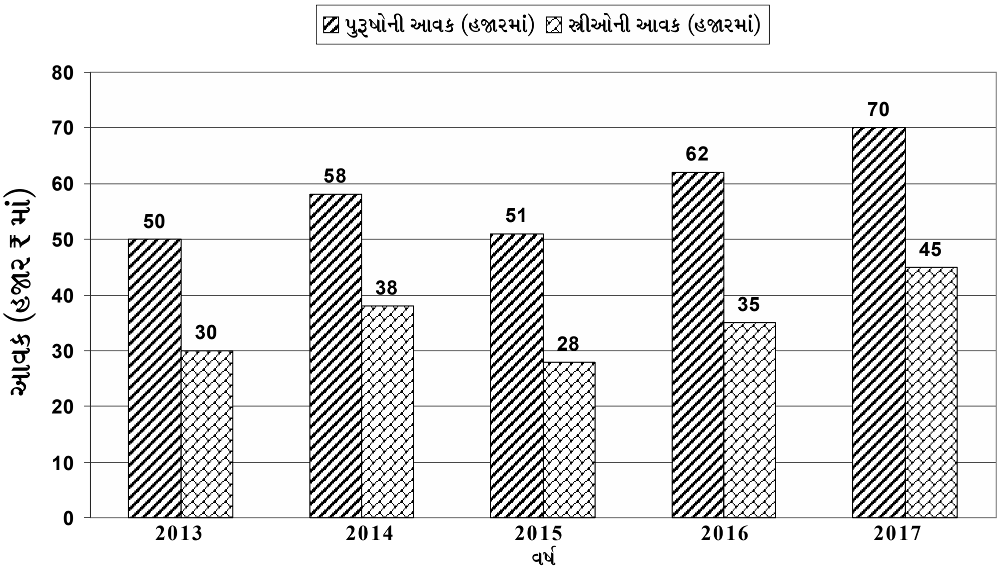


(ii) પાસ-પાસેની સ્તંભાકૃત્તિ :

જયારે સંબધિત માહિતીઓની સરખામણી એક કરતા વધુ પ્રકારની હોય ત્યારે એક કરતા વધુ સ્તંભો ન દોરતા પાસ-પાસે એક બીજાને અડીને સ્તંભો દોરવામાં આવે છે અને સ્તંભોની દરેક જોડ વચ્ચે એકસરખુ અંતર રાખવામાં આવે છે. સ્તંભાકૃતિની જેમ અહીં પણ દરેક સ્તંભો તાર્કિક ક્રમબદ્ધ રીતે ગોઠવવામાં આળે છે. પરંતુ જો માહિતી સમયના ક્રમમા આપી હોય તો તે ક્રમ બદલવો નહી. આમ પાસ-પાસેની સ્તંભાકૃતિની રચના નીચેના ઉદાહરણ ઊપરથી સમજીશું.

ઉદા.2 **નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી પાસ-પાસેની સ્તંભાકૃતિ દોરો.**

વર્ષ	**પુરૂષોની આવક (હજારમાં)**	**સ્ત્રીઓની આવક (હજારમાં)**
2013	50	30
2014	58	38
2015	51	28
2016	62	35
2017	70	45



(iii) વિભાજીત સ્તંભાકૃત્તિ :

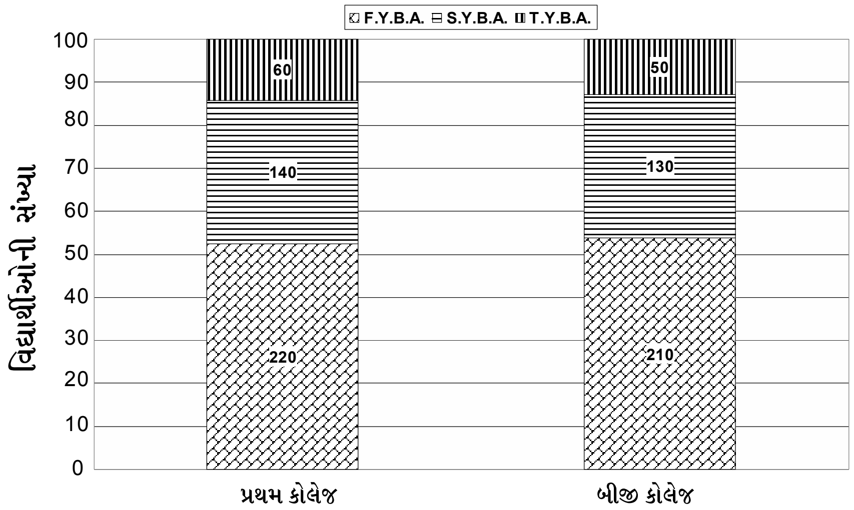
જયારે કુલ માહિતી વિવિધ સ્થળો, વસ્તુઓ કે વર્ષોમાં આપેલ હોય અને આ માહિતીઓને પણ પેટા માહિતી અનુસાર વિભાજીત કરી સરખાવવાની હોય ત્યારે જે આકૃતિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે તેને વિભાજીત સ્તંભાકૃતિ તરીકે ઓળખાવવામાં આવે છે. તેમા સ્તંભોને પેટા માહિતી અનુસાર વિભાજીત કરી સ્તંભોની ઊંચાઈ અને સ્તંભના વિભાજીત પેટાવિભાગોની ઊંચાઈઓને આધારે માહિતીઓ અને પેટા-માહિતીઓની સરખામણી કરવામાં આવે છે. અહીં સરખામણી કરવા માટે જુદા જુદા વિભાગો માટે એક સરખી નિશાનીઓ કે રંગોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જે નીચેના ઉદાહરણ ઉપરથી સમજીશું.

ઉદા.3 **બે કોલેજમાં ભણતા વિદ્યાર્થીઓની વર્ગવાર સંખ્યા નીચે મુજબ છે તે ઉપરથી વિભાજીત સ્તંભાકૃતિ દોરો.**

વર્ગ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	
	પ્રથમ કોલેજ	**બીજી કોલેજ**
F.Y.B.A.	220	210
S.Y.B.A.	140	130
T.Y.B.A.	60	50
	420	390

જવાબ : વિભાજીત સ્તંભાકૃતિ દોરવવા સંચયી આવૃત્તિ શોધો.

વર્ગ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા			
	પ્રથમ કોલેજ		**બીજી કોલેજ**	
	સંખ્યા	**સંચયી આવૃત્તિ**	**સંખ્યા**	**સંચયી આવૃત્તિ**
F.Y.B.A.	220	220	210	210
S.Y.B.A.	140	360	130	340
T.Y.B.A.	60	420	50	390
	420	-	390	-



(4) પ્રતિશત વિભાજીત સ્તંભાકૃત્તિ :

વિભાજીત સ્તંભાકૃતિની મદદથી પેટા માહિતીઓની સરખામણી યોગ્ય રીતે થઈ શકતી નથી તેથી તે મર્યાદાને દૂર કરવા કુલ માહિતીને 100 ટકા તરીકે લઈ પેટા-માહિતીનેઓની ટકાવારી શોધી તે પ્રમાણે સ્તંભને વિભાજીત કરવામાં આવે તો તેને પ્રતિશત વિભાજીત સ્તંભાકૃતિ તરીકે ઓળખાવી શકાય. આ પ્રકારની આકૃતિથી કુલ માહિતીની સરખામણી થઈ શકતી નથી. જે નીચેના ઉદાહરણ ઉપરથી સમજી શકાય છે.

ઉદા.4 **બે કુટુંબોની માસિક ખર્ચની વિગતો નીચે મુજબ છે. તો તે ઉપરથી પ્રતિશત વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ દોરો.**

ખર્ચની વિગત	માસિક ખર્ચ (રૂપિયામાં)	
	કુટુંબ A	કુટુંબ B
ખોરાક	720	600
કપડા	600	400
ભાડુ	360	400
કેળવણી	200	180
અન્ય	100	120
કુલ ખર્ચ	1980	1700

જવાબ: કુલ ખર્ચને 100% ગણી બંને કુટુંબના દરેક ખર્ચની ટકાવારી શોધતા

ખર્ચની વિગત	કુટુંબ A			કુટુંબ B		
	માસિક ખર્ચ	ટકા	*cf*	માસિક ખર્ચ	ટકા	*cf*
ખોરાક	720	36	36	600	35	35
કપડા	600	30	66	400	24	59
ભાડુ	360	18	84	400	24	83
કેળવણી	200	10	94	180	10	93
અન્ય	100	6	100	120	07	100
કુલ	**1980**	**100**	-	**1700**	**100**	-

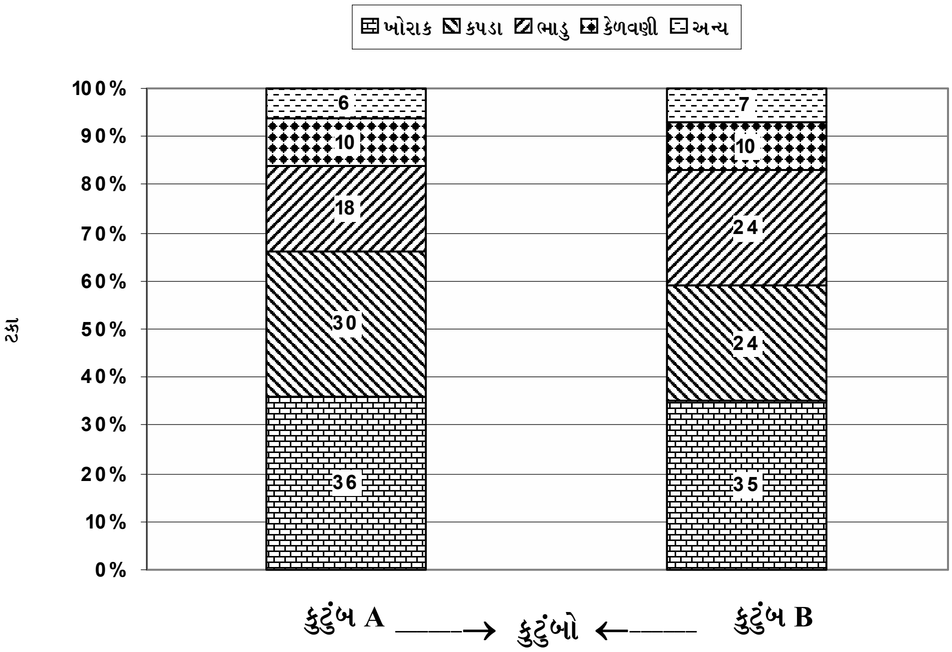
સમજૂતી :

કુટુંબ A ખોરાક = $\frac{720}{1980} \times 100 = 36$

તેવી જ રીતે કપડા, ભાડુ, કેળવણી, અન્ય, શોધાય.

કુટુંબ B ખોરાક = $\frac{600}{1700} \times 100 = 35$

તેવી જ રીતે કપડા, ભાડુ, કેળવણી, અન્ય, શોધાય.



ઉદા.5 **એક ફેક્ટરીમાં બે પ્રકારની વસ્તુઓ x અને y નું ઉત્પાદન કરવામાં આવે છે. તેનો એકમદીઠ ખર્ચ અને વસ્તુદીઠ વેચાણ કિંમત નીચે પ્રમાણે છે. તો તે પરથી નફો-નુકશાન દર્શાવતી પ્રતિશત વિભાજીત સ્તંભાકૃતિ દોરો.**

વિગત	વસ્તુ-x રૂા.	વસ્તુ-y રૂા.
ખર્ચ : મજૂરી	800	600
કાચો માલ	1500	1140
અન્ય	300	160
વેચાણ કિંમત	2500	2000

જવાબ: વેચાણ કિંમતને 100 ટકા તરીકે લેતા બંને વસ્તુના ખર્ચના પેટા વિભાગોની ટકાવારી નીચે મુજબ થશે. ખર્ચ વે.કિ.

ટકાવારી = $\frac{\text{ખર્ચ}}{\text{વે.કિ.}} \times 100$

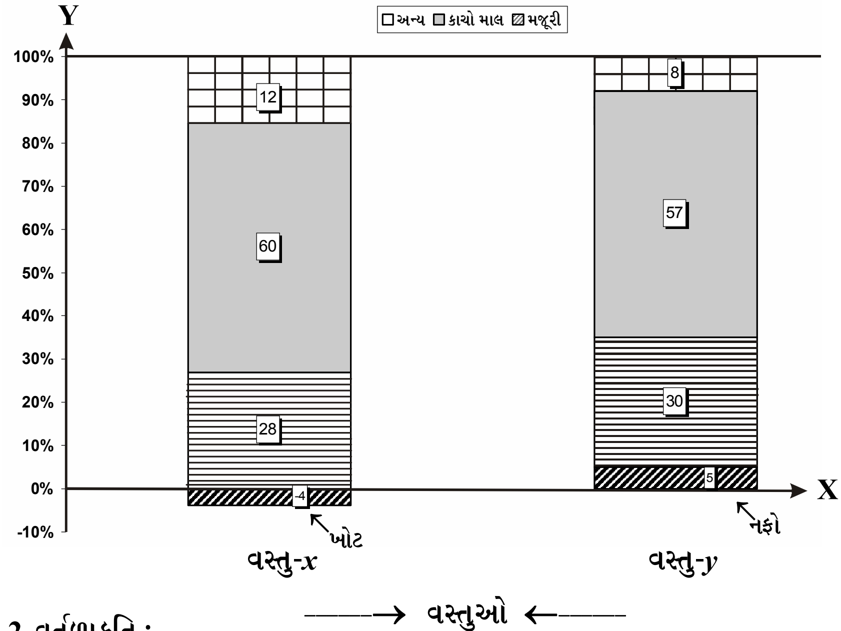
વિગત	વસ્તુ-x			વસ્તુ-y		
	રૂા.	ટકાવારી	cf	રૂા.	ટકાવારી	cf
ખર્ચ : મજૂરી	800	32	32	600	30	30
કાચો માલ	1500	60	92	1140	57	87
અન્ય	300	12	104	160	8	95
કુલ ખર્ચ	2600	104		1900	95	
વેચાણ કિંમત	2500	100		2000	100	
નફો/નુકસાન	100	–4		+100	+5	

સમજૂતી :

વસ્તુ x નો કુલ ખર્ચ 2600 છે અને વે.કિ. 2500 છે. તેથી 100 રૂા. નુકશાન જશે. તેની ટકાવારી શોધતા કુલ ખર્ચની સંચયી આવૃતિ 104 થાય છે. 4% નુકસાન છે. જે x અક્ષની નીચેના ભાગમાં દર્શાવીશું.

તેવી જ રીતે વસ્તુ y-100 નફો થાય છે.

$\therefore$ 5% નફો જે x અક્ષની ઉપરથી બાજુ દર્શાવાશે.



11.2.2 વર્તુળાકૃતિ :

વર્તુળાકૃતિઓને દ્વિમાપી આકૃતિ તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. આ પ્રકારની આક્તિઓને મુખ્ય બે ભાગમાં વહેંચવામાં આવે છે. (1) વર્તુળ આકૃતિ (2) પાઈ (વૃત્તાંશ) આકૃતિ

(1) **વર્તુળ આકૃતિ :** જ્યારે જુદી જુદી માહિતીઓની સરખામણી કરતા તે માહિતીઓ વચ્ચે વધુ તફાવત જોવા મળતો હોય તો ત્યારે વર્તુળ આકૃત્તિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ આકૃતિ નીચે મુજબ શોધી શકાય.

- કુલ માહિતીનું વર્ગમૂળ શોધો.
- નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી ત્રિજ્યા શોધો.

$$\text{ત્રિજ્યા} = \frac{\text{વર્ગમૂળ}}{120}$$

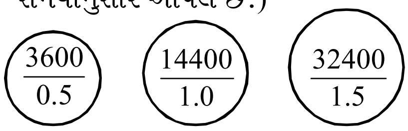
- ત્રિજ્યા જેટલુ વર્તુળ દોરો, દરેક માહિતી માટે અલગ અલગ વર્તુળ દોરો.
- માહિતી જુદા જુદા સમય મજુબ આપેલ હોય તો સમયના ક્રમાનુસાર ગોઠવો, સમયાનુસાર ન આપેલ હોય તો ત્રિજ્યાના ચઢતા ક્રમમાં કે ઉતરતા ક્રમમાં ગોઠવી, તેની સરખામણી કરો. જે નીચેના ઉદાહરણ ઉપરથી સમજી શકાશે.

ઉદા.6 **નીચે આપેલ માહિતી માટે વર્તુળ આકૃતિની રચના કરો.**

વર્ષ	2016	2017	2018
નફો	3600	14400	32400

જવાબ : વર્ષ	નફો	વર્ગમૂળ	ત્રિજ્યા $= \frac{\text{વર્ગમૂળ}}{120}$
2016	3600	60	$\frac{60}{120}$ = 0.5 સે.મી.
2017	14400	120	$\frac{120}{120}$ = 1.0 સે.મી.
2018	32400	180	$\frac{180}{120}$ = 1.5 સે.મી.

હવે, પરિકરની મદદથી 0.5, 1.0 અને 1.5 ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળ દોરો. (અહીં માહિતી સમયાનુસાર આપેલ છે.)



2016 2017 2018

(2) **પાઈ (વૃત્તાંશ) આકૃત્તિ :** પાઈ આકૃતિએ વર્તુળાકૃતિનો બીજો પ્રકાર છે. જેમાં કુલ માહિતી = 360 અંશ લઈ અનુકૂળ ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ દોરી તેમાં વિવિધ પેટા માહિતીઓ માટેના ખૂણાના માપો શોધી તે માપો મુજબ વર્તુળના વૃત્તાંશ પાડવામાં આવે છે. તેથી તેને વૃત્તાંશ આકૃતિ તરીકે ઓળખવામાં આવેછે. જે નીચેના ઉદાહરણ ઉપરથી સમજી શકાય.

ઉદા.7 **એક યુનિવર્સિટીમાં કાર્ય કરતા કર્મચારીઓની વિગત નીચે મુજબ છે. તો તે ઉપરથી પાઈ (વૃત્તાંશ) આકૃતિ દોરો.**

કર્મચારીઓનો હોદ્દો	**કર્મચારીઓની સંખ્યા**
પ્રોફેસર	80
કારકુન	50
પટાવાળા	40
વોચમેન	30
કુલ	200

જવાબ :

કર્મચારીનો હોદ્દો	**કર્મચારીઓની સંખ્યા**	**ખૂણાનું માપ (અંશમાં)**
પ્રોફેસર	80	$144^\circ = \frac{80}{200} \times 360^\circ$
કારકુન	50	$90^\circ = \frac{50}{200} \times 360^\circ$
પટ્ટાવાળા	40	$72^\circ = \frac{40}{200} \times 360^\circ$
વોચમેન	30	$54^\circ = \frac{30}{200} \times 360^\circ$
કુલ	200	360°

સમજૂતી :

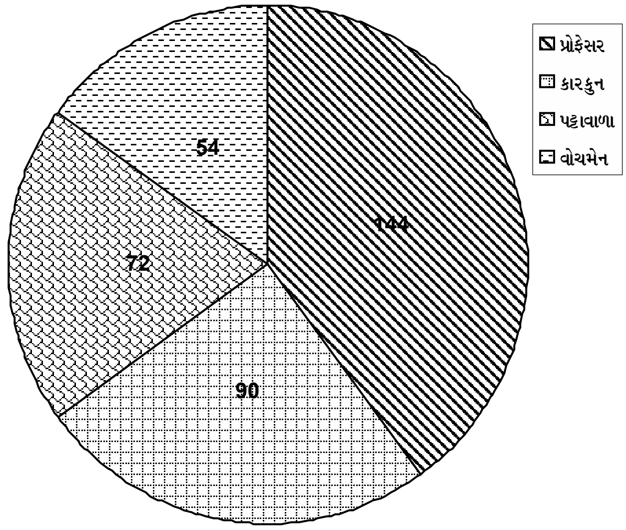
કર્મચારીઓની કુલ સંખ્યા = 200

$$\text{પ્રોફેસરો માટે ખૂણાનું માપ} = \frac{\text{પ્રોફેસરોની સંખ્યા}}{200} \times 360^\circ = 144^\circ$$

$$\text{કારકુન માટે ખૂણાનું માપ} = \frac{\text{કારકુનોની સંખ્યા}}{200} \times 360^\circ = 90^\circ$$

$$\text{પટાવાળા માટે ખૂણાનું માપ} = \frac{\text{પટાવાળાની સંખ્યા}}{200} \times 360^\circ = 72^\circ$$

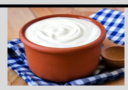
$$\text{વોચમેન માટે ખૂણાનું માપ} = \frac{\text{વોચમેનની સંખ્યા}}{200} \times 360^\circ = 54^\circ$$



3.2.3 ચિત્રાકૃતિ : આ પ્રકારની આકૃતિમાં જે પ્રકારની માહિતી આપેલ હોય તે પ્રકારનું ચિહ્ન દોરવામાં આવે છે. દા.ત. જાહેર શૌચાલયમાં દરવાજા ઉપર સ્ત્રી અને પુરૂષોનું ચિત્ર દોરવામાં આવતુ હોય છે. જેથી ગમે તેવી અભણ વ્યક્તિ પણ તે સરળતાથી સમજી શકે છે. તેવી જ રીતે દૂધનું ઉત્પાદન દર્શાવવા માટે દુધની બોટલો દોરી તેનું ઉત્પાદન લખવામાં આવે છે. ચિત્રાકૃતિનો ઉપયોગ હાલ પ્રાથમિક શાળા અને બાલ મંદિરોમાં ખૂબ મોટા પ્રમાણમાં કરવામાં આવે છે. દા.ત. કમળનો ક લખીને સામે કમળનું ચિહ્ન દોરવામાં આવે તો બાળક સરળતાથી કક્કો શીખી શકે.

ચિત્રાકૃતિનો ઉપયોગ કરવાથી માહિતીને સ્પષ્ટ, સંક્ષિપ્તમાં રજૂ કરી શકાય અને સરળતાથી સમજાવી માનવીના મન ઉપર ચિરંજીવી છાપ ઊભી કરી શકાય છે અને તેના ઉપયોગથી સમયનો પણ બચાવ થાય છે. ચિત્રાકૃતિ નીચે મુજબ સમજી શકાય.

પાર્લરના સ્ટોકની માહિતી

વસ્તુના નામ	આજનો સ્ટોક
 દૂધ	**2000 લીટર**
 પનીર	**500 કીલો**
 દહી	**200 કીલો**

ઉપરની આકૃતિ પરથી સમજી શકાય કે પાર્લરમાં દુધ, પનીર અને દહીંનો સ્ટોક કેટલો છે. અભણ વ્યક્તિ તેના ચિત્ર જોઈને પણ સમજી શકે કે અહીં દુધ, પનીર, દહીં વેચાય છે.

૩..3 આવૃતિ વિતરણના આલેખો :

અગાઉના પ્રકરણમાં આપણે જોયું કે આવૃતિ વિતરણ એટલે આપેલ અવલોકનોને સમાન વર્ગમાં વિભાજન કરતી શ્રેણી એટલે કે આવૃત્તિની વર્ગદીઠ ફાળવણી.

આવૃત્તિ વિતરણની મદદથી જે આલેખો દોરવામાં આવે છે તેને આવૃત્તિ વિતરણના આલેખો કહે છે. તેને મુખ્ય પાંચ ભાગોમાં વિભાજીત કરીશું.

(1) સ્તંભાલેખ (2) આવૃત્તિ બહુકોણ (3) આવૃત્તિ વક્ર (4) સંચયી આવૃત્તિ બહુકોણ (5) સંચયી આવૃતિ વક્ર

3.3.1 સ્તંભાલેખ : X અક્ષ ઉપર વર્ગો અને Y અક્ષ ઉપર આવૃત્તિ લઈ પ્રમાણસર ઊંચાઈવાળા સ્તંભો લઈ જે આલેખની રચના કરવામાં આવે છે તેને સ્તંભાલેખ કહે છે. સ્તંભાલેખમુખ્યત્વે બે પ્રકારના હોય છે.

(A) સમાન વર્ગો આપેલા હોય ત્યારે

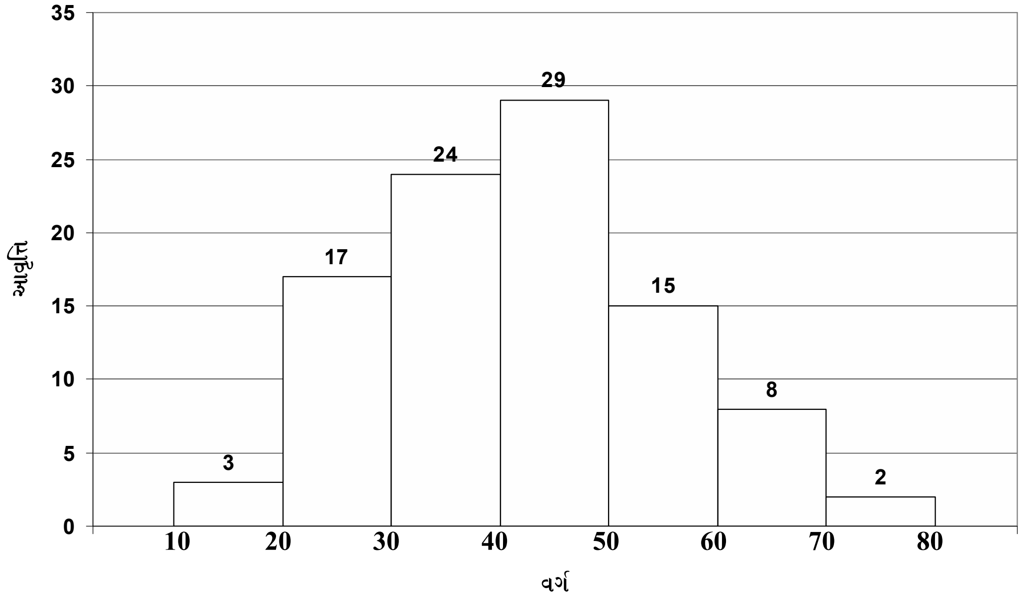
(B) અસમાન વર્ગો આપેલા હોય ત્યારે

(A) સમાન વર્ગો આપેલા હોય ત્યારે :

X અક્ષ ઉપર જુદા જુદા વર્ગો લો.
Y અક્ષ ઉપર જે તે વર્ગની આવૃત્તિ લો.
દરેક વર્ગની ઉપર તે વર્ગની આવૃત્તિની સંખ્યાના પ્રમાણસર ઊંચાઈના સ્તંભો દોરો.
આમ કરવાથી સ્તંભાલેખની રચના થશે. જ્યારે સમાન વર્ગો આપેલા હોય ત્યારે સ્તંભાલેખ કેવી રીતે દોરવું તે નીચેના ઉદાહરણ પરથી સમજીશું.

ઉદા.8 નીચે આપેલી માહિતી પરથી સ્તંભાલેખ દોરો.

વર્ગ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
આવૃત્તિ	3	17	24	29	15	8	2



(B) અસમાન વર્ગો આપેલા હોય ત્યારે :

દરેક વર્ગની વર્ગલંબાઈ શોધો.

સૌથી નાના વર્ગોની વર્ગલંબાઈ ધ્યાનમાં રાખી દરેક વર્ગની સપ્રમાણ આવૃત્તિ શોધો.

$$\text{જ્યાં સપ્રમાણ આવૃત્તિ} = \left[\text{જે તે વર્ગની આવૃત્તિ}\right] \div \left[\frac{\text{જે તે વર્ગની વર્ગ લંબાઈ}}{\text{સૌથી નાની વર્ગ લંબાઈ}}\right]$$

X અક્ષ ઉપર વર્ગો લો.

Y અક્ષ ઉપર સપ્રમાણ આવૃત્તિઓ લો.

દરેક વર્ગાન્તર ઉપર તે વર્ગની સપ્રમાણસર આવૃત્તિની સંખ્યાના પ્રમાણસર ઊંચાઈના સ્તંભ દોરવાથી સ્તંભાલેખની રચના થશે જે નીચેના ઉદાહરણની મદદથી સમજીશું.

ઉદા.9 નીચે આપેલ માહિતી પરથી સ્તંભાલેખ દોરો.

વર્ગ	5-10	10-15	15-25	25-45	45-75
આવૃત્તિ	8	10	40	32	24

જવાબ :

વર્ગ	**વર્ગલંબાઈ**	**આવૃત્તિ**	**સપ્રમાણ આવૃત્તિ**
5-10	5	8	8
10-15	5	10	10
15-25	10	40	20
25-45	20	32	8
45-75	30	24	4

સમજૂતી :

સપ્રમાણ આવૃત્તિ = [જે તે વર્ગની આવૃત્તિ] ÷ $\left[\dfrac{\text{જે તે વર્ગની વર્ગ લંબાઈ}}{\text{સૌથી નાની વર્ગ લંબાઈ}}\right]$

$\therefore$ 5-10 વર્ગની સપ્રમાણ આવૃત્તિ $= 8 \div \left[\dfrac{5}{5}\right] = 8 \div 1 = 8$

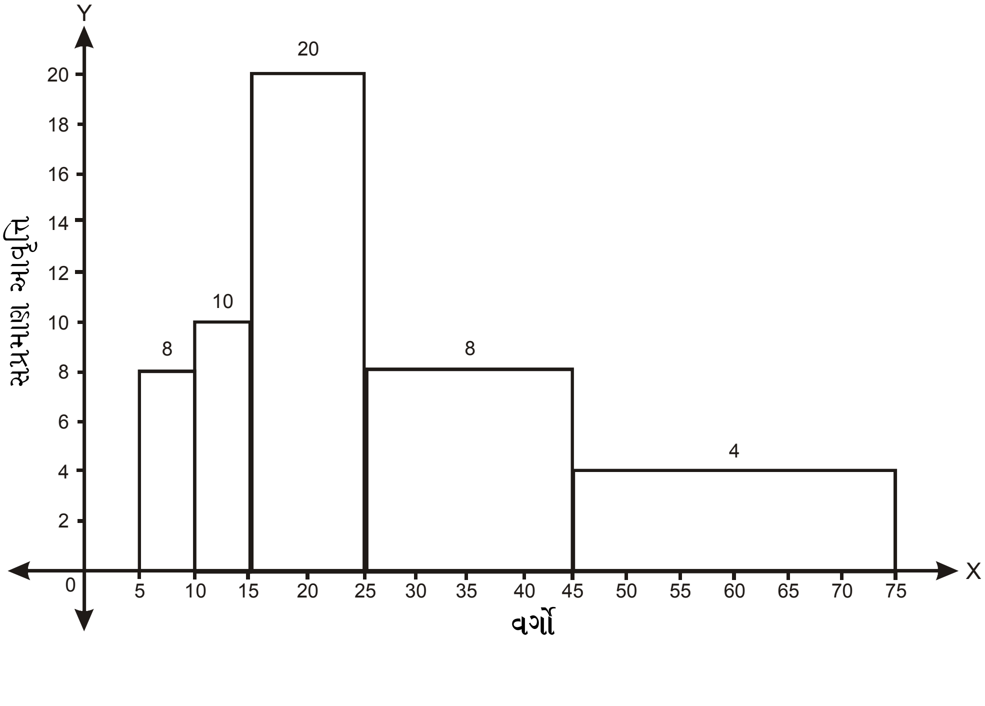
10-15 વર્ગની સપ્રમાણ આવૃત્તિ $= 10 \div \left[\dfrac{5}{5}\right] = 10 \div 1 = 10$

15-25 વર્ગની સપ્રમાણ આવૃત્તિ $= 40 \div \left[\dfrac{10}{5}\right] = 40 \div 2 = 20$

25-45 વર્ગની સપ્રમાણ આવૃત્તિ $= 32 \div \left[\dfrac{20}{5}\right] = 32 \div 4 = 8$

45-75 વર્ગની સપ્રમાણ આવૃત્તિ $= 24 \div \left[\dfrac{30}{5}\right] = 24 \div 6 = 4$

x અક્ષ ઉપર વર્ગો અને y અક્ષર ઉપર સપ્રમાણ આવૃત્તિ લઈ દરેક વર્ગાન્તર ઉપર તે વર્ગની સપ્રમાણ આવૃત્તિની સંખ્યાના પ્રમાણસર ઊંચાઈના સ્તંભો દોરતા.



3.3.2 આવૃતિ બહુકોણ :

આવૃત્તિ બહુકોણ સ્તંભાલેખની મદદથી દોરી શકાય છે.

❖ **સ્તંભાલેખ દોરવા :**

→ દરેક સ્તંભની ઉપરની બાજુનું મધ્ય-બિંદુ શોધો.

→ વર્ગાન્તરના મધ્યબિંદુની સામે આવૃત્તિ દર્શાવતુ બિંદુ શોધો.

→ બધા જ બિંદુઓ ક્રમમા રેખાખંડો વડે જોડો.

→ પ્રથમ અને છેલ્લા છેડા X અક્ષ સાથે જોડો. આમ કરવાથી આવૃતિ બહુકોણ તૈયાર થશે.

અથવા

→ જે તે વર્ગના મધ્ય બિંદુઓ શોધો.

→ મધ્યબિંદુઓને x અક્ષ ઉપર લો.

→ આવૃતિઓને y અક્ષ ઉપર લો.

→ દરેક બિંદુઓને ક્રમમાં રેખાખંડો વડે જોડો.

→ આવૃતિ બહુકોણની આગળના અને પાછળના બંને છેડાઓ અનુક્રમે પ્રથમ વર્ગના આગળા અને પછીના વર્ગ મધ્યબિંદુઓ દર્શાવતા x અક્ષ પરના બિંદુઓ સુધી લંબાવો.

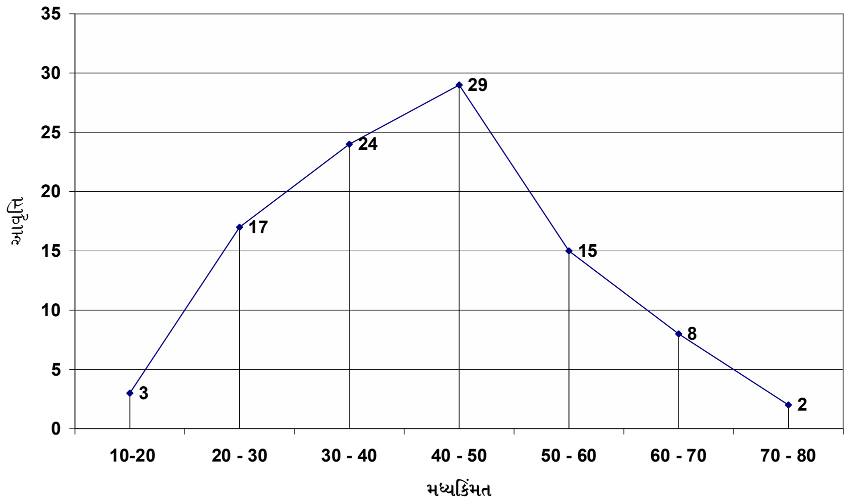
ઉદા.10 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

વર્ગ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
આવૃત્તિ	3	17	24	29	15	8	2

જવાબ: દરેકવર્ગોની મધ્યકિંમત શોધો.

વર્ગ	આવૃત્તિ	મધ્યકિંમત
10 - 20	3	15
20 - 30	17	25
30 - 40	24	35
40 - 50	29	45
50 - 60	15	55
60 - 70	8	65
70 - 80	2	75

x અક્ષ ઉપર મધ્યકિંમત અને y અક્ષ ઉપર આવૃત્તિ લઈ દરેક બિંદુઓ ક્રમમાં રેખાખંડો વડે જોડો.



3.3.3 આવૃતિ વક્ર :

આવૃત્તિ બહુકોણમાં બિંદુઓને રેખાખંડથી જોડવામાં આવે છે. જ્યારે આવૃતિ વક્રમાં બિંદુઓની હળવા હાથથી દોરવામાં આવે છે. આવૃત્તિ વક્ર નીચે મુજબ શોધી શકાય છે.

– જે તે વર્ગના મધ્ય બિંદુઓ શોધો.

– મધ્ય બિંદુઓને x અક્ષ ઉપર લો.

– આવૃત્તિઓને y અક્ષ ઉપર લો

– દરેક બિંદુઓ (x, y) ને હળવા હાથથી જોડો.

આમ કરવાથી જે વક્રની રચના થાય છે તેને આવૃત્તિ વક્ર કહે છે. તેને સામાન્ય વક્ર તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. તે ઘંટાકાર સ્વરૂપનો હોય છે.

- **આવૃત્તિ વક્રના લક્ષણો :**

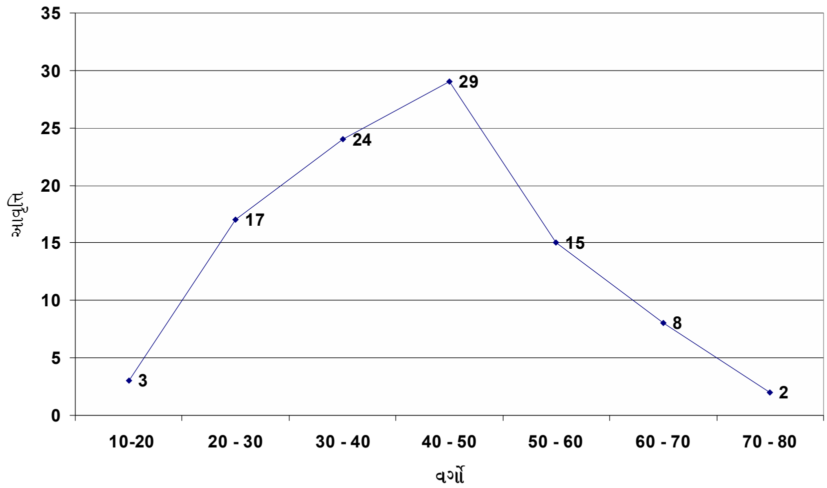
આવૃત્તિ વક્ર ઘંટાકાર સ્વરૂપનો હોય છે.

જો માહિતીમાં જો અનિયમિતતા ન હોય તો આવૃત્તિ વક્ર શરૂ શરૂમાં ક્રમશઃ ઊંચે જતો હોય છે અને ટોચના બિંદુઓ સુધી પહોંચ્યા પછી ક્રમશઃ નીચે જતો હોય છે.

જો માહિતીમાં અનિયમિતતા હોય તો આવૃતિવક્ર એક કરતા વધુ ટોચ બિંદુઓવાળો હોય છે કે જે ડાબી બાજુ કરતા જમણી બાજુ ઓછો કે વધુ વિસ્તરેલો હોય છે.

ઉદા.11 ઉદાહરણ 10 ઉપરથી આવૃત્તિ વક્ર દોરો.

જવાબ.



3.3.4 સંચયી આવૃતિ બહુકોણ :

સંચયી આવૃતિ બહુકોણ નીચે મુજબ દોરી શકાય.

→ આપેલ આવૃતિ વિતરણની સંચયી આવૃતિ શોધો.

→ જો પ્રાપ્તાંકો આપેલા હોય તો તેને x અક્ષ પર અને સંચયી આવૃતિને y અક્ષ પર સ્કેલ મુજબ બિંદુઓનું આલેખન કરો.

→ જો સતત આવૃતિ વિતરણ આપેલ હોય તો x અક્ષ પર સતતવર્ગોના ઉર્ધ્વ સીમાબિંદુઓ અથવા અધઃસીમા બિંદુઓ લો અને y અક્ષ પર સંચયી આવૃત્તિ લઈ સ્કેલ મુજબ બિંદુઓનું આલેખન કરો.

એટલે કે આલેખના ક્રમિક બિંદુઓને સીધા રેખાખંડથી જોડવાથી સંચયી આવૃતિ બહુકોણની રચના થાય છે જે દાદર આકારનો હોય છે.

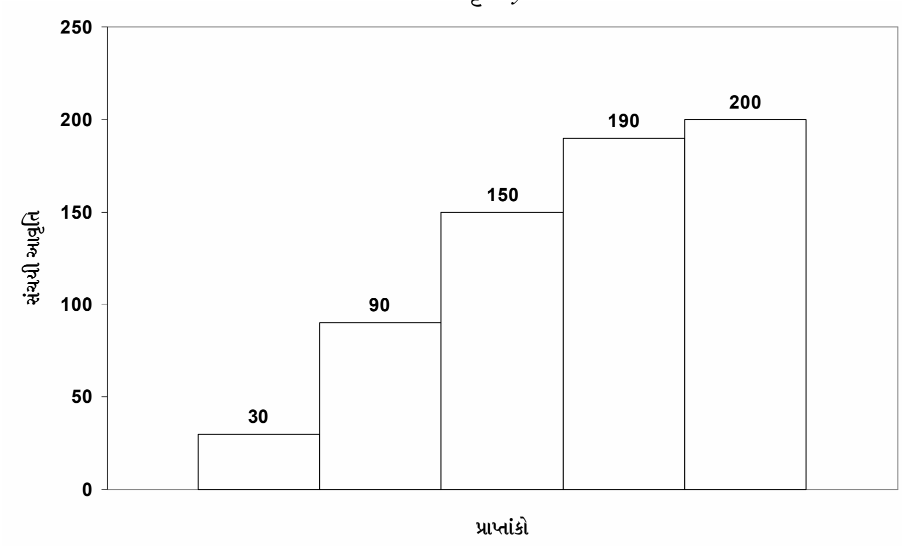
ઉદા.12 નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી સંચયી આવૃતિ બહુકોણ દોરો.

પ્રાપ્તાંકો	0	1	2	3	4
આવૃતિ	30	60	60	40	10

જવાબ :

પ્રાંપ્તાંકો	આવૃતિ	સંચયી આવૃતિ
0	30	30
1	60	30 + 60 = 90
2	60	90 + 60 = 150
3	40	150 + 40 = 190
4	10	190 + 10 = 200

પ્રાંપ્તાંકોને x અક્ષ પર અને સંચયી આવૃતિ y અક્ષ ઉપર લો.



3.3.5 સંચયી આવૃતિ વક્ર :

સંચયી આવૃતિ વક્ર મુખ્યત્વે બે પ્રકારના હોય છે. (A) થી ઓછા પ્રકારનો સંચયી આવૃતિ વક્ર (B) થી વધુ પ્રકારનો સંચયી આવૃતિ વક્ર

(A) થી ઓછા પ્રકારનો સંચયી આવૃતિ વક્ર : આ વક્રને ઓજાઈવ વક્ર તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. આ પ્રકારનો વક્ર નીચે મુજબ દોરાય.

– સૌ પ્રથમ આપેલ આવૃત્તિ વિતરણના ઉર્ધ્વસીમા બિંદુઓ શોધો.
– આપેલ આવૃતિ વિતરણની સંચયી આવૃતિ શોધો.
– ઉર્ધ્વ સીમા બિંદુઓની કિંમતોને x અક્ષ પર લો.
– સંચયી આવૃતિ વિતરણની કિંમતોને y અક્ષ પર લો.
– પ્રત્યેક ઉર્ધ્વસીમા બિંદુઓ સાથે સંચયી આવૃત્તિ દર્શાવતા બિંદુઓ નોંધો.
– ક્રમિક બિંદુઓને હળવા હાથથી જોડો.

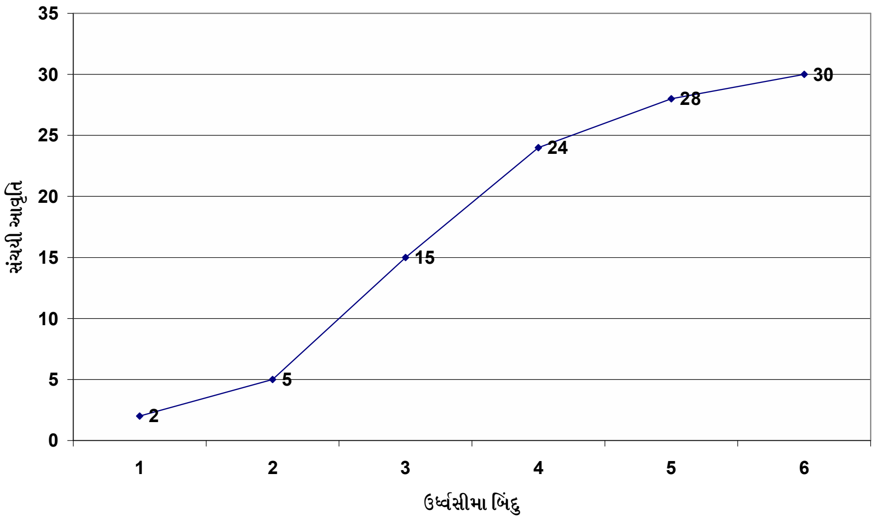
આમ કરવાથી જે વક્ર મળશે તેને 'થી ઓછા' પ્રકારનો સંચયી આવૃતિ વક્ર કહેવાય છે, જે નીચેના ઉદાહરણથી સમજીશું.

ઉદા.13 **નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી 'થી ઓછા' પ્રકારનો સંચયી આવૃતિ વક્ર દોરો.**

ઊંમર	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	2	3	10	9	4	2

જવાબ :

ઉંમર	વ્યક્તિઓની સંખ્યા	ઉર્ધ્વસીમા બિંદુ	સંચયી આવૃતિ
20-25	2	25	2
25-30	3	30	2 + 3 = 5
30-35	10	35	5 + 10 = 15
35-40	9	40	15 + 9 = 24
40-45	4	45	24 + 4 = 28
45-50	2	50	28 + 2 = 30



(B) થી વધુ પ્રકારનો સંચયી આવૃતિ વક્ર :

આ પ્રકારનો વક્ર નીચે મુજબ દોરી શકાય.

→ સૌ પ્રથમ આપેલ આવૃત્તિ વિતરણના અધઃસીમા બિંદુઓ શોધો.

→ આપેલ આવૃતિ વિતરણની સંચયી આવૃતિ શોધો.

→ અધઃસીમા બિંદુઓની કિંમતોને x અક્ષ પર લો.

→ સંચયી આવૃતિની કિંમતોને y અક્ષ પર લો.

→ પ્રત્યેક અધઃસીમા બિંદુઓ સાથે સંચયી આવૃતિ દર્શાવતા બિંદુઓ શોધો.

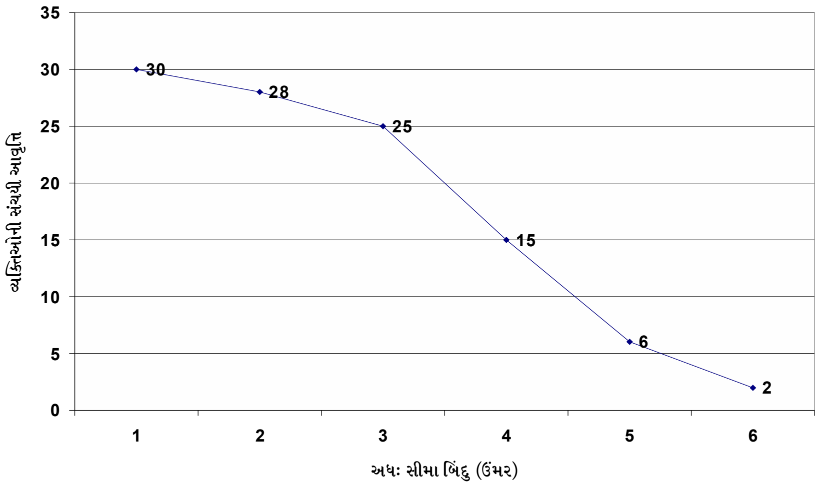
→ ક્રમિક બિંદુઓને હળવા હાથથી જોડો.

આમ કરવાથી જે વક્ર મળે છે તેથી 'થી વધુ' પ્રકારનો સંચયી આવૃતિ વક્ર કહે છે જે નીચેના ઉદાહરણ પરથી સમજીશું.

ઉદા.14 ઉદાહરણ-13 ઉપરથી ઓછા પ્રકારનો સંચયી આવૃતિ વક્ર દોરો.

જવાબ :

ઉંમર	વ્યક્તિઓની સંખ્યા	ઉર્ધ્વસીમા બિંદુ	સંચયી આવૃતિ
20-25	2	20	30
25-30	3	25	30 – 2 = 28
30-35	10	30	28 – 3 = 25
35-40	9	35	25 – 10 = 15
40-45	4	40	15 – 9 = 6
45-50	2	45	6 – 4 = 2



3.3.6 સ્વાધ્યાય

1. નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સ્તંભાકૃતિ દોરો.

વિદ્યાશાખા	આર્ટ્સ	કોમર્સ	સાયન્સ	લો	ઈજનેરી
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	200	320	130	60	40

(Hint :- ઉદાહરણ-1 મુજબ દોરો.)

2. નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી પાસ-પાસેની સ્તંભાકૃતિ દોરો.

વર્ષ	**રકમ લાખ રૂ. માં**		
	સાયન્સ ગ્રાન્ટ	**યુ.જી.સી. ગ્રાન્ટ**	**સ્પેશ્યલ ગ્રાન્ટ**
2016	60	80	50
2017	70	90	60
2018	80	120	90

(ઉદા.2 મુજબ દોરો.)

3. નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી વિભાજીત સ્તંભાકૃતિ દોરો.

વિગત	**ખર્ચ (કરોડ રૂ.માં)**		
	2016	**2017**	**2018**
પ્રાથમિક શિક્ષણ	110	120	130
માધ્યમિક શિક્ષણ	60	80	100
ઉચ્ચ શિક્ષણ	40	50	60

(ઉદાહરણ-3 મુજબ દોરો.)

4. એક ફેક્ટરી બે જાતની વસ્તુઓ બનાવે છે. વસ્તુદીઠ વે.કિ. અને ખર્ચની વિગતો નીચે પ્રમાણે છે. તે ઉપરથી નફા-નુકશાન દર્શાવતી પ્રતિશત વિભાજીત સ્તંભાકૃતિ દોરો.

	વસ્તુ x	**વસ્તુ y**
ખર્ચ, મજૂરી	400	300
કાચો માલ	800	570
અન્ય	100	80
પડતર કિંમત (રૂ. માં)	1300	950
વે.કિ. (રૂ. માં)	1250	1000

(ઉદાહરણ-5 મુજબ દોરો.)

5. બે કુટુંબોની માસિક-ખર્ચની વિગતો નીચે મુજબ છે તે પરથી વિભાજીત પ્રતિશત સ્તંભાકૃતિ દોરો.

ખર્ચની વિગત	**માસિક ખર્ચ (રૂ.માં.)**	
	કુટુંબ x	**કુટુંબ y**
ખોરાક	600	700
કપડાં	500	600
ભાડુ	300	400
કેળવણી	200	100
અન્ય	100	50
કુલ ખર્ચ	**1700**	**1850**

(ઉદાહરણ-4 મુજબ દોરો.)

6. નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી વર્તુળ આકૃતિ દોરો.

વર્ષ	**ઉત્પાદન**
2016	57,600
2017	90,000
2018	1,76,400

(ઉદાહરણ-6 મુજબ દોરો.)

7. નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી પાઈ આકૃતિ દોરો.

	પુરૂષો	સ્ત્રીઓ	બાળકો	કુલ
શહેર A	3,50,000	2,10,000	1,60,000	7,20,000

(ઉદાહરણ-7 મુજબ દોરો.)

8. નીચે આપેલ આવૃતિ વિતરણ ઉપરથી સ્તંભાલેખ દોરો.

વર્ગો	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
આવૃતિ	2	7	15	10	8	3

(ઉદાહરણ-8 મુજબ દોરો.)

9. નીચે આપેલ આવૃતિ વિતરણનો સ્તંભાલેખ દોરો.

વેતન (રૂ.માં.)	0-5	5-10	10-20	20-40	40-70
મજૂરોની સંખ્યા	4	4	20	16	12

જવાબ : સપ્રમાણ આવૃત્તિ : 4, 5, 10, 4, 2

(ઉદાહરણ-9 મુજબ દોરો.)

10. નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણ ઉપરથી આવૃત્તિ વિતરણ ઉપરથી આવૃતિ બહુકોણ દોરો.

વર્ગ	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
આવૃત્તિ	2	7	15	10	8	3

(ઉદાહરણ-10 મુજબ ગણો.)

11. ઉપરના દાખલા નં. 10 ઉપરથી આવૃત્તિ વક્ર દોરો.

(ઉદાહરણ-11 મુજબ દોરો.)

12. નીચે આપેલ આવૃત્તિ ઉપરથી સંચયી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

બાળકોની સંખ્યા	0	1	2	3	4
કુટુંબો	32	60	60	40	8

[જવાબ : થી ઓછા પ્રકારની આવૃત્તિ : 32, 92, 152, 192, 200]

13. નીચેની માહિતી ઉપરથી થી ઓછા પ્રકારનો સંચયી આવૃત્તિ વક્ર દોરો.

ઊંમર	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	4	6	20	16	5	4

[જવાબ :

ઉર્ધ્વસીમા બિંદુ :	25	30	35	40	45	50
સંચયી આવૃત્તિ :	4	10	30	46	51	55]

14. ઉપર દાખલા નં-13 ઉપરથી થી વધુ પ્રકારનો સંચયી આવૃતિ વક્ર દોરો.

[જવાબ :	અધઃસીમા બિંદુ :	20	25	30	35	40	45
	સંચયી આવૃત્તિ :	55	51	45	25	9	4]

15. નીચે આપેલા પ્રશ્ન માટે વૈકલ્પિક પ્રશ્નોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો.

(1) .... એ વર્ણનાત્મક આંકડાશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં માહિતીના નિરૂપણ માટે મહત્વનો ભાગ ભજવે છે.

(*a*) આકૃતિઓ (*b*) માહિતીનું પૃથક્કરણ

(*c*) માહિતીનું અર્થઘટન (*d*) એકપણ નહી

(2) .... માં વિવિધ સમય માટે આપેલી પરસ્પર સંબંધિત માહિતીની પેટા માહિતીને દર્શાવવામાં આવે છે.

(*a*) સાદી વિભાજીત સ્તંભાકૃતિ (*b*) સાદી સ્તંભાકૃતિ

(*c*) પાસ-પાસેની સ્તંભાકૃતિ (*d*) એકપણ નહીં

(3) જ્યારે બે કે વધારે બાબતોની માહિતીના આપેલા જથ્થા વચ્ચે મોટો તફાવત હોય ત્યારે માહિતીને .... આકૃતિ દ્વારા રજૂ કરવામાં આવે છે.

(*a*) ચોરસ (*b*) લંબચોરસ (*c*) વર્તુળ (*d*) એકપણ નહીં

(4) વૃત્તાંશ આકૃતિમાં કુલ માહિતી = ... અંશ

(*a*) 90° (*b*) 180° (*c*) 360° (*d*) એકપણ નહીં

(5) ભાષાના બંધનો .... આકૃતિમાં નડતાનથી.

(*a*) સ્તંભાકૃતિ (*b*) વૃત્તાંશકૃતિ (*c*) ચિત્રાકૃતિ (*d*) એક પણ નહીં

(6) પાઈ આકૃતિમાં કુલ માહિતી બરાબર કેટલા અંશ ગણવામાં આવે છે.

(*a*) 100° (*b*) 90° (*c*) 180° (*d*) એકપણ નહીં

(7) થી વધુ પ્રકારનો સંચયી આવૃતિવક્ર દોરવા માટે x અક્ષ પર .... લેવામાં આવે છે.

(*a*) વર્ગના અધઃસીમા બિંદુ (*b*) વર્ગના ઉર્ધ્વસીમા બિંદુ

(*c*) વર્ગનું મધ્યબિંદુ (*d*) એક પણ નહીં

(8) થી ઓછા પ્રકારનો સંચયી આવૃતિવક્ર દોરવા માટે x અક્ષ પર .... લેવામાં આવે છે.

(*a*) વર્ગના અધઃસીમા બિંદુ (*b*) વર્ગના ઉર્ધ્વસીમા બિંદુ

(*c*) વર્ગના મધ્યબિંદુ (*d*) એક પણ નહીં

(9) .... ઓજાઈવ વક્ર તરીકે ઓળખાય છે.

(*a*) થી ઓછા પ્રકારનો સંચયી આવૃત્તિ વક્ર (*b*) થી વધુ પ્રકારનો સંચયી આવૃતિ વક્ર

(*c*) સાદો વક્ર (*d*) એક પણ નહીં

(10) ઓજાઈવ વક્ર દોરવા x-અક્ષ પર .... લેવામાં આવે છે.

(*a*) વર્ગનું મધ્યબિંદુ (*b*) વર્ગનું અધઃસીમા બિંદુ

(*c*) વર્ગનું ઉર્ધ્વસીમા બિંદુ (*d*) એક પણ નહીં

(11) .... આકૃતિમાં સ્તંભોની ઊંચાઈ સરખી હોય છે.

(*a*) સાદી (*b*) પાસ-પાસેની સ્તંભાકૃતિ

(*c*) પ્રતિશત વિભાજીત સ્તંભાકૃતિ (*d*) એક પણ નહીં

(12) .... આકૃતિઓને દ્વિમાપી આકૃતિઓ કહે છે.

(*a*) વર્તુળાકૃતિ (*b*) સ્તંભાકૃતિ (*c*) ચિત્રાકૃતિ (*d*) એક પણ નહીં

(13) અસતત આવૃતિ વિતરણના સંચયી આવૃતિ બહુકોણનો આકાર .... જેવો હોય છે.

(*a*) રેખાખંડ (*b*) દાદર (*c*) એક્ષ (*d*) એક પણ નહીં

જવાબ : (1) *a* (2) *a* (3) *c* (4) *c* (5) *c* (6) *d* (7) *a* (8) *b* (9) *a* (10) *c*
(11) *c* (12) *a* (13) *b*

16. ટૂંકા પ્રશ્નો

(1) સપ્રમાણ આવૃત્તિ મેળવવાનું સૂત્ર લખો.

(2) વૃત્તાંશ આકૃતિ એટલે શું ?

(3) આલેખોના પ્રકારો કેટલા ? કયા કયા ?

(4) આલેખ એટલે શું ?

(5) સ્તંભાકૃતિના પ્રકારો જણાવો.

(6) ઓજાઈવ વક્ર એટલે શું ?

(7) આકૃતિ અને આલેખ વચ્ચેનો મુખ્ય તફાવત લખો.

(8) વૃત્તાંશ આકૃતિમાં પ્રત્યેક અંશ કેટલું ક્ષેત્રફળ દર્શાવે છે. (જવાબ : $\frac{1}{360}$)

(9) વૃત્તાંશ આકૃતિમાં કુલ માહિતી બરાબર કેટલા અંશ ગણવામાં આવે છે ?

(10) સ્તંભાકૃતિ કયા પ્રકારની આકૃતિ છે ? (જવાબ : એક માપી)

3.4 ચાવીરૂપ શબ્દો

આલેખ આકૃતિની રચના : ચિત્રો કે આલેખ દ્વારા રજૂઆત
સ્તંભાલેખ : આલેખનો પ્રકાર
પ્રતિશત : ટકાવારી
વૃત્તાંશ આકૃતિ : પાઈ આકૃત્તિ
જટિલ માહિતી : ગુંચવણ ભરેલી માહિતી

3.5 સંદર્ભસૂચિ

1. 'Basic Statatistics' : S. Chand & Sons, Delhi
2. Business Research Method by MH & PM.Patel Publi- Akshar publication, Ahmedabad.
3. 1.Business statics by Setty Ahmed Pub- Chandra & Sons, New Delhi
4. Statical theory and Probability, Publication- S chandra and Sons
5. Basic Statics by Dick A Lewier By- Research Dir win inee Home wood liner.
6. ધંધાકીય સંશોધન પદ્ધતિઓ : ડૉ. મહેન્દ્ર એચ. મૈસુરીયા અને ડૉ. દિનેશ એમ. પટેલ, અક્ષર પબ્લિકેશન, અમદાવાદ.
7. ગાણિતિક આંકડાશાસ્ત્ર, ગુજરાત યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ.

❖

એકમ-4 મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના માપ

રૂપરેખા

4.0 ઉદ્દેશોઃ

આ પ્રકરણનો મુખ્ય ઉદ્દેશ વિદ્યાર્થીઓ મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનો અર્થ સમજી શકે તેના પ્રકારો અંગે માહિતી મેળવી શકે તેના દ્વારા સંશોધન કાર્ય સરળતાથી કરી શકે તે છે. શૈક્ષણિક, ઔદ્યોગિક કે અન્ય ક્ષેત્રે ચોક્કસ પ્રકારની માહિતીનું વિશ્લેષણ સરળતાથી કરી શકે તેવો હેતુ છે.

4.1 પ્રસ્તાવના

વિદ્યાર્થી મિત્રો આ અગાઉ આપણે માહિતીનું વર્ગીકરણ અને કોષ્ટક રચનાનું પ્રકરણ શીખી ગયા અને તેના દ્વારા માહિતીનું આવૃત્તિ વિતરણ કેવી રીતે તૈયાર કરી શકાયતે સમજી ગયા હવે માહિતીનું આવૃત્તિ વિતરણ જોતા માલુમ પડે છે કે શરૂઆત ના વર્ગોમાં આવૃત્તિ ઓછી હોય છે તે જ રીતે અંતિમ વર્ગોમાં પણ આવૃત્તિ ઓછી હોય છે જયારે માધ્યમ વર્ગોમાં આવૃત્તિ વધુ જોવા મળે છે. એટલે કે આવૃત્તિ મધ્ય ભાગમાં "પ્રાપ્તાંકોનો વિસ્તાર વધુ જોવા મળે છે. તેથી આ પરિસ્થિતિનો અભ્યાસ કરવા માટે મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનો અભ્યાસ જરૂરી છે.

4.2 મધ્યવર્તી સ્થિતિનો અર્થ

આવૃત્તિ વિતરણમાં માહિતીના પ્રાપ્તાંકો માહિતી વિસ્તારના મધ્યભાગમાં વધુ ફેલાયેલાં હોય છે. આ પરિસ્થિતિને મધ્યવર્તી સ્થિતિ કહે છે.

4.2.1 મધ્યવર્તી સ્થિતિનું માપનો અર્થમધ્યવર્તી સ્થિતિની આસપાસ ગોઠવાયેલા પ્રાપ્તાંકો ના માપને મધ્યવર્તી સ્થિતિનું માપ કહે છે. તેને "કેન્દ્રિય વલણના માપ" તરીકે પણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. ટૂંકમાં પ્રાપ્ત સંખ્યાત્મક માહિતીનું પ્રતિનિધિત્વ રજુ કરતા મૂલ્ય કે આંક મધ્યવર્તી સ્થિતિનું માપ કહે છે.

4.3 મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના પ્રકારો

મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનને મુખ્યત્વે ત્રણ વિભાગોમાં વહેંચી શકાય છે.

(1) મધ્યક (Mean)

(2) મધ્યસ્થ (Median)

(3) બહુલક (Mode)

4.3.1 મધ્યક

માહિતીના પ્રાપ્તાંકોના સરવાળાને કુલ પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા વડે ભાગવામાં આવે તો તે દ્વારા જે કિંમત મળે છે તેને માહિતીનો મધ્યક તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેને સંકેતમા $\overline{x}$ (X-બાર) દર્શાવવામાં આવે છે. જે નીચેના સૂત્ર દ્વારા શોધી શકાય.

મધ્યક = x = પ્રાપ્તાંકોનો સરવાળો

પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા

(અસતત) અવર્ગીકૃત માહિતી માટે :

મધ્યક = $\overline{x} = \frac{\Sigma xi}{N}$

જ્યાં Σx = બધા પ્રાપ્તાંકોનો સરવાળો

n = પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા

$\sum$ = સર્વાલાનું ચિહન

$$\sum_{i-I}^{n} xi = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots\ldots + x_n$$

= II થી n પ્રાપ્તાંકોનો સરવાળો

ઉદાહરણ : 1

એક વિદ્યાર્થીએ આંકડાશાસ્ત્ર મેળવેલ ગુણ અનુક્રમે 89, 96, 83, 93, 90 છે તો તે પરથી આપેલ માહિતીનો મધ્યક શોધો.

જવાબ : અહી અવર્ગીકૃત (અસતત) માહિતી આપેલ છે.

તેથી મધ્યક = $\overline{x} = \frac{\Sigma xi}{n}$ અહી n = 5 = પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા

$$= \frac{89 + 96 + 83 + 93 + 90}{5}$$

$$\overline{x} = \frac{451}{5} = 90.2.$$

➢ જયારે આપેલી માહિતીમાં પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા વધુ હોય અને અવર્ગીકૃત માહિતી આપેલી હોય તો તેવા સંજોગોમાં ટૂંકી રીત થી મધ્યક શોધવામાં આવે છે. અહીં ધારેલો મધ્યક છ લઈને નીચેના સૂત્રની મદદથી ગણતરી કરી મધ્યક શોધવામા આવે છે.

મધ્યક = $\overline{x} = A + \frac{\Sigma d}{n}$

જ્યાં A = ધારેલો મધ્યક

n = પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા

d = (xi-A) = તફાવત

xi = પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા

Σ = સરવાળો

નોંધ :-

ધારેલો મધ્યક A તરીકે આપેલ પ્રાપ્તાંકોમાંથી કોઈ પણ પ્રાપ્તાંકો પસંદ કરી શક્ય છે.

ઉદાહરણ : 2

F.Y. B.A.માં અભ્યાસ કરતાં એક વિદ્યાર્થીએ વિવિધ વિષયોમાં 50માંથી મેળવેલા ગુણ નીચે મુજબ છે. તે ઉપરથી (ટૂંકી રીતે) મધ્યક શોધો.

36, 38, 24, 43, 18, 37, 42, 32, 28, 27

જવાબ :

અહી અવર્ગીકૃત (અસતત) માહિતી આપેલી છે અને ટૂંકી રીતે મધ્યક શોધવા સૌ પ્રથમ ધારેલો મધ્યક A નીચે મુજબ નક્કી કરીશું.

(A) ધારેલા મધ્યક તરીકે આપેલા "પ્રાપ્તાંકોમાંથી કોઈપણ પ્રાપ્તાંક લઇ શકાય.

અથવા

(B) ધારેલા મધ્યક = A = $\frac{\text{સૌથી મોટો પ્રાપ્તાંક + સૌથી નાનો પ્રાપ્તાંક}}{2}$

(A) ધારેલા મધ્યક A = 24 લઇ નીચે મુજબ મધ્યક શોધીશું.

"પ્રાપ્તાંકો xi	તફાવત d = $(x\text{i} - A)$
36	36-24=12
38	38-24=24
24	24-24=0
43	43-24=19
18	18-24= -6
37	37-24=13
42	42-24=18
32	32-24=8
28	28-24=4
27	27-24=3
કુલ	Σd = 85

મધ્યક = $A + \frac{\Sigma d}{n}$

$= 24 + \frac{85}{10}$

= 24 + 8.5

$\overline{x} = 32.5$

(B) ધારેલો મધ્યક = A = $\frac{\text{સૌથી મોટો પ્રાપ્તાંક + સૌથી નાનો પ્રાપ્તાંક}}{2}$

$= \frac{43+18}{2} = 30.5$

A = 31 લઇ મધ્યક શોધીશું.

પ્રાપ્તાંકો xi	તફાવત d = $(x\text{i} - A)$
36	36 – 31 = 5
38	38 – 31 = 7
24	24 – 31 = -7
43	43 – 31 = 12
18	18 – 31 = -13
37	37 – 31 = 6
42	42 – 31 = 11
32	32 – 31 = 1
28	28 – 31 = -3
27	27 – 31 = -4
કુલ	Σd = 15

$\frac{\text{મધ્યક}}{\overline{x}} = A + \frac{\Sigma d}{n} = 31 + \frac{15}{10}$

= 31 + 1.5

$\overline{x} = 32.5$

➢ અસતત આવૃત્તિ વિતરણ માટે

➢ આવૃત્તિ અને પ્રાપ્તાંકો બંને આપેલ હોય ત્યારે મધ્યકની ગણતરી નીચેના સૂત્રથી કરી શક્ય.

(૯) મધ્યક = $\overline{x} = \frac{\Sigma f xi}{n}$

જ્યાં f = આવૃત્તિ

xi = પ્રાપ્તાંકો

n = Σf = આવૃત્તિનો કુલસરવાળો

ઉદાહરણ : 3

આનલ ફ્લેટમાં રહેતા 20 કુટુંબના બાળકોની માહિતી નીચે મુજબ પ્રાપ્ત થઈ છે. તો તે ઉપરથી માહિતીનો મધ્યક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

બાળકોની સંખ્યા	કુટુંબની સંખ્યા
0	1
1	2
2	4
3	4
4	5
5	4
કુલ	Σf = 20

જવાબ : ધારોકે બાળકોની સંખ્યા $=xi$

કુટુંબોની સંખ્યા = fi

xi	fi	$fixi$
0	1	0
1	2	2
2	4	8
3	4	12
4	5	20
5	4	20
કુલ	20	62

$$\Sigma fi = n = 20$$
$$\Sigma fi = n = 62$$

મધ્યક $= \overline{x} = \frac{\Sigma f xi}{n}$

$= \frac{62}{20}$

= 3.1

અર્થઘટન :

કુટુંબદીઠ બાળકોની સરેરાશ સંખ્યા 3.1 છે. એટલે કે દરેક કુટુંબમાં લગભગ 3 બાળકો છે.

➢ વર્ગીકૃત (સતત) માહિતી માટે આપણે અગાઉ અભ્યાસ કર્યો એ મુજબ વર્ગીકૃત (સતત) આવૃત્તિ વિતરણને મુખ્યત્વે બે વિભાગમાં વહેંચી શક્ય.

(A) નિવારક વર્ગવાળું આવૃત્તિ વિતરણ

(B) અનિવારક વર્ગવાળું આવૃત્તિ વિતરણ

(A) નિવારક વર્ગવાળું આવૃત્તિ વિતરણ આપેલું હોય ત્યારે મધ્યક ની ગણતરી નીચેના સૂત્રની મદદથી કરી શક્ય.

સૂત્ર – (1) $\frac{\text{મધ્યક}}{\overline{x}} = A + \frac{\Sigma di}{n} \times i$

જ્યાં A = ધારેલો મધ્યક

fi = આવૃતિઓ

di = $(x\mathrm{i} - \mathrm{A})$=તફાવત

n = Σf

i = વર્ગ લંબાઈ

સૂત્ર – (2) મધ્યક = $\frac{\Sigma fixi}{n}$

જ્યાં fi = આવૃતિઓ

n = Σf

xi = મધ્ય કિમત

(B) અનિવારક + વર્ગ વાળુ આવૃત્તિ વિતરણ

સૂત્ર – (3) $\frac{\text{મધ્યક}}{\overline{x}} = \frac{\Sigma \mathrm{fi}xi}{n}$

જ્યાં fi = આવૃતિઓ

xi = મધ્ય કિમત

મધ્ય કિમત = $\frac{\text{ઉપલી સીમા + નીચલી સીમા}}{2}$

n = Σf

સૂત્ર – (4) $\frac{\text{મધ્યક}}{\pi} = A + \frac{\Sigma fidi}{n}$

જ્યાં A = ધારેલો મધ્યક

fi = આવૃત્તિઓ

di = $(x\mathrm{i} - \mathrm{A})$= તફાવત

n = Σf

ઉદાહરણ :4

નીચેના કોષ્ટકમા અમદાવાદ જીલ્લાના કાપડના વેપારીઓની આવક (હજારમાં) આપી છે. તો વ્યક્તિદીઠ સરેરાશ આવક શોધો.

આવક (હજારમા)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
વેપારીઓની સંખ્યા	12	10	24	14	20

જવાબ :

આવક (હજારમા)	વેપારીઓની સંખ્યા fi	મધ્ય કિમત xi	$d + \frac{x - A}{i}$	$fidi$
0-10	12	5	$\frac{5 + 25}{10} = 2$	-24
10-20	10	15	$\frac{15 + 25}{10} = -1$	-10
20-30	24	25 = A	$\frac{25 + 25}{10} = 0$	0
30-40	14	35	$\frac{35 + 25}{10} = 1$	14
40-50	20	45	$\frac{45 + 25}{10} = 2$	40
-	80 $= \Sigma f = n$	-	-	20 $= \Sigma fidi$

સમજુતી

મધ્ય કિમત = $\frac{\text{નીચલી સીમા + ઉપલી સીમા}}{2} = \frac{0+10}{2} = 5$

તેવીજ રીતે 10-20, 20-30, 30-40, 40-50 ની મધ્ય કિમતો શોધી તેને x ઘરો જે પૈકી વચ્ચેની કિંમત 25 છે. તેને A ધારો.

- તફાવત $d + \frac{x - A}{i}$

  જ્યાં xi $= x$ ની કિમત

  A = 25

  i = 10 વર્ગ લંબાઈ

- $fidi = fi \times di$

  દા.ત. 12× -2 = -24

સૂત્ર – (1) $\underset{\bar{x}}{\text{મધ્યક}} = A + \frac{\Sigma fidi}{n} \times i$

$= 25 + \frac{20}{80} \times 10$

= 25 + 2.5

= 27.5

અથવા

આવક (હજારમા)	**વેપારીઓની સંખ્યા fi**	**મધ્ય કિમત xi**	$fixi$
0-10	12	5	60
10-20	10	15	150
20-30	24	25	600
30-40	14	35	490
40-50	20	45	900
-	80 $= \Sigma f = n$	-	2200 $= \Sigma fixi$

સૂત્ર – (2) $\frac{\text{મધ્યક}}{\pi} = \frac{\Sigma fixi}{n} = \frac{2200}{80} = 27.5$

ઉદાહરણ – 5 નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણ પરથી મધ્યક શોધો

ગુણ	0થી વધુ	10થી વધુ	20થી વધુ	30થી વધુ	40થી વધુ	50થી વધુ
આવૃત્તિ	50	43	33	18	16	-

જવાબ

0 થી વધુની આવૃત્તિ

50

10 થી વધુની આવૃત્તિ

43

20 થી વધુની આવૃત્તિ

33

30 થી વધુની આવૃત્તિ

18

40 થી વધુની આવૃત્તિ

16

50 થી વધુની આવૃત્તિ

જે નીચે મુજબ સમજી શકાશે.

0-10 વર્ગની આવૃત્તિ = 0 થી વધુની આવૃત્તિ - પછીના વર્ગની આવૃત્તિ

તેવીજ રીતે = 50-43 = 7

10-20 વર્ગની આવૃત્તિ = 10 થી વધુ – 20 થી વધુની

= -43 – 33 = 10

20-30 વર્ગની આવૃત્તિ = 20 થી વધુ – 30 થી વધુ

= 33 – 18 = 18

30-40 વર્ગની આવૃત્તિ = 30 થી વધુ – 40 થી વધુ

= 18-16 = 2

40-50 વર્ગની આવૃત્તિ = 40 થી વધુ – 50 થી વધુ

= 16 – 0 = 16

વર્ગ	fi આવૃત્તિ	મધ્ય કિંમત xi	$d+\frac{x-A}{i}$	$fidi$
0-10	7	5	-2	-14
10-20	10	15	-1	-10
20-30	15	25=A	0	0
30-40	2	35	1	2
40-50	16	45	2	32
-	**50** $= \Sigma fi = n$	-	-	$10 = \Sigma fidi$

સૂત્ર – (1) $\frac{\text{મધ્યક}}{\overline{x}} = A + \frac{\Sigma \text{fid}i}{n} \times i$

$= 25 + \frac{10}{50} \times 10$

= 25 + 2

= 27

અથવા

વર્ગ	fi આવૃત્તિ	મધ્ય કિંમત xi	$fidi$
0-10	7	5	35
10-20	10	15	150
20-30	15	25	375
30-40	2	35	70
40-50	16	45	720
-	**50=** $\boldsymbol{\Sigma fi = n}$	**-**	**1350** $\boldsymbol{= \Sigma fidi}$

સૂત્ર – (2) મધ્યક $\overline{x} = \frac{\Sigma \text{fix}i}{n} = \frac{1350}{50} = 27$

ઉદાહરણ – ૬ નીચે આપેલી માહિતી પરથી મધ્યક શોધો.

વર્ગ	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30
આવૃત્તિ	17	20	20	23	14	17

જવાબ

વર્ગ	fi આવૃત્તિ	મધ્ય કિંમત xi	$d + \frac{x-A}{i}$	સૂત્ર-3 $fidi$	$fidi$
1-5	17	3	-2	-34	81
6-10	20	8	-1	-20	160
11-15	20	13=A	0	0	260
16-20	23	18	1	23	414
21-25	14	23	2	28	322
26-30	17	28	3	51	476
-	**111** $\boldsymbol{= \Sigma fi = n}$	**-**	**-**	**48** $\boldsymbol{= \Sigma fidi}$	**1713** $\boldsymbol{= \Sigma fixi}$

સૂત્ર – (3) $\frac{\text{મધ્યક}}{\overline{x}} = A + \frac{\Sigma \text{fid}i}{n}$

$= 13 + \frac{48}{111}$

= 13 + 0.43

= 13.43

સૂત્ર – (4) $\frac{\text{મધ્યક}}{\overline{x}} = \frac{\Sigma \text{fix}i}{n} = \frac{1713}{111} = 13.43$

➢ અસમાન વર્ગ લંબાઈવાળું આવૃત્તિ વિતરણ

ઉદાહરણ – 7

આંકડાશાસ્ત્રની 25 ગુણની એક કસોટીમા વિદ્યાર્થીઓએપ્રાપ્ત કરેલ ગુણનું આવૃત્તિ નીચે મુજબ છે તે ઉપરથી મધ્યક શોધો.

વિદ્યાર્થીઓના ગુણ	1	2	3	4-10	11-15	16-20	21-25
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	1	2	2	14	11	8	6

જવાબ ;

વિદ્યાર્થીઓના ગુણ	**વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા**	**મધ્ય કિમત** xi	$fixi$
1	1	1	1
2	2	2	4
3	2	3	6
4-10	14	7	98
11-15	11	13	143
16-20	8	18	144
21-25	6	23	138
-	**44** $= \Sigma fi = n$	**-**	**534** $= \Sigma fidi$

સમજુતી

મધ્ય કિમત : અહીં શરૂઆતના ગુણો 1, 2, 3 પ્રાપ્તાંક સ્વરૂપે છે તેથી તેની મધ્ય કિંમત ફરી થી 1, 2, 3 કખાશે. જયારે ત્યાર પછીના વર્ગો માટે મધ્યક કિમત અગાઉ શોધ્યા મુજબ શોધાશે.

(દા.ત.. $\frac{4+10}{4} = 7$)

$\frac{\text{મધ્યક}}{\overline{x}} = \frac{\Sigma fixi}{n} = \frac{534}{44} = 12.14$

4.3.2 મધ્યકના લાભ –ગેરલાભ – ઉપયોગો➢

મધ્યકના લાભો

મધ્યકના લાભો નીચે મુજબ છે.

(1) મધ્યક એ મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપોમાં સર્વશ્રેષ્ઠ માપ છે.

(2) મધ્યક એ ખૂબજ ચોક્કસ માપ છે.

(3) મધ્યકમાં પ્રાપ્તાંકોના વિચલનો નો સરવાળો શૂન્ય હોય છે.

(4) મધ્યકની મદદથી બે જૂથો વચ્ચેની સરખામણી કરવી સરળ બને છે.

(5) માહિતીના પ્રાપ્તાંકમાંથી કોઈપણ પ્રાપ્તાંક ઉમેરી કે દૂર કરી ફરીથી મધ્યક શોધી શકાય છે તેની અસર માપી શકાય છે.

➢ **મધ્યકના ગેરલાભો**

મધ્યકના ગેરલાભો નીચે મુજબ છે.

(1) આલેખની મદદથી મધ્યક શોધી શકતો નથી.

(2) અંતિમ પ્રાપ્તાંકોની મધ્યક ઉપર થતી અસર જણાય આવે છે.

(3) ક્યારેક મધ્યકની કિમત અયોગ્ય માર્ગે લઇ જાય છે.

(4) જ્યાં સુધી બધા પ્રાપ્તાંકો કે માહિતી ન મળે ત્યાં સુધી મધ્યકની ગણતરી શક્ય બનતી નથી.

(5) મધ્યકની કિમત કોઈકવાર અવ્યવહારુ નીવડે છે.

➢ **મધ્યકના ઉપયોગો**

મધ્યકના ઉપયોગો નીચે મુજબ છે.

(1) મધ્યકનું માપ શ્રેષ્ઠ હોવાથી વ્યવહારમા તેનો વ્યાપક ઉપયોગ થાય છે.

(2) સહ સબંધ, નિયત સબંધ જેવા આંકડાશાસ્ત્રીય માપોની ગણતરી માટે મધ્યક ઉપયોગી છે.

(3) માધ્યાકની મદદથી બધા જ પ્રાપ્તાંકોની સંયુક્ત અસર જાણી શકાય છે.

(4) મધ્યક એ સરાસરીની તુલના કે સાર્થકતાની કક્ષા જાણવી ઉપયોગી છે.

4.3.3 મધ્યક મધ્યસ્થ એ મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું દ્વિતીય માપ છે તેમા શ્રેણીમાં આવેલા પ્રાપ્તાંકોની ચઢતા કે ઉતરતા ક્રમમાં ગોઠવવામા આવે છે અને તેના મધ્યમાં આવેલ જે માપ શોધવામાં આવે છે તેને મધ્યસ્થ કહે છે. આ માપ માપ અડધા પ્રાપ્તાંકો ઉપર અને અડધા પ્રાપ્તાંકો નીચે આવેલા હોય છે.

➢ અવર્ગીકૃત માહિતી માટે

પ્રાપ્તાંકો આપેલ હોય ત્યારે

જયારે અવર્ગીકૃત માહિત આપેલ હોય એટલે કે પ્રાપ્તાંકો આપેલા હોય ત્યારે સૌ પ્રથમ આપેલા પ્રાપ્તાંકો ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવો અને તેની મધ્યમાં આવેલા પ્રાપ્તાંકોને મધ્યસ્થ કહેવાય.

દા.ત. 1 3 2 5 4 નો મધ્યસ્થ શોધો.

જવાબ ચઢતા ક્રમમાં 1 2 3 4 5

મધ્યસ્થ = મધ્યમા આવેલ પ્રાપ્તાંક = 3

મધ્યસ્થનu m વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને તેને નીચેના સૂત્ર દ્વારા શોધી શકાય.

મધ્યસ્થ M = $\frac{n+1}{2}$ મું અવલોકન

જ્યાં n = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

ઉદાહરણ - 8 નીચે આપેલ પ્રાપ્તાંકનો મધ્યસ્થ શોધો.

15, 10, 13, 9, 12, 7, 8

જવાબ :

પ્રાપ્તાંકોને ચઢતાં ક્રમમાં ગોઠવો.

7, 8, 9, 10, 12, 13, 15

n = 7 (એકી સંખ્યા)

મધ્યસ્થ M = $\frac{n+1}{2}$ મું અવલોકન

= $\frac{7+1}{2}$ મું અવલોકન

= 4 મું અવલોકન

$M = 10$

ઉદાહરણ - 9 નીચે આપેલ માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધો.

5, 9, 13, 2, 14, 11

જવાબ

પ્રાપ્તાંકોને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવતા

2, 5, 9, 11, 13, 14

n = 6 (વેકી સંખ્યા)

મધ્યસ્થ $M = \frac{n+1}{2}$ મું અવલોકન

$= \frac{6+1}{2}$ મું અવલોકન

$=$ 3.5 મું અવલોકન

$= \frac{\text{ત્રીજી અવલોકન + ચોથું અવલોકન}}{2}$

$M = \frac{9+11}{2} = \frac{20}{2} = 10$

➢ પ્રાપ્તાંક અને આવૃત્તિ આપેલ હોય ત્યારે.

આપેલ પ્રાપ્તાંકને જોડકા સહીત ચઢતા ક્રમમા ગોઠવો અને નીચેના સૂત્રની મદદથી મધ્યસ્થ શોધો.

મધ્યસ્થ $M = \frac{n+1}{2}$ મું અવલોકન

C. F. ના જે ખાણમાં સમાયેલ હોય તે પ્રાપ્તાંક

જ્યાં $= n = \Sigma f =$ આવૃત્તિનો સરવાળો

ઉદાહરણ – 10

એક બહુમાળી મકાનમાં રહેતા કુટુંબના બાળકોની સંખ્યાની માહિતી નીચે પ્રમાણે છે તો તે પરથી મધ્યસ્થ શોધો.

બાળકોની સંખ્યા	0	1	2	3	4	5
કુટુંબોની સંખ્યા	6	8	10	7	5	3

જવાબ :

ધારોકે બાળકોની સંખ્યા = x અને કુટુંબની સંખ્યા = *f*

x	f	સચયી આવુતી(c.f.)
0	6	6
1	8	6+8=14
2	10	14+10=24
3 ←	7	24+7=31→
4	5	31+5=36
5	3	36+3=39
કુલ	39 $= n = \Sigma f$	-

$\frac{n+1}{2}$ મું અવલોકન

મધ્યસ્થ $M = \frac{n+1}{2}$ મું અવલોકન

$= \frac{39+1}{2}$ મું અવલોકન = 20 મું અવલોકન

સંચયી આવૃત્તિના ખાનામાં જોતા 20 મુ અવલોકન 31માં સમાવેલ છે. તેથી તેની સામે x આગળ પ્રાપ્તાંક 3 છે. તેથી મધ્યસ્થ M = 3

ઉદાહરણ – 11

અંગ્રેજીમાં સ્પેલિંગ લેખન કસોટી દરમ્યાન કરેલી ભૂલો અને તેને અનુરૂપ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાનું આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે ઉપરથી મધ્યસ્થ શોધો.

ભૂલોની સંખ્યા	12	11	10	9	8	7	6	5
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	3	6	9	11	14	12	7	5

જવાબ :

ધારોકે ભૂલોની સંખ્યા = x અને વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા =f પ્રાપ્તાંકને x ને આવૃત્તિ સહિત ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવવા.

x	F	c.f. (સંચયી આવૃત્તિ)
5	5	= 5
6	7	5+7 = 12
7	12	12+12 = 24
8 ←	14	24+14 = 38 →
9	11	38+11 = 49
10	9	49+9 = 58
11	6	58+6 = 64
12	3	64+3 = 67
કુલ	67 $= n = \Sigma f$	-

$\frac{n+1}{2}$ મું અવલોકન

મધ્યસ્થ M = $\frac{n+1}{2}$ મું અવલોકન

= $\frac{67+1}{2}$ મું અવલોકન

= 34 મું અવલોકન

સંચયી આવૃતિના ખાતામાં જોતાં 34 મા પ્રાપ્તાંકની કિમત 38 મા સમાયેલ છે તેથી તેની સામે x = 8 છે.

મધ્યસ્થM = 8

➢ વર્ગીકૃત માહિતી માટે

વર્ગીકૃત માહિતીમા અનિવારક અને નિવારક ખર્ચ આપેલા હોય ત્યારે મધ્યસ્થ શોધવા નીચેના સુત્રનો ઉપયોગ થાય છે.

મધ્યસ્થ વર્ગ $\frac{n}{2}$ મું અવલોકન

મધ્યસ્થ= $M = L + \frac{\frac{n}{2} - c.f.}{f} \times i$

જ્યાં L = જે વર્ગમાં મધ્યસ્થ હોય તે વર્ગનું અધઃ સીમાબિંદુ

c.f. = જે વર્ગમાં મધ્યસ્થ સમાયેલ હોય તે વર્ગના પહેલાંના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ

f = જે વર્ગમાં મધ્યસ્થ સમાયેલ હોય તે વર્ગની આવૃત્તિ

i = જે વર્ગમાં મધ્યસ્થ સમાયેલ હોય તે વર્ગની વર્ગ લંબાઈ

★ અનિવારક વર્ગનું ઉદાહરણ

ઉદાહરણ – 12 નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી મધ્યસ્થ શોધો.

વર્ગ	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79
આવૃત્તિ	6	9	14	18	15	12	8	5

જવાબ :

ધારોકે વર્ગ = x આવૃત્તિ =f અને સંચયી આવૃત્તિ = c.f.

x	f	c.f.
0-9	6	= 6
10-19	9	6+9 = 15
20-29	14	15+14 = 29 →
30-39 ←	18 =f	29+18 = 47 →
40-49	15	47+15 = 62
50-59	12	62+12 = 74
60-69	8	74+8 = 82
70-79	5	82+5 = 87
કુલ	87 $= n = \Sigma f$	-

c.f.

$\frac{n}{2}$ મું અવલોકન

મધ્યસ્થ M = $\frac{n}{2}$ મું અવલોકન

= $\frac{87}{2}$ મું અવલોકન

= 43.5 મું અવલોકન

c.f. ના ખાનામા જોતાં 43.5 મુ અવલોકન 47 મા સમાયેલ છે. અને તેની સામેનો વર્ગ 30-39 છે પરંતુ અહી અનિવારક વર્ગ આપેલ છે તેથી

-0.5 અને +0.5 કરતા મધ્યસ્થ વર્ગ M = 29.5 – 29.5 થશે.

L = અધઃ સીમાબિંદુ = 29.5

F = 18, c.f. = 29, i = 10

$$\text{મધ્યસ્થ} = M = L + \frac{\frac{n}{2} - c.f.}{f} \times i$$

$$= 29.5\ \frac{43.5-29}{18} \times 10$$

$$= 29.5 + \frac{14.5-10}{18}$$

= 29.5 + 8.06

M = 37.56

★ **નિવારક વર્ગનું ઉદાહરણ**

ઉદાહરણ – 13 નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણ ઉપરથી મધ્યસ્થ શોધો.

વર્ગ લંબાઈ	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
આવૃત્તિ	1	3	6	14	11	7	3

જવાબ : ધારો કે વર્ગ લંબાઈ = x , આવૃત્તિ = f સંચયી આવૃત્તિ = c.f.

x	f	c.f.
60-70	1	= 1
70-80	3	1+3 = 4
80-90	6	4+6 = 10 →
90-100	14 =f	10+14 = 24 →
100-110	11	24+11 = 35
110-120	7	35+7 = 42
120-130	3	42+3 = 45
કુલ	$45 = n = \Sigma f$	-

મધ્યસ્થ = $\frac{n}{2}$ મું અવલોકન

= $\frac{45}{2}$ મું અવલોકન

= 22.5 મું અવલોકન

c.f ના ખાનામા જોતા 22.5 મુ અવલોકન જૂથમાં સમાયેલ છે.

તેથી મધ્યસ્થ વર્ગ = 90 – 100

L = 90, F = 14, c.f = 10, i = 10

$$\text{મધ્યસ્થ} = \mathrm{M} = \mathrm{L} + \frac{\frac{n}{2} - \mathrm{c.f.}}{f} \times i$$

$$= 90 + \frac{22.5 - 10}{14} \times 10$$

$$= 90 + \frac{12.5 - 10}{14}$$

$$= 90 + \frac{12.5}{14}$$

= 90 + 8.93

M = 98.93

4.3.4 મધ્યસ્થના લાભ – ગેરલાભ

➢ **મધ્યસ્થના લાભો**

મધ્યસ્થના લાભો નીચે મુજબ લખી શક્ય.

(1) મધ્યસ્થ એ ગુણાત્મક માહિતી માટે વધુ ઉપયોગી છે.

(2) આલેખની મદદથી મધ્યસ્થ શોધી શકાય છે.

(3) મધ્યસ્થ એ છેડા પરના પ્રાપ્તાંકોની અસર થી મુક્ત છે.

(4) ખુલ્લા છેડાવાળા આવૃત્તિ વિતરણ આપેલું હોય, ત્યારે મધ્યક ને બદલે મધ્યસ્થથી જ તેનું માપ કાઢી શકાય છે.

(5) ફક્ત પ્રાપ્તાંકો આપેલા હોય ત્યારે માત્ર અવલોકન કરી મધ્યસ્થ શોધી શક્ય છે.

➢ **મધ્યસ્થના ગેરલાભો**

(1) મધ્યસ્થ એ મધ્યક કરતા ઓછું સ્થિર માપ છે.

(2) મધ્યસ્થ એ સંપૂર્ણ વિશ્વાસપાત્ર માપ નથી.

(3) પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા વધુ હોય ત્યારે મધ્યસ્થ શોધતા પહેલા તેની ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવવું કંટાળા જનક છે.

(4) મધ્યસ્થની ગણતરીમાં છેડા પરના પ્રાપ્તાંકો ને કોઈ મહત્ત્વ મળતું નથી.

(5) મધ્યસ્થ એ કેટલીક વખત ચોકસાઈ ઘટાડે છે.

4.3.5 બહુલક આ માપ મધ્ય વર્ગ સ્થિતિનું ત્રીજી માપ છે બહુલક ની ગણતરી નીચે મુજબ કરી

શકાય.

➢ **અવર્ગીકૃત માહિતી માટે**

જયારે પ્રાપ્તાંકો આપેલા હોય ત્યારે જે પ્રાપ્તાંક સૌથી વધુ વખત આવતો હોય તેને બહુલક તરીકે ઓળખવામા આવે છે અને તેને Z વડે દર્શાવવામા આવે છે. દા.ત. 12, 2, 4, 10, 2, 5, 2 પ્રાપ્તાંકો આપેલા હોય તો પ્રાપ્તાંક 2 સૌથી વધુ વખત છે તેથી બહુલક = 2 થાય

ઉદાહરણ – 14 નીચે આપેલ પ્રાપ્તાંકો ઉપરથી બહુલક શોધો.
12, 13, 17, 12, 15, 13, 12, 25, 13, 12, 11, 12

અહી '12' એ સૌથી વધુ વખત આવે છે.

બહુલક = Z + 12 જેને કાચા બહુલક તરીકે પણ ઓળખી શકાય.

➢ જયારે પ્રાપ્તાંકો અને આવૃત્તિ આપેલ હોય ત્યારે મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતાં પ્રાપ્તાંકને બહુલક તરીકે ઓળખવામાં આવે છે જે નીચેના ઉદાહરણ ઉપરથી સમજી શકાય.

ઉદાહરણ – 15 નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી બહુલક શોધો.

પ્રાપ્તાંકો	2	3	4	5	6	7	8
આવૃત્તિ	2	7	11	16	14	8	3

જવાબ : ધારોકે પ્રાપ્તાંક = x આવૃત્તિ = f

પ્રાપ્તાંક	આવૃત્તિ
2	2
3	7
4	11
5 ←	16 →મોટામા મોટી આવૃત્તિ
6	14
7	8
8	3

બહુલક = મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતો પ્રાપ્તાંક

અહી મહત્તમ આવૃત્તિ 16 છે અને તેની સામેનો પ્રાપ્તાંક 5 છે તેથી બહુલક Z = 5

➢ **વર્ગીકૃત માહિતી માટે**

જયારે વર્ગીકૃત માહિતીમાં અનિવારક વર્ગ વાળું આવૃત્તિ વિતરણ કે નિવારક વર્ગ વાળું આવૃત્તિ વિતરણ આપેલું હોય તો નીચેની રીતે બહુલક શોધાય.

બહુલક વર્ગ = મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતો વર્ગ (જો અનીવાર્ક વર્ગ આપેલો હોય તો તેને નિવારક વર્ગ ફેરવો)

બહુલક = Z = L + $\frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times i$

જ્યાં L = બહુલક વર્ગની નીચલી હદ

f_m = બહુલક વર્ગની સામેની આવૃત્તિ

f_1 = બહુલક વર્ગ કરતા નાના વર્ગ સામેની આવૃત્તિ

f_2 = બહુલક વર્ગ કરતા મોટા વર્ગ સામેની આવૃત્તિ

i = બહુલક વર્ગનો વર્ગ તફાવત (વર્ગ લંબાઈ)

➢ **અનિવારક વર્ગનું ઉદાહરણ**

ઉદાહરણ – 16 નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી બહુલક શોધો.

વર્ગ	101-150	151-200	201-250	251-300	301-350
આવૃત્તિ	3	11	17	10	4

જવાબ : ધારોકે વર્ગ = x અને આવૃત્તિ = f

x	f
101-150	3
151-200	11 = f_1 →
201-250	17 = f_m →
251-300	10 = f_2 →
301-350	4

બહુલક વર્ગ કરતા નાનો વર્ગ

મહત્તમ આવૃત્તિ (બહુલક વર્ગ)

બહુલક વર્ગ કરતા મોટો વર્ગ

બહુલક વર્ગ = મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતો વર્ગ મહત્તમ આવૃત્તિ = 17 છે તેની સામેનો વર્ગ બહુલક વર્ગ = 201 – 250 છે. આ વર્ગ અનિવારક વર્ગ છે તેથી તેને નિવારકમાં ફેરવવા તેની નીચલી હદમાં -0.5 અને ઉપલી હદ મા +0.5 કરતા બહુલક વર્ગ = 200.5 – 250.5

જ્યાં L = 200.5 (બહુલક વર્ગની નીચલી હદ)

f_m = 17 (મહત્તમ આવૃત્તિ)

f_1 = 11 (મહત્તમ આવૃત્તિ ઉપરની આવૃત્તિ)

f_2 = 10 (મહત્તમ આવૃત્તિની નીચેની આવૃત્તિ)

i = 50 વર્ગ લંબાઈ

બહુલક $= Z = L + \frac{f_m - f_1}{2 f_m - f_1 - f_2} \times i$

$= 200.5 + \frac{17-11}{2(17)-11-10} \times 50$

$= 200.5 + \frac{6 \times 50}{34-11-10}$

$= 200.5 + \frac{300}{13}$

$= 200.5 + 23.08$

$Z = 223.58$

ઉદાહરણ – 17 (નિવારક વર્ગનું ઉદાહરણ)

નીચે આપેલ સતત આવૃત્તિ વિતરણ ઉપરથી બહુલક શોધો.

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
આવૃત્તિ	4	7	11	24	15	13	6

જવાબ : ધારોકે વર્ગ = x અને આવૃત્તિ = f

x	f
0-10	4
10-20	7
20-30	$11 = f_1 \rightarrow$
30-40	$24 = f_m \rightarrow$
40-50	$15 = f_2 \rightarrow$
50-60	13
60-70	6

બહુલક વર્ગ કરતા નાનો વર્ગની આવૃત્તિ

બહુલક વર્ગની આવૃત્તિ

બહુલક વર્ગ કરતા મોટો વર્ગની આવૃત્તિ

બહુલક વર્ગ = મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતો વર્ગ = 30 – 40

L = 30 (બહુલક વર્ગની નીચલી સીમા)

$f_m = 24$ (મહત્તમ આવૃત્તિ) બહુલક વર્ગની આવૃત્તિ

$f_1 = 11$ (મહત્તમ આવૃત્તિ ઉપરની આવૃત્તિ)

$f_2 = 15$ (મહત્તમ આવૃત્તિની નીચે આવેલી આવૃત્તિ)

i = 10 બહુલક વર્ગની વર્ગ લંબાઈ

બહુલક$= Z = L + \frac{f_m - f_1}{2 f_m - f_1 - f_2} \times i$

$= 30 + \frac{24-11}{2(24)-11-15} \times 10$

$= 30 + \frac{13 \times 10}{38-11-15} = 30 + \frac{130}{22}$

$= 30 + 5.91$

$Z = 35.91$

જયારે મધ્યક અને મધ્યસ્થ જાણતા હોય એ ત્યારે બહુલક નીચેના સૂત્રથી શોધી શકાય.

બહુલક $= Z = 3\,M - 2\bar{x}$

$Z = 3$(મધ્યસ્થ) – 2 (મધ્યક)

ઉદાહરણ – 18 એક આવૃત્તિ વિતરણનો મધ્યક 37.8 અને મધ્યસ્થ 39.5 હોય તો તેનો બહુલક શોધો.

જવાબ :

બહુલક Z = 3(મધ્યસ્થ) – 2 (મધ્યક)

$= 3M - 2\overline{x}$

$= 3\,(39.5) - 2\,(37.8)$

$= 118.5 - 75.6$

$Z = 42.9$

ઉદાહરણ – 19 $\overline{x} = 42$ અને $Z = 41$ હોયતો M શોધો.

જવાબ :

$Z = 3M - 2\overline{x}$

$41 = 3M - 2(42)$

$41 = 3M - 84$

$41 + 84 = 3M$

$\frac{41 + 84}{3} = M$

$\frac{125}{3} = M$

41.67 = M એટલે કે M = 41.67

ઉદાહરણ – 20 નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણની મદદથી મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો.

વિદ્યાર્થીઓ (થી વધુ)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
ગુણ	100	95	85	77	50	34	20	7	0

જવાબ : આપેલ આવૃત્તિ વિતરણથી વધુ સ્વરૂપ આપેલ છે.

વર્ગ	**આવૃત્તિ f**	**મધ્ય કિંમત x**	$d = \frac{x - A}{i}$	di	**સંચયી આવૃત્તિ f**
0-10	100-95 = 5	5	-3	-15	5
10-20	95-85 = 10	15	-2	-20	15
20-30	85-77 = 8 $= f_1$	25	-1	-8	23 = cf
30-40	77-50 = 27 $= f_n$	35 = A	0	0	50 = n/2
40-50	50-34 = 16 $= f_2$	45	1	16	66
50-60	34-20 = 14	55	2	28	80
60-70	20-7 = 13	65	3	39	93
70-80	7-0 = 7	75	4	28	100
	$N = \Sigma f = 100$	-	-	$68 = \Sigma fd$	-

A = 35, $\Sigma f d = 68$, n = 100, i = 10

મધ્યસ્થ$= A + \frac{\Sigma fd}{n} \times i$

$\overline{x} = 35 + \frac{68}{100} \times 10$

$= 35 + \frac{68}{100}$

= 35 + 6.8

$\overline{x}$ = 41.8

મધ્યસ્થવર્ગ $= \frac{n}{2}$ મું અવલોકન

$= \frac{100}{2}$ મું અવલોકન

= 50 મું અવલોકન

c.f. ના ખાનામાં જોતા 50 મુ અવલોકન 50 માં સમાયેલ છે. તેથી તેની સામેનો વર્ગ

મધ્યસ્થ વર્ગ = 30 – 40

L = 30 (મધ્યસ્થ વર્ગની નીચલી સીમા)

f = 27 (મધ્યસ્થ વર્ગની સામેની આવૃત્તિ)

c.f. = 23 (મધ્યસ્થ વર્ગથી નાના વર્ગની સામેની સંખ્યા સંચયી આવૃત્તિ)

i = 10 (મધ્યસ્થ વર્ગની વર્ગ લંબાઈ)

મધ્યસ્થ $= M = L + \frac{\frac{n}{2} - c.f.}{f} \times i$

$= 30 + \frac{50-23}{27} \times 10$

$= 30 + \frac{27 \times 10}{27}$

= 30 + 10

M = 40

બહુલક વર્ગ = મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતો વર્ગ

= 30-40

L = 30 બહુલક વર્ગની નીચલી સીમા

fm = 27 બહુલક વર્ગની સામેની આવૃત્તિ

f_1 = 8 બહુલક વર્ગથી નાના વર્ગ સામેની આવૃત્તિ

f_1 = 16 બહુલક વર્ગથી મોટા વર્ગ સામેની આવૃત્તિ

i = 10 બહુલક વર્ગની વર્ગ લંબાઈ

બહુલક $= Z = L + \frac{f_m - f_1}{2 f_m - f_{1} - f_2} \times i$

$= 30 + \frac{27-8}{2\,(27)-8-16} \times 10$

$= 30 + \frac{19 \times 10}{54-8-16} = 30 + \frac{190}{30}$

= 30 + 6.33

Z = 36.33

ઉદાહરણ – 21

20 અવલોકનોનો મધ્યક 40 છે. તેમાં એક અવલોકન 45 ને બદલે 54 લેવાયું છે તો સાચો મધ્યક શોધો.

જવાબ :

$\Sigma x = 40 \square 20 = 800$ છે તેમા એક અવલોકન 45 ને બદલે 54 લેવાયું છે એટલે કે 45 સાચું છે જે + (ઉમેરો) અને 54 મોટું છે તે - (બાદ) કરો સાચું $\Sigma \overline{x} = 800 + 45-54$

સાચું $\Sigma \overline{x}_1 = 791$

સાચો મધ્યક $\overline{x} = \frac{\Sigma x_1}{n}$

$\frac{791}{20}$

સાચો મધ્યક $\overline{x} = 39.55$

4.3.6 બહુલક લાભો- ગેરલાભો

➢ બહુલકના લાભો નીચે મુજબ છે.

(1) આલેખની મદદથી બહુલક શોધી શકાય છે.

(2) બહુલક એ મધ્યવર્તી સ્થિતિનું સૌથી ઝડપથી શોધી શકાતું માપ છે.

(3) અંતિમ પ્રાપ્તાંકોની અસર બહુલક ઉપર થતી નથી.

(4) ફક્ત પ્રાપ્તાંકોની મદદથી બહુલક સરળતાથી શોધી શકાય છે.

➢ **બહુલકના ગેરલાભો**

(1) બહુલકનું સૂત્ર બદલતા તેની કિમત બદલાય છે.

(2) બહુલક એ માહિતીની સાચી સરેરાશ દર્શાવતું નથી.

(3) બહુલક એ એક અસ્થિર બહુલક માપ છે.

(4) આાકડાશાસ્ત્રીય ગણતરીમા બહુલકનો ઉપયોગ ઓછા પ્રમાણમાં થાય છે.

4.4 સ્વાધ્યાય

(1) નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો.

6, 3, 5, 7, 10, 6, 12

(જવાબ : $\overline{x} = 7$, M = 6, Z = 6)

(2) નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો.

પ્રાપ્તાંક	1	2	3	4	5	6	7
આવૃત્તિ	9	18	17	21	16	11	8

(જવાબ : $\overline{x} = 3.82$, M = 4, Z = 4)

(3) નીચે આપેલી માહિતીઓ માટે મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો.

પ્રાપ્તાંક	1	2	3	4-7	8-12	13-19	20-24
આવૃત્તિ	1	6	9	12	11	6	5

(જવાબ : $\overline{x} = 8.44$, M = 6.5, Z = 6.5)

(4) નીચે આપેલી માહિતી માટે મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો.

વેતન	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
કામદારોની સંખ્યા	3	6	12	23	31	4	8	6

(જવાબ : $\overline{x} = 62.3$, M = 62.44, Z = 63.36)

(5) નીચે આપેલી માહિતી પરથી મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલક શોધો.

ગુણ	12	13	14	15	16	17	18	19
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	3	8	13	17	15	11	6	2

(જવાબ : $\overline{x}$ = 15.33, M = 15, Z = 15)

(6) નીચે આપેલ માહિતી પરથી $\overline{x}$, M અને Z શોધો.

વર્ગ	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74
આવૃત્તિ	1	2	3	5	9	16	10	7	4	2	1

(જવાબ : $\overline{x}$ = 47.67, M = 47.63, Z = 47.19)

(7) નીચે આપેલ પ્રાપ્તાંકો પરથી મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો.
25, 28, 12, 37, 31, 46, 42, 49, 56, 52
(જવાબ : $\overline{x}$ = 37.8, M = 39.5, Z = 3M-2$\overline{x}$ = Z = 42.9)

(8) નીચેના પ્રાપ્તાંકો પરથી મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો.
13, 11, 19, 8, 25, 19, 26, 28, 12, 19, 28, 30
(જવાબ : $\overline{x}$ = 19.83, M = 19, Z = 3M-2$\overline{x}$ = 17.34)

(9) નીચે આપેલી માહિતી મારથી મધ્યસ્થ શોધો.

x	0	1	2	3	4	5
F	4	6	8	5	3	1

(જવાબ : M = 2)

(10) નીચે આપેલી માહિતી પરથી M શોધો.

x	5	6	7	8	9	10	11	12
f	6	8	13	15	12	10	7	4

(જવાબ : M = 8)

(11) નીચે આપેલી માહિતી પરથી મધ્યક શોધો.
30, 27, 28, 44, 38, 19, 45, 25, 39, 35
(જવાબ : $\overline{x}$ = 33)

(12) નીચે આપેલી માહિતી પરથી મધ્યક શોધો.

x	0	1	2	3	4	5
f	3	3	4	3	2	1

(જવાબ : $\overline{x}$ = 2.06)

(13) નીચે આપેલી માહિતી પરથી મધ્યક શોધો.

વર્ગ	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
આવૃત્તિ	1	2	4	8	12	6	4	3

(જવાબ : $\overline{x}$ = 63.68)

(14) નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણ ઉપરથી મધ્યક શોધો.

વર્ગ	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
આવૃત્તિ	5	7	10	24	11	10	3

(જવાબ : $\overline{x}$ = 17.57)

(15) નીચેની માહિતી ઉપરથી મધ્યસ્થ શોધો.

ઉમર "થી ઓછી"	20	30	40	50	60	70
સંચયી આવૃત્તિ	15	45	84	102	110	112

વર્ગ	20 થી ઓછી	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
આવૃત્તિ	15	45-15	84-45	102-84	110-102	112-110

Hint :

જવાબ : M = 32.32)

(16) નીચેની આવૃત્તિ ઉપરથી બહુલક શોધો

ઉમર	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
કર્મચારીઓ સંખ્યા	3	4	7	10	8	5	3

(જવાબ : Z = 38)

(17) નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી બહુલક શોધો.

વર્ગ	0-7	7-14	14-21	21-28	28-35	35-42	42-49	49-56
આવૃત્તિ	26	31	35	42	82	71	54	19

(જવાબ : 33.49)

(18) નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લાખો.

1 સરેરાશના માપો પૈકી______________ માપ એ આદર્શ માપ છે.

(A) મધ્યક (B) મધ્યસ્થ

(C) બહુલક (D) એક પણ નહીં

2 દશ અવલોકનોનો મધ્યક 9 છે જેમાં 3 અવલોકનોનો મધ્યક 4 હોય તો બાકીના અવલોકનનો સરવાળો કેટલો ?

(A) 90 (B) 70

(C) 110 (D) એક પણ નહીં

3 15 અવલોકનોનો મધ્યક =10 અને 10 અવલોકનોનો મધ્યક =15 હોય તો 25 અવલોકનનો મધ્યક = ______________

(A) 10 (B) 15

(C) 12 (D) એક પણ નહીં

4 ______________ માપ આલેખની મદદથી શોધી શકાતું નથી.

(A) મધ્યસ્થ (B) મધ્યક

(C) બહુલક (D) એક પણ નહીં

5 મધ્યવર્તી સ્થિતિમાન ના માપનું બીજું નામ ______________ છે.

(A) મધ્યક માપ (B) કેન્દ્રીય વલલા માપ

(C) બહુવલલા માપ (D) એક પણ નહીં

6 પ્રથમ દશ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો મધ્યક = ______________

(A) 55 (B) 0.55

(C) 5.5 (D) એક પણ નહીં

7 મધ્યક ______________ માપ છે.

(A) સ્થિર (B) અસ્થિર

(C) ચલિત (D) એક પણ નહીં

8 માહિતીના અવલોકનોનો સરવાળો ભાગ્યા માહિતીનો મધ્યક = ____________

(A) Σx (B) $\overline{x}$

(C) n (D) એક પણનહીં

9 1, $\frac{1}{4}$, 2, $\frac{5}{4}$, $1/_2$નો મધ્યક = ______________

(A) $5/_4$ (B) $4/_5$

(C) 1 (D) એક પણનહીં

10 4, -3, 1, 0, -1 નો મધ્યસ્થ = ______________

(A) 0 (B) 1

(C) 4 (D) એક પણ નહીં

11 4, 2, 3, 1, 4, 4, નો બહુલક = ______________

(A) 2 (B) 3

(C) 4 (D) એક પણ નહીં

12 $\overline{x}$ = 1.5 અને Z = 30 હોયતો M = _____________

(A) 12 (B) 11

(C) 10 (D) એક પણ નહીં

(19) મધ્યકની વ્યાખ્યા આપી તેના ઉપયોગો જણાવો.

(20) માધ્યકના લાભા-લાભ લાખો.

(21) મધ્યસ્થનો અર્થ લખી તેના લાભા- લાભ લાખો.

(22) બહુલકનો અર્થ લખી તેના લાભા-લાભ જણાવો.

(23) મધ્યવર્તી સ્થિતિમાન એટલે શું ? તેના મુખ્ય પ્રકારો ના નામ લાખો.

(24) સતત આવૃત્તિ વિતરણ માટે મધ્યક શોધવાનું સૂત્ર લાખો.

(25) સતત આવૃત્તિ વિતરણ માટે મધ્યસ્થ શોધવાનું સૂત્ર લાખો.

(26) સતત આવૃત્તિ વિતરણ માટે બહુલક શોધવાનું સૂત્ર લાખો.

(27) મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું બીજું લાભ જણાવો.

(28) મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું આદર્શ માપ કયું છે ?

(29) મધ્યકની વ્યાખ્યા અઆપો.

(30) બહુલક વર્ગ એટલે શું ?

જવાબ :18

1) a 2) b 3) c 4) b 5) b 6) c
7) a 8) c 9) c 10) a 11) c 12) b

સંદર્ભગ્રંથ

1. ધંધાકીય સંશોધન પદ્ધતિઓ, મહેન્દ્ર અને દિનેશ, અક્ષર પબ્લિકેશન, અમદાવાદ (ગુજરાતી પુસ્તક)
2. Business Research Methods, by Maisuria & Patel, Akshar Publication Ahmdabad, (English Book)
3. Basic Statistics by Kapoor & Gupta, S. Chand Publication, Delhi.
4. Business Research Methods, Cooper & Schindler, Tata Mcgraw Hill (9^{th} Edition)

એકમ-5 પ્રસારમાનના માપો

રૂપરેખા

5.0 ઉદ્દેશો

આ પ્રકરણનો મુખ્ય ઉદ્દેશ વિદ્યાર્થીઓ પ્રસારમાનનો અર્થ સમજે અને તેના વિવિધ માપોની ઉપયોગિતા અંગે વાકેફ થાય તે છે.

5.1 પ્રસ્તાવના

અગાઉના પ્રકરણમાં મધ્યવર્તી સ્થિતિ માનના માપો શીખ્ય તેમાં મધ્યક એ ખૂબ પ્રચલિત માપ છે. એ જાણ્યું પરંતુ જુદી જુદી આંકડાશાસ્ત્રીય શ્રેણીઓનો સંપૂર્ણ અભ્યાસ કરવા કે માહિતી મેળવવા માટે મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના માપો પૂરતા નથી તેની મદદથી માહિતીનું સંપૂર્ણ વર્ણન થઇ શકતું નથી. સંપૂર્ણ શ્રેણીના પ્રપ્રાંકો કેવી રીતે પ્રસરેલા છે તે અંગેની માહિતી મેળવવા માટે પ્રસરમાન અને તેના માપોનો અભ્યાસ જરૂરી છે. દા.ત. બે કંપનીઓના સરેરાશ નફાને ધ્યાનમાં લઈને બને કંપનીઓની સરખામણી કરવામાં આવે તો તે કેટલીક વખત ગેરમાર્ગે દોરનારી નીવડે છે. કારણ કે બંને કંપનીઓ સરેરાશ નહો સરખો હોય પરંતુ દર વર્ષે થતા નફાના આંકડાઓમાં નફાની ચલિતતા નજરે પડતી નથી એટલે કે એક કંપનીના નફામાં દર વર્ષે વધુ મોટા પ્રમાણમાં વધઘર જોવા મળતી હોય જયારે બીજી કંપનીના નફામાં સ્થિરતા કે ઓછી ચલિતતા જોવા મળતી હોય તો તેવા સંજોગોમાં સરેરાશને આધારે બંને કંપની ને સરખું મહત્વ આપી શકાય નહીં.

આમ ખોટા નિર્ણય ન લેવાય કે ખોટી માન્યતામા ન બંધાય જવાય તેથી પ્રસરમાનનો ઉપયોગ કરવો જરૂરી છે.

5.2 પ્રસરમાનનો અર્થ : તેને નીચે મુંજબ સમજી શકાય.

- એ. ઈ. બાઉલી ના માટે મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપની આસપાસ ફેલાયેલા પ્રાપ્તાંકોને પ્રસરમાન કહેવાય છે.
- એમ. એચ. મૈસુરીયાના મતે આપેલ શ્રેણીના પ્રાપ્તાંકો મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપથી કેટલી દૂર સુધી ફેલાયેલા છે. તે દર્શાવતું માપ એટલે પ્રસરમાન

5.3 પ્રસરમાનની આગત્યતા

આંકડાશાસ્ત્રના અભ્યાસમા વિવિધ માપોની ગણતરી અને યોગ્ય નિર્ણયો લેવામાં તે પ્રસરમાન ખુબ જ અગત્યનુ છે જે નીચે ઉજબ છે.

(1) **વિશ્વસનીયતા :** પ્રસરમાનની મદદથી મધ્યવર્તી સ્થિતિ માનના માપો કેટલા વિશ્વસનીય છે તે નક્કી કરી શક્ય છે.

(2) **તુલના :** બે કે તેથી વધુ શ્રેણીમાં રહેલ અસ્થિરતા ના આધારે તુલના કરવા માટે પ્રસરમાન ઉપયોગી છે.

(3) **નિયંત્રણ :** શ્રેણીમાં રહેલ અનિયમિતતા શોધી તેને નિયંત્રણ કરવા માટે પ્રસરમાન ઉપયોગી છે.

(4) **યોગ્ય નિર્ણય :** મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપોને આધારે અયોગ્ય નિર્ણય કે તારનો ન લેવાય તે જાણવા

(5) **તફાવત :** પ્રાપ્તાંકો વચ્ચે રહેલ તફાવતોકે ચલનો શોધવા માટે પ્રસરમાન ઉપયોગી છે.

5.4 પ્રસરમાનના માપો

પ્રસરમાનના મુંખ્ય ચાર માપો છે.

1 વિસ્તાર

2 ચતુર્થક વિચલન

3 સરેરાશ વિચલન

4 પ્રમાણિત વિચલન

5.4.1 વિસ્તાર

"વિસ્તાર એટલે આપેલ પ્રાપ્તાંકો પૈકી મહત્તમ પ્રાપ્તાંક અને લઘુત્તમ પ્રાપ્તાંક વચ્ચેનો તફાવત" જેને સંકેતમાં ઇ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે વિસ્તાર ને બે પ્રકારે વહેંચી શકાય

(1) નિરપેક્ષ વિસ્તાર (2) આપેક્ષ વિસ્તાર

- આવર્ગીકૃત માહિતી માટે : સહી વિસ્તારની ગણતરી નીચે ના સૂત્રની મદદથી કરવામાં આવે છે.

નિરપેક્ષ R વિસ્તાર = H – L

જ્યાં H = આપેલ પ્રાપ્તાંક પી સૌથી મોટો પ્રાપ્તાંક

L = આપેલ પ્રાપ્તાંક પૈકી સૌથી નાનો પ્રાપ્તાંક

સાપેક્ષ વિસ્તાર : સાપેક્ષ વિસ્તાર એ વિસ્તારનો આંક છે જે નીચેના સૂત્રથી શોધી શકાય.

સાપેક્ષ વિસ્તાર $= \frac{H-L}{H+L}$

જ્યાં H = આપેલ પ્રાપ્તાંક પી સૌથી મોટો પ્રાપ્તાંક

L = આપેલ પ્રાપ્તાંક પૈકી સૌથી નાનો પ્રાપ્તાંક

ઉદાહરણ – 1

નીચે આપેલ પ્રાપ્તાંકો પરથી વિસ્તાર અને વિસ્તારાંક શોધો.

23, 27, 25, 20, 19, 30

જવાબ : 23, 27, 25, 20, 19, 30

સૌથી મહત્તમ પ્રાપ્તાંક H = 30

સૌથી લઘુત્તમ પ્રાપ્તાંક L = 19

નિરપેક્ષ R વિસ્તાર = H – L

= L = 19

સાપેક્ષ વિસ્તાર (વિસ્તારાંક) $= \frac{H-L}{H+L}$

સાપેક્ષ R $= \frac{30-19}{30+19} = \frac{11}{49} = 0.22$

➢ વર્ગીકૃત માહિતી માટે : અહીં વિસ્તારની ગણતરી નીચેના સૂત્રની મદદથી કરવામાં આવે છે.

નિરપેક્ષ R વિસ્તાર = H – L

જ્યાં H = છેલ્લા વર્ગની ઉપલી સીમા

L = પ્રથમ વર્ગની નીચલી સીમા

સાપેક્ષ વિસ્તાર (વિસ્તારાંક) $= \frac{H-L}{H+L}$

જ્યાં H = છેલ્લા વર્ગની ઉપલી સીમા

L = પ્રથમ વર્ગની નીચલી સીમા

ઉદાહરણ – 2

નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણ ઉપરથી વિસ્તાર અને વિસ્તારાંક (સાપેક્ષ વિસ્તાર) શોધો.

ઉમર વર્ષમાં	**10-19**	**20-29**	**30-39**	**40-49**	**50-59**	**60-69**
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	5	40	110	60	30	2

જવાબ :

H = છેલ્લા વર્ગની ઉપલી સીમા = 69

L = છેલ્લા વર્ગની નીચલી સીમા = 10

નિરપેક્ષ R વિસ્તાર = H – L

= 69 – 10 = 59

વિસ્તારાંક (સાપેક્ષ વિસ્તાર) $= \frac{\mathrm{H-L}}{\mathrm{H+L}}$

$= \frac{69-10}{69+10} = \frac{59}{79} = 0.75$

5.4.2 ચતુર્થક વિચલન

ચતુર્થક વિચલનની મદદથી વિસ્તારની મર્યાદા દૂર કરી શકાય છે. જેમકે વિસ્તારમાં પ્રારંભિક પ્રપ્તાંકો અને અંતિમ પ્રપ્તાંકો ને 4 મહત્ત્વ આપવામાં આવે છે જયારે ચતુર્થક વિચલનમા આવૃત્તિ વિતરણની મધ્યમાં આવતા 50% પ્રાપ્તાંકોને ધ્યાનમા લેવામ આવે છે. તેથી તેને અર્ધ – આંતર ચતુર્થક વિસ્તાર તરીકે પણ ઓળખી શકાય.

ચતુર્થક વિચલન એટલે આપેલ માહિતીનું તૃતીય ચતુર્થક અને પ્રથમ ચતુર્થકની કિમત વચ્ચેનો તફાવતને બે વડે ભાગવાથી મળે છે જે નીચેના સૂત્રની મદદથી શોધી શકાય.

ચતુર્થક વિચલન $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

જ્યાં Q_3= તૃતીય ચતુર્થક

Q_1= પ્રથમ ચતુર્થક

જે સાપેક્ષ માપ છે.

ચતુર્થકો : ચઢતા કે ઉતરતા ક્રમમાં ગોઠવેલી માહિતીના ચાર સરખા ભાગ કરતા પ્રપ્તાંકોને ચતુર્થકો કહે છે. જેમા ત્રણ ચતુર્થકો હોય છે. પ્રથમ ચતુર્થક ને Q_1 દ્વિતીય ચતુર્થકને Q_2 અને તૃતીય ચતુર્થકને Q_3 વડે સમજવામાં આવે છે. જે પૈકી દ્વિતીય ચતુર્થક Q_2 = મધ્યસ્થ M થાય છે જે આપને શીખી ગયા હવે અવર્ગીકૃત માહિતી અને વર્ગીકૃત માહિતીઓ માટે Q_1 અને Q_3 કેવી શોધી શકાય તે નીચે મુજબ સમજીશું.

- અવર્ગીકૃત માહિતી માટે Q_1 અને Q_3 શોધવાના સુત્રો

સૌ પ્રથમ પ્રાપ્તાંકોને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવો ત્યાર બાદ

પ્રથમ ચતુર્થક = $Q_1 = \frac{n+1}{4}$ મો પ્રાપ્તાંક

તૃતીય ચતુર્થક = $Q_3 = \frac{3(n+1}{4}$ મો પ્રાપ્તાંક

(ફક્ત પ્રાપ્તાંક આપેલાં હોય ત્યારે)

ઉદાહરણ – 3

નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી Q_1y™uQ_3 શોધી તે ઉપરથી ચતુર્થક વિચલન અને તેનું સાપેક્ષ માપ શોધો.

9, 12, 7, 8, 15, 10, 13

જવાબ : પ્રાપ્તાંકોને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવવા

7, 8, 9, 10, 12, 13, 15

n = 7 (એકી સંખ્યા)

પ્રથમ ચતુર્થક = $Q_1 = \frac{n+1}{4}$ મો પ્રાપ્તાંક

$= \frac{7+1}{4}$ મો પ્રાપ્તાંક

Q_1 = 2 જો પ્રાપ્તાંક

Q_1 = 8

તૃતીય ચતુર્થક = $Q_3 = \frac{3\,(n+1}{4}$ મો પ્રાપ્તાંક

$= \frac{3\,(7+1)}{4}$ મો પ્રાપ્તાંક

Q_1 = 6 થો પ્રાપ્તાંક

Q_1 = 13

ચતુર્થક વિચલન (નિરપેક્ષ માપ) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$Q = \frac{13-8}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

ચતુર્થક વિચલનાંક (સાપેક્ષ માપ) $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{13-8}{13+8} = \frac{5}{21} = 0.24$$

ઉદાહરણ – 4

નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલાંક શોધો.

2, 14, 11, 5, 9, 13

જવાબ :

પ્રાપ્તાંકોનો ચઢતા ક્રમમા ગોઠવવા

2, 5, 9, 11, 13, 14

n = 6 (બેકી સંખ્યા)

પ્રથમ ચતુર્થક $= Q_1 = \frac{n+1}{4}$ મો પ્રાપ્તાંક

$= \frac{6+1}{4}$ મો પ્રાપ્તાંક

= 1.75 મો પ્રાપ્તાંક

Q_1 = પ્રથમ પ્રાપ્તાંક + 0.75 (દ્વિતીય પ્રાપ્તાંક – પ્રથમ પ્રાપ્તાંક)

= 2 + 0.75 (5-2)

= 2 + 0.78 (3)

Q_1= 2 + 2.25

= 4.25

તૃતીય ચતુર્થક = $Q_1 \;=\; \frac{3(n+1)}{4}$ મા પ્રાપ્તાંક

$= \frac{3(6+1)}{4}$ મો પ્રાપ્તાંક

= 5.25 મો પ્રાપ્તાંક

Q_1 = પાંચમો પ્રાપ્તાંક + 0.25 (છઠ્ઠો પ્રાપ્તાંક - પાંચમો પ્રાપ્તાંક)

= 13 + 0.25 (14-13)

= 13 + 0.25

= 13.25

ચતુર્થક Q વિચલન $= \frac{Q_3-Q_1}{2}$

$= \frac{13.25-4.25}{2} = {}^{9}/_{2}$

Q = 4.5

ચતુર્થક વિચલાંક $= \frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$

$= \frac{13.25-4.25}{13.25+4.25} = \frac{9}{17.5}$

= 0.51

- પ્રાપ્તાંક અને આવૃત્તિ આપેલ હોય ત્યારે પ્રાપ્તાંકનો ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવો.

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 \;=\; \frac{n+1}{4}$ મું અવલોકન c.f ના જે ખાનામાં સમાયેલ હોય તેની સામેનો પ્રાપ્તાંક

જ્યાં n = Σf

તૃતીય ચતુર્થક = $Q_3 \;=\; \frac{3\,(n+1)}{4}$ મું અવલોકન c.f ના જે ખાનામા સમાયેલ હોય તેને સામેક્ષો પ્રાપ્તાંક

જ્યાં = n = Σf

ઉદાહરણ – 5

નીચે આપેલાં આવૃત્તિ વિતરણની મદદથી ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલાંક શોધો.

x	0	1	2	3	4	5
f	6	8	10	7	5	4

જવાબ :

x	f	$c.f$ = સંચયી આવૃત્તિ
0	6	= 6
1	8	6+8 = 14 ← = $\frac{n+1}{4}$ મું અવલોકન
2	10	14+10 = 24
3	7	24+7 = 31 ← $\frac{3(n+1)}{4}$ મું અવલોકન
4	5	31+5 = 36
5	4	36+4 = 40
-	40 = Σf = n	-

Q_1= પ્રથમ ચતુર્થક = $\frac{n+1}{4}$ મું અવલોકન

= $\frac{40+1}{4}$મું અવલોકન

= 10.25 મું અવલોકન

c.f. ના ખાનામાં જોતો 10.25 નો સમાવેશ 14 મા થાય છે અને તેની સામેનો પ્રાપ્તાંક = 1 છે.

Q_1તૃતીય ચતુર્થક = $\frac{3(n+1)}{4}$ મું અવલોકન

= $\frac{3(40+1)}{4}$ મું અવલોકન

= 30.75 મું અવલોકન

c.f. ના ખાનામાં જોતા 30.75 નો સમાવેશ 31 માં થાય છે અને તેની સામેનો પ્રાપ્તાંક 3 છે. Q_3 = 3

ચતુર્થક Q વિચલન $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{3-1}{2} = 1$

ચતુર્થક વિચલનાંક $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = 0.5$

- **વર્ગીકૃત માહિતી માટે.**

વર્ગીકૃત માહિતીમા અનિવારક અને નિવારક વર્ગ આપેલા હોય ત્યારે Q_1, Q_3 અને નીચે મુંજબ શોધાય.

પ્રથમ ચતુર્થક = Q_1 વર્ગ = $\frac{n}{4}$ મું અવલોકન

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - cf}{f} \times i$

જ્યાં L = $\frac{n}{4}$ મું અવલોકન જે વર્ગમા

સમાયેલ હોય તે વર્ગનું અધ:સીમા બિંદુ c.f. ના જે વર્ગમાં $\frac{n}{4}$ મું અવલોકન સમાયેલ હોય તે વર્ગના પહેલાના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ

f = $\frac{n}{4}$ મું અવલોકન જે વર્ગમાં સમાયેલ

હોય તે વર્ગની સામેની આવૃત્તિ

I = જે વર્ગમાં $\frac{n}{4}$ મું અવલોકન સમાયેલ

હોય તે વર્ગની વર્ગ લંબાઈ

❖ **(અનિવારક વર્ગનું ઉદાહરણ)**

ઉદાહરણ – 6

નીચે આપેલી માહિત પરથી ચતુર્થક ચીચલન અને તેનું સાપેક્ષ માપ શોધો.

વર્ગ	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79
આવૃત્તિ	6	9	14	18	15	12	8	5

જવાબ : ધરીકે વર્ગ= x, આવૃત્તિ= f, સંચયી આવૃત્તિ= c.f.

x	f	c.f.
0-9	6	= 6
10-19	9	6+9 = 15 → c.f. $\frac{n}{4}$ મું અવલોકન
20-29	14 - f	15+14 = 29 → c.f. $\frac{3n}{4}$ મું અવલોકન
30-39	18	29+18 = 47
40-49	15	47+15 = 62 → Q_1વર્ગ = $\frac{n}{4}$ મું અવલોકન
50-59	12 - f	62+12 = 74 → = $\frac{87}{4}$મું અવલોકન
60-69	8	74+8 = 82
70-79	5	82+5 = 87
-	87 = n = Σf	-

= 21.75 મું અવલોકન

c.f. ના ખાનામા જોતા 21.75 નો સમાવેશ 29 મા થાય છે. તેથી Q_1 વર્ગ = 20-29 જેને -0.5 અને +0.5 કરી નિવારક વર્ગમાં ફેરવતા.

Q_1 વર્ગ = 19.5 – 29.5

L = 19.5, c.f. = 15, f= 14, i = 10, $\frac{n}{4}$ = 21.75

પ્રથમ ચતુર્થકQ_1 $= L + \frac{\frac{n}{4} - c.f}{f} \times i$

$= 19.5 + \frac{21.75-15}{14} \times i$

$= 19.5 + \frac{6.75-10}{14}$

$= 19.5 + \frac{67.5}{14}$

$=19.5 + 4.82$

પ્રથમ ચતુર્થક = Q_1 = 24.32

Q_3વર્ગ = $\frac{3n}{4}$મું અવલોકન

= $\frac{3(87)}{4}$મું અવલોકન

= 65.25 મું અવલોકન

c.f. ના ખાનામા જોતા 65.25 નો સમાવેશ 74 માં થાય છે. તેથી Q_3 વર્ગ = 50-59 જેને -0.5 અને +0.5 કરી નિવારક વર્ગ માં ફેરવતા.

Q_3 વર્ગ = 49.5 – 59.5

L = 49.5, c.f. = 62, f= 12, i = 10, $\frac{3n}{4}$= 65.25

તૃતીય ચતુર્થક $= Q_3 = L + \frac{\frac{n}{4} - c.f}{f} \times i$

$= 49.5 + \frac{65.25-62}{12} \times 10$

$= 49.5 + \frac{3.25-10}{12}$

$= 49.5 + \frac{32.5}{12}$

$= 49.5 + 2.71$

તૃતીય ચતુર્થક $= Q_3 = 52.21$

ચતુર્થક વિચલન $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

(નિરપેક્ષમાપ) $= \frac{52.21-24.32}{2}$

ચતુર્થક વિચલન = 13.945

ચતુર્થક વિચલનાંક = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

(સાપેક્ષમાપ)

$= \frac{52.21-24.32}{52.21+24.32}$

$= \frac{27.89}{76.53}$

ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.36

❖ **નિવારક વર્ગનું ઉદાહરણ**

ઉદાહરણ -7

નીચે આપેલા આવૃત્તિ વિતરણ ઉપરથી ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો.

વર્ગ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
આવૃત્તિ	1	3	6	14	11	7	3

જવાબ : વર્ગ = x આવૃત્તિ = f

x	f	c.f.
10-20	1	= 1
20-30	3	1+3 = 4
30-40	6	4+6 = 10 → c.f.મું અવલોકન
40-50	14 –f	10+14 = 24 →$n/4$મું અવલોકન
50-60	11 -f	24+11 = 35 →$3n/4$મું અવલોકન
60-70	7	34+7 = 42
70-80	3	42+3 = 45
-	45 $= \Sigma f =$ n	-

Q_1વર્ગ= $n/4$ મું અવલોકન

$= \frac{45}{4}$ મું અવલોકન

= 11.25 મું અવલોકન

c.f. ના ખાનામા જોતા 11.25 મું અવલોકન 24 માં સમાવેશ થાય છે.

Q_1વર્ગ = 40-50

L = 40, c.f. = 10, f = 14, = $\frac{n}{4}$11.25, i = 10

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - c.f}{f} \times i$

$= 40 + \frac{11.25-10}{14} \times 10$

$= 40 + \frac{1.25 \times 10}{14}$

= 40 + 0.89

પ્રથમ ચતુર્થક = Q_1 = 40.89

Q_3 વર્ગ = $\frac{3n}{4}$મું અવલોકન

= $\frac{3(45)}{4}$મું અવલોકન

= 33.75 મું અવલોકન

c.f. ના ખાનામા જોતાં 33.75 મું અવલોકન નો સમાવેશ 35 મા થાય છે તેથી તેની સામેના વર્ગ

Q_3 = વર્ગ 50-60

L = 50, $\frac{3n}{4}$ = 33.75, c.f. = 24, f = 11, i = 10,

તૃતીય ચતુર્થક = $Q_3 = L + \frac{\frac{n}{4} - c.f}{f} \times i$

$= 50 + \frac{33.75+24}{11} \times 10$

$= 50 + \frac{9.75-10}{11}$

= 50 + 8.86

Q_3 = 58.86

ચતુર્થક વિચલન = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{58.86-40.89}{2}$

$= \frac{17-97}{2}$

= 8.985

ચતુર્થક વિચલનાંક = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

(સાપેક્ષમાપ)

$$= \frac{58.86 - 40.89}{58.86 + 40.89}$$

$$= \frac{17.97}{99.75}$$

ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.18

5.4.3 સરેરાશ વિચલન

આપેલ માહિતીના પ્રાપ્તાંકોમાંથી તે પ્રાપ્તાંકોની સરેરાશ કિંમત બાદ કરી મળતાં ધન વિચલનોના (વિચિહન વિચલનો) સરવાળાની સાદી સરેરાશ તે માહિતીનું સરેરાશ વિચલન કહે છે. જે નીચેના સૂત્રની મદદથી મેળવી શકાય.

- અવર્ગીકૃત માહિતી માટે :- અવલોકનો ચઢતાં ક્રમમાં ગોઠવો મધ્યકમાંથી સરેરાશ વિચલન= $\pi = \frac{\Sigma f \,|\, x - \pi |}{n}$ જ્યાં π = મધ્યક
- વર્ગીકૃત માહિતી માટે

મધ્યકમાંથી સરેરાશ વિચલન= $\pi = \frac{\Sigma f \,|\, x - \pi |}{n}$ જ્યાં π = મધ્યક

મધ્યકમાંથી સરેરાશ વિચલન એ પ્રસામમાનનું ત્રીજું અને નિરપેક્ષ માપ છે. તેના આપેક્ષ માપને સરેરાશ વિચલનાંક તરીકે ઓળખવામા આવે છે જે નીચેના સૂત્રથી શોધી શકાય.

સરેરાશ વિચલનાંક = $\pi = \frac{\text{સરેરાશવિચલન}}{\text{મધ્યક}}$

તેવી જ રીતે π (મધ્યક) ને બદલે, M (મધ્યસ્થ) અને Z (બહુલક) લઈને અનુક્રમે મધ્યસ્થમાંથી સરેરાશ વિચલન અને બહુલકમાંથી સરેરાશ વિચલન શોધી શકાય છે.

ઉદાહરણ – 8 (અવર્ગીકૃત માહિતીનું ઉદાહરણ)

નીચે આપેલા પ્રાપ્તાંકો ઉપરથી સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક શોધો.

જવાબ : પ્રાપ્તાંકો ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવી તેને ટ ધારો.

જવાબ : ધારોકે વર્ગ = x અને આવૃત્તિ = f

x	/x- π/
24	10
24	10
27	7
29	5
31	3
33	1
34	0
45	11
45	11
48	14
340 Σπ	72 = Σ/ x -π/

←નોંધ : અહી માનાંકમાં કિમત છે તેથી ફક્ત ધન કિમતોજ લેવાશે ઋણ કિંમતો પણ ધન જ લેવી.

$\pi = \frac{\Sigma x}{n}$

$= \frac{340}{10}$

$\pi = 34$

સરેરાશ વિચલન

$\pi = \frac{\Sigma J x - \pi J}{n}$

$= \frac{72}{10}$

$= 7.2$

સરેરાશ વિચલનાંક $= \frac{\Sigma\pi}{\pi} = \frac{7.2}{34} = 0.21$

ઉદાહરણ – 9 (વર્ગીકૃત માહિતી માટે)

નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણ ઉપરથી સરેરાશ વિચલન અને તેનું આપેક્ષ માપ શોધો.

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
આવૃત્તિ	2	3	5	10	5	3	2

જવાબ : આવૃત્તિ = f

વર્ગ	***f***	**મ. કિ x**	***f*x**	**/x-π/**	***f*/x-/**
0-10	2	5	10	30	60
10-20	3	15	45	20	60
20-30	5	25	125	10	50
30-40	10	35	350	0	0
40-50	5	45	225	10	50
50-60	3	55	165	20	60
60-70	2	65	130	30	60
-	30 = n = Σ*f*	-	1050 Σ*f*x	-	340 =Σ*f* /x-π/

મધ્યક $\pi = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{1050}{30} = 35$

સરેરાશ વિચલન $\pi = \frac{\Sigma f J x - \pi J}{n}$

$= \frac{340}{30} = 11.33$

સરેરાશ વિચલનાંક = $\frac{\Sigma\pi}{\pi}$ = $\frac{11.33}{35}$ = 0.32

5.4.4 પ્રમાણિત વિચલન

મધ્યકના વિચલનોના વર્ગોના સરવાળાનું વર્ગમૂળ એટલે પ્રમાણિત વિચલન તેને સંકેતમાં S.D સપના 6 (સિગ્મા) વડે દર્શાવવામા આવે છે. જે નીચે મુંજબ શોધી શકાય.

- પ્રાપ્તાંક આપેલ હોય ત્યારે

પ્રમાણિત વિચલન

S.D = $\sqrt{\frac{\Sigma\,(x-\pi^2)}{n}}$જ્યાં π = મધ્યક

અથવા

પ્રમાણિત વિચલન

S.D = $\sqrt{\frac{\Sigma\pi^2}{n} - (\frac{\Sigma\pi^2)}{n})}$

- પ્રાપ્તાંક અને આવૃત્તિ આપેલ હોય ત્યારે

પ્રમાણિત વિચલન S.D = $\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - (\frac{\Sigma fd^2)}{n})}$

જ્યાં d = x –A

n = Σf

- વર્ગીકૃત માહિતી આપેલ હોય ત્યારે

પ્રમાણિત વિચલન

S.D = $\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - (\frac{\Sigma fd^2)}{n})\hat{i}}$

જ્યાં d = $\frac{x-A}{i}$, n = Σf, i = વર્ગ લંબાઈ

પ્રમાણિત વિચલન સાપેક્ષ માપને પ્રમાણિત વિચલનાંક તરીકે ઓળખવામાં આવે છે જે નીચેના સૂત્રની મદદથી ઓળખી શકાય.

પ્રમાણિત વિચલનાંક (સાપેક્ષમાપ) = $\frac{S.D}{\pi}$

જ્યાં S.D = પ્રમાણિત વિચલન

Π = મધ્યક

જયારે વિચલનાંક = $\frac{S.D}{\pi} \times 100$ જે ટકાવારી સાપેક્ષ માપતરીકે ઓળખાય છે.

ઉદાહરણ – 9

નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી પ્રમાણિત વિચલન અને તેનું સાપેક્ષ માપ શોધો.

23, 29, 11, 7, 14, 9, 2, 1

જવાબ :

x	(x- π)	$(x - \pi)^2$
23	11	121
29	17	289
11	-1	1
7	-5	25
14	2	4
9	-3	9
2	-10	100
1	-11	121
96		670 $= \Sigma(x-\pi)^2$

$\pi = \frac{\Sigma x}{n}$

$= \frac{96}{8} = 12$

પ્રમાણિત વિચલન

S.D $= \sqrt{\frac{\Sigma\,(x-\pi^2)}{n}}$

$= \sqrt{\frac{670}{8}} = \sqrt{83..75}$

S.D. = 9.15

પ્રમાણિત વિચલનાંક

(સાપેક્ષમાપ) $= \frac{S.D}{\pi}$

$= \frac{9.15}{12}$

= 0.7625

અથવા

બીજુ સૂત્રથી ગણતરી

x	2	3	2	9	11	7	14	9	21
x^2	529	8	41	121	49	196	81	4	1

96 = Σx

1822 = Σx^2

પ્રમાણિત વિચલન

S.D $= \sqrt{\frac{\Sigma \pi^2}{n} - (\frac{\Sigma \pi^2}{n})}$

$= \sqrt{\frac{1822}{2} - (\frac{96}{n})^2}$

$= \sqrt{227.75 - (12)^2}$

$= \sqrt{227.75 - 144}$

$= \sqrt{83.75}$

S.D = 9.15

આમ બીજા સૂત્રની મદદથી પણ જવાબ સરખો આવે છે.

ઉદાહરણ – ૧૦

નીચે આપલી માહિતી ઉપરથી ચલનાંક શોધો.

પ્રાપ્તાંક	11	12	13	14	15	16
આવૃત્તિ	7	6	9	11	12	5

જવાબ : = પ્રાપ્તાંક x   આવૃત્તિ = બ   ધારોકે A=13

x	f	d = $(x - A)$	fd	fd^2
11	7	-2	-14	-28
12	6	-1	-6	-6
13	9	0	0	0
14	11	1	11	11
15	12	2	24	48
16	5	3	15	45
-	50 $=\Sigma f$	-	-20 +50 30 $=\Sigma f$d	-34 +104 70 Σfd^2

પ્રમાણિત વિચલન

$$S.D = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{70}{50} - \left(\frac{30}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1.4 - (0.6)^2}$$

$$= \sqrt{1.4 - 0.36}$$

$$= \sqrt{1.04}$$

$$S.D = 1.0198$$

$$\frac{\text{મધ્યક}}{\pi} = A + \frac{\Sigma fd}{n}$$

$$= 13 + \frac{30}{50}$$

$$= 13 + 0.6 = 13.6$$

ચલનાંક $\frac{S.D}{\pi} \times 100$

ચલનાંક $= \frac{1.0198}{13.6} \times 100$

$= 0.07\ \%$

ઉદાહરણ – ૧૧

નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી પ્રમાણિત વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલનાંક શોધી તેનું ટકાવારી માપ શોધો.

ઉંમર	**20-25**	**25-30**	**30-35**	**35-40**	**40-45**	**45-50**
આવક (હજારમાં)	18	21	24	30	22	17

જવાબ : ધારોકે A=32.5 તથા V=5 લો

ઉંમર	**આવક** f	**મ.કિં** x	**d** = $\frac{x-A}{1}$	fd	$fd^2 = fdxd$
20-25	18	22.5	-2	-36	72
25-30	21	27.5	-1	-21	21
30-35	24	32.5 A	0	0	0
35-40	30	37.5	1	30	30
40-45	22	42.5	2	44	88
45-50	17	47.5	3	51	153
-	132 $= \Sigma d$ = n	-	-	-57 +125 68 Σfd	364 $= \Sigma fd^2$

મધ્યક $\pi = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times i$

$= 32.5 + \frac{68}{132} \times 5 = 32.5 + 2.58$

$\pi = 35.08$

પ્રમાણિત વિચલન

$$S.D = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - (\frac{\Sigma fd}{n})^2} \times i$$

$$= \sqrt{\frac{364}{132} - (\frac{68}{132})^2 \times 5}$$

$$= \sqrt{30.33 - (0.27)^2}$$

$$= \sqrt{30.33 - 0.27} \times 5$$

$$= \sqrt{30.06}$$

$$S.D = 5.48$$

પ્રમાણિત વિચલનાંક $= \frac{SD}{\pi} = \frac{5.48}{35.08}$

(આપેક્ષ માપ) $= 0.1562$

ચલનાંક $= \frac{S.D}{\pi} \times 100$

$= 0.1562 \times 100$

(ટકાવારી) $= 15.62\ \%$

ઉદાહરણ – 12

નીચે આપેલ બે સમૂહોની માહિતી ઉપરથી કયો સમૂહ વધુ સ્થિર છે તે બતાવો.

	સમૂહ-A	**સમૂહ-B**
મધ્યક	40	62
પ્ર.વિ	10.75	25.81

જવાબ :

સમૂહ A નો ચલનાંક $= \frac{S.D}{\pi} \times 100$

$= \frac{10.75}{40} \times 100 = 26.88\ \%$

સમૂહ B નો ચલનાંક $= \frac{S.D}{\pi} \times 100$

$= \frac{25.81}{62} \times 100 = 41.63\ \%$

સમૂહ 'A' વધુ સ્થિર છે કારણકે તેનો ચલનાંક ઓછો છે.

યાદ રાખો

નોંધ :- જેમ ચલનાંક ઓછો તેમ સ્થિરતા વધુ

જેમ ચલનાંક ઓછો તેમ પ્રાપ્તાંકો વધુ

સુસંગત, વિશ્વસનીય

5.5 ચાવીરૂપ શબ્દો

પ્રસારમાન : શ્રેણીના પ્રાપ્તાંકો મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપથી કેટલે દૂર ફેલાયેલો છે. તે દર્શાવતું માપ.

વિસ્તાર : પ્રાપ્તાંકો પૈકી મહત્તમ પ્રાપ્તાંકો અને લઘુત્તમ પ્રાપ્તાંકો વચ્ચેનો તફાવત.

વિસ્તારાંક : વિસ્તારનું આપેલ માપ

ચતુર્થકો : માહિતીના એક સરખા ચાર ભાગોને ત્રણ પ્રકારના હોય Q_1, Q_2, Q_3

પ્રમાણિત વિચલત : મધ્યકના વિચલનોના વર્ગોના સરવાળાનું વર્ગ મૂળ

5.6 સ્વાધ્યાય

(1) નીચેની માહિતી પરથી વિસ્તાર અને સાપેક્ષ વિસ્તાર શોધો.

428, 425, 419, 413, 403, 431

(જવાબ : વિસ્તાર = 28, સાપેક્ષ વિસ્તાર = 0.003)

(2) નીચેની માહિતી પરથી નિરપેક્ષ વિસ્તાર અને સાપેક્ષ વિસ્તાર શોધો.

વર્ગ	44-46	46-48	48-50	50-52	52-54	54-56
આવૃત્તિ	4	8	18	15	4	3

(જવાબ : નિરપેક્ષ વિસ્તાર = 12, વિસ્તાંરાંક = 0.12)

(3) દશ વિદ્યાર્થીઓના ગુણ અનુક્રમે 54, 60, 35, 64, 51, 73, 66, 61, 66 અને 50 છે તો સરેરાશ વિચલનાંક શોધો.

(જવાબ : 0.1448)

(4) નીચેના આપેલ વિતરણ માટે સરેરાશ વિચલનાંક ગણો.

પ્રાપ્તાંક	8	9	10	11	12	13	14
આવૃત્તિ	3	11	23	44	19	6	4

(જવાબ : સરેરાશ વિચલન = 0.9145, સરેરાશ વિચલનાંક = 0.0838)

(5) નીચે આપેલ માહિતી પરથી પ્રથમ ચતુર્થક અને તૃતીય ચતુર્થક શોધો ઉપરનાં ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલનાંક પણ શોધો.

(જવાબ : $Q_1 = 20, Q_3 = 22$ ચતુર્થક વિચલન= 1 ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.0476)

(6) નીચેના અસતત આવૃત્તિ વિતરણ માટે Q_1 y™u Q_3 શોધી વાતુર્યક અને તેનું સાપેક્ષ માપ શોધો.

પ્રાપ્તાંક	101	102	103	104	105	106	107	108
આવૃત્તિ	3	9	32	32	26	13	8	7

(જવાબ : $Q_1 = 103, Q_3 = 105$ ચતુર્થક વિચલન ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.009)

(7) નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી પ્રથમ ચતુર્થક, તૃતીય ચતુર્થક, ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો.

આવક (હજાર રૂ. માં)	1-3	3-5	5-10	10-14	14-20	20-30	30-50
વ્યક્તિઓ	110	168	202	140	50	20	10

(જવાબ : $Q_1 = 3.77, Q_3 = 11.29$, ચતુર્થક વિચલન = 3.76, ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.25)

(8) 500 કારીગરોના દૈનિક વેતનની માહિતી મીચે મુંજબ છે તે ઉપરથી ચતુર્થક વિચલન અને તેનું સાપેક્ષ માપ શોધો.

દૈનિક વેતન રૂ.	45-50	40-50	35-50	30-50	25-50	20-50	15-50
કારીગરોની સંખ્યા	48	120	225	405	465	487	500

(જવાબ : $Q_1 = 30.83, Q_3 = 39.76$ પ્રથમ ચતુર્થક = 8.93 ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.13)

(9) નીચેની માહિતી પરથી મધ્યકના આધારે સરેરાશ વિચલનાંક શોધો.

x	6	10	14	18	22	26	30	34	38
f	5	8	18	25	15	12	10	5	2

(જવાબ : $\pi = 6.16$સરેરાશ વિચલનાંક = 0.31)

(10) નીચેની માહિતી પરથી સરેરાશ વિચલન શોધો.

વર્ગ	0-7	0-14	0-21	0-28	0-38	0-42	0-49
આવૃત્તિ	19	44	80	152	203	246	250

(જવાબ : $\pi = 8.21$)

(11) નીચે આપેલ ,માહિતી ને ઉપરથી મધ્યકના આધારે સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક શોધો.

વર્ગ	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160
આવૃત્તિ	12	15	10	8	19	15	13	8

(જવાબ : $\pi = 38.82$સરેરાશ વિચલનાંક = 0.49)

(12) નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી મધ્યક, પ્રમાણિત વિચલન, પ્રમાણિત વિચલનાંક અને ચલનાંક શોધો.

80, 92, 88, 76, 84, 96

(જવાબ : $\pi = 86$, S.D = 6.83, પ્રમાણિત વિચલનાંક = 0.0794, ચલનાંક = 7.94 %)

(13) બે સમૂહના પ્રાપ્તાંકો નીચે મુંજબ છે તે ઉપરથી કયો પ્રાપ્તાંક વધુ સ્થિર છે તે કહો.

સમૂહ – I	48	55	25	40	32
સમૂહ – II	20	55	70	100	65

(જવાબ : $\pi = 40$, S.D = 10.75, પ્ર. વિચલનાંક = 0.2688, ચલનાંક = 26.88 %

$\pi = 62$, S.D = 25.81, પ્ર. વિચલનાંક = 0.6163, ચલનાંક = 41.63 % સમૂહ I વધુ સ્થિર)

(14) ટેસ્ટ શ્રેણીના બે બેસ્ટમેનો એ મેળવેલ રનો નીચે મુંજબ છે. તે ઉપરથી કોના બધું સંગીન છે તે નક્કી કરો.

સચીન	7	22	37	39	43	27	67	69	29	30
ધોની	47	74	101	6	34	40	67	7	-	-

જવાબ : સચીનનો ચલનાંક = 49.11 % | સચીન વધુ સંગીન
ધોનીનો ચલનાંક = 65.34 %

(15) એક કારખાનાના 500 કર્મચારીઓના અઠવાડિયા વેતનની નીચેની માહિતી પરથી મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન તથા પ્રમાણિત વિચલનાંક શોધો.

અઠવાડિક વેતન	240-259	260-279	280-299	30-319	320-339	340-359	360-379	380-399
કર્મચારી સંખ્યા	26	40	74	92	110	84	56	18

(જવાબ : π = 32.94, S.D = 35.20, પ્ર. વિચલનાંક = 0.11)

(16) નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણની મદદથી મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

x	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
f	5	10	20	40	30	20	10	4

(જવાબ : π = 39.4, S.D = 15.7)

(17) નીચે આપેલ વિકલ્પો પૈકી યોગ્ય

(1) મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપની આસપાસ ફેલાયેલા માપન u ____________ કહે છે.

(a) વિસ્તાર (b) પ્રસરમાન

(c) વિષમતા (d) એક પણ નહીં

(2) પ્રસરમાનના મુંખ્ય ___________ માપો છે.

(a) બે (b) ત્રણ

(c) ચાર (d) એક પણ નહીં

(3) નિરપેક્ષ વિસ્તાર = ___________

(a) L - H (b) H - L

(c) (H- L)/(H+L) (d) એક પણ નહીં

(4) સાપેક્ષ વિસ્તાર = ___________

(a) $\frac{L-H}{H+L}$ (b) H − L

(c) $\frac{H-L}{H+L}$ (d) એક પણ નહીં

(5) ચતુર્થક વિચલન = ___________

(a) $\frac{Q_1 + Q_3}{2}$ (b) $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

(c) $\frac{Q_3 + Q_1}{2}$ (d) એક પણ નહીં

(6) ચતુર્થક વિચરણનના સાપેક્ષ માપન u ___________ કહે છે.

(a) વિચરણ (b) પ્રમાણિત વિચરણ

(c) પ્રમાણિત વિચલનાનક (d) એક પણ નહીં

(7) ચતુર્થક વિચલનના સાપેક્ષમાપ નu ___________ કહે છે.

(a) ચતુર્થક વિચલનાંક (b) ચલનાંક

(c) પ્રમાણિત વિચલનાંક (d) એક પણ નહીં

(8) ચતુર્થક વિચલનાંક = ___________

(a) $\frac{Q_3 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$ (b) $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

(c) $\frac{Q_1 - Q_3}{Q_1 + Q_3}$ (d) એક પણ નહીં

(9) સરેરાશ વિચલનના સાપેક્ષ માપને ___________ કહે.

(a) સરેરાશ માપ (b) સરેરાશ વિચલનાંક

(c) પ્રમાણિત (d) એક પણ નહીં

(10) પ્રમાણિત વિચલનના ટકાવારી સાપેક્ષ માપને ___________ કહે છે.

(a) પ્રમાણિત વિચલનાંક (b) ચલનાંક

(c) પ્રમાણિત માપ (d) એક પણ નહીં

(11) પ્રમાણિત વિચલનના સાપેક્ષ માપને ___________ કહે છે.

(a) પ્રમાણિત વિચલનાંક (b) ચલનાંક

(c) પ્રમાણિત માપ (d) એક પણ નહીં

(12) પ્રમાણિત વિચલનના ___________ માપને પ્રમાણિત વિચલનાંક કહે છે.

(a) નિરપેક્ષ (b) સાપેક્ષ

(c) a અને b બંને (d) એક પણ નહીં

(13) પ્ર. વિચલનનu ___________ વડે દર્શાવવમાં આવે છે.

(a) S.D. (b) C.D.

(c) M.V. (d) એક પણ નહીં

(14) પ્રમાણિત વિચલન = ___________

(a) $= \sqrt{\frac{\Sigma\,(x-\pi)^2}{n}}$ (b) $= \sqrt{\frac{(x-\pi)^2}{n}}$

(c) $= \sqrt{\frac{\Sigma\,(x-\pi)^2}{n}}$ (d) એક પણનહીં

(15) એક માહિતીના 10 પ્રાપ્તાંકોનો સરવાળો 200 છે. અને તેમના વર્ગોનો સરવાળો 5000 છે. ___________ વડે દર્શાવવમાં આવે છે.

(a) 10% (b) 20%

(c) 50% (d) એક પણ નહીં

(16) એક માહિતીનો ચલનાંક = 32% S.D. – 4.8 હોય તો મધ્યક = ___________

(a) 32 (b) 15

(c) 12 (d) એક પણ નહીં

(17) 100 પ્રાપ્તાંકોનો મધ્યક = 15, પ્રપ્તાંકોનો વર્ગોનો સરવાળો = 32500 હોય તો પ્રમાણિત વિચલન = ___________

(a) 10 (b) 15

(c) 32.5 (d) એક પણ નહીં

(18) એક માહિતીનો પ્રમાણિત વિચલનાંક = 0.5810 = ___________

(a) 5.81% (b) 58.10%

(c) 581% (d) એક પણ નહીં

(19) વિચરણ = 1૬ અને Σ 〖(x-π)〗 ^2 = 320 તો n = ___________

(a) 10 (b) 20

(c) 16 (d) એક પણ નહીં

(20) 15 પ્રાપ્તાંકોનો ચલનાંક = 25% છે. જો π 20 હોયતો પ્ર. વિ. શોધો. = ________

(a) 20 (b) 5

(c) 4 (d) એક પણ નહીં

: જવાબ :

1) b 2) c 3) b 4) c 5) b 6) d 7) a 8) b 9) b 10) b

11) a 12) b 13) a 14) a 15) c 16) b 17) a 18) b 19) b 20) b

સંદર્ભગ્રંથ

૧. ધંધાકીય સંશોધન પદ્ધતિઓ, મૈસુરીયા અને પટેલ, અક્ષર પબ્લિકેશન, ટાઉનહોલ પાછળ, અમદાવાદ.

૨. Basic Statistics by Kapoor & Gupta, S. Chand Publication, ¤ki Delhi.

એકમ 6

વિષમતા (Skewness)

રૂપરેખા

6.0 ઉદ્દેશ :

(1) વિદ્યાર્થીઓને વિષમતાનો અર્થ, વ્યાખ્યા અને કસોટીઓની જાણકારી આપવી.

(2) શ્રેણીઓમા કેવા પ્રકારની વિષમતા રહેલી છે. તે જાણી શકાય.

(3) આવૃતિવક્રમાં સંમિતતા અથવા સુડોળતાના અભાવનું સંખ્યાત્મક માપ મેળવી શકાય.

6.1 પ્રાસ્તાવના :

કોઈ પણ પ્રશ્નનો આંકડાશાસ્ત્રીય અભ્યાસ કરવા માટે એકઠી કરેલી માહિતીને વર્ગીકરણ દ્વારા વ્યવસ્થિત રીતે રજૂ કરી શકાય છે. આ રજૂ કરેલી માહિતીને એક આદર્શ માપ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે તો માહિતીને સમજવામાં સરળતા પડે છે અને તેની મદદથી તેના જેવી જ માહિતી સાથે સરખામણી કરી શકાય છે. કોઈપણ શ્રેણીનો અભ્યાસ કરવા મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક સરેરાશનાં અગત્યનાં માપો છે. પરંતુ ફક્ત સરેરાશ પૂરતું માપ નથી. શ્રેણીનાં અવલોકનોમાં રહેલું ચલન જેને પ્રસાર કહે છે. તે પણ જાણવું જરૂરી બને છે. પ્રસાર એટલે કે શ્રેણીનાં અવલોકનો તેના મધ્યવર્તી માપથી સરેરાશ રીતે કેટલા દૂર ફેંકાયેલા છે. તે દર્શાવતું માપ શ્રેણીના પ્રસારનો અભ્યાસ વિસ્તાર, ચતુર્થક વિચલન, સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલન જેવા માપો દ્વારા કરવામાં આવે છે. આમ, સરેરાશના માપ દ્વારા શ્રેણીનું મધ્યવર્તી અને પ્રસારના માપ દ્વારા શ્રેણીનો ફેલાવો જાણી શકાય છે.

6.2. વિષમતાનો અર્થ અને વ્યાખ્યા :

મોટાભાગના આવૃત્તિ - વિતરણોમાં મધ્યના વર્ગની બંને બાજુએ સરખે અંતરે આવેલા વર્ગોમાં આવૃત્તિઓ સમાન હોય તેવું જોવા મળતું નથી. આવૃત્તિ - વિતરણમાં સંમિતતાની ખામીને વિષમતા કહે છે. જે આવૃત્તિ - વિતરણ સંપૂર્ણ સંમિત ન હોય તેને વિષમ આવૃત્તિ - વિતરણ કહે છે. ટૂંકમાં, વિષમતા એટલે આવૃત્તિ - વિતરણમાં રહેલી સંમિતતાની ખામી અથવા તેના આવૃત્તિ વક્રમાં સુડોળતાનો અભાવ.

6.3 વિષમતાની કસોટીઓ :

કોઈ પણ આવૃત્તિ - વિતરણ વિષમ છે કે નહિ તે નક્કી કરવા માટે નીચેની કસોટીઓનો ઉપયોગ કરી શકાય.

(1) જે આવૃત્તિ - વિતરણમાં સરેરાશનાં માપો સમાન ન હોય તે આવૃત્તિ - વિતરણને વિષમ આવૃત્તિ - વિતરણ કહેવાય.

(2) જે આવૃતિ - વિતરણમાં બંને ચતુર્થકો મધ્યસ્થથી સરખા અંતરે ન હોય તે આવૃતિ વિતરણ વિષમ આવૃતિ - વિતરણ કહેવાય.

(3) જે આવૃતિ - વિતરણનો વક્ર સંપૂર્ણ ઘંટાકાર ન હોય, તે આવૃત્તિ વિતરણ વિષમ છે. એમ કહેવાય.

(4) જે આવૃતિ - વિતરણના વક્રનો એક છેડો ડાબી અથવા જમણી બાજુએ વધુ લંબાયેલો હોય તે આવૃતિ - વિતરણમાં વિષમતા છે. એમ કહેવાય.

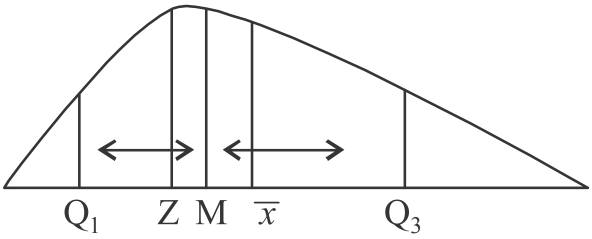
(5) જે આવૃતિ - વિતરણમાં મહતમ આવૃતિવાળા વર્ગની બંને બાજુએ સમાન અંતરે આવેલા વર્ગોની આવૃતિ સમાન ન હોય તેને વિષમ આવૃતિ વિતરણ કહેવાય.

6.4 વિષમતાના પ્રકાર :

વિષમ આવૃતિ વિતરણમાં બે પ્રકારની વિષમતા જોવા મળે છે. (1) ઘન વિષમતા (2) ઋણ વિષમતા

(1) ઘન વિષમતા :

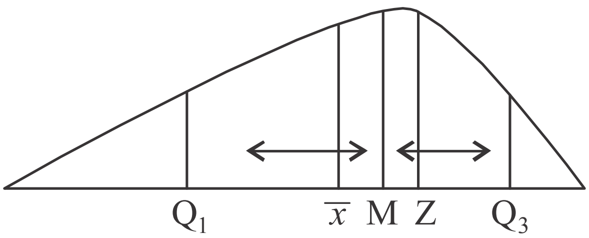
જે આવૃતિ - વિતરણમાં મધ્યકની કિંમત મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમતો કરતા મોટી હોય અર્થાત ($x > M > Z$) તે આવૃતિ વિતરણમાં ઘન વિષમતા છે. ઉપરાંત આવૃતિ-વિતરણમાં ત્રીજા ચતુર્થક અને મધ્યસ્થ વચ્ચેનું અંતર પહેલા ચતુર્થક અને મધ્યસ્થ વચ્ચેના અંતર કરતા વધારે હોય છે એટલે કે $Q_3 - M > M - Q_1$. ઘન વિષમતાવાળા આવૃતિ-વિતરણનો આવૃતિ-વક્રનો જમણી બાજુનો છેડો લંબાયેલો જણાય છે. જે નીચેની આકૃતિ ઉપરથી સમજી શકાય છે.



ધન વિષમતા

(2) ઋણ વિષમતા :

જે આવૃતિ-વિતરણમાં મધ્યકની કિંમત મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમતો કરતા નાની હોય અર્થાત (x < M < Z) તે આવૃતિ વિતરણમાં ઋણ વિષમતા છે. ઉપરાંત આવૃત્તિ વિતરણમાં ત્રીજા ચતુર્થક અને મધ્યસ્થ વચ્ચેનું અંતર પહેલા ચતુર્થક અને મધ્યસ્થ વચ્ચેના અંતર કરતા ઓછું હોય છે. એટલે કે $Q_3 - M < M \ Q_1$. ઋણ વિષમતા વાળા આવૃતિ-વક્રના ડાબી બાજુનો છેડો લંબાયેલો જણાય છે. જે નીચેની આકૃતિ ઉપરથી સમજી શકાય છે.



ઋણ વિષમતા

6.5 વિષમતાનાં માપ :

આવૃતિ-વિતરણમાં ધન વિષમતા છે કે ઋણ વિષમતા એ વક્રના દેખાવ ઉપરથી જાણી શકાય છે. પરંતુ આવૃતિ-વિતરણ કેટલું વિષમ છે તે જાણી શકાતું નથી. આપેલું આવૃતિ - વિતરણ કેટલા પ્રમાણમાં વિષમ છે. તે જાણવા માટે વિષમતાનું માપ મેળવવું જરૂરી છે. જે માપવા માટે બે પદ્ધતિઓ પ્રચલિત છે. (1) કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિ અને (2) બાઉલીની પદ્ધતિ. બંને પદ્ધતિઓમાં વિષમતાનું માપ મેળવવા માટે જુદા જુદા સૂત્રો છે. જે નીચે મુજબ સમજી શકાય છે.

(1) કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિ :

વિષમ આવૃતિ-વિતરણમાં સરેરાશનાં ત્રણેય માપો મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક સરખાં હોતાં નથી. જો આવૃતિ વિતરણમાં થોડીક પણ વિષમતા હોય તો મધ્યક અને બહુલક વચ્ચેનો તફાવત મોટો હોવાથી વિષમતાના માપ માટે તેમના તફાવતનો ઉપયોગ થાય છે. x અને Z ના તફાવતને વિષમતા કહે છે. જે એક નિરપેક્ષ માપ છે અને તેને SK સંકેત વડે દર્શાવવામાં આવે છે, એટલે કે વિષમતા $SK = x - Z$. આ તફાવતને પ્રસારના શ્રેષ્ઠ માપ પ્રમાણિત વિચલન વડે ભાગવાથી વિષમતાનું સાપેક્ષ માપ વિષમતાંક મેળવી શકાય છે અને તેને j વડે દર્શાવવામાં આવે છે. માટે, કાર્લ પિયર્સનનું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય.

વિષમતા = મધ્યક − બહુલક

$$SK = x - Z$$

$$\text{વિષમતાંક} = \frac{\text{મધ્યક - બહુલક}}{\text{પ્રમાણિત વિચલન}}$$

$$j = \frac{\bar{x} - z}{S} \quad \rightarrow (i)$$

જ્યારે આવૃતિ - વિતરણમાં મહત્તમ આવૃત્તિઓ સરખી હોય અથવા આવૃતિ - વિતરણના બધાં જ વર્ગોની વર્ગ - લંબાઈ સમાન ન હોય ત્યારે બહુલક વર્ગ નક્કી કરી શકાતો નથી. આથી આવા સંજોગોમાં વિષમતા અને વિષમતાંક મેળવવા નીચેના સૂત્રોનો ઉપયોગ કરી શકાય.

વિષમતા $(SK) = 3\ (x - M)$

= 3 (મધ્યક − મધ્યસ્થ)

$$\text{વિષમતાંક } (j) = \frac{3(\bar{x} - M)}{S} = 3\ \frac{(\text{મધ્યક - મધ્યસ્થ})}{\text{પ્રમાણિત વિચલન}} \quad \rightarrow (ii)$$

સામાન્ય રીતે વિષમતાંકની કિંમત –1 થી 1 ની વચ્ચે આવેલ છે. પરંતુ, ઉપરના સૂત્ર (ii) ની મદદથી મળતા વિષમતાંકની કિંમત –3 અને 3 વચ્ચે આવી શકે.

(2) બાઉલીની પદ્ધતિ :

વિષમ આવૃતિ-વિતરણમાં બંને ચતુર્થકો મધ્યસ્થથી સમાન અંતરે હોતા નથી માટે બાઉલીની પદ્ધતિમાં વિષમતા બંને ચતુર્થકોના મધ્યસ્થથી અંતર ઉપર આધારિત છે.

બાઉલીના સૂત્ર અનુસાર વિષમતાનું માપ મેળવવા $Q_3 - M$ અને $M - Q_1$ નો તફાવત લેવામાં આવે છે. અર્થાત વિષમમાં $SK = (Q_3 - M) - (M - Q_1) = Q_3 + Q_1 - 2M$ જે એક નિરપેક્ષ માપ છે. તેને $Q_3 - M$ અને $M - Q_1$ ના સરવાળા વડે ભાગવાથી વિષમતાનું સાપેક્ષ માપ વિષમતાંક j મળે છે. આથી, બાઉલીનું વિષમતાનું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે આપી શકાય.

વિષમતા SK = Q3 + Q1 − 2M

$$\text{વિષમતાંક } j = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

(3) કેલીનું માપ :

આ માપ એ વિષમતા શોધવાના કાર્લ પિયર્સન અને બાઉલીના માપનું સમાધાન કરે છે. આમ, અહીં 90મા અને 10મા શતાંશકો વચ્ચેનું વિતરણ ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે.

આ પદ્ધતિ મુજબ વિષમતાંક નીચે મુજબ શોધી શકાય.

$$j = \frac{P_{90} + P_{10} - 2P_{50}}{P_{90} - P_{10}} \quad \text{અથવા} \quad \frac{D_9 + D_1 - 2D_5}{D_9 - D_1}$$

6.6 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ - 1 નીચે આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનનો વિષમતાંક શોધો.

x_i	11	12	13	14	15	16	17	18
f_i	3	7	10	12	20	15	8	2

જવાબ :

xi	*fi*	*fixi*	fix_i^2
11	3	33	363
12	7	84	1008
13	10	130	1690
14	12	168	2352
15	20	300	4500
16	15	240	3840
17	8	136	2312
18	2	36	648
	77	**1127**	**16713**

→ $n = \; f = 77$ = અવલોકનોની સંખ્યા

$f_i x_i = 1127$

$f_i x_i^2 = 16713$

મધ્યક $= x = \frac{\sum fixi}{n} = \frac{1127}{77} = 14.63$

બહુલક = Z = મહતમ આવૃતિની સામે રહેલી x_iની સંખ્યા = 15

પ્રમાણિત વિચલન $= S = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{16713}{77} - \left(\frac{1127}{77}\right)^2}$$

$$= \sqrt{217.05 - 214.03}$$

$$= \sqrt{3.02}$$

$$= 1.73$$

કાર્લ પિર્યસનનો વિષમતાંક $= j = \frac{\bar{x} - Z}{S}$

$$= \frac{14.63 - 15}{1.73}$$

$$= \frac{-0.37}{1.73}$$

$$= -0.2138$$

સમજૂતી :

$x_i f_i = f_i$ અને x_i નો ગુણાકાર

$x_i f_i^2 = x_i$ નો વર્ગ કરી ત્યારબાદ f_i સાથેનો ગુણાકાર અથવા $f_i x_i$ ને x_i સાથે ગુણાકાર કરવાથી પણ $f_i x_i^2$ મળે છે.

$f_i = n =$ અવલોકનોની સંખ્યા

ઉદાહરણ - 2 : આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનનો વિષમતાંક મેળવો.

વર્ગો	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
f	4	16	60	100	40	6	4

જવાબ :

વર્ગો	f	x	$f\ x$	$f\ x^2$
0-10	4	5	20	100
10-20	16	15	240	3600
20-30	60	25	1500	37500
30-40	100	35	3500	122500
40-50	40	45	1800	81000
50-60	6	55	330	18150
60-70	4	65	260	16900
–	250	–	7650	279750

$n = \ f = 250 =$ અવલોકનોની સંખ્યા

$fx = 7650$

$fx^2 = 279750$

મધ્યક $x = \frac{\sum fx}{n} = \frac{7650}{250} = 30.6$

પ્રમાણિત વિચલન $= S = \sqrt{\frac{\sum f x^2}{n} - \left(\frac{\sum f x}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{279750}{250} - \left(\frac{7650}{250}\right)^2}$$

$= \sqrt{1119 - 936.36}$

$= \sqrt{182.64} \quad = 13.51$

→ બહુલક મેળવવા માટે અહીં મહત્તમ આવૃતિ 100 હોવાથી બહુલક વર્ગ 30 – 40 મળે છે.

બહુલક $= Z = \dfrac{L + fm - f_1}{2fm - f_1 - f_2} \times C$

$$= 30 + \frac{100 - 60}{2(100) - 60 - 40} \times 10$$

$$= 30 + \frac{40}{100} \times 10$$

$$= 30 + 4$$

$$= 34$$

કાર્લ પિયર્સનનો વિષમતાંક $= j = \dfrac{\bar{x} - Z}{S}$

$$= \frac{30.6 - 34}{13.51}$$

$$= \frac{-3.4}{13.51}$$

$$= -0.25$$

સમજૂતી :

x = વર્ગલંબાઈની મધ્યકિંમત ઉદાહરણ તરીકે 0 – 10 માં 0 + 10 = 10 ને 2 વડે ભાગવાથી મધ્યકિંમત 5 મળે છે.

fm = આવૃતિના સ્તંભમાં રહેલી મહતમ આવૃતિ

f_1 = મહત્તમ આવૃતિની ઉપરની આવૃતિ.

f_2 = મહત્તમ આવૃતિની નીચેની આવૃતિ.

L = મહત્તમ આવૃતિની સામેની વર્ગ-લંબાઈની ન્યૂનતમ કિંમત

C = વર્ગલંબાઈ

ઉદાહરણ : 3 નીચેના આવૃતિ - વિતરણ પરથી કાર્લ પિયર્સનનો વિષમતાંક શોધો.

વર્ગ	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79
આવૃતિ	1	4	12	28	28	18	6	3

જવાબ : અહીં મહત્તમ આવૃતિ 28, 1 થી વધુ વખત હોવાથી બહુલક વ્યાખ્યાયિત થતો

નથી. જેથી વિષમતાંક શોધવા માટે $j = \frac{3(\bar{x} - \text{M})}{\text{S}}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

વર્ગ	આવૃતિ (f_i)	x_i	$f_i\,x_i$	$f_i\,x_i^2$	Cf_i
0 - 9	1	4.5	4.5	20-25	1
10-19	4	14.5	58	841	5
20-29	12	24.5	294	7203	17
30-39	28	34.5	966	33327	45
40-49	28	44.5	1246	55447	73
50-59	18	54.5	981	53464.5	91
60-69	6	64.5	387	24961.5	97
70-79	3	74.5	223.5	16650.75	100
-	100	-	4160	191915	

$n = f = 100$ = અવલોકનોની સંખ્યા

$f_i x_i = 4160$

$f_i x_i^2 = 191915$

મધ્યક $= x = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{4160}{100} = 41.6$

મધ્યસ્થ વર્ગ = M વર્ગ = $\left(\frac{n}{2}\right)$ મું અવલોકન = $\left(\frac{100}{2}\right)$ મું અવલોકન

= 50 મું અવલોકન Cf_i માં જોતા 73 માં સમાયેલ છે. જેથી મધ્યસ્થ વર્ગ 40 – 49 નક્કી થશે.

પરંતુ આ વર્ગ અનિવારક વર્ગ હોવાથી તેને આપણે નિવારક વર્ગમાં ફેરવવું પડશે.

તે માટે નીચલી સીમામાંથી 0.5 બાદ કરી ઉપલી સીમામાં 0.5 ઉમેરીશું તેથી વર્ગ 39.5 – 49.5 થશે.

મધ્યસ્થ $= \text{M} = \text{L} + \frac{\left(\frac{n}{2}\right) - cf}{f} \times \text{C}$

$= 39.5 + \frac{50 - 45}{28} \times 10$

$= 39.5 + \frac{50}{28}$

$= 39.5 + 1.79 \quad = 41.29$

પ્રમાણિત વિચલન = S = $\sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{191915}{100} - \left(\frac{4160}{100}\right)^2}$

$= \sqrt{1919.15 - 1730.56}$

$= \sqrt{188.59}$

$= 13.73$

કાર્લ પિયર્સનનો વિષમતાંક = j = $\frac{3(\bar{x} - \mathrm{M})}{\mathrm{S}}$

$= \frac{3(41.6 - 41.29)}{13.73}$

$= \frac{124.8 - 123.87}{13.73}$

$= \frac{0.93}{13.73}$

$= 0.067$

સમજૂતી :

Cfi = સંચયી આવૃતિ

મધ્યસ્થ સમજવા માટે,

Cfi = મધ્યસ્થ વર્ગના ઉપરના વર્ગની સંચયી આવૃતિ (જે 45 છે.)

fi = મધ્યસ્થ વર્ગના સામેની આવૃતિ જે 28 છે.

L = મધ્યસ્થ વર્ગની નીચલી સીમા જે 39.5 છે.

ઉદાહરણ - 4 નીચે આપેલા આવૃતિ-વિતરણ પરથી બાઉલીની પદ્ધતિ અનુસાર વિષમતાંક મેળવો.

અવલોકન	10	11	12	13	14	15	16	17	18
આવૃતિ	2	5	10	28	36	21	17	12	9

જવાબ : અવલોકન આવૃતિ

fi	***fi***	***fi***
10	2	2
11	5	7
12	10	17
13	28	45
14	36	81
15	21	102
16	17	119
17	12	131
18	9	140

→ મધ્યસ્થ = M = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું અવલોકન = $\left(\frac{140+1}{2}\right)$ મું અવલોકન

= 70.5 મું અવલોકન

70.5 મું અવલોકન *Cfi* માં જોતાં 81માં સમાયેલ છે. જેથી *Cfi* ની સામે રહેલો *xi* એ આપણો મધ્યસ્થ નક્કી થશે.

મધ્યસ્થ = M = 14

→ ચતુર્થક = Q_3 = $3\left(\frac{n+1}{4}\right)$મું અવલોકન

= $3\left(\frac{140+1}{4}\right)$ મું અવલોકન

= 105.75 મું અવલોકન

105.75 મું અવલોકન *Cfi* માં જોતાં 119 માં સમાયેલ છે. જેથી C*fi* ની સામે રહેલો *xi* એ આપણો ત્રીજો ચતુર્થક (Q_3) નક્કી થશે.

ત્રીજો ચતુર્થક = Q_3 = 16

→ ચતુર્થક = Q_1 = $\left(\frac{n+1}{4}\right)$ મું અવલોકન

= $\left(\frac{140+1}{4}\right)$ મું અવલોકન

= 35.25 મું અવલોકન

35.25 મું અવલોકન *Cfi* માં જોતાં 45 માં સમાય છે. જેથી C*fi*ની સામે રહેલો x_i એ આપણો પહેલો ચતુર્થક (Q_1) નક્કી થશે. પહેલો ચતુર્થક = Q_1 = 13

→ બાઉલીનો વિષમતાંક = j = $\frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$

$$= \frac{16+13-2(14)}{16-13}$$

$$= \frac{16+13-28}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= 0.33$$

ઉદાહરણ - 5 : નીચેના આવૃતિ-વિતરણ પરથી બાઉલીની પદ્ધતિ અનુસાર વિષમતાંક મેળવો.

વર્ગ	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24
આવૃતિ	10	25	40	60	30	20	15

જવાબ :

વર્ગ	**આવૃતિ**	***Cfi***
	fi	
3-6	10	10
6-9	25	35
9-12	40	75
12-15	60	135
15-18	30	165
18-21	20	185
21-24	15	200
-	$n = 200$	-

મધ્યસ્થ વર્ગ = M વર્ગ = $\left(\frac{n}{2}\right)$ મું અવલોકન = $\left(\frac{200}{2}\right)$ મું અવલોકન

= 100 મું અવલોકન

100 મું અવલોકન *Cfi* માં જોતા 135 માં સમાયેલ છે. તેથી મધ્યસ્થ વર્ગ 12-15 નક્કી થશે.

$$\text{મધ્યસ્થ} = M = L + \frac{\left(\frac{n}{2}\right) - Cf_i}{f} \times C$$

$$= 12 + \frac{100 - 75}{60} \times 3$$

$$= 12 + \frac{25 \times 3}{60}$$

$$= 12 + \frac{75}{60}$$

$$= 12 + 1.25$$

$$= 13.25$$

→ પહેલો ચતુર્થક વર્ગ = Q_1 વર્ગ = $\left(\frac{n}{4}\right)$ મું અવલોકન

= $\left(\frac{200}{4}\right)$ મું અવલોકન

= 50 મું અવલોકન

50 મું અવલોકન Cf_i માં જોતા 75 માં સમાયેલ છે. જેથી પહેલો ચતુર્થક (Q_1) નો વર્ગ 9 – 12 નક્કી થશે.

પહેલો ચતુર્થક = $Q_1 = L + \frac{\left(\frac{n}{4}\right) - Cf}{f} \times C$

$$= 9 + \frac{50-35}{40} \times 3$$

$$= 9 + \frac{15-3}{40}$$

$$= 9 + \frac{45}{40}$$

$$= 9 + 1.125$$

$$= 10.125$$

ત્રીજો ચતુર્થક વર્ગ = Q_3 વર્ગ $= 3\left(\frac{n}{4}\right)$ મું અવલોકન

$= 3\left(\frac{200}{4}\right)$ મું અવલોકન

= 150 મું અવલોકન

150 મું અવલોકન Cfi માં જોતા 165માં સમાયેલ છે. જેથી ત્રીજો ચતુર્થક (Q_3) નો વર્ગ 15 – 18 નક્કી થશે.

ત્રીજો ચતુર્થક = $Q_3 = L + 3\,\frac{\left(\frac{n}{4}\right) - Cf}{f} \times C$

$$Q_3 = 15 + \frac{150-135}{30} \times 3$$

$$= 15 + \frac{15\times 3}{30}$$

$$= 15 + \frac{45}{30}$$

$$= 15 + 1.5$$

$$= 16.5$$

બાઉલીનો વિષમતાંક $= j = \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{16.5 + 10.125 - 2(13.25)}{16.5 - 10.125}$$

$$= \frac{26.625 - 26.5}{6.375}$$

$$= \frac{0.125}{6.375}$$

$$= 0.0196$$

ઉદાહરણ - 6 : નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી બાઉલીની પદ્ધતિ અનુસાર વિષમતાંક મેળવો.

પ્રાપ્તાંકો	1	2	3	4	5-9	10-13	14-20	21-25	26-30
આવૃત્તિ	2	4	9	12	19	17	16	14	7

જવાબ :

પ્રાપ્તાંક	આવૃત્તિ (f_i)	Cf_i
1	2	2
2	4	6
3	9	15
4	12	27
5-9	19	46
10-13	17	63
14-20	16	79
21-25	14	93
26-30	7	100

મધ્યસ્થ વર્ગ = M વર્ગ = $\left(\frac{n}{2}\right)$ મું અવલોકન

= $\left(\frac{100}{2}\right)$ મું અવલોકન

= 50 મું અવલોકન

50 મું અવલોકન *Cfi* માં જોતાં 63માં સમાયેલ છે. તેથી મધ્યસ્થ વર્ગ 10-13 નક્કી થશે. અગાઉની સમજૂતી મુજબ અહીં વર્ગ અનિવારક વર્ગ હોવાથી તેને આપણે નિવારક વર્ગમાં ફેરવવું પડશે. તેથી મધ્યસ્થનો વર્ગ 9.5 - 13.5 નક્કી થશે.

$$\text{મધ્યસ્થ} = M = L + \frac{\left(\frac{n}{2}\right) - Cf}{f} \times C$$

$$= 9.5 + \frac{50 - 46}{17} \times 4$$

$$= 9.5 + \frac{4 \times 4}{17}$$

$$= 9.5 + \frac{16}{17}$$

$$= 10.44$$

→ પહેલો ચતુર્થક $= Q_1 = \left(\frac{n}{4}\right)$ મું અવલોકન

$= \left(\frac{100}{4}\right)$ મું અવલોકન

$= 25$ મું અવલોકન

25 મું અવલોકન Cf_i માં જોતા 27 માં સમાયેલ છે. જેથી તેની સામે રહેલો x_i એ આપણો પહેલો ચતુર્થક (Q_1) નક્કી થશે.

માટે પહેલો ચતુર્થક $= Q_1 = 4$

→ ત્રીજો ચતુર્થક વર્ગ $= Q_3$ વર્ગ $= 3\left(\frac{n}{4}\right)$ મું અવલોકન

$= 3 \left(\frac{100}{4}\right)$ મું અવલોકન

$= 75$ મું અવલોકન

75 નું અવલોકન Cf_i માં જોતા 79 માં સમાયેલ છે. જેથી ત્રીજો ચતુર્થકનો વર્ગ 14–20 નક્કી થશે. અગાઉની સમજૂતી મુજબ અહીં અનિવારક વર્ગ હોવાથી તેને આપણે નિવારક વર્ગનાં ફેરવવું પડશે. તેથી ત્રીજા ચતુર્થકનો વર્ગ 13.5 – 20.5 નક્કી થશે.

→ ત્રીજો ચતુર્થક $= Q_3 = L + 3 \frac{\left(\frac{n}{4}\right) - Cf}{f} \times C$

$$= 13.5 + \frac{75 - 63}{16} \times 7$$

$$= 13.5 + \frac{12 \times 7}{16}$$

$$= 13.5 + \frac{84}{16}$$

$$= 13.5 + 5.25$$

$$= 18.75$$

→ બાઉલીનો વિષમતાંક $= j = \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{18.75 + 4 - 2(10.44)}{18.75 - 4}$$

$$= \frac{22.75 - 20.88}{14.75}$$

$$= \frac{1.87}{14.75}$$

$$= 0.1267$$

ઉદાહરણ - 7 : કોમર્સ કોલેજનાં વિદ્યાર્થીઓએ આંકડાશાસ્ત્ર વિષયમાં મેળવેલ ગુણ નીચે મુજબ છે.

ગુણ	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95	95-100
આવૃત્તિ	4	12	15	20	17	2

આપેલ માહિતી પરથી કેલીનો વિષમતાંક મેળવો.

જવાબ :

ગુણ	આવૃત્તિ (f_i)	Cf_i
70-75	4	4
75-80	12	16
80-85	15	31
85-90	20	51
90-95	17	68
95-100	2	70

→ અહીં કેલીનો વિષમતાંક મેળવવા માટે આગળની માહિતીમાં બે સૂત્રો દર્શાવેલ છે. તે બન્ને સૂત્રમાંથી કોઈ પણ એક સૂત્રનો આપણે ઉપયોગ કરી શકીશું.

$D_5 = Q_2 = M = 5$ મો દશાંક

5 મો દશાંક વર્ગ $= D_5$ વર્ગ $= 5\left(\dfrac{n}{10}\right)$ મું અવલોકન

$= \left(\dfrac{n}{2}\right)$ મું અવલોકન

$$= \left(\frac{70}{2}\right) \text{ મું અવલોકન}$$

$$= 35 \text{ મું અવલોકન}$$

35 મું અવલોકન *Cfi* માં જોતા 51માં સમાયેલ છે. જેથી 5 મો દશાંક નો વર્ગ 85 – 90 થશે.

$$5 \text{ મો દશાંક} = D_5 = L + 5\,\frac{\left(\frac{n}{10}\right) - Cf_i}{f} \times C$$

$$= 85 + \frac{35 - 31}{20} \times 5$$

$$= 85 + \frac{4 \times 5}{20}$$

$$= 85 + \frac{20}{20}$$

$$= 85 + 1$$

$$= 86$$

$$D_5 = 5 \text{ મો દશાંક} = 86$$

→ પહેલો દશાંક વર્ગ = D_1 વર્ગ = $\left(\frac{n}{10}\right)$ મું અવલોકન

$$= \left(\frac{70}{10}\right) \text{ મું અવલોકન}$$

$$= 7 \text{ મું અવલોકન}$$

7 મું અવલોકન *Cfi* માં જોતા 16માં સમાયેલ છે. જેથી પહેલો દશાંક નો વર્ગ 75 - 80 થશે.

→ પહેલો દશાંક = $D_1 = L + \frac{\left(\frac{n}{10}\right) - Cf_i}{f} \times C$

$$= 75 + \frac{7 - 4}{12} \times 5$$

$$= 75 + \frac{3 \times 5}{12}$$

$$= 75 + \frac{15}{12}$$

$$= 75 + 1.25$$

$$= 76.25$$

D_1 = પહેલો દશાંક = 76.25

→ નવમો દશાંક વર્ગ = D_9 વર્ગ = $9\left(\frac{n}{10}\right)$ મું અવલોકન

$= 9\left(\frac{70}{10}\right)$ મું અવલોકન

= 63 મું અવલોકન

63 મું અવલોકન *Cfi* માં જોતા 68 માં સમાય છે. જેથી નવમો દશાંકનો વર્ગ 90 – 95 નક્કી થશે.

→ નવમો દશાંક = $D_9 = L + 9\frac{\left(\frac{n}{10}\right) - Cf_i}{f} \times C$

$$= 90 + \frac{63 - 51}{17} \times 5$$

$$= 90 + \frac{12 \times 5}{17}$$

$$= 90 + \frac{60}{17}$$

$$= 90 + 3.53$$

$$= 93.53$$

→ કેલીનો વિષમતાંક = $j = \frac{D_9 + D_1 - 2.D_5}{D_9 - D_1}$

$$= \frac{93.53 + 76.25 - 2(86)}{93.53 - 76.25}$$

$$= \frac{169.78 - 172}{17.28}$$

$$= \frac{-2.22}{17.28}$$

$$= -0.1284$$

ઉદાહરણ - 8 : નીચે આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સન અને બાઉલીની પદ્ધતિની મદદથી વિષમતાંક મેળવો.

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
આવૃતિ	10	40	20	0	10	40	16	14

જવાબ : **વર્ગ** **આવૃતિ**

	f_i	x_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$	Cf_i
0-10	10	5	50	250	10
10-20	40	15	600	9000	50
20-30	20	25	500	12500	70
30-40	0	35	0	0	70
40-50	10	45	450	20250	80
50-60	40	55	2200	121000	120
60-70	16	65	1040	67600	136
70-80	14	75	1050	78750	150
-	150	-	5890	-	-

→ $n = f = 150$

→ મધ્યક $= x = \dfrac{\sum f_i x_i}{n} = \dfrac{5890}{150} = 39.27$

→ મધ્યસ્થ વર્ગ = M વર્ગ = $\left(\dfrac{n}{2}\right)$ મું અવલોકન

$= \left(\dfrac{150}{2}\right)$ મું અવલોકન

= 75 મું અવલોકન જોતાં

M વર્ગ = 40 – 50

→ $$M = L + \frac{\left(\frac{n}{2}\right) - cf_i}{f_i} \times C$$

$$= 40 + \frac{75-70}{10} \times 10$$

$$= 40 + \frac{5 \times 10}{10}$$

$= 40 + 5$

$= 45$

→ પ્રમાણિત વિચલન = S = $\sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i x_i^2}{vn}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{309350}{150} - \left(\frac{5890}{150}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2062.33 - 1541.87}$$

$$= \sqrt{520.46} \quad = 22.81$$

કાર્લ પિયર્સનનો વિષમતાંક = j = $\frac{3(\bar{x} - \text{M})}{\text{S}}$

$$= \frac{3(39.27 - 45)}{22.81}$$

$$= \frac{-17.19}{22.81}$$

$$= -0.75$$

→ પહેલો ચતુર્થક વર્ગ = Q_1 વર્ગ = $\left(\frac{n}{4}\right)$ મું અવલોકન

= $\left(\frac{150}{4}\right)$ મું અવલોકન

= 37.5 મું અવલોકન જોતાં

Q_1 વર્ગ = 10 – 20

$$Q_1 = \text{L} + \frac{\left(\frac{n}{4}\right) - \text{C}f_i}{f_i} \times \text{C}$$

$$= 10 + \frac{37.5 - 10}{40} \times 10$$

$$= 10 + \frac{27.5 \times 10}{40}$$

$$= 10 + \frac{27.5}{4}$$

$$= 10 + 6.875$$

$$Q_1 = 16.875$$

→ ત્રીજો ચતુર્થક વર્ગ = Q_3 વર્ગ = $3\left(\frac{n}{4}\right)$ મું અવલોકન

$$= 3\left(\frac{150}{4}\right) \text{ મું અવલોકન}$$

= 112.5 મું અવલોકન જોતાં

Q_3 વર્ગ = 50 – 60

$$Q_3 = L + 3\ \frac{\left(\frac{n}{4}\right) - Cf}{f} \times C$$

$$= 50 + \frac{112.5 - 80}{40} \times 10$$

$$= 50 + \frac{32.5 \times 10}{40}$$

$$= 50 + \frac{32.5}{40}$$

$$= 50 + 0.8125$$

$$Q_3 = 50.8125$$

→ બાઉલીનો વિષમતાંક = $j = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{50.8125 + 16.875 - 2(45)}{50.8125 - 16.875}$$

$$= \frac{67.6875 - 90}{33.9375}$$

$$= \frac{-22.3125}{33.9375}$$

$$= -0.6574$$

ઉદાહરણ - 9 : નીચે આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સન, બાઉલી અને કેલીની પદ્ધતિની મદદથી વિષમતાંક મેળવો.

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
આવૃતિ	2	4	7	10	7	4	2

જવાબ :

વર્ગ	આવૃત્તિf_i	x	fx	fx^2	Cf
0-10	2	5	10	50	2
10-20	4	15	60	900	6
20-30	7	25	175	4375	13
30-40	10	35	350	12250	23
40-50	7	45	315	14175	30
50-60	4	55	220	12100	34
60-70	2	65	130	8450	36
-	36	-	1260	52300	-

→ $f = 36 = n$ = અવલોકનોની સંખ્યા

→ મધ્યક $= x = \dfrac{\sum f x}{n} = \dfrac{1260}{36} = 35$

→ પ્રમાણિત વિચલન $= S = \sqrt{\dfrac{\sum fx^2}{n} - \left(\dfrac{\sum fx}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{52300}{36} - \left(\frac{1260}{36}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1452.78 - 1225}$$

$$= \sqrt{227.78}$$

$$= 15.09$$

→ બહુલક વર્ગ = Z વર્ગ = મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતો વર્ગ = 30 – 40

$\therefore$ બહુલક $= Z = L + \dfrac{fm - f_1}{2fm - f_1 - f_2} \times C$

$$= 30 + \frac{10-7}{2(10)-7-7} \times 10$$

$$= 30 + \frac{30}{6}$$

$$= 30 + 5$$

$$= 35$$

→ કાર્લ પિયર્સનનો વિષમતાંક $= j = \dfrac{\bar{x} - Z}{S}$

$$= \frac{35-35}{15.09}$$

$$= 0$$

→ પહેલો ચતુર્થક વર્ગ = Q_1 વર્ગ = $\left(\frac{n}{4}\right)$ મું અવલોકન

$= \left(\frac{36}{4}\right)$ મું અવલોકન

= (9) મું અવલોકન જોતા

Q_1 વર્ગ = 20 – 30

$$Q_1 = L + \frac{\left(\frac{n}{4}\right) - Cf}{f} \times C$$

$$= 20 + \frac{9-6}{7} \times 10$$

$$= 20 + \frac{30}{7}$$

$$= 20 + 4.28$$

$$= 24.28$$

→ ત્રીજો ચતુર્થક વર્ગ = Q_3 વર્ગ = $3\left(\frac{n}{4}\right)$ મું અવલોકન

$= 3\left(\frac{36}{4}\right)$ મું અવલોકન

= 27 મું અવલોકન જોતા

Q_3 વર્ગ = 40 – 50

$$Q_3 = L + 3\,\frac{\left(\frac{n}{4}\right) - Cf}{f} \times C$$

$$= 40 + \frac{27-23}{7} \times 10$$

$$= 40 + \frac{40}{7}$$

$$= 40 + 5.71$$

$$= 45.71$$

→ મધ્યસ્થ વર્ગ = M વર્ગ = $\left(\frac{n}{2}\right)$ મું અવલોકન

$= \left(\frac{36}{2}\right)$ મું અવલોકન

$= 18$ મું અવલોકન જોતાં

M વર્ગ = 30 – 40

$$M = L + \frac{\left(\frac{n}{2}\right) - Cf}{f} \times C$$

$$= 30 + \frac{18 - 13}{10} \times 10$$

$$= 30 + \frac{50}{100}$$

$= 30 + 5$

$= 35$

→ બાઉલીનો વિષમતાંક $= j = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{45.71 + 24.28 - 2(35)}{45.71 - 24.28}$$

$$= \frac{69.99 - 70}{21.43}$$

$$= \frac{-0.01}{21.43}$$

$= -0.0004 \cong 0$

→ D_5 = 5 મો દશાંક = M = 35

→ પહેલો દશાંક વર્ગ = D_1 વર્ગ = $\left(\frac{n}{10}\right)$ મું અવલોકન

$= \left(\frac{36}{10}\right)$ મું અવલોકન

$= 3.6$ મું અવલોકન જોતાં

D_1 વર્ગ = 10 – 20

$$D_1 = L + \frac{\left(\frac{n}{10}\right) - Cf}{f} \times C$$

$$= 10 + \frac{3.6 - 2}{4} \times 10$$

$$= 10 + \frac{16}{4}$$

$$= 10 + 4$$

$$= 14$$

→ નવમો દશાંક વર્ગ = D_9 વર્ગ = $9\left(\frac{n}{10}\right)$ મું અવલોકન

$$= 9\left(\frac{36}{10}\right) \text{ મું અવલોકન}$$

= 32.4 મું અવલોકન જોતાં

D_9 વર્ગ = 50 – 60

$$D_9 = L + 9\ \frac{\left(\frac{n}{10}\right) - Cf}{f} \times C$$

$$= 50 + \frac{32.4 - 30}{4} \times 10$$

$$= 50 + \frac{24}{4}$$

$$= 50 + 6$$

$$= 56$$

→ કેલીનો વિષમતાંક = $j = \frac{D_9 + D_1 - 2M}{D_9 - D_1}$

$$= \frac{56 + 14 - 2(35)}{56 - 14}$$

$$= \frac{70 - 70}{42}$$

$$= 0$$

6.7 તમારી પ્રગતિ ચકાસો.

(અ) નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો.

1. વિષમતા એટલે શું ? વિષમતાની કસોટીઓ જણાવો.
2. વિષમતાની વ્યાખ્યા આપી તેના પ્રકારો સવિસ્તાર જણાવો.
3. વિષમતાંક શોધવાના જુદા - જુદા સૂત્રો જણાવો.

4. કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિ સવિસ્તાર લખો.

(બ) નીચે આપેલા પદો પર ટૂંકનોંધ લખો.

(1) ધન વિષમતા

(2) ઋણ વિષમતા

(3) બાઉલીની પદ્ધતિ

(4) કેલીનું માપ

(ક) નીચેના આપેલા દાખલા ગણો.

1. 50 વિદ્યાર્થીઓએ આંકડાશાસ્ત્રની આંતરિક કસોટીમાં 10માંથી મેળવેલ ગુણ નીચે મુજબ છે. કાર્લ પિયર્સન પદ્ધતિની મદદથી વિષમતાંક મેળવો.

ગુણ	2	3	4	5	6	7	8	9
સંખ્યા	1	3	4	12	4	7	10	9

2. નીચેની માહિતી પરથી બાઉલીની રીતે વિષમતાંક શોધો.

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
આવૃતિ	15	20	27	42	25	12

3. નીચેની માહિતી પરથી બાઉલી અને કેલીના માપના મદદથી વિષમતાંક મેળવો.

xi	5	8	10	13	17	20	23	27
fi.	2	3	5	10	12	7	4	2

4. નીચે આપેલા આવૃતિ વિતરણનો કાર્લ પિયર્સન અને બાઉલીની પદ્ધતિ અનુસાર વિષમતાંક મેળવો.

પ્રાપ્તાંકો	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28
આવૃતિ	5	7	15	15	9	6

5. આપેલ વર્ગીકૃત માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનનો વિષમતાંક મેળવો.

વર્ગ	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
આવૃતિ	17	22	29	37	26	19	15

6. આપેલ માહિતી પરથી બાઉલીની પદ્ધતિની મદદથી વિષમતાંક મેળવો.

વર્ગ	0-25	25-50	50-75	75-100	100-125	125-150
આવૃતિ	2	3	4	7	3	2

7. આપેલ માહિતી પરથી કેલીના માપના મદદથી વિષમતાંક મેળવો.

x	1	2	4	4-7	7-10	10-13	13-17
f	5	8	10	18	14	8	3

8. આપેલ પ્રાપ્તાંકો અને આવૃત્તિ પરથી કાર્લ પિયર્સન, બાઉલી અને કેલીના માપની મદદથી વિષમતાંક મેળવો.

વર્ગ	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48	48-56
આવૃત્તિ	10	20	30	40	30	15	8

9. કોમર્સ કોલેજમાં વિદ્યાર્થીઓએ કોઈ એક વિષયમાં મેળવેલ ગુણ નીચે મુજબ છે.

ગુણ	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
આવૃત્તિ	3	5	3	4	17	25	21	8	6	7

ઉપરની માહિતી પરથી (1) બાઉલીનો વિષમતાંક (2) કેલીનો વિષમતાંક શોધો.

[બાઉલીનો વિષમતાંક (*j*) = 0.0152, કેલીનો વિષમતાંક (j) = 0.0 468]

10. નીચે આપેલી માહિતી પરથી બાઉલીનો વિષમતાંક શોધો.

થી ઓછા ગુણ	10	20	30	40	50	60	70	80
સંચયી આવૃત્તિ	15	50	110	194	290	417	615	865

[બાઉલીનો (*j*) = –0.272]

11. નીચે આપેલ માહિતી પરથી બાઉલી અને કેલીની રીતે વિષમતાંક મેળવો.

વેતન	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
આવૃત્તિ	4	11	15	24	21	14	11

[બાઉલી (*j*) = 0.0004, કેલી (j) = –0.0068]

12. કાર્લ પિયર્સનનો વિષમતાંક મેળવો.

વર્ગ	0-10	10-18	18-28	28-50	50-80
આવૃત્તિ	2	6	13	15	14

[કાર્લ પિયર્સનનો વિષમતાંક (*j*) = 0.6]

13. કાર્લ પિયર્સન અને બાઉલીનો વિષમતાંક મેળવો.

વર્ગો	0-2	2-5	5-10	10-15	15-25	25-35	35-50
f	10	14	20	15	10	11	10

[કાર્લ પિયર્સન (*j*) = 1.079, બાઉલી (j) = 0.4]

6.8 ખાલી જગ્યા પૂરો.

(1) જો વિષમતા ધન હોય તો મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક .... ક્રમમાં હોય છે.

(2) જો પ્રથમ ચતુર્થક 65.2, મધ્યસ્થ 67.6, અને તૃતિય ચતુર્થક 71.2 હોય તો વિષમતાંક .... છે.

(3) જો મધ્યક = 40, મધ્યસ્થ = 41 અને વિચરણ = 144 હોય તો વિષમતાંક ... છે.

(4) જો વિષમતા શૂન્ય હોય અને મધ્યસ્થ = 25, પ્રથમ ચતુર્થક = 20 હોય તો તૃતિય ચતુર્થક = ... છે.

(5) જો મધ્યક, બહુલક કરતા નાનો હોય તો વિષમતા .... અને મધ્યસ્થ, મધ્યક કરતા .... હોય છે.

(6) સંપૂર્ણ સંમિત આવૃતિ વિતરણ માટે .... , ... અને .... સરખા થાય અને વિષમતા .... થાય.

(7) જો બાઉલીનો વિષમતાંક 0.6 છે અને બે ચતુર્થકોનો સરવાળો 100 હોય ઉપરાંત મધ્યસ્થ 38 હોય તો પ્રથમ ચતુર્થક .... છે.

(8) એક આવૃતિ વિતરણનો મધ્યક 100, મધ્યસ્થ 96 અને પ્રમાણિત વિચલન 40 હોય તો વિષમતાંક .... છે.

[**જવાબો :** (1) ઉતરતા, (2) 0.2, (3) –0.25, (4) 30 (5) ઋણ, મોટો (6) મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલક, શૂન્ય (7) 30 (8) 0.3]

6.9 ટૂંકા પ્રશ્નો

(1) એક આવૃતિ વિતરણના ચતુર્થકો વચ્ચેનો તફાવત 10, ચતુર્થકોનો સરવાળો 25, મધ્યક 12 અને બહુલક 15 છે. તે વિતરણનો વિષમતાંક શોધો.

(2) જો કોઈ આવૃતિ વિતરણનો મધ્યક 22, મધ્યસ્થ 24 અને વિચરણ 100 હોય તો તેનો વિષમતાંક કેટલો ?

(3) એક શ્રેણીના ત્રણે ચતુર્થકો અનુક્રમે 58.273, 61.24 અને 63.88 છે. તો તે શ્રેણીનો વિષમતાંક શોધો.

(4) જો પ્રથમ ચતુર્થક = 43.8, તૃતીય ચતુર્થક = 46.8 અને બાઉલીનો વિષમતાંક 0.2 હોય તો દ્વિતીય ચતુર્થક શોધો.

(5) 10 નિરીક્ષણોના સમૂહ માટે $\Sigma x = 452$, $\Sigma x^2 = 24270$ અને બહુલક = 43.7 છે. તો કાર્લ પિયર્સનનો વિષમતાંક મેળવો.

- તમારી પ્રગતિ ચકાસોના જવાબો.

[**જવાબો :** (1) વિષમતાંક (j) = –0.1

(2) વિષમતાંક (j) = –0.6

(3) વિષમતાંક (j) = –0.058

(4) દ્વિતીય ચતુર્થક = 45

(5) કાર્લ પિયર્સનનો વિષમતાંક (j) = 0.077]

6.10 ચાવીરૂપ શબ્દો :

વિષમતા : આવૃતિ વિતરણમાં રહેલ સંમિતતાની ખામી (અસમાનતા)

મધ્યક : સરેરાશ કે સરાસરી

મધ્યસ્થ : ચઢતા કે ઉતરતા ક્રમમા ગોઠવેલ અવલોકનના મધ્યમાં આવતો પ્રાપ્તાંક (બરોબર વચ્ચેનું તટસ્થબિંદુ)

બહુલક : સૌથી વધુ વખત પુનરાવર્તન પામતો પ્રાપ્તાંક

પ્રમાણિત વિચરણન : અવલોકનોના મધ્યકમાંથી લીધેલ વિચલનોના વર્ગોની સરેરાશનું ઘન વર્ગમૂળ (વિચલનોના વર્ગો ઉપર આધારિત માપ)

ચતુર્થકો : માહિતીને ચાર સરખા ભાગે વહેંચવું તે

દશાંશકો : માહિતીને દશ સરખા ભાગે વહેંચવું તે

શતાંશકો : માહિતીને સો સરખા ભાગે વહેચંવું તે.

- **સંદર્ભ ગ્રંથ :**

– ધંધાકીય સંશોધન પદ્ધતિઓ, 'મૈસુરીયા અને પટેલ'

અક્ષર પબ્લિકેશન, અમદાવાદ.

❖ ❖ ❖

એકમ-7 નિદર્શન પદ્ધતિઓ

રૂપરેખા

7.0 ઉદ્દેશો :

- સમષ્ટિ વિશે ખ્યાલ મેળવવો.
- નિદર્શ વિશે ખ્યાલ મેળવી તેના ફાયદાઓ સમજી શકશો.
- સમષ્ટિ તપાસ અને નિદર્શ તપાસ વિશે ખ્યાલ મેળવવો.
- નિદર્શન પદ્ધતિઓનો ખ્યાલ મેળવી શકશો અને તેનો વ્યવહારિક ઉપયોગ કરી શકશો.
- નિદર્શન પદ્ધતિઓની ઉપયોગિતા સમજી શકશો.

- પુરવણી રહિત અને પુરવણી સહિત નિદર્શન પદ્ધતિની સમજ મેળવવી.
- સંભાવના નિદર્શન પદ્ધતિઓ અને બિન સંભાવના નિદર્શન પદ્ધતિઓની સમજ મેળવી શકશો.

7.1 પ્રાસ્તાવિક (Introduction):

સંશોધન ક્ષેત્રે માહિતીને તેના બધા જ એકમોમાંથી અમુક એકમો પસંદ કરવા અને પસંદ કરેલા એકમોની તપાસ કરી માહિતીના બધા જ એકમો વિશે અનુમાન કરવા નિદર્શન પદ્ધતિનો અભ્યાસ કરવો આવશ્યક છે.

કારખાનામાં ઉત્પન્ન થયેલ માલની ગુણવત્તાનો અંદાજ તે ઉત્પાદનમાંથી થોડા એકમોની તપાસ કરી મેળવે છે, ચાલુ વર્ષે ઘઉંના પાકનું રાજ્યમાં કેટલું ઉત્પાદન થશે તેનો અંદાજ મેળવવા અમુક ખેતરોના ઉત્પાદનની મેળવેલ માહિતી પરથી કાઢવામાં આવે છે. આ ઉપરાંત દરેક વ્યક્તિ જાણે અજાણે નિદર્શનો ઉપયોગ કરે છે, જેમ કે આપણે ઘઉં, ચોખા, ફળો શાકભાજી વગેરેની ખરીદી કરતાં પહેલા થોડી માત્રામાં વસ્તુઓ લઈ તે વસ્તુ બરાબર છે કે નહિ તેની ચકાસણી કરતાં હોઈએ છીએ, ત્યારબાદ વસ્તુઓ ખરીદવી કે નહિ તેનો નિર્ણય લઈએ છીએ, આ એક નિદર્શ તપાસ છે. આપણે આ યુનિટમાં સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ કઈ રીતે મેળવી શકાય અને તેની તપાસ કરી ગાણિતિક પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી યોગ્ય નિર્ણય લઈ શકાય તેવા હેતુસર આ એકમનો અભ્યાસ કરીશું. આ ઉપરાંત વિવિધ ક્ષેત્રોમાં નિદર્શન પદ્ધતિનો આર્થિક અને વ્યવહારું ઉપયોગ ખૂબ જ ફાયદાકારક નિવડે છે.

7.2 સમષ્ટિ અને નિદર્શની વ્યાખ્યા અને વ્યવહારું સૂચિતાર્થો (Population and sample):

7.2.1 સમષ્ટિ :આંકડાશાસ્ત્રીય અર્થમાં સમષ્ટિ નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થાય છે. " સંશોધન ક્ષેત્રે જેમાહિતીનો અભ્યાસ કરવાનો હોય તે માહિતીને સંબંધિત તમામ એકમોના સમૂહ કે ચલ લક્ષણનામાપોના ગણને સમષ્ટિ કહે છે." સમષ્ટિમાં વ્યાખ્યાયિત થયેલ એકમોની કુલ સંખ્યાને સંકેતમાંN વડે દર્શાવવામાં આવે છે, જેને સમષ્ટિનું કદ (Size of Population) કહેવામાં આવે છે.દા.ત. ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીમાં અર્થશાસ્ત્ર વિષય સાથે S.Y.B.A.માંઅભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓના પરિણામ વિશે અભ્યાસ કરવા માટે વર્ષ 2018-19 માં નોંધાયેલવિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાના સમહને અભ્યાસ સંબંધિત સમષ્ટિ કહેવાય છે, ભારતની ૧૭ મીલોકસભા ચૂંટણી માટે અધિકાર પ્રાપ્ત થયેલા તમામ મતદારોના સ મૂહ, રાજ્યના ઘઉંનાઉત્પાદનની માહિતી મેળવવી હોય તો રાજ્યની તમામ ઘઉંના ખેતરો વગેરેને સમષ્ટિ કહેવામાંઆવે છે.જે સમષ્ટિના એકમોની સંખ્યા ગણી શકાય તેમ નહોય કે અનિશ્ચિત હોય ત્યારે તે સમષ્ટિને
અનંત સમષ્ટિ (Infinite Population)કહે છે. દા.ત. આકાશમાં તારાઓની સંખ્યા, 1 થી 100 ની વચ્ચે આવતી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ, પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ, આકાશમાં ઉડતા પક્ષીઓની સંખ્યા વગેરે અનંત સમષ્ટિના ઉદાહરણો છે.

જ્યારે સમષ્ટિમાં એકમોની સંખ્યા ગણી શકાય તેવી હોય એટલે કે નિયત અને મર્યાદિત હોય તે સમષ્ટિને સાન્ત સમષ્ટિ (Finite Population)કહેવાય છે. દા.ત. એક કૉલેજના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા, કોઈ એક કારખાનામાં કામ કરતા કામદારોની સંખ્યા, ગુજરાત યુનિવર્સિટી હેઠળ આવતી કોલેજોની સંખ્યા વગેરે સાન્ત સમષ્ટિના ઉદાહરણો છે.

આ ઉપરાંત સમષ્ટિ સમાંગ (Homogenous)કે વિષમાંગ (Hetrogenous)હોય છે. જે સાષ્ટિના બધાજ એકમો સમાન ચલ લક્ષણો કે ગુણધર્મો ધરાવતા હોય તે સમષ્ટિને સમાંગ સમષ્ટિ કહે છે. દા.ત. દર્દીના લોહીના તપાસ માટે શરીરનું બધુ જ લોહી સમાન ગુણધર્મવાળું છે. જ્યારે સમષ્ટિના એકમો તેના ચલલક્ષણ કે ગુણધર્મો જુદા-જુદા હોય ત્યારે તે સમષ્ટિને વિષમાંગ સમષ્ટિ કહે છે. દા.ત. ગુજરાતમાં પ્રાથમિક શાળાઓમાં અભ્યાસ કરતા બધા જ વિદ્યાર્થીઓનો સમૂહ.

જે સમષ્ટિના એકમો ભૌતિક રીતે અસ્તિત્વ ધરાવતો ન હોય, પરંતુ વારંવાર ઘટતી ઘટનાથી ઉત્પાદિત થતી કલ્પનામાં આવતી હોય તેને કાલ્પનિક સમષ્ટિ (Hypothetrical Population)કહે છે. દા.ત. સિક્કાઓને કદાપી ઉછાળવામાં આવ્યા ન હોય, છતાં તેને ઉછાળવાથી મળતી છાપોની સંખ્યાની કલ્પના કરવામાં આવે, તો આ છાપોની સમષ્ટિ એ કાલ્પનિક સમષ્ટિ છે.

7.2.2 નિદર્શ :સમષ્ટિમાંથી તેનું પ્રતિનિધિત્વ કરે એટલે કે સમષ્ટિમાંની માહિતીનું યોગ્ય વહન કરેતેવો વૈજ્ઞાનિક પદ્ધતિથી પસંદ કરવામાં આવતા એકમોના સમૂહને 'નિદર્શ' કહે છે. વ્હારમાંનિદર્શને નમૂનો કહે છે. નિદર્શમાં આવેલા એકમોની સંખ્યાને nવડે દર્શાવાય છે, જેને નિદર્શનકદ (Size of Sample)કહે છે. દા.ત. વીજળીના ગોળા(બલ્બ)નું આયુષ્ય જાણવા, અમુકગોળા લઈ તેની ચકાસણી કરવામાં આવે તો આવા ગોળાના નાના સમૂહને નિદર્શ કહેવાય છે.પોલીન યુંગ નિદર્શનની વ્યાખ્યા આપતાં લખે છે કે "નિદર્શન જે જૂથ માંથી લેવામાં
આવ્યુ હોય તે જૂથનું લઘુચિત્ર હોય છે."

ગુડ અને હાટ કહે છે કે "સમષ્ટિનું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતો નાનો ભાગ એટલે નિદર્શ"
વૉકર અને લેવ નોંધે છે કે "સમષ્ટિ વિશે માહિતી મેળવવાના હેતુથી એ સમષ્ટિમાંથી પસંદ કરેલા એકમોના સમૂહને નિદર્શ કહેવાય."

7.3 સમષ્ટિ તપાસ અને નિદર્શ તપાસ (Population enquiry and sample enquiry):

કોઈપણ સંશોધનની સફળતાને આધાર આંકડાશાસ્ત્રીય તપાસ કઈ પદ્ધતિથી કરવામાં આવે છે, તેના પર રહેલો છે. કોઈપણ આંકડાશાસ્ત્રીય તપાસમાં સમષ્ટિ તપાસ અને નિદર્શ તપાસ એમ બે અગત્યના પરિબળો છે.

7.3.1 સમષ્ટિ તપાસ :

સમષ્ટિના બધાજ એકમોની તપાસ કરી માહિતી એકત્રિત કરવામાં આવે છે, ત્યારે આવી તપાસને સમષ્ટિ તપાસ કહેવામાં આવે છે. જ્યારે સમષ્ટિમાંના એકમોની સંખ્યા બહુ મોટી ન હોય, એકમની તપાસ કરવાનો ખર્ચ વધુ ન હોય અને સમષ્ટિના એકમો નાશવંત ન હોય ત્યારે સમષ્ટિ તપાસ કરી માહિતી મેળવી શકાય.પરંતુ વ્યવહારમાં સમષ્ટિ તપાસનો ઉપયોગ ભાગ્યે જ જોવા મળે છે. જ્યારે સંશોધનનું મહત્વ ઘણું હોય અને મેળવેલી માહિતી લાંબા સમય સુધી સાચવવી જરૂરી હોય ત્યારે સમષ્ટિ તપાસ દ્વારા સંશોધન હાથ ધરવું હિતાવહ છે. જેમ કે ભારતમાં વસ્તી ગણતરી દર દસ વર્ષે થાય છે. તેથી તેમા સમષ્ટિ તપાસનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

સમષ્ટિ તપાસ કરવામાં ઘણો ખર્ચ આવે, ઘણો સમય જાય અને કેટલાક કિસ્સામાં એકમો પરનું માપ મેળવવા ખર્ચાળ સાધનો કે ખાસ તાલીમ પામેલાં અન્વેષકોની જરૂર પડે છે. કેટલીક તપાસના અંતે એકમો નાશ પામે છે, જેમ કે વીજળીના ગોળાનું આયુષ્ય જાણવા માટે, બેટરીમાં વપરાતા શેલ (પાવર)નું આયુષ્ય જાણવું, દર્દીના લોહીની ચકાસણીમાં સમષ્ટિ તપાસનો ઉપયોગ કરવામાં આવે તો દર્દી મૃત્યુ પામે છે, તેથી આવી જગ્યાએ સમષ્ટિ તપાસ હિતાવહ નથી.

7.3.2 નિદર્શ તપાસ

સમષ્ટિમાંથી પસંદ કરેલ નિદર્શના એકમોની તપાસ કરી માહિતી એકત્રિત કરવામાં આવે છે. ત્યારે તેને નિદર્શ તપાસ કહેવાય છે. આ નિદર્શ તપાસનો ઉપયોગ કરી આંકડાશાસ્ત્રની પદ્ધતિઓની મદદથી સમષ્ટિ વિશેની માહિતીનું આગણન કરવામાં આવે છે.

આધુનિક યુગમાં એવું કોઈક્ષેત્ર ભાગ્યે જ હશે જ્યાં નિદર્શ તપાસનો ઉપયોગ જાણે અજાણે પણ નહિ થતો હોય જેમ કે રોજીંદા જીવનમાં જીવન જરૂરી વસ્તુઓની ખરીદી વખતે, ભાત ચઢ્યો છે કે નહિ તે તપાસવા ગૃહિણી ભાતના બે-ચાર દાણા તપાસી જુએ છે, લોહીના રિપોર્ટ કરતી વખતે લોહીના થોડાંક ટીંપા ચકાસીને આખા શરીરના લાહીના બંધારણને લગતો નિર્ણય લઈ શકાય છે, બાઈક બનાવતી કંપની બાઈકની એવરેજ માટે અમુક બાઈક્સ ચલાવીને કે પરીક્ષણ કરીને સરેરાશ એવરેજ વિશે ખ્યાલ મેળવી શકે છે.

7.3.3 સમષ્ટિ તપાસ અને નિદર્શ તપાસ વચ્ચેનો તફાવત(Difference between population survey and sample survey) :

ક્રમ	તફાવતના મુદ્દા	સમષ્ટિ તપાસ	નિદર્શ તપાસ
1	અર્થ	જો માહિતી પ્રાપ્ત કરવા માટે અભ્યાસ હેઠળ રહેલા તમામ એકમોની તપાસ કરવામાં આવે તો સમષ્ટિ તપાસ કરે છે.	સમષ્ટિમાંથી ચોક્કસ પદ્ધતિ દ્વારા કેટલાક એકમો પસંદ કરી તેની તપાસ કરી સમષ્ટિના લક્ષણ અંગે પૂર્વાનુપાન કરવામાં આવે તેને નિદર્શ તપાસ કહે છે.
2	સમય અને ખર્ચ	સમષ્ટિમાં સમાયેલ તમામ એકમોની તપાસ કરવાની હોવાથી સમય અને ખર્ચ વધુ પ્રમાણમાં થાય છે.	નિદર્શ તપાસમાં ઓછા એકમોની તપાસ કરવાની હોવાથી સમય અને ખર્ચમાં બચત થાય છે.
3	ચોકસાઈ	સમષ્ટિના તમામ એકમોની તપાસ કરવાની હોવાથી ચોકસાઈ જાળવી શકાતી નથી.	અમુક એકમોની જ ચકાસણી કરવાની હોવાથી યોગ્ય ચોકસાઈ જાળવી શકાય છે.
4	એકમોનો નાશ	તપાસ દરમિયાન એકમોનો નાશ કરવાનો હોય ત્યારે સમષ્ટિ તપાસ શક્ય નથી.	તપાસ દરમિયાન એકમોનો નાશ કરવાનો હોય ત્યારે નિદર્શ તપાસ જ યોગ્ય ગણાય.
5	કાર્યબોજ	તમામ એકમોની તપાસ કરવાની હોવાથી કાર્યબોજ વધુ રહે છે અને તપાસ કંટાળાજનક બને છે.	નિદર્શ તપાસમાં ઓછા એકમોની તપાસ કરવાની હોવાથી કાર્યબોજ પ્રમાણમાં ઓછો રહે છે.
6	માહિતી	સમષ્ટિ તપાસમાં દરેક એકમ પાસેથી માહિતી મેળવવાની હોવાથી સંપૂર્ણ માહિતી મળે છે.	નિદર્શ તપાસમાં મર્યાદિત એકમો પાસેથી માહિતી મેળવવામાં આવતી હોવાથી કેટલીકવાર અધૂરી માહિતી મળે છે.
7	નિષ્ણાતોની સેવા	તમામ એકમોની તપાસ કરવાની થતી હોવાથી વધુ સંખ્યામાં નિષ્ણાતોની જરૂર રહે છે જે પૂર્ણ કરવી લગભગ અશક્ય છે.	મર્યાદિત એકમોની જ તપાસ કરવાની હોવાથી નિષ્ણાંત વ્યક્તિઓ રોકી શકાય છે.
8	પરિણામોની ચકાસણી	સમષ્ટિ તપાસમાં પરિણામોની ચકાસણી કરી શકાતી નથી.	નિદર્શ તપાસમાં તાલીમ પામેલા અન્વેષકોની મદદથી પરિણામોની ચકાસણી કરી શકાય છે.
9	ઉદાહરણ	ભારતમાં દર દસ વર્ષે થતી વસ્તી ગણતરી	વ્યક્તિના લોહીની તપાસ, ચૂંટણી પહેલા કયો પક્ષ સરકાર બનાવશે તે જાણવા માટે નિદર્શ સર્વેક્ષણ, મીઠાઈ ખરીદતી વખતે તેના ટૂકડાની તપાસ

7.4 નિદર્શનની વ્યાખ્યા અને જરૂરિયાત (Definition of Sampling and its requirement) :

"સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ પસંદ કરવાની પદ્ધતિને નિદર્શન કહે છે" નિદર્શન એ સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ પસંદ કરવાની એક વૈજ્ઞાનિક પદ્ધતિ છે, અને તે નિદર્શ પરથી સમષ્ટિની કિંમતોના આગણનની રીતો પૂરી પાડે છે.

આમ, નિદર્શનનો મુખ્ય ઉદ્દેશ નિદર્શના અભ્યાસ પરથી સમગ્ર સમષ્ટિના ગુણધર્મો વિશે તારણો મેળવવાનો છે. જેમ કે બોલપેન બનાવતી એક કંપની સમગ્ર જથ્થામાંથી પાંચ-છ બોલપેન

પસંદ કરી તેમના દ્વારા સરેરાશ કેટલા શબ્દો લખી શકાય તેનું પરિક્ષણ કરી સમષ્ટિ વિશે અનુમાન કરે છે, આ કાર્ય પદ્ધતિને નિદર્શન કહેવામાં આવે છે.

જ્યારે સમષ્ટિના એકમોની સંખ્યા અનંત હોય, તપાસનાં પરિણામો ટૂંકા સમયમાં મેળવવા જરૂરી હોય, તપાસ દરમિયાન એકમોનો નાશ કરવાનો હોય અને તપાસ હાથ ધરવા માટેના જરૂરી સંસાધનો જેવા કે નાણાકીય જોગવાઈ, સમય, સુસજ્જ તજજ્ઞો અને તાલીમબદ્ધ અન્વેષકોની ઉપલબ્ધિ મર્યાદિત હોય ત્યારે નિદર્શન જરૂરી નહીં પરંતુ અનિવાર્ય બને છે.

7.5 સારા નિદર્શન લક્ષણો (Characteristics of a good Sample) :

1. સમષ્ટિના એકમો જે લક્ષણો ધરાવતો હોય તે બધા લક્ષણો નિદર્શમાં હોવા જોઈએ એટલે કે નિદર્શ સમષ્ટિનું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતો હોવો જોઈએ.

2. નિદર્શમાં પસંદ થયેલા બધાજ એકમો સમયના એક ચોક્કસ ગાળામાં અને સમાન પરિસ્થિતિની અસર હેઠળ લેવાયેલા હોવાં જોઈએ.

3. સમષ્ટિનો દરેક એકમ નિદર્શમાં પ્રવેશવા માટે સ્વતંત્ર (નિરપેક્ષ) હોવો જોઈએ. એટલે કે કોઈપણ એકમની પસંદગી કે નાપસંદગીની અસર બીજા એકમ પર ન થવી જોઈએ.

4. નિદર્શના એકમોની પસંદગી કોઈપણ જાતના પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાત વગરની હોવી જોઈએ, એટલે કે તેની પસંદગી યાદચ્છિક રીતે થવી જોઈએ.

5. નિદર્શન કદ એવું હોવું જોઈએ કે જેથી નિદર્શન દોષની કિંમત યોગ્ય રીતે અંદાજી શકાય.

6. નિદર્શમાં એકમોની સંખ્યા પૂરતા પ્રમાણમાં લેવી જોઈએ, જેથી તેના પરથી તારવેલ પરિણામ સાચું હોઈ શકે.

7.6 નિદર્શનું કદ (Size of the sample) :

"નિદર્શમાં પસંદ થયેલા એકમોની સંખ્યાને નિદર્શનું કદ કહેવાય છે." નિદર્શ સમષ્ટિનુંપ્રતિનિધિત્વ ધરાવતું હોય તેટલું જ પુરતું નથી, પરંતુ આ ઉપરાંત તે પર્યાપ્ત કદનું છે કે નહિ તેજોવું પણ જરૂરી છે. નિદર્શમાં કેટલા એકમો હોવા જોઈએ તે અંગે યોગ્ય નિર્ણય કરવાનો હોયછે. આ પર્યાપ્ત કદનો આધાર સમષ્ટિના કદ, સ્વરૂપ, પ્રકાર વગેરે ઘણા પરિબળો પર આધારિતહોય છે, તેથી નિદર્શનું કદ નક્કી કરતી વખતે નીચેની બાબતો ધ્યાનમાં લેવી જોઈએ.

1. જે તપાસ માટે નિદર્શ લેવાનો છે, તેનો હેતુ સ્પષ્ટ હોવો જોઈએ.
2. સમષ્ટિનું કદ અને વિસ્તાર
3. નાણાંકીય સાધનો, ખર્ચ અને સમયની મર્યાદા
4. ચોક્કસાઈનું અપેક્ષિત ધોરણ
5. તપાસ માટે તજજ્ઞોની ઉપલબ્ધતા
6. સમષ્ટિના એકમોમાં રહેલી સમાનતા કે અસમાનતા

આ બધા જ મુદ્દાઓ ધ્યાને લઈ નિદર્શનું કદ નક્કી કરવું જોઈએ.

7.7 નિદર્શ તપાસના ફાયદાઓ અથવા નિદર્શનના ફાયદાઓ (Advantages of sample enumeration or Advantages of Sampling) :

1. નિદર્શ તપાસમાં ઓછા એકમોની તપાસ કરવામાં આવતી હોવાથી સમય, શક્તિ અને નાણાંનો ઓછો વ્યય થાય છે.

2. ઓછા એકમની તપાસ કરવાની હોવાથી એકત્રિત માહિતીની તપાસ ઝીણવટપૂર્વક અને ઊંડાણથી થઈ શકે છે, અને તેથી ચોકસાઈનું ધોરણ જાળવી શકાય છે.

3. નિદર્શ તપાસથી માહિતી ઝડપથી ભેગી કરી શકાય છે અને ઝડપથી તેનું પૃથક્કરણ કરીને તેમાંથી યોગ્ય નિર્ણયો ઝડપથી લઈ શકાય છે.

4. નિદર્શ તપાસમાં વધારે કાર્યદક્ષ અન્વેષકોની નિમણૂંક કરી શકાતી હોવાથી મેળવવામાં આવતા પરિણામોમાં ભૂલનું પ્રમાણ ઓછું હોય છે.

5. જ્યારે સમષ્ટિનું કદ વિશાળ (ખૂબ જ વધારે) હોય ત્યારે નિદર્શ તપાસ ખૂબ જ ફાયદાકારક છે.

6. તપાસ દરમ્યાન એકમોનો નાશ થવાની શક્યતા હોય ત્યારે નિદર્શ તપાસ જ ઉપયોગી છે. દા. ત. વિજળીના ગોળાના આયુષ્ય અંગેની તપાસ.

7. સમષ્ટિ તપાસનાં પરિણામોની ચોકસાઈની ખાતરી કરવા માટે નિદર્શ તપાસ જરૂરી છે. દા. ત. વસતી ગણતરીથી મેળવેલા પરિણામોની સચોટતાની તપાસ માટે નિદર્શ તપાસ પદ્ધતિનો ઉપયોગ થાય છે.

8. કાલ્પનિક સમષ્ટિ માટે સંપૂર્ણ તપાસ અશક્ય છે, ત્યારે નિદર્શ તપાસ અનિવાર્ય છે.

આમ આર્થિક અને વ્યવહારિક એમ બંને દૃષ્ટિએ સમષ્ટિ તપાસ કરતાં નિદર્શ તપાસ વધુ ચઢિયાતી છે.

7.8 નિદર્શનની મર્યાદાઓ (Limitation of sampling) :

1. નિદર્શ તપાસનું આયોજન અને અમલ ખૂબ જ કાળજીપૂર્વક કરવામાં ન આવે તો મેળવેલાં પરિણામો અચોક્કસ અને ગેરમાર્ગે દોરનારાં હોય છે.

2. ઘણીવાર નિદર્શન યોજના એટલી બધી ગુંચવણ ભરેલી હોય છે કે જેથી તેમાં સમષ્ટિ તપાસ કરતાં પણ વધુ સમય, શક્તિ અને નાણાંની જરૂર પડે છે.

3. સામાન્ય રીતે નિદર્શનમાં નિષ્ણાત વ્યક્તિઓની સેવાની જરૂર પડે છે, અને તેથી લાયકાત ધરાવતી અને અનુભવી વ્યક્તિઓ મદદ વિના મેળવેલી માહિતી યોગ્ય અને વિશ્વાસપાત્ર હોતી નથી.

4. સંશોધનક્ષેત્રના દરેકે દરેક એકમ વિશે માહિતી મેળવવી હોય તો નિદર્શ તપાસને બદલે સમષ્ટિ તપાસ જરૂરી છે.

7.9 પુરવણી સહિત અને પુરવણી રહિત નિદર્શન (Sampling with replacement and without replacement) :

સમષ્ટિમાંથી નિદર્શની પસંદગી એક એકમ પછી બીજો એકમ પસંદ કરીને થાય છે. સંભાવના નિદર્શમાં સમષ્ટિમાંથી નિદર્શના એકમ પસંદ કરવાની ક્રિયાને ડ્રો (સમષ્ટિમાંથી એકમ લેવો) કહે છે. પ્રત્યેક ડ્રો વખતે નિદર્શના એકમની પસંદગી (૧) આગળના ડ્રોમાં પસંદ થયેલો એકમ સમષ્ટિમાં પાછો મૂકીને અથવા (૨) આગળના ડ્રો માં પસંદ થયેલો એકમ સમષ્ટિમાં પાછો નહિ મૂકીને કરી શકાય. આમ, નિદર્શ લેવાની પદ્ધતિ બે ભાગમાં વહેંચાય છે.

7.9.1 પુરવણી સહિત નિદર્શન :

સમષ્ટિના એકમોમાંથી વારાફરતી એક એક એકમ યદચ્છ રીતે લઈ તેના ગુણદોષ તપાસી તેને ફરી સમષ્ટિમાં પાછો મૂકવામાં આવે છે. એટલે કે સમષ્ટિમાં એક એકમ ડ્રોથી (યદચ્છ

રીતે) લઈ તેના ગુણદોષ નોંધી તેને ફરી સમષ્ટિમાં મૂક્યા પછી બીજા એકમની પસંદગી ડ્રોથી કરીએ તો આ પદ્ધતિને પુરવણી સહિત નિદર્શન અથવા પ્રતિસ્થાપના સહિત નિદર્શની પદ્ધતિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. આ પ્રકારના નિદર્શમાં એક જ એકમ એક થી વધુ વાર આવી શકે છે.

અહી, સમષ્ટિના Nએકમોમાંથી નિદર્શના nએકમોની પસંદગીના કુલ પ્રકાર કે નિદર્શોની સંખ્યા $m = n^2$થાય છે. જેમ કે સમષ્ટિના ૫ એકમોમાંથી ૨ એકમોનો નિદર્શ લેવો હોય તો આવા નિદર્શોની સંખ્યા $m = 5^2 = 25$ થાય, જેમ કે એક બોક્સમાં ત્રણ પ્રકારના દડાઓ A, Bઅને Cછે. તેમાંથી બે દડાઓ પુરવણી સહિતની રીતે લેવાના હોય, તો નિદર્શના બે એકમોની પસંદગીના પ્રકારો $m = 3^2 = 9$થાય આ નિદર્શોની યાદી નીચે મુજબ છે. AA, AB,AC, BA, BB, BC, CA, CBઅને CC.

7.9.2 પુરવણી રહિત નિદર્શન:સમષ્ટિમાંથી એક પછી એક એકમ લઈ તેના ગુણદોષ નોંધી તેને સમષ્ટિમાં પાછો નમૂકતાં બાકી રહેલા સમષ્ટિના (N-1)એકમોમાંથી બીજા એકમની યદચ્છ રીતે પસંદગી કરવામાંઆવે છે. આથી પસંદ કરેલા એકમો પાછા ન મૂકતાં બાકીના એક મોમાંથી એક પછી એક એકમપસંદ કરવામાં આવે છે. આ પ્રકારના નિદર્શમાં એક જ એકમ, એક થી વધુ વાર આવી શકતોનથી અર્થાત્ સમષ્ટિના દરેક એકમને નિદર્શમાં પસંદ થવાની માત્ર એક જ તક મળે છે. આ રીતેનિદર્શ લેવાની રીતને પુરવણી રહિત નિદર્શન અથવા પ્રતિસ્થાપન રહિત નિદર્શન કહેવામાંઆવે છે.જો સમષ્ટિમાં Nએકમો હોય અને તેમાંથી nએક મોનો નિદર્શ પુરવણી રહિત રીતે પસંદ
કરવો હોય તો એકમોની પસંદગીના કુલ પ્રકારો કે નિદર્શોની સંખ્યા $m = N_{C_n}$ થાય છે. અહીં

$N_{C_n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$સૂત્ર થશે.

જો સમષ્ટિના ૫ એકમોમાંથી ૨ એકમોનો નિદર્શ પુરવણી રહિત રીતે લેવામાં આવે તો નિદર્શોની સંખ્યા $m = 5_{C_2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{2}\times1\times\cancel{3!}} = 10$થાય. જેમ કે ઉપરના ઉદાહરણમાં ત્રણ પ્રકારના દડામાંથી બે દડા પુરવણી રહિત નિદર્શોની સંખ્યા $m = 3_{C_2} = \frac{3\times2}{2\times1} = 3$થાય. આ નિદર્શોની યાદી AB, ACઅને BCછે.

7.10 નિદર્શન પદ્ધતિઓ (Sampling Techniques) :

સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ પસંદ કરવાની અનેક આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓ છે, તેને નિદર્શન પદ્ધતિઓ કહેવામાં આવે છે. જ્યારે સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ પસંદ કરવાનો હોય ત્યારે સામાન્ય રીતે કઈ પદ્ધતિથી નિદર્શ લેવો જોઈએ તે પ્રશ્ન થાય છે. સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ લેવા માટે માહિતીનો પ્રકાર અને તપાસનો હેતુ ને સુસંગત હોય તેવી પદ્ધતિની પસંદગી કરવી જોઈએ. નિદર્શન પદ્ધતિઓને સામાન્ય રીતે બે મુખ્ય વિભાગોમાં વહેંચી શકાય છે. (1)બિન સંભાવના નિદર્શન પદ્ધતિઓ (2) સંભાવના નિદર્શ પદ્ધતિઓ.

"બિન સંભાવના નિદર્શન પદ્ધતિમાં સમષ્ટિના દરેક એકમને નિદર્શમાં પ્રવેશવાની સમાન તક મળતી નથી. જ્યારે સંભાવના નિદર્શન પદ્ધતિમાં સમષ્ટિના દરેક એકમને નિદર્શમાં પ્રવેશવાની સમાન (સરખી) તક મળે છે." બિન સંભાવના આધારિત પદ્ધતિઓ સામાન્ય રીતે

વ્યક્તિ કે વસ્તુલક્ષી (Subjective) હોય છે, જ્યારે સંભાવના નિદર્શન પદ્ધતિઓ હેતુલક્ષી (Objective)હોય છે. વ્યવહારમાં મોટે ભાગે સંભાવના આધારિત પદ્ધતિઓનો જ ઉપયોગ થાય છે. છતાં ક્યારેક બિન સંભાવના આધારિત પદ્ધતિઓ અને ક્યારેક બંને પ્રકારની પદ્ધતિઓનો સમન્વયનો પણ ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

7.10.1 બિન સંભાવના નિદર્શન પદ્ધતિઓ (Non-Probability sampling techniques):

સુવિધાનુસાર અથવા આકસ્મિક નિદર્શન (Convenience or Accidental Sampling) :

આ પદ્ધતિમાં સંશોધક તેની અનુકૂળતા પ્રમાણે સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ પસંદ કરે છે. સંશોધક એવા એકમોને નિદર્શ તરીકે પસંદ કરે છે કે જે સહેલાઈથી પ્રપ્ય હોય, નજીક સ્થળે ઉપલબ્ધ હોય અથવા એકમો સર્વેક્ષણમાં ભાગ લેવા ઈચ્છતા હોય, તેવી પદ્ધતિ સુવિધાનુસાર નિદર્શન પદ્ધતિ કહે છે. દા.ત. સંશોધક ગુજરાત યુનિવર્સિટીના વિદ્યાર્થીઓની આર્થિક સ્થિતિનો અભ્યાસ કરવા માગે છે, તો તે નજીકમાં જ્યાં વિદ્યાર્થીઓ ઉપલબ્ધ હોય ત્યાંથી નિદર્શ લે છે. જેમ કે, લાઈબ્રેરી કેન્ટિન, રસ્તામાં આકસ્મિક મળતાં વિદ્યાર્થીઓ વગેરે. તેવી જ રીતે ન્યૂઝ ચેનલ્સના ખબરપત્રીઓ રસ્તે આવતાં જતાં કે કોઈ એક સ્થળ ઉપર એકઠા થયેલા લોકો પાસેથી માહિતી એકત્ર કરે છે.

લાભો :

1. સમષ્ટિના એકમોની યાદી બનાવવી પડતી નથી.
2. નિદર્શ સહેલાઈથી ઉપલબ્ધ બને છે.
3. ઝડપથી સંશોધન પૂર્ણ કરી શકાય છે.
4. સામાન્ય રીતે કોઈ પણ સર્વેક્ષણ યોજનાની અજમાયશી ધોરણે ચકાસણી કરવાની હોય ત્યારે

ગેરલાભો (મર્યાદાઓ) :

1. નિદર્શ દ્વારા મળતી માહિતી ઘણીવાર પૂર્વગ્રહ અને પક્ષપાત પૂર્ણ હોય છે.
2. સમષ્ટિના ઘણા એકમો એવા હોય શકે છે કે જે નિદર્શના એકમો કરતાં જુદા ગુણધર્મો ધરાવતા હોય તેથી તારણો સાચું ચિત્ર રજૂ કરતાં નથી.
3. સમષ્ટિના દરેક એકમને નિદર્શમાં પ્રવેશવાની સમાન તક મળતી નથી.

(B) હેતુલક્ષી કે નિર્ણાયાત્મક નિદર્શન (Purposive or Judgement Sampling) :

આ પદ્ધતિમાં સંશોધક કોઈ ચોક્કસ હેતુને નજર સમક્ષ રાખીને સમષ્ટિમાંથી અમુક એકમો ઈચ્છા, સમજણ અને વિવેક શક્તિ મુજબ પસંદ કરે ત્યારે તેવી નિદર્શનને હેતુલક્ષી કે જજમેન્ટ નિદર્શન કરે છે. દા.ત. જુદી જુદી યુનિવર્સિટીઓમાં કુલપતિ, ઉપકુલપતિની પસંદગી, રાજ્ય સભામાંરાષ્ટ્રપતિ દ્વારા થતી સભ્યોની પસંદગી, યુનિવર્સિટીઓમાં સરકાર દ્વારા સિન્ડિકેટ સભ્યોની પસંદગી વગેરે.

લાભો :

1. નિદર્શ પસંદ કરનાર સંશોધક પોતાના ધ્યેયને અનુરૂપ નિદર્શની પસંદગી કરી શકે છે.
2. તપાસનું ક્ષેત્ર નાનું હોય ત્યારે આ રીતનો ઉપયોગ કરીને વધુ ઝડપથી નિદર્શની પસંદગી થઈ શકે છે.

3. આ પદ્ધતિમાં સંશોધક ખૂબ જ અનુભવી અને કાર્યદક્ષ હોય તો ટૂંક સમય અને ઓછા ખર્ચે તારણો મેળવી શકે છે.

4. સંશોધક પોતાની ઈચ્છા પ્રમાણે પરિણામો પ્રાપ્ત કરી શકે છે.

ગેરલાભ :

1. નિદર્શની પસંદગીમાં પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાત થતો જોવા મળે છે.
2. સમષ્ટિના બધા જ ગુણધર્મોનું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતો નમૂનો મળતો નથી.
3. આ પદ્ધતિ દ્વારા કરવામાં આવેલા અનુમાનને આંકડાશાસ્ત્રમાં ઓછુ મહત્ત્વ હોય છે.
4. જો તપાસનું ક્ષેત્ર વિશાળ હોય ત્યારે આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો હિતાવહ નથી.
5. સંશોધકને પોતાની નિર્ણય શક્તિ પર વધુ ભરોસો (Over Confident)હોય ત્યારે કેટલાંક ખોટા નિદર્શ પસંદ થવાની શક્યતા રહે છે.

(C) નિયત હિસ્સા નિદર્શન પદ્ધતિ (Quota Sampling):

જ્યારે સમષ્ટિને તેના લક્ષણોના આધારે જુદા જુદા વિભાગોમાં વહેંચી શકાય એવી હોય ત્યારે દરેક વિભાગમાંથી સંશોધક દ્વારા પોતાની ઈચ્છા અનુસાર યોગ્ય પ્રમાણમાં એકમો પસંદ કરવામાં આવે છે, આવી રીતને નિયત હિસ્સા નિદર્શન પદ્ધતિ કહે છે. દા.ત. સમષ્ટિને નીચી આવક, મધ્યમ આવક અને ઊંચી આવક (જે સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત કરેલ હોય) ત્યારે દરેક આવક ધોરણવાળી સમષ્ટિમાંથી અમુક-અમુક સંખ્યામાં એકમોની નિદર્શમાં સમાવિષ્ટ થવા જોઈએ એવી શરતને આધીન નિદર્શની પસંદગી કરવી, વિવિધ કંપનીઓનાં બાઈકના લક્ષણો જાણવા માટે દરેક કંપનીના દસ-દસ બાઈક્સનું સર્વેક્ષણ કરવાનું હોય વગેરે.

લાભો :

1. આ પદ્ધતિમાં સમષ્ટિને તેના જુદા જુદા ગુણધર્મો મુજબ વિભાગો પાડી નિદર્શ પસંદ થતો હોવાથી નિદર્શ દરેક ગુણધર્મનું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતો હોય છે.
2. જ્યારે સમષ્ટિના એકમોને જુદા જુદા વિભાગોમાં સરળતાથી વહેંચી શકાતી હોય ત્યારે આ રીત ઉપયોગી છે.
3. જ્યારે સંપૂર્ણ નિદર્શ યાદી ઉપલબ્ધ ન હોય ત્યારે પણ આ પદ્ધતિ વાપરી શકાય છે.

ગેરલાભો :

1. આ પદ્ધતિમાં પણ નિદર્શ પસંદગીમાં પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાત રહેવાની શક્યતા રહેલી હોય છે.
2. સમષ્ટિને જુદા જુદા વિભાગોમાં વહેંચતી વખતે કાળજી રાખવી પડે છે. દરેક વિભાગમાં રહેલા એકમો સમાન ગુણધર્મો ધરાવતા હોવા જોઈએ નહિતર મળતા પરિણામો વિશ્વાસપાત્ર હોતાં નથી.
3. સમષ્ટિના દરેક એકમને નિદર્શમાં પ્રવેશવાની સમાન તક મળતી નથી.

(D) સ્નોબોલ નિદર્શન (Snowball Sampling) :

આ પદ્ધતિમાં સૌ પ્રથમ સુવિધા અનુસાર અમુક નિદર્શ એકમ પસંદ કરવામાં આવે છે, આ નિદર્શ એકમના ગુણધર્મનો અભ્યાસ કર્યા બાદ તેમના દ્વારા બીજા નિદર્શ એકમોની પસંદગી કરવામાં આવે છે. ફરીથી જે નિદર્શ એકમો પસંદ થયેલ છે તેમના અભિપ્રાય કે તેમના દ્વારા

પણ વધુ નિદર્શ એકમો પસંદ થાય છે. આમ આ પદ્ધતિમાં એકમોની સાંકળ રચાય છે. જેમ કે બરફમાં ગબડતા દડાની જેમ કદમાં આપો આપ વધતી જતી હરકોઈ વસ્તુઓ. આ રીતને સ્નોબોલ નિદર્શન પદ્ધતિ કહે છે. આમ આ રીતમાં પ્રથમ પછીના પસંદ થતા બધા જ નિદર્શ એકમો અગાઉના એકમો ઉપર આધાર રાખે છે. દા.ત. અમુક કંપનીઓ તેમની વસ્તુઓના વેચાણ માટે પ્રથમ અમુક સભ્યો બનાવે છે પછી તે સભ્યો બીજા સભ્યોને સામેલ કરે છે, આ રીતે સાંકળ આગળ વધતી જ જાય છે, કૉલેજના અમુક પ્રકારના વિદ્યાર્થીઓના અભ્યાસ માટે પ્રથમ જે હાજર હોય તે વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ એ વિદ્યાર્થીઓને બીજા વિદ્યાર્થીઓને નિદર્શમાં સામેલ કરવાની જવાબદારી સોંપવામાં આવે છે વગેરે.

લાભો :

1. તપાસ હેઠળ આવરી લેવાતા એકમો ખૂબ જ ઓછા કે છૂટા-છવાયા હોય ત્યારે આ રીત અનુકૂળ રહે છે.
2. આ પદ્ધતિથી મળતો નિદર્શ ઓછો ખર્ચાળ છે.
3. આ રીતમાં નિદર્શ વિચરણની કિંમત પણ નાની હોય છે.
4. સંશોધકને તેના સંશોધન અનુરૂપ પ્રમાણસર નિદર્શ મળી રહે છે.

ગેરલાભો :

1. આ રીતમાં બીજા પસંદ થતા નિદર્શ એ અગાઉ પસંદ થયેલ નિદર્શના પૂર્વગ્રહ ઉપર આધાર રાખે છે, તેથી નિદર્શ એકમ પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાતી રહેવાની શક્યતા રહેલી છે.
2. આ નિદર્શ દ્વારા મેળવેલ માહિતીની વિશ્વસનીયતા ઓછી હોય છે.
3. નિદર્શમાં સમષ્ટિના દરેક એકમને સરખું પ્રતિનિધિત્વ મળતું નથી.

આ ઉપરાંત બિન સંભાવના નિદર્શન પદ્ધતિઓમાં

E. વિશાળ નિદર્શન (Extensive Sampling)

F. વિસ્તાર નિદર્શન (Zonal or area Sampling)

G આનુક્રમિક નિદર્શન (Sequential Sampling)

જેવી પદ્ધતિઓનો પણ સમાવેશ થાય છે.

14.10.2સંભાવના નિદર્શન પદ્ધતિઓ :

A. સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન(Simple Random Sampling)

B. સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન(Stratified Random Sampling)

C. વ્યવસ્થિત પદિક નિદર્શન(Systematic Sampling)

D. ગુચ્છ કે ઝૂમખાં નિદર્શન(Clurter Sampling)

E. બહુ તબક્કાવાર નિદર્શન (Multistage Sampling)

આપણે યુનિટ નંબર 15માં સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ પસંદ કરવાતી ઉપરથી ત્રણ પ્રચલિત રીતોનો અભ્યાસ કરીશું.

7.11 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

(ક) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.

1. સમષ્ટિ એટલે શું ?
2. સાન્ત અને અનંત સમષ્ટિ ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.
3. પદ સમજાવો : નિદર્શ, નિદર્શન, નિદર્શ કદ, સમષ્ટિ તપાસ, નિદર્શ તપાસ.
4. સમષ્ટિ તપાસ અને નિદર્શ તપાસ એટલે શું ? તેના તફાવત જણાવો.
5. સારા નિદર્શના લક્ષણો જણાવો.
6. નિદર્શ કદ એટલે શું ? નિદર્શ કદ મેળવતી વખતે ધ્યાનમાં રાખવામાં આવતા મુદ્દાઓ જણાવો.
7. બિન સંભાવના નિદર્શન પદ્ધતિઓનું ટૂંકમાં વર્ણન કરો.
8. પૂરવણી સહિત અને પુરવણી રહિત નિદર્શન એટલે શું ?
9. ''આર્થિક અને વ્યવહારિક એમ બંને દૃષ્ટિએ સમષ્ટિ તપાસ કરતાં નિદર્શ તપાસ વધુ ચઢિયાતી છે'' આ વિધાન નિદર્શ તપાસની ઉપયોગીતાના સંદર્ભે ચર્ચો.
10. નિદર્શનની મર્યાદાઓ લખો.
11. સુવિધાનુસાર નિદર્શન પદ્ધતિ સમજાવો.
12. હેતુલક્ષી નિદર્શન પદ્ધતિ એટલે શું ? તેના લાભ્મા લાભ જણાવો.
13. નિયત હિસ્સા નિદર્શન પદ્ધતિ એટલે શું ?
14. સ્નોબોલ નિદર્શન પદ્ધતિ પર ટૂંકનોંધ લખો.
15. સંભાવના નિદર્ર્ન પદ્ધતિ કઈ કઈ છે ?
16. નિદર્શન એટલે શું ? નિદર્શનની જરૂરિયાત શા માટે પડે છે ?
17. ''આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓના લાભ નિદર્શ તપાસ પદ્ધતિને જ મળે છે, નહિ કે સમષ્ટિ તપાસ પદ્ધતિને'' આ વિધાનની ચર્ચા કરો.

(ખ) ટૂંકનોધ લખો.

- નિદર્શ અને નિદર્શનના ફાયદા
- નિદર્શનની મર્યાદા
- સભાવના નિદર્શન
- બીન સંભાવના નિદર્શન

(ગ) યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

1. 10 એકમોની સાન્ત સમષ્ટિમાંથી 3 એકમોના પુરવણી રહિત શક્ય યાદચ્છિક નિદર્શોની સંખ્યા શોધો.

   (A) 30 (B) 45

   (C)120 (D)1000

2. નીચેનામાંથી કઈ સંભાવના નિદર્શન પદ્ધતિ છે ?

(A) હેતુલક્ષી નિદર્શન (B) નિયત હિસ્સા નિદર્શન

(C) સ્નોબોલ નિદર્શન (D) પદિક નિદર્શન

3. નીચેનામાંથી કઈ નિદર્શન પદ્ધતિમાં સમષ્ટિમાંથી યદચ્છ રીતે નિદર્શની પસંદગી થતી નથી ?

(A) પદિક નિદર્શન (B) નિયત હિસ્સા નિદર્શન

(C) સરળ યદચ્છ નિદર્શન (D) સ્તરિત યદચ્છ નિદર્શન

4. 6એકમોની સાન્ત સમષ્ટિમાંથી 3 એકમોના પુરવણી સહિત શક્ય યદચ્છિક નિદર્શોની સંખ્યા શોધો.

(A) 216 (B) 36

(C) 18 (D) 15

5. નીચેનામાંથી કઈ સંભાવના નિદર્શન પદ્ધતિ નથી ?

(A) નિર્ણાયાત્મક નિદર્શન (B) ગુચ્છ નિદર્શન

(C) પદિક નિદર્શન (D) સરળ યદચ્છ નિદર્શન

6. સંશોધકશ્રી એચ. કે કોમર્સ કૉલેજના Sem : 3નાપાંચ વર્ગના(ડિવીઝનના) વિદ્યાર્થીઓમાં સ્વઅધ્યયન કરનાર વિદ્યાર્થીઓના અભ્યાસ કરવા માટે દરેક વર્ગમાંથી 25 વ્યક્તિઓની પૂછપરછ કરે છે, તો નીચેનામાંથી કઈ પદ્ધતિ આ અભ્યાસને મળતી આવે છે ?

(A) નિયત હિસ્સા નિદર્શન (B) નિર્ણયાત્મક નિદર્શન

(C) પદિક નિદર્શન (D) સરળ યદચ્છ નિદર્શન

7. એક સંશોધક કોઈ મોટા ભૌગોલિક વિસ્તારમાં વિકલાંગ વ્યક્તિઓની વ્યવસાયિક મહત્વકાંક્ષાઓનો અભ્યાસ કરવા માગે છે, તો તેણે કઈ નિદર્શન પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ.

(A) સ્નોબોલ નિદર્શન (B) હેતુલક્ષી નિદર્શન

(C) આકસ્મિક નિદર્શન (D) સ્તરિત યદચ્છ નિદર્શન

8. કોઈ એક સંશોધક એવા વ્યક્તિઓને તેના સંશોધનમાં લેવા માંગે છે, કે જે તૈયાર હોય અને સરળતાથી પ્રાપ્ય હોય તેવી નિદર્શન પદ્ધતિ કઈ છે ?

(A) સ્નોબોલ નિદર્શન (B) હેતુલક્ષી નિદર્શન

(C) આકસ્મિક નિદર્શન (D) સ્તરિત યદચ્છ નિદર્શન

9. એક સંશોધક ભૂકંપગ્રસ્ત વ્યક્તિઓનો અભ્યાસ કરવા માંગે છે, તો નીચેનામાંથી કઈ નિદર્શન પદ્ધતિ તેના માટે યોગ્ય હશે ?

(A) સુવિધાનુસાર નિદર્શન (B) ગુચ્છ નિદર્શન

(C) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન (D) હેતુલક્ષી નિદર્શન

10. 7 કદની એક સાન્ત સમષ્ટિમાંથી ૨ કદના યાદચ્છિક નિદર્શ પુરવણી રહિત નિદર્શના પ્રકાર mશોધો ?

(A) 21 (B) 49

(C)14 (D)7

11. સમષ્ટિના દરેક એકમનાં નિદર્શન પસંદ થવાની સંભાવના સરખી ન હોય તો તેને ________કહે છે.

(A) સંભાવના નિદર્શન (B) પદિક નિદર્શન

(C) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન (D) બિન સંભાવના નિદર્શન

12. ૯ એકમોની સાન્ત સમષ્ટિમાંથી ૨ એકમોના પુરવણી સહિત શક્ય યાદચ્છિક નિદર્શો કેટલા લઈ શકાય છે ?

(A) 18 (B) 81

(C) 36 (D) 63

13. કઈ નિદર્શ પદ્ધતિમાં નિદર્શ એકમના અભિપ્રાયને આધારે બીજા નિદર્શની પસંદગી થાય છે.

(A) હેતુલક્ષી (B) નિરળ હિસ્સા

(C) સ્નોબોલ (D) આકસ્મિક

14. સામાન્યરીતે સમષ્ટિના એકમો નાશવંત હોય તો કઈ તપાસ કરવામાં આવે છે.

(A) સમષ્ટિ તપાસ (B) નિદર્શ તપાસ

(C) હેતુલક્ષી તપાસ (D) આપેલામાંથી એકપણ નહીં

જવાબો :

(1) C	(2) D	(3) B	(4) A	(5) A	(6) A
(7) B	(8) C	(9) D	(10) A	(11) D	(12) B
(13) C	(14) B				

14.12 ચાવીરૂપ શબ્દો

સમષ્ટિ : વ્યાખ્યાયિત એકમોનો સમૂહ.

નિદર્શ : વ્યાખ્યાયિત એકમોના સમૂહ માથી પસદ કરેલા એકમો અથવા નમૂનો.

નિદર્શન : સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ લેવાની રીત.

પુરવણી સહિત : સમષ્ટિમાંથી એક નિદર્શ લઈ તેની નોંધ કરી ફરીથી સમષ્ટિમા મૂકવામાં આવે તેને.

પુરવણી રહિત : સમષ્ટિમાંથી અકે નિદર્શ લઇ તેની નોંધ કરી ફરીથી સમષ્ટિમા મુકવામા ન આવે તેને.

સંભાવના નિદર્શન : સંભાવનાના સિદ્ધાંતને આધારે નિદર્શ લેવામાં આવે.

બિન સંભાવના નિદર્શન : નિદર્શ લેવામાં સંભાવનાના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ ન થતો હોય.

ગચ્છ	:	ઝુમખો
સ્નોબોલ	:	બરફનો ગોળો
નિયત હિસ્સા	:	ગુણધર્મોના આધારે પાડેલા ભાગો.

7.13 સંદર્ભગ્રંથ

1. નિદર્શન પદ્ધતિઓ અને પ્રાયોગિક અભિકલ્પનાઓ લેખક : ડૉ. એસ. એસ. શાહ, યુનિવર્સિટી ગ્રંથ નિર્માણ બોર્ડ, ગુજરાત રાજ્ય.

2. ધંધાકીય સંશોધન પદ્ધતિઓ, લેખક ડૉ. મહેન્દ્ર મૈસુરીયા, ડૉ. દિનેશ એમ. પટેલ, અક્ષર પબ્લિકેશન, અમદાવાદ.

એકમ-8 નિદર્શનના પ્રકારો

રૂપરેખા

8.0 ઉદ્દેશો : • સંભાવના નિદર્શન પદ્ધતિઓનો વિગતે ખ્યાલ મેળવવો.

- આ પદ્ધતિઓની વ્યવહારમાં ઉપયોગિતા સમજવી.
- સમષ્ટિ સમાંગ કે વિષમાંગ હોય તે તેના અંગે નિર્ણય લઈ યોગ્ય પદ્ધતિની પસંદગી અંગે સમજ મેળવવી.
- નિદર્શોની સંખ્યાની યાદી બનાવવા માટેની સમજ કેળવવી.
- આંકડાશાસ્ત્રીય માણોનો ઉપયોગ કરી પરિણામો ચકાસવા.
- જુદી જુદી નિદર્શન પદ્ધતિઓની સમજથી સમષ્ટિ વિશે સચોટ અને વિશ્વસનીય અનુમાનો મેળવી શકશો.

8.1 પ્રાસ્તાવિક :

જે નિદર્શન પદ્ધતિમાં સમષ્ટિના પ્રત્યેક એકમ માટે નિદર્શમાં પસંદ થવાની પૂર્વનિર્ધારિત ચોક્કસ સંભાવના નિશ્ચિત હોય તો તે નિદર્શન પદ્ધતિને સંભાવના આધારિત નિદર્શન કહે છે. નિદર્શ તપાસ માટે મોટેભાગે વ્યવહારમાં આવી નિદર્શન પદ્ધતિઓનો જ ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જેમ કે જ્યારે સમષ્ટિના એકમો સમાન ગુણધર્મવાળા હોય ત્યારે સરળ યાદચ્છિક દ્વારા જ્યારે સમષ્ટિના એકમો સમાન ગુણધર્મવાળા ન હોય ત્યારે સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન દ્વારા અને સમષ્ટિના એકમોની માહિતીની સંપૂર્ણયાદી તૈયાર હોય ત્યારે પદિક નિદર્શનના ઉપયોગ દ્વારા પ્રતિનિરૂપ નિદર્શ પસંદ કરવામાં આવે છે અને સમષ્ટિઅંગે વધારે સચોટ વિશ્વસનીય પરિણામોનું અનુમાન મેળવી શકાય છે.

નિદર્શનો મુખ્ય ઉદ્દેશ સમષ્ટિમાંથી પસંદ કરેલ નિદર્શના અભ્યાસ પરથી સમષ્ટિની ખાસિયતો વિશે તારણો મેળવવાનો હોય છે. નિદર્શ એકમો પરથી મળતા સંખ્યાત્મક પરિણામોના આધારે મેળવેલ વિવિધ માપ જેવા કે મધ્યક, મધ્યસ્થ, પ્રમાણિત વિચલન, વિચરણ, વિષમતાંક વગેરેને સંખ્યાત્મક ચલના નિદર્શ આગણકો (Sample statistic) કહે છે. જ્યારે સમષ્ટિ માટેનાં આ બધાં જ માપોને પ્રચલો (Paramenters) કહેવામાં આવે છે. નિદર્શન પદ્ધતિમાં બે અંગો હોઈ છે. (1) નિદર્શ પસંદગીની પ્રક્રિયા (2) આગણન પ્રક્રિયા. નિદર્શ પસંદગીની પ્રક્રિયા સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ પસંદગીના નિયમો અને તેમની સંભાવનાને નિર્દેશ કહે છે, જ્યારે આગણન પ્રક્રિયા નિદર્શના એકમોમાંથી મેળવેલ માહિતી પરથી પ્રાચલોના આગણકો મેળવવાની આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિનો નિર્દેશ કરે છે.

8.2 સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન (Simple Random Sampling) :

આ પદ્ધતિમાં સમષ્ટિના પ્રત્યેક એકમને નિદર્શમાં પ્રવેશવાની કે પસંદ થવાની સમાન તક (equal chance)આપવામાં આવે છે. સમાનતક આપીને મેળવવામાં આવતા નિદર્શને યાદચ્છિક નિદર્શ અથવા સરળ યાદચ્છિક નિદર્શ કહેવાય છે. એકમોની પસંદગી સંપૂર્ણરીતે સંભાવના પર આધારિત હોય છે તેથી યદચ્છ નિદર્શને સંભાવના નિદર્શ પણ કહેવામાં આવે છે. આ નિદર્શ પરથી સમષ્ટિના ગુણધર્મોપારખવાની પદ્ધતિ કે સમષ્ટિ વિશે તારણો મેળવવાની પદ્ધતિને સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ કહે છે. દા.ત. શરીરના લોહીના ગુણધર્મો વિશે અનુમાન કરવા માટે શરીરમાંના લોહીના બે-ચાર ટીંપા એ યદચ્છ નિદર્શ છે, અને તેની તપાસ કરી અનુમાનો કરવાની પદ્ધતિ સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ છે. આ પદ્ધતિમાં કોઈપણ એકમ પરત્વે પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાતને કોઈ સ્થાન હોતું નથી, દરેક એકમની પસંદગી નિરપેક્ષ કે સ્વતંત્ર રીતે કરવામાં આવે છે. એટલે કે એક એકમની પસંદગી કે નાપસંદગી બીજા એકમની પસંદગી કે નાપસંદગી પર આધાર રાખતી નથી. લગભગ સમાન ગુણધર્મો ધરાવતી સમષ્ટિમાંથી

લીધેલો યદચ્છ નિદર્શ આ પદ્ધતિ વડે ઉત્તમ પરિણામો આપે છે. આ પદ્ધતિમાં નિદર્શ કદ સમષ્ટિના કદના પ્રમાણમાં લેવામાં આવે એ બાબતનું ધ્યાન રાખવામાં આવે છે.

8.2.1 સરળ યાદચ્છિક નિદર્શ લેવાની રીતો (Methods of drawing random sample) :

સરળ યાદચ્છિક નિદર્શ પસંદ કરવાની ઘણી બધી રીતો પૈકી મુખ્ય ત્રણ રીતોની અહીં આપણે ચર્ચા કરીશું.

A. લોટરીની રીત (Lottery Method) :

આ રીતમાં સમષ્ટિના પ્રત્યેક એકમને પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ક્રમ કે નંબર અથવા નામ આપવામાં આવે છે. ત્યારબાદ દરેક નંબર અથવા નામની એક ચિઠ્ઠી બનાવવામાં આવે છે. આ રીતે બનાવેલી ચિઠ્ઠીઓનો રંગ, આકાર, કદ વગેરે સમાન રાખવામાં આવે છે. તેથી ચિઠ્ઠીઓ પસંદ કરતી વખતે પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાતને અવકાશ રહે નહીં. આ બધી ચિઠ્ઠીઓને સારી રીતે એક પાત્રમાં ભેળવવામાં આવે છે. તેમાંથી જેટલાં એકમોનો નિદર્શ પસંદ કરવાનો હોય તેટલી ચિઠ્ઠીઓ હાથથી અથવા યંત્રના ઉપયોગથી લેવામાં આવે છે, આ પસંદ થયેલી ચિઠ્ઠીઓમાંના નામ અથવા ક્રમવાળા એકમોથી યાદચ્છિક નિદર્શની રચના થાય છે. આ પ્રકારે નિદર્શ પસંદ કરવાની રીતને લોટરીની રીત કહેવામાં આવે છે.

જ્યારે સમષ્ટિ વિશાળ હોય ત્યારે આ રીતથી સરળ યાદચ્છિક નિદર્શ પસંદ કરવાનું મુશ્કેલ અને કંટાળાજનક બને છે.

B. યાદચ્છિક સંખ્યાઓના કોષ્ટકની રીત (Method of random numbers table) :

સૌ પ્રથમ આ રીતમાં સમષ્ટિના N એકમોની યાદી તૈયાર કરી, તેમને 1, 2, 3, 4, ….. N એ પ્રમાણે ક્રમાંકો આપવામાં આવે છે. ત્યારબાદ યાદચ્છિક સંખ્યાઓનો કોઈ એક કોઠો લેવામાં આવે છે. જો સંખ્યા N માં r અંક હોય તો યાદચ્છિક સંખ્યાઓના કોષ્ટકમાંથી કોઈપણ એક પાનું લઈ, તે પાના પર r અંકવાળું કોલમ લેવામાં આવે છે. આ કોલમમાંથી 1 થી N સુધી આવેલી r અંકવાળી n ભિન્ન સંખ્યાઓ પસંદ કરવામાં આવે છે. જે એકમોના ક્રમાંકો આ n સંખ્યાઓ છે, તે એકમોની આ નિદર્શમાં પસંદગી થાય છે.

યાદચ્છિક સંખ્યાઓના જુદા જુદા પ્રમાણિત કોષ્ટકો પ્રાપ્ય છે. તે પૈકી નીચેના કોષ્ટકો પ્રચલિત છે.

1. **એલ. એચ. સી. ટિપેટનાં યાદચ્છિક સંખ્યાઓના કોષ્ટક :** યાદચ્છિક સંખ્યાઓનાં કોષ્ટકો સૌ પ્રથમ ઈ.સ. 1927માં ટિપેટે તૈયાર કર્યા હતા. આ કોષ્ટકમાં 41600 યદચ્છિક સંખ્યાઓને ચાર આંકડાઓના 10400 સમૂહોમાં ગોઠવવામાં આવ્યા છે.

2. **ફિશર અને યેટસનાં યાદચ્છિક સંખ્યાઓના કોષ્ટક :** આ કોષ્ટકો ઈ.સ. 1938માં ફિશર અને યેટસે 15000 યાદચ્છિક સંખ્યાઓને 10 આંકડાઓમાં 1500 સમૂહોમાં ગોઠવી તૈયાર કર્યા હતા.

3. **કેન્ડાલ અનેસ્મિથનાં યાદચ્છિક સંખ્યાઓનાં કોષ્ટક :** કેન્ડાલ અને સ્મિથે ઈ.સ. 1939 માં 100000 યાદચ્છિક આંકડાઓને ચાર આંકડાઓના 25000 સમૂહોમાં ગોઠવી તૈયાર કર્યા હતા.

4. **રેન્ડ કોર્પોરેશનના યાદચ્છિક સંખ્યાના કોષ્ટક :** અમેરિકાની રેન્ડ કોર્પોરેશન સંસ્થાએ ઈ.સ. 1955 માં 1000000 યાદચ્છિક આંકડાઓને પાંચ આંકડાઓના 200000 સમૂહોમાં ગોઠવી તૈયાર કર્યા હતા.

5. **રાવ મિત્રા અને મથાઈના યાદચ્છિક સંખ્યાઓના કોષ્ટક :** આ કોષ્ટકોમાં 20000 આંકડાઓ આપવામાં આવ્યા છે અને તે 4 આંકડાઓવાળી 5000 સમૂહો વાળી સંખ્યાઓમાં ઈ.સ. 1966માં ગોઠવવામાં આવ્યા છે.

જ્યારે સમષ્ટિમાંથી યાદચ્છિક નિદર્શ લેવાનો હોય ત્યારે ઉપર દર્શાવેલ કોઈપણ કોષ્ટક દર્શાવતી પુસ્તિકાનું કોઈપણ પાનું યાદચ્છિક રીતે ખોલવામાં આવે છે, અને તેમાંથી કોઈપણ હાર અથવા સ્તંભથી શરૂ કરી જે યાદચ્છિક સંખ્યા મળે તે ક્રમનાં એકમો સમષ્ટિના કદ અનુસર પસંદ કરી યાદચ્છિક નિદર્શ લેવામાં આવે છે.

C. કમ્પ્યૂટરના ઉપયોગની રીત :

સરળ યાદચ્છિક નિદર્શ મેળવવામાં આધુનિક યુગમાં હવે કમ્પ્યૂટરનો વ્યાપક ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. અત્યારે ઉપલબ્ધ લગભગ તમામ કમ્પ્યૂટરમાં આવો નિદર્શ મેળવવાની સગવડ મળે છે, જે પ્રોગ્રામ સ્વરૂપે પણ હોય છે. કમ્પ્યૂટરમાં વિન્ડોઝના સ્ટેટેસ્ટીકલ ફંકશન્સમાં રેન્ડ (RAND)કે એવા બીજા નામથી આ સગવડ હોય છે. તેના ઉપયોગથી આવી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ મેળવી શકાય છે.

8.2.2 સરળ યાદચ્છિક નિદર્શના ગુણધર્મો :

1. સરળ યાદચ્છિક નિદર્શમાં સમષ્ટિના નિર્દિષ્ટ કરેલ એકમને કોઈપણ ડ્રો વખતે પસંદ થવા માટેની સંભાવના તે એકમની પ્રથમ ડ્રો વખતે પસંદ થવા માટેની સંભાવનાની બરાબર હોય છે.
2. સરળ યાદચ્છિક નિદર્શનમાં સમષ્ટિના દરેક એકમની નિદર્શમાં પસંદ થવાની સંભાવના સરખી હોય છે.
3. સરળ યાદચ્છિક નિદર્શનમાં nકદવાળા દરેક નિદર્શને પસંદ થવા માટે સરખી સંભાવના હોય છે.

8.2.3 સરળ યાદચ્છિક નિદર્શા ફાયદાઓ (Advantages of Simple random Sampling) :

1. સમષ્ટિના પ્રત્યેક એકમને નિદર્શમાં પસંદ થવાની સરખી તક મળતી હોવાથી પૂર્વગ્રહને સ્થાન નથી.
2. સમષ્ટિના એકમો સમાન ગુણધર્મો ધરાવતા હોય તો યોગ્ય કદનો યાદચ્છિક નિદર્શ સમષ્ટિનું વધુ સારું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવે છે અને વ્યાજબી ચોકસાઈવાળા પરિણામો આપે છે.
3. નિદર્શને આધારે સમષ્ટિ વિશે મેળવાયેલી કિંમતો કેટલી વિશ્વસનીય છે તેની ચકાસણી કરી શકાય છે.
4. નિદર્શમાંથી સમષ્ટિ અંગે મળતાં પરિણામોમાં ભૂલો વિશે પણ ગણતરી થઈ શકે છે.
5. ઓછા ખર્ચે સમષ્ટિ વિશે સચોટ માહિતી મળે છે.

8.2.4 સરળ યાદચ્છિક નિદર્શની મર્યાદાઓ (Limitation of simple random sampling) :

1. જો સમષ્ટિના એકમો અસમાન ગુણધર્મો ધરાવતા હોય તો યાદચ્છિક નિદર્શ સમષ્ટિનું યોગ્ય પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતો નથી. તેથી નિદર્શને આધારે મળતાં પરિણામો વિશ્વસનીય હોતા નથી.

2. સમષ્ટિ વિશાળ હોય ત્યારે યાદચ્છિક નિદર્શની પસંદગીનું કાર્ય મુશ્કેલ અને કંટાળાજનક બને છે.

3. સમષ્ટિના અમુક એકમોની યાદી ગૂમ થયેલી હોય ત્યારે યાદચ્છિક નિદર્શ લેવો મુશ્કેલ બને છે.

4. સમષ્ટિમાં એકમોની સંખ્યા વધારે હોય તો યાદચ્છિક નિદર્શ પસંદ કરવાની પદ્ધતિ વધુ સમય અને ખર્ચાળ બને છે.

8.2.5 કેટલાંક સંકેતો અને પરિણામો (Some notations and results) :ધારો કે કોઈ એક ચલ લક્ષણના અભ્યાસ માટે સમષ્ટિનાં Nઅવલોકનોછે. આ સમષ્ટિમાંથી $Y_1, Y_2, Y_3 \dots \dots Y_N$યાદચ્છિક નિદર્શ લેવામાં આવે છે. નિદર્શના અવલોકનો $y_1, y_2, y_3 \dots \dots y_n$છે.

1. સમષ્ટિ મધ્યક (Population Mean)

$$\bar{Y} = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots Y_N}{N}$$

$$\therefore \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N}$$

2. સમષ્ટિનું વિચરણ (Variance of Population)

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (Y_i - \bar{Y})^2}{N-1}$$

3. નિદર્શનો મધ્યક (Sample Mean)

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots y_n}{n}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

4. નિદર્શનું વિચરણ (Variance of sample)

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

સરળ યાદચ્છિક નિદર્શનના કેટલાંક પરિણામો નીચે મુજબ છે.

પરિણામ - ૧ : નિદર્શ મધ્યક એ સમષ્ટિ મધ્યકનો અનભિનત આગણક છે. એટલે કે સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન માટે નિદર્શ મધ્યકોનો મધ્યક એ સમષ્ટિ મધ્યક જેટલો હોય છે.

$E(\bar{y}] = \bar{Y})$ જ્યાં $E(\bar{y}) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i}{m}$

પરિણામ - ૨ : પુરવણી રહિત સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન માટે નિદર્શ મધ્યકનું વિચરણ નીચે મુજબ છે.

$$V(\bar{y}) = \frac{N-n}{N} , \frac{s^2}{n} \qquad \text{જ્યાં} \qquad v(\bar{y}) = \frac{\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_1 - \bar{Y})^2}{m}$$

પરિણામ - ૩ : પુરવણી રહિત સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન માટે નિદર્શનું વિચરણએ સમષ્ટિ વિચરણનો અનભિનત આગણક છે, એટલે કે

$$E(s^2) = s^2 \qquad \text{જ્યાં} \qquad E(s^2) = \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i^2}{m}$$

8.2.6 ઉદાહરણો

ઉદાહરણ : 1, 5 કદની સમષ્ટિમાં એકમોના ચલ લક્ષણની કિંમતો 5, 7, 11, 15 અને 17 છે. આ સમષ્ટિમાંથી પુરવણી રહિત ૨ કદના બધા જ શક્ય યાદચ્છિક નિદર્શો લઈ નીચેના પરિણામો ચકાસો.

(i) $E(\bar{y}) = \bar{Y}$ (ii) $V(\bar{y}) = \frac{N-n}{N} . \frac{s^2}{n}$ (iii) $E(s^2) = s^2$

ઉકેલ : અહીં N = 5 અને n = 2 છે.

Y_i	$(Y_i - \bar{Y})$	$(Y_i - \bar{Y})^2$
5	- 6	36
7	- 4	16
11	0	0
15	4	16
17	6	36
55	0	104

ગણતરી

અહીં (5 – 11) = - 6

(7 – 11) = - 4

(11 – 11) = 0

(15 – 11) = 4

(17 – 11) = 6

- સમષ્ટિ મધ્યક :

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \bar{Y}_i}{N} = \frac{55}{5} = 11 \text{.....................} 1$$

- સમષ્ટિનું વિચરણ :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_2 - \bar{Y})^2}{N-1}$$

$$= \frac{104}{5-1}$$

$$= \frac{104}{4}$$

$$= 26 \text{ ....} 2$$

- પુરવણી રહિત નિદર્શન : 2કદના સરળ યાદચ્છિક નિદર્શ પુરવણી રહિત મેળવવાનાં છે તેથી આવા નિદર્શોની સંખ્યા

$$m = N_{c_n}$$

$$= 5_{c_2}$$

$$= \frac{5!}{2!\,(5-2)!}$$

$$= \frac{5!}{2!\,3!}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{2 \times 1 \times \cancel{3!}}$$

$$= 10$$

આવા દસ નિદર્શોની યાદી અને તેની ગણતરી માટે નીચે મુજબ કોષ્ટક તૈયાર કરીશું :

અહીં y_i =5, 7, 11, 15 અને 17છે તેમાંથી બે કદના પુરવણીરહિત નિદર્શની યાદીમાં પ્રથમ બે કિંમતો (5, 7) પછી (5, 11), (5, 15) …..આ રીતે કુલ 10 નિદર્શોની સંખ્યા બનશે.

નિદર્શ ક્રમ	નિદર્શ અવલોકનો y_i	નિદર્શ મધ્યક $\bar{y}_i$	$(\bar{y}_i - \bar{Y})$	$(\bar{y}_i - \bar{Y})^2$	$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(y-\bar{y})^2$
1	(5, 7)	$\frac{5+7}{2} = 6$	- 5	25	2
2	(5, 11)	$\frac{5+11}{2} = 8$	- 3	9	18
3	(5, 15)	$\frac{5+15}{2} = 10$	- 1	1	50
4	(5, 17)	$\frac{5+17}{2} = 11$	0	0	72
5	(7, 11)	$\frac{5+11}{2} = 9$	- 2	4	8
6	(7, 15)	$\frac{5+15}{2} = 11$	0	0	32
7	(7, 17)	$\frac{5+17}{2} = 12$	1	1	50
8	(11, 15)	$\frac{5+15}{2} = 13$	2	4	8
9	(11, 17)	$\frac{5+17}{2} = 14$	3	9	18
10	(15, 17)	$\frac{5+17}{2} = 16$	5	25	2
	સરવાળો	**110**	**0**	**78**	**260**

નિદર્શ વિચરણ s^2ની ગણતરી

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(y_i - \bar{y})^2$$

પ્રથમ નિદર્શ માટે

$$s_1^2 = \frac{(5-6)^2+(7-6)^2}{2-1} = \frac{(-1)^2+(1)^2}{1} = 2$$

$$s_2^2 = \frac{(5-8)^2+(11-8)^2}{2-1} = \frac{(-3)^2+(3)^2}{1} = \frac{9+9}{1} = 18$$

આ રીતે, બાકીના નિદર્શો માટે s^2 ગણી શકાય.

(1) $E(y) = \frac{\sum \bar{y}_i}{m}$

$$= \frac{110}{10}$$

$= 11$ .... (3)

પરિણામ (1) અને (3) પરથી સાબિત થાય છે કે

$$E(\bar{y}) = \bar{Y}$$

(2) $V(\bar{y}) = \frac{\sum(\bar{y}_i - \bar{Y})^2}{m}$

$$= \frac{78}{10}$$

$= 7.8$ .... (4)

હવે,

$$V(\bar{y}) = \frac{N-n}{N} \cdot \frac{s^2}{n}$$

$$= \frac{5-2}{5} \cdot \frac{26}{2}$$

$$= \frac{3 \times 26}{5 \times 2}$$

$$= \frac{78}{10}$$

$= 7.8$ ....(5)

પરિણામ (4) અને (5) પરથી ચકાસી શકાય છે કે

$$v(\bar{y}) = \frac{N-n}{N} \cdot \frac{s^2}{n}$$

(૩) $E(s^2) = \frac{\sum s_i^2}{m}$

$$= \frac{260}{10}$$

$= 26$ .... (6)

પરિણામ (૨) અને (૬) પરથી કહી શકાય કે $E(s^2) = S^2$

ઉદાહરણ : 2 અને 4 કદની સમષ્ટિના અવલોકનો 7, 8, 10 અને 15 છે. આ સમષ્ટિમાંથી કોઈ અવલોકનનુ પુનરાવર્તન ન થાય તે રીતે 2 કદના નિદર્શો લઈ સાબિત કરો કે

(1) $E(y) = \bar{Y}$ (2) $v(\bar{y}) = \frac{N-n}{n} . \frac{s^2}{n}$

ઉકેલ : અહીં N = 4 અને n = 2 છે.

Y_i	$(y_i - \bar{Y})$	$(y_i - \bar{Y})^2$
7	- 3	9
8	- 2	4
10	0	0
15	5	25
40		38

- **સમષ્ટિ મધ્યક :**

$\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{40}{4} = 10$..................... (1)

- **સમષ્ટિનું વિચરણ :**

$$s^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{Y})^2}{N-1}$$

$$= \frac{38}{4-1}$$

$$= \frac{38}{3}$$

= 12.67 ....(2)

- **પુરવણી રહિત નિદર્શન સંખ્યા**

$m = N_{c_n} = 4_{c_2} = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$

નિદર્શ ક્રમ	નિદર્શ અવલોકનો y_i	નિદર્શ મધ્યક $\bar{y}_i$	$(\bar{Y}_i - \bar{Y})$	$(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$
1	(7, 8)	$\frac{7+8}{2} = 7.5$	- 2.5	6.25
2	(7, 10)	$\frac{7+10}{2} = 8.5$	- 1.5	2.25
3	(7, 15)	= 11	1	1
4	(8, 10)	= 9	- 1	1
5	(8, 15)	= 11.5	1.5	2.25
6	(10, 15)	= 12.5	2.5	6.25
	સરવાળો	60	0	19

(1) $E(\bar{y}) = \frac{\sum \bar{y}_i}{m} = \frac{60}{6} = 10$ .... (3)

પરિણામ(1) અને (3) પરથી સાબિત થાય છે કે

$$E(\bar{y}) = \bar{Y}$$

(2) $V(\bar{y}) = \frac{\sum(\bar{y}_i - \bar{Y})^2}{m}$

$$= \frac{19}{6} = 3.17 \text{ .... (4)}$$

હવે,

$$V(\bar{y}) = \frac{N-n}{N} \cdot \frac{s^2}{n}$$

$$= \frac{4-2}{4} \cdot \frac{38}{3 \times 2}$$

$$= \frac{2 \times 38}{4 \times 6} = \frac{76}{24} = 3.17 \text{ .... (5)}$$

પરિણામ (૪) અને (૫) પરથી સાબિત થાય છે કે

$$v(\bar{y}) = \frac{N-n}{N} \cdot \frac{s^2}{n}$$

ઉદાહરણ : 3

21, 23, 26અને 30એકમો વાળી સમષ્ટિમાંથી બબ્બે એકમોના પુરવણી સહિત કુલ કેટલા નિદર્શો લઈ શકાય ? તે બધા જ નિદર્શોના મધ્યકો શોધો અને દર્શાવો કે નિદર્શ મધ્યકો શોધો અને દર્શાવો કે નિદર્શ મધ્યકએ સમષ્ટિ મધ્યકનો અનભિનત આગણક છે.

ઉકેલ : અહીં N=4અને n=2નિદર્શો પુરવણી સહિત લેવામાં આવે છે.

$\therefore$ પુરવણી સહિત નિદર્શોની સંખ્યા $m = N^n \therefore m = 4^2 = 16$ થશે.

નિદર્શ ક્રમ	નિદર્શ અવલોકનો y_i	નિદર્શ મધ્યક $\bar{y}_i$
1	(21, 21)	$\frac{21+21}{2}=21$
2	(21, 23)	$\frac{21+23}{2}=22$
3	(21, 26)	= 23.5
4	(21, 30)	= 25.5
5	(23, 21)	= 22
6	(23, 23)	= 23
7	(23, 26)	= 24.5
8	(23, 30)	= 26.5
9	(26, 21)	= 23.5
10	(26, 23)	= 24.5
11	(26, 26)	= 26
12	(26, 30)	= 28
13	(30, 21)	= 25.5
14	(30, 23)	= 26.5
15	(30, 26)	= 28
16	(30, 30)	= 30
		400

સમજૂતી : અહીં પુરવણી સહિત નિદર્શ પસંદ કરવાનો હોય છે એક વખત પસંદ થયેલ એકમ ફરીથી સમષ્ટિમાં મૂકવામાં આવે છે તેથી ફરીથી તે પસંદ થઈ શકે છે. ∴ પ્રથમ નિદર્શ અવલોકન (21, 21)આવી શકે તેજ પ્રમાણે તમામ અવલોકનોની યાદી બનાવેલ છે.

(૧) સમષ્ટિ મધ્યક $\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{N} = \frac{21+23+26+30}{4} = \frac{100}{4} = 25$...... (1)

અને $E(\bar{y}) = \frac{\sum y_i}{m} = \frac{400}{16} = 25$.....(1)

પરિણામ(1) અને પરિણામ (2) ઉપરથી કહી શકાય કે નિદર્શ મધ્યકએ સમષ્ટિ મધ્યકને અનભિનત આગણક છે.

ઉદાહરણ :4

10, 12, 14અને 16 પ્રાપ્તાંકોવાળી સમષ્ટિમાંથી બનેલા એકમોના પુરવણી રહિત અને પુરવણી સહિત કેટલા નિદર્શો લઈ શકાય ? સાબિત કરો કે નિદર્શ મધ્યકએ સમષ્ટિ મધ્યકનો અનભિનત આગણક છે.

ઉકેલ : અહીં N=4, n=2છે.

- સમષ્ટિ મધ્યક :

$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{N} = \frac{10+12+14+16}{4} = \frac{52}{4} + 13$..................... (1)

- પુરવણી રહિત નિદર્શન સંખ્યા

$m = N_{c_n} = 4_{c_2} = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$

નિદર્શ ક્રમ	નિદર્શ અવલોકનો y_i	નિદર્શ મધ્યક $\bar{y}_i$
1	(10, 12)	11
2	(10, 14)	12
3	(10, 16)	13
4	(12, 14)	13
5	(12, 16)	14
6	(14, 16)	15
		78

નિદર્શ મધ્યકોનો મધ્યક

$E(\overline{y}) = \frac{\sum y_i}{m} = \frac{78}{6} + 13$...................... (1)

પરિણામ(1) અને પરિણામ (2) પરથી કહી શકાય કે નિદર્શ મધ્યકએ સમષ્ટિ મધ્યકને અનભિનત આગણક છે.

- **પુરવણી સહિત નિદર્શોની સંખ્યા**

$m = N^n \;\therefore m = 4^2 = 16$ થશે.

નિદર્શ ક્રમ	નિદર્શ અવલોકનો y_i	નિદર્શ મધ્યક $\bar{y}_i$
1	(10,10)	10
2	(10, 12)	11
3	(10, 14)	12
4	(10, 16)	13
5	(12, 10)	11
6	(12, 12)	12
7	(12, 14)	13
8	(12, 16)	14
9	(14, 10)	12
10	(14, 12)	13
11	(14, 14)	14
12	(14, 16)	15
13	(16, 10)	13
14	(16, 12)	14
15	(16, 14)	15
16	(16, 16)	16
		208

નિદર્શ મધ્યકોનો મધ્યક

$E(\overline{y}) = \frac{\sum y_i}{m} = \frac{208}{16} + 13$...................... (3)

પરિણામ(1) અને પરિણામ (3) પરથી કહી શકાય કે નિદર્શ મધ્યકએ સમષ્ટિ મધ્યકને અનભિનત આગણક છે. એટલે કે $E(\bar{y}) = \bar{Y}$)થાય છે.

ઉદાહરણ : 5

પાંચ કદની એક સમષ્ટિના અવલોકનો 12, 15, 18, 21અને 24છે. તેમાંથી 3કદના શક્ય તેટલા તમામ સરળ નિદર્શો પુરવણી રહિત પદ્ધતિથી લઈ સાબિત કરો કે,

(1) $E(\bar{y}) = \bar{Y}$ (2) $V(\bar{y}) = \frac{N-n}{N}.\frac{s^2}{n}$

ઉકેલ : અહીં N=5, અને n=3છે તેથી પુરવણી રહિત નિદર્શોની સંખ્યા

$m = 5_{c3} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$ થશે.

Y_i	$(Y_i - \bar{Y})$	$(Y_i - \bar{Y})^2$
12	- 6	36
15	- 3	9
18	0	0
21	3	9
24	6	36
90	0	90

- **સમષ્ટિ મધ્યક :**

$\bar{Y} = \frac{\Sigma y_i}{N} = \frac{90}{5} = 18$..................... (1)

- **સમાવિષ્ટનુ વિચરણ**

$s^2 = \frac{\Sigma(Y_i - \bar{y})^2}{N-1} = \frac{90}{5-1} = \frac{90}{4} = 22.5$ …….. (2)

નિદર્શ ક્રમ	નિદર્શ અવલોકનો y_i	નિદર્શ મધ્યક $\bar{y}_i$	$(\bar{y}_i - \bar{Y})$	$(\bar{y}_i - \bar{Y})^2$
1	(12, 15, 18)	15	- 3	9
2	(12, 15, 21)	16	- 2	4
3	(12, 15, 24)	17	- 1	1
4	(12, 18, 21)	17	- 1	1
5	(12, 18, 24)	18	0	0
6	(12, 21, 24)	19	1	1
7	(15, 18, 21)	18	0	0
8	(15, 18, 24)	19	1	1
9	(15, 21, 24)	20	2	4
10	(18, 21, 24)	21	3	9
સરવાળો		180	0	30

(1) $E(\overline{y}) = \frac{\sum y_i}{m} = \frac{180}{10} = 18$...................... (3)

પરિણામ (૧) અને પરિણામ (૩) પરથી સાબિત થાય છે કે $E(\bar{y}) = \bar{Y}$

(2) $V(\bar{y}) = \frac{N-n}{N} . \frac{s^2}{n}$

$$= \frac{5-3}{5} \times \frac{22.5}{3}$$

$$= \frac{2\times 22.5}{15} = \frac{45}{15} = 3$$ .... (4)

હવે,

$$(\bar{y}) = \frac{\sum(\bar{y}_i - \bar{Y})^2}{m}$$

$$= \frac{30}{10} = 3$$........ (5)

પરિણામ (૪) અને (૫) પરથી સાબિત થાય છે કે

$$v(\bar{y}) = \frac{N-n}{N} . \frac{s^2}{n}$$

ઉદાહરણ :6

છ કદની એક સમષ્ટિના અવલોકનો 3, 4, 7, 8, 9અને 11છે. પુરવણી રહિત 2કદના બધા જ શક્ય સરળ યાદચ્છિક નિદર્શો માટેના નીચેના પરિણામો ચકાસો.

(1) $E(\bar{y}) = \bar{Y}$ (2) $V(\bar{y}) = \frac{N-n}{N} . \frac{s^2}{n}$

(3) $E(s^2) = s^2$

ઉકેલ : અહીં N=6, અને n=2છે તેથી પુરવણી રહિત નિદર્શોની સંખ્યા

$m = 6_{c_2} = \frac{6\times 5}{2\times 1} = 15$થશે.

Y_i	$(Y_i - \bar{Y})$	$(Y_i - \bar{Y})^2$
3	- 4	16
4	- 3	9
7	0	0
8	1	1
9	2	4
11	4	16
42	0	46

- **સમષ્ટિ મધ્યક :**

$\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{42}{6} = 7$...................... (1)

- **સમષ્ટિનું વિચરણ**

$s^2 = \frac{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}{N-1} = \frac{46}{6-1} = \frac{46}{5} = 9.2$ …….. (2)

નિદર્શ ક્રમ	નિદર્શ અવલોકનો y_i	નિદર્શ મધ્યક $\bar{y}_i$	$(\bar{y}_i - \bar{Y})$	$(y_i - \bar{Y})^2$	$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(y_i - \bar{Y})^2$
1	(3, 4)	3.5	-3.5	12.25	S^2_1=0.50
2	(3, 7)	5	-2.0	4	=8
3	(3, 8)	5.5	-1.5	2.25	=12.50
4	(3, 9)	6	-1	1	=18
5	(3, 11)	7	0	0	=32
6	(4, 7)	5.5	-1.5	2.25	=4.50
7	(4, 8)	6	-1	1	=8
8	(4, 9)	6.5	-0.5	0.25	=12.50
9	(4, 11)	7.5	0.5	0.25	=24.50
10	(7, 8)	7.5	0.5	0.25	=0.50
11	(7, 9)	8	1	1	=2
12	(7, 11)	9	2	4	=8
13	(8, 9)	8.5	1.5	2.25	=0.50
14	(8, 11)	9.5	2.5	6.25	=4.50
15	(9, 11)	10	3	9	=2
સરવાળો		105	0	46	=138

ગણતરી :

$$s_1^2 = \frac{1}{2-1}\{(3-3.5)^2 + (4-3.5)^2\} = 0.25 + 0.25 = 0.50$$

$$s_2^2 = \frac{1}{2-1}\{(3-5)^2 + (7-5)^2\} = 4 + 4 = 8$$

તે જ રીતે બાકીના s^2ની ગણતરી કરેલ છે.

(1) $E(\overline{y}) = \frac{\Sigma y_i}{m} = \frac{105}{15} = 7$………………….. (3)

પરિણામ (૧) અને પરિણામ (૩) પરથી સાબિત થાય છે કે $E(\overline{y}) = \bar{Y}$

(2) $V(\overline{y}) = \frac{\Sigma(\bar{y}_i - \bar{Y})^2}{m}$

$= \frac{46}{15} = 3.07$…….. (4)

હવે,

$$V(\overline{y}) = \frac{N-n}{N} \cdot \frac{s^2}{n}$$

$$= \frac{6-2}{6} \times \frac{9.2}{2}$$

$$= \frac{4 \times 9.2}{12} = \frac{36.8}{12} = 3.07 \text{ .... (5)}$$

પરિણામ(4) અને (5) પરથી દર્શાવી શકાય કે $v(\bar{y}) = \frac{N-n}{N} . \frac{s^2}{n}$ થાય છે.

(3) $E(s^2) = \frac{\sum s_i^2}{m} = \frac{138}{15} = 9.2$..............(6)

પરિણામ (૨) અને પરિણામ (૬) પરથી સાબિત થાય છે કે $E(s^2) = s^2$

ઉદાહરણ :7

દક્ષિણ ગુજરાતના એક તાલુકાના શેરડીનો પાક લેતાં સમાન ક્ષેત્રફળવાળા 1000ખેતરોની સમષ્ટિમાંથી 10ખેતરોનો એક યાદચ્છિક નિદર્શ લેવામાં આવ્યો. 10ખેતરોની નિદર્શ તપાસમાં શેરડીના આંકડા (ટનમાં) નીચે મુજબ મળ્યા : 32, 35, 38, 30, 33, 42, 34, 36, 41, 39આ નિદર્શ માહિતી પરથી તાલુકામાં થયેલ શેરડીના કુલ ઉત્પાદનનો આગણક મેળવો અને તેમના વિચરણનું આગણન કરો.

ઉકેલ : અહીં N=1000, n=10

નિદર્શ મધ્યક :

$$\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{32+35+38+30+33+42+34+36+41+39}{10} = \frac{360}{10} = 36$$

y_i	$(\bar{y}_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$
32	- 4	16
35	- 1	1
38	2	4
30	- 6	36
33	- 3	9
42	6	36
34	- 2	4
36	0	0
41	5	25
39	3	9
	0	140

નિદર્શ વિચરણ

$$s^2 = \frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n-1} = \frac{140}{10-1} = \frac{140}{9} = 15.56$$

અહીં ખેતર દીઠ શેરડીનું સરેરાશ ઉત્પાદન 36 ટન છે અને તાલુકામાં કુલ N = 1000 ખેતરો છે.

$\therefore$ કુલ ઉત્પાદનનો આગણક $N\bar{y} = 1000 \times 36 = 36000$ ટન

વિચરણનું આગણન

$$V(\bar{y}) = \frac{N-n}{N} . \frac{s^2}{n} = \frac{1000-10}{1000} \times \frac{15.56}{10} = \frac{990}{10000} \times 15.56 = 1.54\text{ટન થશે.}$$

8.3 સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન (Stratified Random Sampling) :

જ્યારે સમષ્ટિ વિષમાંગ હોય એટલે કે સમષ્ટિના એકમોના ગુણધર્મોમાં વધુ અસમાનતા હોય ત્યારે સરળ યાદચ્છિક નિદર્શ દ્વારા સમષ્ટિનું સાચું પ્રતિનિધિત્વ થઈ શકતું નથી આવા સમયે સ્તરીત નિદર્શન પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

સૌ પ્રથમ સમષ્ટિના એકમોની લાક્ષણિકતાને આધારે સમષ્ટિના એકમોને સમાન ગુણધર્મોવાળા જુદા જુદા વિભાગોમાં વહેંચવામાં આવે છે. આ વિભાગોને સ્તરો કહેવામાં આવે છે. આ બધા જ સ્તરો એક-બીજાથી જુદા ગુણધર્મોવાળા હોય છે. પરંતુ, દરેક સ્તરના એકમો આંતરિકરીતે સમાન ગુણધર્મો ધરાવતા હોય છે. આ પ્રત્યેક સ્તરમાંથી સ્વતંત્ર રીતે યાદચ્છિક નિદર્શ પસંદ કરવામાં આવે છે. આ બધા યાદચ્છિક નિદર્શો ભેગા કરવાથી માળખતા નિદર્શને સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શ કહેવામા આવે છે આ બધા યાદચ્છિક નિદર્શો ભેગા કરવાથી મળતા નિદર્શને સ્તરિન અને તે ઉપરથી સમષ્ટિ વિશેના તારણો મેળવવાની રીતને સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ કહેવામાં આવે છે.

દા.ત. શ્રી એચ. કે. કોમર્સ કૉલેજના વિદ્યાર્થીઓનું અંગ્રેજી વિષય અંગેનું ધોરણ જાણવું હોય તો સૌ પ્રથમ તે કૉલેજના વિદ્યાર્થીઓને ત્રણ સ્તરો જેવાં કે બી.કોમ સેમ-1ના વિદ્યાર્થીઓનો સ્તર, બી.કોમ સેમ-3ના વિદ્યાર્થીઓનો સ્તર અને બી.કોમ સેમ-5ના વિદ્યાર્થીઓનો સ્તર એમ વહેંચી શકાય. ત્યારબાદ દરેક સ્તરમાંથી યદચ્છરીતે અમુક વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ પસંદ કરી તેમની ચકાસણી દ્વારા કૉલેજના વિદ્યાર્થીઓના અંગ્રેજી વિષય અંગેનું ધોરણ સારી રીતે જાણી શકાય છે.

8.3.1 સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શનના ફાયદા (Advantages of Stratified random Sampling) :

1. આ રીતમાં સૌ પ્રથમ સમષ્ટિને જુદાં જુદાં વિભાગોમાં વહેંચવામાં આવે છે, અને પછી દરેક વિભાગોમાંથી યાદચ્છિક નિદર્શ લેવામાં આવે છે. તેથી સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શ સમષ્ટિના બધા જ વિભાગોનું યોગ્ય પ્રતિનિધિત્વ ધરાવે છે.

2. આ રીતમાં જુદાં જુદાં વિભાગો માટે જુદી જુદી વ્યક્તિઓનાં નિદર્શ પસંદ કરવાનું કાર્ય સોંપી શકાય છે અને તેથી નિદર્શ પસંદ કરવાની વહીવટી સુગમતા વધે છે. ઉપરાંત સરળ યાદચ્છિક નિદર્શ કરતાં આ નિદર્શમાં સમય અને ખર્ચનો ઓછો વ્યય થાય છે.

3. દરેક સ્તર આંતરિક રીતે સમાન ગુણધર્મોવાળા હોવાથી તેમાંથી નાના કદના નિદર્શો સ્તર વિશે પૂરતી માહિતી પૂરી પાડે છે, જેથી ચોકસાઈનું ધોરણ વધે છે.

4. આ રીતમાં સ્તરવાર આગણક મળી શકે છે, અને તેથી વિવિધ સ્તરો વચ્ચે સરખામણી કરવાનું શક્ય બને છે.

5. સામાજિક, આર્થિક, ઔદ્યોગિક અને વ્યાપારિક સંશોધનમાં આ રીતનો ઉપયોગ કરી શકાય છે.

8.3.2 સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શનની મર્યાદાઓ(Limitation of stratified random sampling):

1. સમષ્ટિને સ્તરમાં વહેંચતી વખતે ખૂબ જ કાળજી રાખવી પડે છે.

2. સમષ્ટિને સ્તરોમાં યોગ્ય વિભાજન થયેલું ન હોય તો મળતા પરિણામો વિશ્વાસ પાત્ર હોતા નથી.

3. આ પદ્ધતિ દ્વારા મળતા નિદર્શના પરિણામો ઉપરથી સમષ્ટિ વિશે અનુમાન કરવાનું કામ કપરું છે.

4. બિનકુશળ વ્યક્તિઓ આ રીતનો ઉપયોગ કરે તો પરિણામ ભૂલ ભરેલા આવે છે.

8.3.3 કેટલાંક સંકેતો અને પરિણામો (Some noatations and results) :ધારો કે કોઈ એક સમષ્ટિનાં કુલ Nઅવલોકનો $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots . Y_N$છે. આ એકમોને સમાન ગુણધર્મોવાળા Lસ્તરોમાં વહેંચવામાં આવે છે. દરેક સ્તરમાં એકમોની સંખ્યા અનુક્રમે $N_1, N_2, N_3, \ldots . N_L$છે. આ દરેક સ્તરમાંથી યાદચ્છિક રીતે નિદર્શ પસંદ કરવામાં આવે છે. આ રીતે મળતાં નિદર્શ કદને અનુક્રમે $n_1,\ n_2,\ n_3 \ldots . n_L$વડે દર્શાવીશું. આ ઉપરથી નીચેના સંકેતો ધ્યાનમાં રાખવામાં જોઈએ.

1. n =સમષ્ટિમાં આવેલો અવલોકનોની (એકમો) કુલ સંખ્યા.

2. n =સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શમાં આવેલા એકમોની કુલ સંખ્યા.

3. $\mathbf{n}_h = h$માં સ્તરમાં સમષ્ટિના કુલ એકમો અથવા hમાં સ્તરનું કદ જ્યાં h = 1, 2, 3, …… L.

4. $\mathbf{n}_h = h$માં સ્તરમાંથી પસંદ કરેલા યાદચ્છિક નિદર્શનું કદ

5. $Y_{hi} = h$માં સ્તરનાં iમાં એકમનાં પ્રાપ્ય અવલોકનો.

6. $\bar{y}_t = \frac{\sum_{i-1}^{Nh} y_{hi}}{N_h} = h$માં સ્તરનો મધ્યક

7. $\bar{y}_h = \frac{\sum_{i-1}^{Nh} y_{hi}}{N_h} = h$માં સ્તરમાંથી લીધેલા યાદચ્છિક નિદર્શનો મધ્યક

8. સમષ્ટિ મધ્યક

$$\bar{Y} = \frac{N_1\bar{Y}_1 + N_2\bar{Y}_2 + N_3\bar{Y}_3 + \cdots \ldots + N_L\bar{Y}_L}{N_1 + N_2 + N_3 \ldots . . + N_L}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h\bar{Y}_h}{N}$$

9. સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શનો મધ્યક

$$\bar{y}_a = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h\bar{y}_h}{N} s_h^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_h}(Y_{hi} - \bar{Y}_h)^2}{N_h - 1} = h \text{ માં સ્તરનું વિચરણ.}$$

પરિણામ : 1 સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શનમાં સ્તરિત નિદર્શ મધ્યક એ સમષ્ટિ મધ્યકનો અનભિનત આગણક છે. એટલે કે $E(\bar{y}_{st}) = \bar{Y}$

પરિણામ : ૨ સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શનમાં સ્તરિત નિદર્શ મધ્યકનું વિચરણ નીચે પ્રમાણે છે;

$$V(\bar{y}_{st}) = \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L} N_h\,(N_h - n_h)\frac{S_h^2}{n_h}$$

8.3.4 સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શમાં પ્રમાણસર ફાળવણી (Proportion allocation in stratified random sampling) :

સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શમાં જુદા જુદા સ્તરોમાંથી કેટલા એકમો પસંદ કરવા તે પણ ચોક્કસ રીતે નક્કી થવું જોઈએ. પ્રમાણસર ફાળવણીની રીત આ માટે વધુ પ્રચલિત છે. જો આપેલી સમષ્ટિમાંથી N એકમો હોય અને તેમાંથી સ્તરિત નિદર્શમાં nએકમો પસંદ કરવાના હોય તો નીચેના સૂત્ર દ્વારા દરેક સ્તરમાંથી નિદર્શ કદ મેળવી શકાય.

એટલે $N_h = \frac{n}{N} N_h$ $\quad n_1 = \frac{n}{N} N_1$એ જ રીતે $n_2 n_3$મેળવી શકાય.

8.3.5 ઉદાહરણો

ઉદાહરણ-7

એક સમષ્ટિના 1000 એકમોને $N_1 = 250, N_2 = 350$ અને $N_3 = 400$એમ ત્રણ સ્તરોમાં વિભાજીત કરવામાં આવ્યા છે. તેમાંથી પ્રમાણસર ફાળવણીની રીતે n = 160એકમનો નિદર્શ લેવામાં આવે છે. તો દરેક સ્તરમાંથી કેટકેટલા એકમોના નિદર્શ પસંદ થશે.

ઉકેલ : અહીં $N = 1000, N_1 = 250, N_2 = 350, N_3 = 400$ અને $n = 160$છે.

પ્રમાણસર ફાળવણીનું સૂત્ર $n_h = \frac{n}{N} N_h$છે.

$$\therefore n_1 = \frac{n}{N} \times N_1 = \frac{160}{1000} \times 250 = 40$$

$$\therefore n_1 = 40$$

$$n_2 = \frac{n}{N} \times N_2 = \frac{160}{1000} \times 350 = 56$$

$$n_3 = \frac{n}{N} \times N_3 = \frac{160}{1000} \times 400 = 64$$

$\therefore$ સ્તરિત નિદર્શો $n_1 = 40,\ n_2 = 56$અને $n_3 = 64$થશે.

ઉદાહરણ 8

એક વિષમાંગ સમષ્ટિને ત્રણ સ્તરોમાં વહેંચવામાં આવે છે. ત્રણેય સ્તરોમાં એકમોની સંખ્યા અનુક્રમે 30, 50અને 20છે. તે સ્તરોમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલાં અવલોકનો નીચે પ્રમાણે છે.

પ્રથમ સ્તરમાંથી : 3, 5, 8, 9, 10

બીજા સ્તરમાંથી : 10, 12, 14, 16, 18, 20

ત્રીજા સ્તરમાંથી : 32, 34, 36, 38

માહિતીને આધારે સ્તરિત નિદર્શ મધ્યક મેળવો.

ઉકેલ અહીં $N= 100, N_1= 30, N_2 = 50, N_3= 20$

$n = 15, \ n_1 = 5, \ n_2 = 6 \ n_3 = 4$

પ્રથમ સ્તરનો નિદર્શ મધ્યક

$$\bar{y}_{1} = \frac{3+5+8+9+10}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

બીજા સ્તરનો નિદર્શ મધ્યક

$$\bar{y}_{2} = \frac{10+12+14+16+18+20}{6}$$

$$= \frac{90}{6} = 15$$

ત્રીજા સ્તરનો નિદર્શ મધ્યક

$$\bar{y}_{3} = \frac{32+34+36+36}{4}$$

$$= \frac{140}{4} = 35$$

હવે, સ્તરિત નિદર્શ મધ્યક

$$\bar{y}_{st} = \frac{N1\bar{y}1+N2\bar{y}2+N3\bar{y}3}{N1+N2+N3}$$

$$= \frac{(30 \ x \ 7\ ) + (50x15) + (20x35)}{30 + 50 + 20}$$

$$= \frac{210 + 750 + 700}{100}$$

$$= \frac{1660}{100}$$

$$\bar{y}_{st} = 16.60$$

ઉદાહરણ 9 :

ત્રણ કારખાનાં A, B અને C માં કામ કરતાં કામદારોની સંખ્યાના 10 ટકાના ધોરણે યાદચ્છિક નિદર્શ લેવામાં આવે છે. દરેક કારખાનામાંથી લીધેલ નિદર્શ પરથી કામદારોને મળતા દૈનિક વેતન (રૂપિયામાં) ની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપવામાં આવેલ છે. આ માહિતીના આધારે બધા જ કર્મચારીઓને મળતા સરેરાશ દૈનિક વેતન અને સ્તરિત નિદર્શ મધ્યકનું વિચરણ મેળવો.

કારખાનું (સ્તર)	સ્તરનું કદ	દૈનિક વેતનનો સ્તરનો મધ્યક (રૂપિયામાં)	દૈનિક વેતનનું સ્તરનું વિવરણ (રૂપિયામાં)
A	120	420	60
B	100	450	50
C	80	500	70

ઉકેલ : અહીં $N_1 = 120$, $N_2 = 100$, $N_3 = 80$, $N= 300$, $\bar{y}= 420$, $y_2= 450$, $\bar{y}_3= 500$, $S_1^2= 60$, $s_2^2 = 50$ અને , $s_3^2 = 70$ આપેલ છે.

હવે દરેક સ્તરમાંથી 10%નો યાદચ્છિક નિદર્શ લેવામાં આવે છે. $N_1 = 120$ ના10%

$\therefore n_1 = 120x \frac{10}{100} = 12$

તે જ રીતે $n_2= 10$ $n_3 = 8$ થશે.

કર્મચારીઓને મળતા સરેરાશ દૈનિક વેતન

સમષ્ટિ મધ્યક $y = \frac{\sum Nh\bar{y}h}{N}$

$$\therefore \bar{y} = \frac{N_1\bar{Y}_1 + N_2\bar{y}_2 + N_3\bar{y}_3}{N}$$

$$= \frac{(120\ x420) + (100x\ 450) + (80x500)}{300}$$

$$= \frac{50.400 + 45,000 + 40,000}{300}$$

$$= \frac{135400}{300}$$

$= 451.\ 33$

સ્તરિત નિદર્શ મધ્યકનું વિચરણ

$$V(\bar{y}_{st}) = \frac{1}{N^2}\,[N_1\,(N_1 - n_1)\frac{s_1^2}{n_1} + N_2\,(N_2 - n_2)\frac{s_2^2}{n_2} + N_3\,(N_3 - n_3)\frac{s_3^2}{n_3}]$$

$$= \frac{1}{(300)^2}\left[120\,(120-12)\frac{60}{12} + 100(100-10)\frac{50}{10} + 80\,(80-8)\frac{70}{8}\right]$$

$$= \frac{1}{90000}\left[\frac{120x108x60}{12} + \frac{100\ x\ 90\ x\ 50}{10} + \frac{80\ x\ 72\ x70}{8}\right]$$

$$= \frac{1}{9000}\,[64,800 + 45,000 + 50,400]$$

$$= \frac{1,60,200}{90,000}$$

$= 1.78$

ઉદાહરણ 10 : એક સમષ્ટિના 10 એકમોને બે સ્તરમાં નીચે પ્રમાણે વહેંચવામાં આવે છે.

સ્તર:1 10, 12, 15, 18, 20, 21

સ્તર:2 51, 53, 56, 64

પ્રથમ સ્તરમાંથી 3 અને બીજા સ્તરમાંથી 2 એકમોના યાદચ્છિક નિદર્શો પસંદ કરવામાં આવે તો બનતા સ્તરિત નિદર્શના મધ્યકનું વિચરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $N_1 = 6$, $N_2 = 4$ $N = N_1 + N_2 = 10$ $n_1 = 3$, $n_2 = 2$ છે.

પ્રથમ સ્તરનો મધ્યક $y_1 = \frac{\Sigma y_2}{N_1}$

$$\overline{y_1} = \frac{10+12+15+18+20+21}{6} = \frac{76}{6} = 16$$

બીજા સ્તરનો મધ્યક $y_2 = \frac{\Sigma y}{N_2}$

$$\bar{y}_2 = \frac{51+53+56+64}{4}$$

$$= \frac{224}{4} = 56$$

સ્તર 1 માટે

y_1	$(y_1-\bar{y}_1)$	$(y_1-\bar{y})^2$
10	-6	36
12	-4	16
15	-1	1
18	2	4
20	4	16
21	5	25
		98

સ્તર 2 માટે

y_2	$(y_2-\bar{y}_2)$	$(y_2-\bar{y}_2)^2$
51	-5	25
53	-3	9
56	0	0
64	8	64
		98

પ્રથમ સ્તરનું વિચરણ

$$S_1^2 = \Sigma \frac{(Y_1 - \bar{Y}_1)}{N_1 - 1} = \frac{98}{6-1} = \frac{98}{5} = 19.6$$

બીજા સ્તરનું વિચરણ

$$S_2^2 = \Sigma \frac{(Y_2 - \bar{Y}_2)}{N_2 - 1} = \frac{98}{4-1} = \frac{98}{3} = 32.67$$

હવે સ્તરિત નિદર્શ મધ્યકનું વિચરણ

$$V(\bar{y}_{st}) = \frac{1}{N^2}\left[N_1 (N_1 - n_1)\frac{S_1^2}{n^1} + N_2 (N_2 - n_2)\frac{S_2^2}{n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{(10)}\left[6(6-3)\frac{19.6}{3} + 4(4-2)\frac{32-67}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{100}\left[\frac{6x3x19.6}{3} + \frac{4x2x32.67}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{100}[117.6 + 130.68] = \frac{248.28}{100} = 2.48$$

$$\therefore V\,(\bar{y}_{st}) = 2.48$$

ઉદાહરણ 11 સમષ્ટિના એકમો નીચે પ્રમાણે છે.

સ્તર I	6	17	10	12	15	16	21	20	18
સ્તર II	8	9	11	16	14	20			

તેમાંથી, $n = 5$ કદનો એક નિદર્શ લેવાનો છે.પ્રમાણસર ફાળવણી હેઠળ પસંદ કરી શકાતા શક્ય નિદર્શ માટે $E\,(\bar{y}_{st})$ અને $V(\bar{y}_{st})$ ની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : અહીં $N = 15, N_1 = 9\; N_2 = 6, n = 4$આપેલ છે.

હવે, પ્રમાણસર ફાળવણી હેઠળ નિદર્શનું કદ

$$n_h = \frac{N}{n} \times N_h$$

$$n_1 = \frac{5}{15}\; x\; 9 = 3 \qquad n_2 = \frac{5}{15}\; x\; 6 = 2$$

$$\therefore\; n_1 = 3 n_2 = 2 \text{ થશે.}$$

સ્તર I માટે			**સ્તર II માટે**		
y_1	$(Y_1 - \bar{y}_1)$	$(y_1 - \bar{y}_2)2$	y_2	$(Y_2 - \bar{y}_2)$	$(y_2 - \bar{y}_2)2$
6	-9	81	8	-5	25
17	2	4	9	-4	16
10	-5	25	11	-2	4
12	-3	9	16	3	9
15	0	0	14	1	1
16	1	1	20	7	49
21	6	36	78	0	104
20	5	25			
18	3	9			
135	0	190			

$$\bar{y}_1 = \frac{\Sigma y_1}{N_1} \qquad \bar{y}_1 = \frac{\Sigma y_2}{N_2}$$

$$= \frac{135}{9} \qquad = \frac{78}{6}$$

$$= 15 \qquad = 13$$

$$S_1^2 = \frac{\Sigma(y_1 - \bar{y}_2)2}{N_1 - 1} \qquad S_2^2 = \frac{\Sigma(y_2 - \bar{y}_2)2}{N_2 - 1}$$

$= \frac{190}{9-1}$ $\quad\quad$ $= \frac{104}{6-1}$

$= \frac{190}{8}$ $\quad\quad$ $= \frac{104}{5}$

$= 23.75$ $\quad\quad$ $= 20.8$

$$E\ (\bar{y}_{st})\ = \bar{y}$$

$$\therefore\ \bar{y} \quad = \frac{N_1\bar{y}_1 + N_2\bar{y}_2}{N_{1+N_2}}$$

$$= \frac{(9\ x\ 15) + (13\ x\ 6)}{9+6}$$

$$= \frac{135+78}{15}$$

$$= \frac{213}{15}$$

$$= 14.2$$

$$V(\bar{y}_{st})\ = \frac{1}{N^2}\left[N_1\,(N_1 - n_1)S_1^2\ + N^2\,(N_2 - n_2)\frac{S_2^2}{n^2}\right]$$

$$\frac{1}{(15)}^2\left[9\ (9-3)\frac{23.75}{3}\ + 6(6-2)\frac{20.8}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{225}\left[\frac{9\ x\ 6\ x\ 23.75}{3} + \frac{6x4x20.8}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{225}[423 + 249.6]$$

$$= \frac{672.6}{225}$$

$$\therefore\ (\bar{y}_{st})\ = 2.99$$

ઉદાહરણ :12

એક તાલુકાના ખેતરોનું સરેરાશ કદનું આગણન કરવા માટે ખેતરોને ત્રણ સ્તરોમાં વિભાજન કર્યા છે. દરેક સ્તરમાંથી લેવામાં આવેલ સરળ યાદચ્છિક નિદર્શની વિગતો નીચે પ્રમાણે છે. ખેતરોને સરેરાશ કદ $\bar{y}$નો અનભિનત આગણક અને તેનું વિચરણ મેળવો.

સ્તરો (એકરમાં)	સ્તરમાં આવેલા ખેતરોની સંખ્યા	નિદર્શનું કદ	નિદર્શમાં પસંદ થયેલ ખેતરોના કદ (એકરમાં)
0-50	70	5	12,25,29, 36, 48
51-100	20	3	53, 60, 82
101 થી વધુ	10	2	128, 142

ઉકેલ અહીં N= 100,

$N_1 = 70, N_2 = 20, N_3 = 10, n_1 = 5, n_2 = 3, n_3 = 2$ અને $n = 10$
આપેલ છે.

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum y_1}{n_1} = \frac{12+25+29+36+48}{5}$$

$$= \frac{150}{50} = 30$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum y_2}{n_2} = \frac{53+60+82}{3}$$

$$= \frac{195}{3} = 65$$

$$\bar{y}_3 = \frac{\sum y_3}{n_3} = \frac{128+142}{2}$$

$$= \frac{270}{2} = 135$$

નોંધ :

યાદચ્છિક નિદર્શન માટે નિદર્શ વિચરણ એ સમષ્ટિ વિચરણનો અનભિનત આગણક છે, તેથી જ્યારે સ્તરનું વિચરણ આપેલું ન હોય ત્યારે તે સ્તરમાંથી લીધેલાં નિદર્શના વિચરણનો ઉપયોગ કરી શકાય. અહીં S_h^2 ની જગ્યાએ s_h^2 નો ઉપયોગ કરીશું.

નિદર્શો

y_1	$(y_1 - \bar{y}_1)$	$(y_1 - \bar{y}_1)2$	y_2	$(y_2 - \bar{y}_2)$	$(y_2 - \bar{y}_2)2$	y_3	$(y_3 - \bar{y}_3)$	$(y_3 - \bar{y}_3)2$
12	-18	324	53	-12	144	128	-7	49
25	-5	25	60	-5	25	142	7	49
29	-1	1	82	17	289	**270**	**0**	**98**
36	6	36	**195**	**0**	**458**			
48	18	324						
150	**0**	**710**						

$$s_1^2 = \frac{\Sigma(y_1 - \bar{y}_1)^2}{n_1 - 1} = \frac{710}{5-1} = \frac{710}{4} = 177.5$$

$$s_2^2 = \frac{\Sigma(y_2 - \bar{y}_2)^2}{n_1 - 1} = \frac{458}{3-1} = \frac{458}{4} = 229$$

$$s_3^2 = \frac{\Sigma(y_3 - \bar{y}_3)^2}{n_3 - 1} = \frac{98}{2-1} = \frac{98}{1} = 98$$

હવે, $\bar{y}$ નો અનભિનત આગણક $\bar{y}_{st}$ છે.

$$\bar{y}_{st} = \frac{N_1 \bar{y}_{1+} N_2 \bar{y}_{2+} \ N_3 \bar{y}_{3+}}{N_1 + N_2 + N_3}$$

$$= \frac{(70 \ x \ 30) + \ (20 \ x \ 65) + (10x \ 135)}{70 + 20 + 10} \qquad = \frac{2100 \ + 1300 + 1350}{100}$$

$$= \frac{4750}{100} \quad = 47.5$$

$$V\ (\bar{y}_{st}) = \frac{1}{N^2}\ [N_1\ (N_1 - n_1) \frac{s_1^2}{n_1} + N_2\ (N_2 - n_2) \frac{s_2^2}{n_2} + N_3\ (N_3 - n_3) \frac{s_3^2}{n_3}]$$

$$= \frac{1}{(100)2}\ [70(70-5)\frac{177.5}{5} + \ 20(20-3)\frac{229}{3} + \ 10(10-2)\frac{98}{2}]$$

$$= \frac{1}{10000}\left[\frac{70 \ x \ 65 \ x \ 177.5}{5} + \frac{20x \ 17 \ x229}{3} + \frac{10x8x98}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{1000}\ [161525 + 25953.33 + 3920]$$

$$= \frac{191{,}398.33}{10000} \qquad = 19.14$$

8.4 પદિક કે વ્યવસ્થિત નિદર્શન :(Systematic Sampling)

જ્યારે સમષ્ટિ સમાન ગુણધર્મવાળી હોય અને સમષ્ટિના તમામ એકમોની યાદી ઉપલબ્ધ હોય તેવી સમષ્ટિ માંથી નિદર્શ લેવા આ પદ્ધતિનો ખાસ ઉપયોગ થાય છે. આ પદ્ધતિમાં પ્રથમ નિદર્શ એકમ યદચ્છ રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે અને ત્યારબાદ બાકીના એકમો સમાન અંતરે ચોક્કસ ક્રમમાં આપોઆપ પસંદ થઈ જાય છે. આ રીતે સમષ્ટિના એકમો પદ્ધતિસર (વ્યવસ્થિત) ક્રમમાં જેવા કે કક્કાવારી મુજબ સમય મુજબ અથવા સ્થળ મુજબ ગોઠવાયેલ હોવા જોઈએ.

ધારોકે અભ્યાસ હેઠળની સમષ્ટિમાં કુલ N એકમો છે, જેમને 1 થી N ક્રમ આપેલા છે.

આપણે n કદનું પદિક નિદર્શ મેળવ્યું છે. તેથી જો $\frac{N}{n} = K$ એક પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. એમ ધારવામાં આવે તો પ્રથમ 1,2……K માંથી કોઈ એકમ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરીશું. આ પસંદગી લોટરીની રીતે કે કોષ્ટકની રીતે પસંદ કરી શકાય ત્યાર બાદની સંખ્યા આપો આપ નક્કી થશે.

દા.ત. જો 1000 એકમોની સમષ્ટિ માંથી 50 એકમોનો નિદર્શ લેવાનો હોય તો K= $\frac{1000}{50}$ = 20 થાય. હવે જો 1 થી 20 ક્રમમાંથી યદચ્છ રીતે એક સંખ્યા પસંદ કરવી જો એ સંખ્યા 17 હોય તો 17,37,57, 77…….997 નંબરો ધરાવતા કુલ 50 એકમોનો નિદર્શ બનશે. આ રીતને વ્યવસ્થિત પદ્ધતિસર કે પદિક નિદર્શક પદ્ધતિ કહે છે.

8.4.1 પદિક નિદર્શનના ફાયદા : (Advantages of Systematic Sampling)

૧. સરળ યાદચ્છિક કે સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શનની સરખામણીમાં આ પદ્ધતિ પ્રમાણમાં સરળ છે.

૨. આ પદ્ધતિમાં સમય ઓછો લાગે છે, એટલે કે નિદર્શ ખૂબ જ ઝડપથી પસંદ થાય છે.

૩. યદચ્છ નિદર્શન પદ્ધતિ કરતાં ચોકસાઈનું ધોરણ થોડું ઊંચું જણાય છે.

૪. આ પદ્ધતિમાં કાર્યભાર પ્રમાણમાં ઓછો રહે છે.

૫. નિદર્શન અંતરિત સાથે જો સામયિક લક્ષણો સંકળાયેલા ન હોય તો સંતોષકારક પરિણામો નિપજાવી શકાય.

8.4.2 પદિક નિદર્શનની મર્યાદાઓ :(Disadvantages of Systematic Sampdeling)

૧. આ પદ્ધતિમાં એકમોની સંપૂર્ણ અને વ્યવસ્થિત યાદી તૈયાર હોય તો જ ભરોસાપાત્ર પરિણામો મળી શકે છે.

૨. એકમો પસંદ કરવાના નિદર્શ અંતર સાથે નો ચક્રિય ફેરફારો સંકળાયેલા હોય તો આપદ્ધતિ વડે મેળવાયેલો નિદર્શ પક્ષપાત ભર્યો હોઈ શકે છે.

૩. પદિક નિદર્શમાંથી મળતા સમષ્ટિ મધ્યકના આગણકના વિચરણનું આગણન થઈ શકતું નથી, તેથી આગણનની પ્રમાણિત ભૂલ ગણી શકાતી નથી.

૪. જયારે $N \neq nk$ હોય ત્યારે આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ યોગ્ય નથી.

8.4.3 કેટલાક સંકેતો અને પરિણામો : (Some notations and results)

1. N = સમષ્ટિનું કદ
2. Y_i = સમષ્ટિના અવલોકનો
3. $K = \frac{N}{n}$નિદર્શ અંતર
4. n = પદિક નિદર્શનું કદ
5. $\bar{Y} = \frac{\Sigma y_i}{N}$સમષ્ટિ મધ્યક
6. y_i =પદિક નિદર્શના અવલોકનો
7. $\bar{Y}_{st} = \frac{\Sigma y_i}{n}$પદિક નિદર્શ મધ્યક

પરિણામ- 1 જયારે પદિક નિદર્શનમાં N = nk હોય ત્યારે પદિક નિદર્શોના મધ્યકોનો મધ્યક એ સમષ્ટિ મધ્યક જેટલો થાય છે.

જયાં $E\left(\bar{y}_{sy}\right) = \frac{\Sigma \bar{y}_{st}}{K}$

પરિણામ -2 જયારે પદિક નિદર્શનમાં N= nk હોય ત્યારે $V\left(\bar{y}_{yt}\right)$એટલે કે પદિક નિદર્શ મધ્યકનુ વિચરણ નીચે મુબજ મળે છે.

$$V\left(\bar{y}_{sy}\right) = \frac{\Sigma(\bar{y}_{st} - \bar{Y})2}{K}$$

8.4.4 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ : 13

એક પરીક્ષામાં 15વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ નીચે મુજબ છે. ગુણ :- 69, 48, 55, 62, 26, 75, 30, 62, 58, 17, 80, 18, 11, 87, 64 જો તેમાંથી 5 વિદ્યાર્થીઓનો પદિક નિદર્શ લેવાનો હોય અને પ્રથમ વિભાગમાંથી બીજો વિદ્યાર્થી પસંદ થાય તો નિદર્શમાં બાકીના વિદ્યાર્થીઓ મેળવો અને આ વિદ્યાર્થીઓના સરેરાશ ગુણ પણ મેળવો.

ઉકેલ : સૌ પ્રથમ સમષ્ટિના અવલોકનોને ક્રમ આપીશું.

વિદ્યાર્થીનો ક્રમ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ગુણ :	69	48	55	62	26	75	30	62	58	17	80	18	11	87	64

હવે, N = 15 n = 5 છે.

∴ નિદર્શ અંતર $K = \frac{N}{n} = \frac{15}{5} = 3$ થશે.

∴ સમષ્ટિના પાંચ વિભાગો થશે અને દરેક વિભાગમાં 3 અવલોકનો આવશે.

હવે પ્રથમ વિભાગમાંથી બીજો વિદ્યાર્થી પસંદ થયો છે. ક્રમ ૨ માં નિદર્શ અંતર ૩ ઉમેરતાં બાકીના અવલોકનો નીચે મુજબ છે.

ક્રમ $(2, 5, 8, 11, 14)$ ક્રમવાળા અવલોકનો નિદર્શમાં આવશે.

∴ આ ક્રમાંકોવાળા અવલોકનોવાળો પદિક નિદર્શ નીચે મુજબ મળશે.

$y_i = 48, 26, 62, 80, 87$

નિદર્શ મધ્યક : $\bar{y}_y = \frac{\Sigma y_i}{n} = \frac{48+26+62+80+87}{5}$

$= \frac{303}{5}$

$\bar{y}_{st} = 60.6$

ઉદાહરણ : 14

એક વર્ગના 20 વિદ્યાર્થીઓના વજન (કિ.ગ્રા.માં) નીચે મુજબ છે. તેમાંથી 4 કદનો પદિક નિદર્શ પસંદ કરવાનો છે. જો પ્રથમ વિભાગમાંથી ત્રીજા ક્રમનો એકમ પસંદ થાય તો તે નિદર્શનમાં પસંદ થતાં બાકીના એકમો શોધો.

વિદ્યાર્થી એકમ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
વજન (કિ.ના.)	48	42	55	65	40	45	48	50	55	52	54	60	62	65	58	57	47	45	40	46

ઉકેલ અહીં N = 20 n= 4 ∴ $K = \frac{N}{n} = \frac{20}{4} = 5$ નિદર્શ અંતર થશે.

હવે, આપેલી સમષ્ટિને 4 વિભાગોમાં નીચે મુજબ વહેંચીશું કે જેથી દરેક સ્તરમાં પાંચ એકમો મળે

વિભાગ – 1		વિભાગ – 2		વિભાગ – 3		વિભાગ – 4	
ક્રમ	વજન	ક્રમ	વજન	ક્રમ	વજન	ક્રમ	વજન
1	48	6	45	11	54	16	57
2	42	7	48	12	60	17	45
3	55	8	50	13	62	18	45
4	65	9	55	14	65	19	40
5	40	10	52	15	58	20	46

અહીં પ્રથમ વિભાગમાંથી ત્રીજા ક્રમનો એકમ પસંદ કરવાનો થાય છે.તેથી ક્રમ 3 માં પ ઉમેરતાં 8 , 8 માં 5 ઉમેરતાં 13 એમ ક્રમાંકો = (3,8,13,18) લખી શકાય.

તેથી આ ક્રમાંકોને અનુરૂપ પદિક નિદર્શ નીચે મુજબ થશે. (55, 50, 62, 45)

ઉદાહરણ 15 નીચેની માહિતીમાં કોઈ એક ચલ લક્ષણના અભ્યાસની સમષ્ટિના 12 અવલોકનો આપેલા છે. તેમાંથી ત્રણ કદના શક્ય બધા જ પદિક નિદર્શ લઈ સાબિત કરો કે પદિક નિદર્શોના મધ્યકોનો મધ્યક એ સમષ્ટિ મધ્યક બરાબર છે. ઉપરાંત, પાદિક નિદર્શ મધ્યકનું વિચરણ મેળવો.

ક્રમ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
અવલોકન	20	28	23	18	25	29	34	38	27	33	21	28

ઉકેલ : અહી પદિક નિદર્શોના મધ્યકનોનો મધ્યક એ સમાવિષ્ટ મધ્યક બરાબર છે. એટલે કે $E(\bar{y}_{sy}) = \bar{Y}$ સાબિત કરવું પડશે. N = 12 n= 3 છે. K = $\frac{N}{n} = \frac{12}{3} = 4$ નિદર્શ અંતર થશે.

∴ સમષ્ટિને ત્રણ વિભાગોમાં એવી રીતે વહેંચીશું કે જેથી દરેક વિભાગમાં 4 અવલોકનો મળે.

પદિક નિદર્શ	વિભાગ – I		વિભાગ – II		વિભાગ – III	
ક્રમ	ક્રમ	અવલોકન	ક્રમ	અવલોકન	ક્રમ	અવલોકન
પહેલો	1	20	5	25	9	27
બીજો	2	28	6	29	10	33
ત્રીજો	3	23	7	34	11	21
ચોથો	4	18	8	38	12	28

આ કોષ્ટક ઉપરથી પદિક નિદર્શો અને તેમના મધ્યકો નીચે મુજબ શોધી શકાય. પ્રથમ સમષ્ટિ મધ્યક $\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{N}$

$$\frac{20+28+23+18+25+29+34+38+27+33+21+28}{12} = \frac{324}{12} = 27$$

પદિક નિદર્શ ક્રમ	પદિક નિદર્શ	પદિક નિદર્શ મધ્યક $\bar{y}_{sy}$	$(\bar{y}_{sy}-\bar{\bar{y}})$	$(\bar{y}_{sy}-\bar{y})2$
પહેલો	(20, 25,27)	$\frac{20+25+27}{3}=\frac{72}{3}=24$	-3	9
બીજો	(28, 29, 33)	$\frac{28+29+33}{3}=\frac{90}{3}=30$	3	9
ત્રીજો	(23, 34, 21)	$\frac{23+34+21}{3}=\frac{78}{3}=26$	-1	1
ચોથો	(18, 38, 28)	$\frac{18+38+28}{3}=\frac{84}{3}=28$	1	1
K = 4		$\sum \bar{y}_{st} = 108$		

પદિક નિદર્શોના મધ્યકોનો મધ્યક

$$E(\bar{y}_{st}) = \Sigma \frac{\bar{y}_{sy}}{k}$$

$$= \frac{108}{4}$$

$$= 27 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

પરિણામ (1) અને (2) પરથી સાબિત કરી શકાય કે $\sum \bar{y}_y = \bar{Y}$ છે તેથી પદિક નિદર્શોના મધ્યકોનો મધ્યક એ સમષ્ટિ મધ્યક બરાબર છે.

હવે, પદિક નિદર્શ મધ્યકનું વિચરણ

$$V(\bar{y}_y) = \frac{\Sigma(\bar{y}_{st} - \bar{Y})}{K}$$

$$= \frac{20}{4}$$

$$= 5$$

તેથી $V(\bar{y}_{st}) = 5$ થાય છે.

ઉદાહરણ – 15

16 કદની સમષ્ટિમાં y_iની કિંમતો 16, 14, 18, 22, 24, 16, 20, 25, 32, 28, 12, 17, 28, 10, 34, 36 છે. તેમાંથી 4 કદના શકય બધા જ પદિક નિદર્શો લઈ સાબિત કરો કે $E(\bar{y}_{sy}) = \bar{y}$ વળી $V(\bar{y}_y)$ પણ શોધો.

ઉકેલ : સૌ પ્રથમ સમષ્ટિના અવલોકનોને નીચે મુજબ ક્રમ આપીશું.

ક્રમ	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	14	15	16
y_i	16	14	18	22	24	16	20	25	32	28	12	17	10	34	36

અહીં N = 16 n = 4 ∴ નિદર્શઅંતર $K = \frac{16}{4} = 4$થશે.

સમષ્ટિ મધ્યક $\bar{Y} = \frac{\Sigma y_i}{N} = \frac{352}{16} = 22 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

હવે સમષ્ટિને ચાર વિભાગમાં નીચે મુજબ વહેંચીશું જેથી દરેક સ્તરમાં ચાર અવલોકનો હોય.

પદિક નિદર્શ	વિભાગ : I		વિભાગ : II		વિભાગ : III		વિભાગ : IV	
ક્રમ	ક્રમ	અવલોકન	ક્રમ	અવલોકન	ક્રમ	અવલોકન	ક્રમ	અવલોકન
પહેલો	1	16	5	24	9	32	13	28
ભીજો	2	14	6	16	10	28	14	10
ત્રીજો	3	18	7	20	11	12	15	34
ચોથો	4	22	8	25	12	17	16	36

ઉપરના કોષ્ટક પરથી શકય બધા જ પદિક નિદર્શો અને તેમના મધ્યકો નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

પદિક નિદર્શક્રમ	પદિક નિદર્શ	પદિક નિદર્શ મધ્યક $\bar{y}_{sy}$	$(y_{sy}-\overline{y})$	$(\bar{y}_{sy}-\bar{y})$૨
પ્રથમ	(16, 24. 32.28)	$\frac{100}{4} = 25$	3	9
બીજો	(14, 16, 28, 10)	$\frac{68}{4} = 17$	-5	25
ત્રીજો	(18, 20, 12, 34)	$\frac{84}{4} = 21$	-1	1
ચોથો	(22, 25, 17, 36	$\frac{100}{4} = 25$	3	9
		$\sum(\bar{y}_{sy}) = 88$	0	44

પદિક નિદર્શ મધ્યકોનો

$$E(\bar{y}_{sy}) = \sum\frac{\bar{y}_{sy}}{k}$$

$$= \frac{88}{4}$$

$$= 22$$

પરિણામ (1) (2) $E(\bar{y}_{sy}) = \bar{Y}$ સાબિત થાય છે.

પદિક નિદર્શ મધ્યકનું વિચરણ

$$V(\bar{y}_{sy}) = \sum\frac{(\bar{y}_{sy}-\overline{y)2}}{K}$$

$$= \frac{44}{4}$$

$$= 11$$

$V(\bar{y}_{sy}) = 11$ થાય છે.

8.5 નિદર્શ તપાસનું આયોજન (Framing of a sample survey)

સામાજીક, રાજકીય, શૈક્ષણિક કે ઔદ્યોગિકક્ષેત્રમાં કોઈ પણ સમસ્યાના અભ્યાસ માટે આંકડાશાસ્ત્રીય રીતે માહિતી મેળવી નિદર્શ તપાસ દ્વારા પૃથક્કરણ કરવાનું હોય ત્યારે નિદર્શ તપાસના આયોજન અંગે નીચેના મુદ્દાઓ ધ્યાનમાં રાખવા જોઈએ.

૧. **હેતુ :** તપાસ કયા હેતુસર કરવી છે તે હેતુ સ્પષ્ટ પણ જણાવવો જોઈએ. કેટલીક વખત વ્યક્તિ કે સંસ્થા પોતે જ તપાસના હેતુ અંગે ચોક્કસ રીતે જાણતી હોતી નથી. તેથી તેવી તપાસના પરિણામો ઉપયોગી રહેતા નથી.

૨. **સમષ્ટિ :** સમષ્ટિ સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલી હોવી જોઈએ. વળી સમષ્ટિના એકમોની સમાંગતા વિશે પણ જાણકારી હોવી જોઈએ.

૩. **નિદર્શન પદ્ધતિની પસંદગી :** સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ લેવાની જુદી જુદી પદ્ધતિઓ માંથી યોગ્ય પદ્ધતિની પસંદગી કરવી જોઈએ જે માટે તપાસનો હેતુ સમષ્ટિનું કદ, સમષ્ટિની સમાંગતા, તપાસની સમય મર્યાદા અને ખર્ચ વગેરે બાબતો ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ. અને નિદર્શના એકમો પસંદ કરી શકાય છે.

૪. **માહિતી મેળવવી :** આપેલ સમષ્ટિમાંથી પસંદ કરેલી રીતનો ઉપયોગ કરીને નિદર્શ લેવામાં આવે છે. આ નિદર્શ તપાસ દ્વારા માહિતી મેળવવાની જુદી જુદી રીતો પૈકી યોગ્ય રીતનો ઉપયોગ કરી માહિતી મેળવવામાં આવે છે.

પ્રત્યક તપાસ પરોક્ષ તપાસ કે પ્રશ્નાવલી ની રીતે મેળવેલ માહિતીની કાળજી પૂર્વક ચકાસણી કરવામાં આવે છે કે જેથી ચોકસાઈનું ધોરણ જાળવી શકાય.

૫. **અન્વેષકોની તાલીમ :** તપાસ માટે માહિતી એકત્રિત કરવા નિમાયેલી વ્યક્તિને અન્વેષક કહે છે. તપાસનો મુખ્ય આધાર આ અન્વેષકો ઉપર રહેલો હોય છે. તેથી અન્વેષકો પૂરતી લાયકાત ધરાવતા તેમ જ તાલીમબદ્ધ હોવા જોઈએ.

૬. **સંદર્ભસમય અને માહિતીસમય :** તપાસના પરિણામો જે સમયને લાગુ પડે તેને તપાસનો સંદર્ભસમય કહે છે. જયારે જે સમયગાળા દરમિયાન માહિતી એકત્રિત કરવામાં આવે તેને તપાસનો માહિતી સમય કહે છે.

૭. **પૃથક્કરણ અને નિર્ણય :** ઉપર મુજબ નિદર્શ લઈને તેના એકમોની તપાસ કરીને જે માહિતી મેળવવામાં આવે છે તેનું આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓ દ્વારા પૃથક્કરણ કરવામાં આવે છે અને તેને આધારે યોગ્ય નિર્ણયો લેવામાં આવે છે.આ નિર્ણયો સમષ્ટિને લાગુ પાડવામાં આવે છે.

8.6 ચાવીરૂપ શબ્દો

યાદચ્છિક : કોઈપણ પ્રકારના પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાત વગર

સ્તરિત : વિભાગો

પદિક : વ્યવસ્થિત

સમષ્ટિ મધ્યક : વ્યાખ્યાયિત એકમોનો સમૂહની સરેરાશ

સમષ્ટિ વિચરણ : વ્યાખ્યાયિત એકમોની સમૂશનુ ચલન

અનભિનત આગણક : સમષ્ટિના પ્રાચલ (સમષ્ટિની કિંમત) માટે કોઈપણ પૂર્વગ્રહ વગર લેવાયેલ શ્રેષ્ઠ કિંમત

8.7 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

(ક) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.

1. સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન એટલે શું ? તેમાં યાદચ્છિક નિદર્શ પસંદ કરવાની રીતો સમજાવો તેમજ તેના ફાયદા અને મર્યાદાઓ જણાવો.

2. સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ સમજાવો તેના ફાયદા અને મર્યાદાઓ જણાવો.

3. પદિક નિદર્શન પદ્ધતિ સમજાવો. ઉપરાંત તેના લાભ અને ગેરલાભ લખો.

4. સ્તરિત યાદચ્છિકનિદર્શનમાં પ્રમાણસર ફાળવણી ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

5. નિદર્શ તપાસનું આયોજન સમજાવો.

(ખ) ટૂંકનોંધ લખો.

i. સરળયાદચ્છિક નિદર્શન

ii. સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન

iii. પદિક નિદર્શન

7. 6 કદની સમષ્ટિમાં $\bar{y}_i$ ની કિંમતો 4, 9,11,3,8 અને 7 છે. પુરવણી રહિત ૨ કદના બધા જ શકય સરળ યાદચ્છિક નિદર્શો માટે નીચેનાં પરિણામો ચકાસો.

(i) $E\ (\bar{y})\ =\ \bar{Y}$ (ii) $V\ (\bar{y})\ = \frac{N-n}{N}\frac{s^2}{n}$

જવાબ (i) $\bar{Y}\ = 7$

(ii) $V\ (\bar{y})\ = \frac{46}{15}\ = 3.07$

આગળ જોયું 8. 14, 17, 8, 11 અને 5 કિંમતોની બનેલી એક સમષ્ટિ માંથી 3 કદના યાદચ્છિક નિદર્શો પુરવણી રહિત લેવામાં આવે છે. તો નીચેના પરિણામો ચકાસો.

(i) $E(\bar{y}) = \bar{Y}$ (ii) $V\ (\bar{Y}) = \frac{N-n}{N}\frac{s^2}{n}$

(iii) $E(s^2)\ =\ S^2$

જવાબ (i) $\bar{y}\ = 11$

(ii) $V(\bar{y}) = 3$

(iii) $s^2\ = 22.5$

9. 5 કદની સમષ્ટિ સમષ્ટિમાં $\bar{y}_i$ની કિંમતો 5, 7,9,8, અને 11 છે. તે{ાંથી પુરવણી રહિત બબ્બે કદના શકય નિદર્શો લઈ નીચેના પરિણામો ચકાસો.

(i) $E\ (\bar{y}) =\ \bar{Y}$ (ii) $V(\bar{y}) = \frac{N-n}{N}\frac{s^2}{n}$ (iii) $E\ (s^2) =\ S^2$

જવાબ (i) $\bar{y} = 8$

(ii) $V\ (\bar{y}) = 1.5$

(iii) $s^2\ = 5$

10. 4 કદવાળી એક સમષ્ટિમાં $\bar{Y}_i$ની કિંમતો 4,8,12અને 20 છે. તેમાંથી 2કદના શકય તમામ નિદર્શો પુરવણી સહિત લઈ સાબિત કરો કે નિદર્શ મધ્યકોનો મધ્યક એ સમષ્ટિ મધ્યકનો અનભિનત આગણક છે. તેમજ તેમનું વિચરણ પણ મેળવો.

$S^2 = \sum\frac{(y_{i-}\bar{y})2}{N}$ જવાબ. $\bar{y} = 11$

$S^2 = 35$

11. એક કંપનીમાં દૈનિક ધોરણે કામ કરતા 100 કર્મચારીઓ માંથી પાંચ કર્મચારીઓની દૈનિક આવકની તપાસ પરથી તેમની દૈનિક આવક (રૂપિયામાં) નીચે પ્રમાણે મળી

હતી. 225, 200, 250, 210, 240 આ માહિતી પરથી કર્મચારીઓની સમષ્ટિ મધ્યક અને વિચરણના આગણકો શોધો. નિદર્શ મધ્યકના વિચરણોનો આગણક મેળવો.

જવાબ (i) $\bar{Y} = 225$

(ii) $s^2 = 425$ $V(\bar{y}) = 80.75$

12. એક કૉલેજના 500 વિદ્યાર્થીઓ પૈકી 300 વિદ્યાથીઓ સ્નાતક કક્ષાના અને બાકીના અનુસ્નાતક કક્ષાના છે. દરેક સ્તરમાંથી સ્તરના કદના 10 ટકાના કદનો નિદર્શ લેવામાં આવે છે.નિદર્શ- તપાસના આધારે વિદ્યાર્થીઓએ સ્નાતક અને અનુસ્નાતક કક્ષાએ મેળવેલ ગુણસંબંધી માહિતી નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી સમષ્ટિના સ્તરિત મધ્યકનો આગણક શોધો. અને તેના વિચરણનું આગણન કરો.

સ્તર	નિદર્શ મધ્યક	નિદર્શનું વિચરણ
સ્નાતક	$y_1 = 70$	$s_1^2 = 200$
અનુસ્નાતક	$y_2 = 60$	$s_2^2 = 100$

જવાબ : (i) $\bar{Y}_{st} = 66$

(ii) $V(\bar{y}_{st}) = 2.88$

13. એક જિલ્લાના આવેલા ખેતરોનું સરેરાશ કદનું આગણન કરવા માટે ખેતરોને 4 સ્તરમાં વિભાજિત કર્યા છે. દરેક સ્તરમાંથી લેવામાં આવેલ સરળ યાદચ્છિક નિદર્શની વિગતો નીચે પ્રમાણે છે. ખેતરોના સરેરાશ કદ $\bar{Y}$નો અનભિનત આગણક અને તેનું વિચરણ મેળવો.

સ્તરો (એકરમાં)	સ્તરમાં આવેલ ખેતરોની સંખ્યા N_h	નિદર્શ સંખ્યા n_h	નિદર્શમાં પસંદ થયેલ ખેતરોના કદ (એકરમાં)
0-100	120	6	30,40,80,70,20,60
101-200	90	5	140, 150, 160, 120, 180
201- 300	60	6	220, 270, 240, 210, 260
301	30	4	310, 350, 320, 380

જવાબ(i) $V(\bar{y}_{st}) = 147$

$V(\bar{y}_{st}) = 29.62$

14. નીચેની માહિતી પરથી પ્રમાણસર ફાળવણી હેઠળ n = 100 કદના સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શ મધ્યકના વિચરણની કિંમત મેળવો.

સ્તર	1	2	3
N_h	4000	3000	3000
S_h	100	200	300

જવાબ(i) $E(\bar{y}_{st}) = 42.57$

15. એક સમષ્ટિના 10 અવલોકનોને બે સ્તરોમાં વહેંચવામાં આવે છે. પ્રથમ સ્તરના અવલોકનો 3,5, 4, 6, 12 છે. બીજા સ્તરનાં અવલોકનો 2,7,9,10,22 છે. સ્તરમાંથી બબ્બે એકમોના યાદચ્છિક નિદર્શ લેવામાં આવે તો બનતા સ્તરિત નિદર્શના મધ્યકનું વિચરણ મેળવો.

જવાબ $V(\bar{y}_{st}) = 5.025$

16. સમષ્ટિના એકમો નીચે પ્રમાણે છે.

સ્તર: I	6	7	10	12	15
સ્તર: II	8	9	11	16	

પ્રથમ સ્તરમાંથી 3 અને બીજા સ્તરમાંથી 2 એકમોનો યદચ્છ નિદર્શ લેવામાં આવે છે. આ માહિતી ઉપરથી સમષ્ટિ મધ્યક અને $V(\bar{y}_{st})$શોધો.

જવાબ $\bar{Y} = 10.44$

$V(\bar{y}_{st}) = 1.18$

17. નીચે આપેલ એક સમષ્ટિના અવલોકનો પરથી 4 કદવાળા શક્ય તમામ વ્યવસ્થિત (પદિક) નિદર્શો લઈ બનાવો કે $E(\bar{y}_{st}) = \bar{y}$ અને $V(\bar{y}_{st})$ પણ મેળવો.

ક્રમ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
અવલોકન	11	16	13	15	14	12	9	10	19	20	17	13	14	15	9	8	18	15	11	25

જવાબ$E(\bar{y}_y) = 14.2$

$V(\bar{y}_y) = 2.96$

18. 10 કદવાળી એક સમષ્ટિમાં y_iની કિંમતો 18, 20, 23, 25, 28, 29, 21, 26, 29 અને 35 છે. તેમાંથી બબ્બે કદના શક્ય બધા જ પદિક નિદર્શો મેળવો અને

i. પદિક નિદર્શ મધ્યક એ સમષ્ટિ મધ્યકનો અનભિનત આગણક છે તેમ દર્શાવો.

ii. પદિક નિદર્શ મધ્યકનું વિચરણ મેળવો.

જવાબ$(i)\bar{Y} = 25.4$

(ii) $V(\bar{y}_{sy}) = 13.64$

(ગ) યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.

1. જો N= 90 અને n= 6 હોય તો પદિક નિદર્શન અંતરની કિંમત શું થાય ?

(A) 540 (B) 180

(C) 54 (D) 15

2. 7 કદની સમષ્ટિમાંથી 2કદના યાદચ્છિક નિદર્શ પુરવણી સહિતની રીતે કેટલા લઈ શકાય ?

(A) 14 (B) 21

(C) 49 (D) 70

3. 10 એકમોની સાન્ત સમષ્ટિમાંથી 3 એકમોના પુરવણી રહિત શક્ય યાદચ્છિક નિદર્શોની સંખ્યા શોધો.

(A) 30 (B) 120

(C) 45 (D) 1000

4. જયારે સમષ્ટિ વિષમાંગ હોય ત્યારે કઈ નિદર્શન ———વાપરવામાં આવે છે.

(A) સ્તરિત યાદચ્છિક (B) સરળ યાદચ્છિક

(C) પદિક નિદર્શન (D) હેતુલક્ષી નિદર્શન

5. એક સમષ્ટિને બે સ્તરોમાં વહેંચી છે. જેમના એકમો અનુક્રમે $N_1 = 60$અને $N_1 = 40$ છે. જો તેમના સ્તરના મધ્યકો અનુક્રમે 20 અને 30 હોય તો સમષ્ટિ મધ્યક શોધો.

(A) 24 (B) 25

(C) 26 (D) 50

6. એક સમષ્ટિના અવલોકનો 100 છે. તેમાંથી દરેક 5 {ાં વ્યક્તિઓને નિદર્શમાં પસંદગી કરવામાં આવે છે. તો આ નિદર્શન પદ્ધતિ કઈ છે.

(A) સરળ યાદચ્છિક (B) પદિક નિદર્શન

(C) સ્તરિત યાદચ્છિક (D) નિયત હિસ્સા નિદર્શન

7. સમષ્ટિના દરેક એકમને નિદર્શમાં પસંદ થવાની તક બરાબર હોય તો તે શું થશે ?

(A) હેતુલક્ષી નિદર્શન (B) બિનસંભાવના નિદર્શન

(C) સંભાવના નિદર્શન (D) નિયત હિસ્સા નિદર્શન

8. સ્તરિત નિદર્શ ત્યારે લેવામાં આવે છે કે જયારે

(A) સમષ્ટિ સમરૂપ હોય (B) સમષ્ટિના એકમો ઉપલબ્ધતા

(C) વિશિષ્ટ સમૂહનો અભ્યાસ કરવાનો હોય

(D) સમષ્ટિ વિષમાંગ હોય

9. નિદર્શ પસંદ કરવાની એવી રીત કે જેમાં સમષ્ટિના બધા વર્ગોને પ્રમાણસર પ્રતિનિધિત્વ મળતું હોય તેને કઈ પદ્ધતિ કહે છે.

(A) પદિક નિદર્શન (B) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન

(C) સુવિધાનુસાર નિદર્શન (D) સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન

10. જો N= 300 અને n= 20 હોય તો પદિક નિદર્શ અંતર કેટલું થાય ?

(A) 10 (B) 15

(C) 20 (D) 30

Ans. (1) D (2) C (3) B (4) A (5) A
(6) B (7) C (8) D (9) D (10) B

8.8 સંદર્ભગ્રંથ

1. નિદર્શન પદ્ધતિઓ અને પ્રાયોગિક અભિકલ્પનાઓ લેખક : ડૉ. એસ. એસ. શાહ, યુનિવર્સિટી ગ્રંથ નિર્માણ બોર્ડ, ગુજરાત રાજ્ય.

2. ધંધાકીય સંશોધન પદ્ધતિઓ, લેખક ડૉ. મહેન્દ્ર મૈસુરીયા, ડૉ. દિનેશ એમ. પટેલ, અક્ષર પબ્લિકેશન, અમદાવાદ.

એકમ-9 ગણ

રૂપરેખા

9.0 ઉદ્દેશો :

આ એકમ બહુ ઉપયોગી એકમ છે તે શીખવાથી તમને ઘણા બધા કન્સેપ્ટ જાણવા - સમજવામાં ફાયદો થશે.

- ગણ સિદ્ધાંતથી સંભાવના સમજવામાં સરળતા રહેશે.
- ગણ સિદ્ધાંતથી નિદર્શ અને સમષ્ટિનો ખ્યાલ સ્પષ્ટ થશે.
- ભવિષ્યના અભ્યાસ માટે ખૂબ જ ઉપયોગી થશે ગણ સિદ્ધાંત.

9.1 પ્રસ્તાવના :

આ એકમનો મૂળભૂત હેતુ ગણની જુદી જુદી સંજ્ઞાઓના સ્પષ્ટ ખ્યાલ મેળવવાનો છે. ગણ સિદ્ધાંત સારી રીતે સમજવાથી સમષ્ટિ, નિદર્શ તેમજ સંભાવના ખૂબ જ સારી રીતે સમજવામાં અત્યંત ઉપયોગી થશે. સંભાવનાને સમજવામાં ગણ સિદ્ધાંતની સમજણ બહોળા પ્રમાણમાં ઉપયોગી થશે.

9.2 ગણનો ખ્યાલ અને તેના ઘટકો

સરળ ભાષામાં ગણનો અર્થ સમૂહ કે જથ્થો એવો થાય છે. મનુષ્ય એ સામાજિક પ્રાણી છે. સમાજમાં રહેવા માટે તેને 'જૂથ' કે 'સમુહ' માં રહેવું પડે છે. મનુષ્યોને મિત્રનું જૂથ હોય છે. તે જ રીતે વકીલોનું જૂથ, અધ્યાપકોનું જૂથ, ડૉક્ટરોનું જૂથ, પ્રાણીઓનું જૂથ, પુસ્તકોનું જૂથ વગેરે.. આમ, વ્યવહારમાં આપણે સજીવ અને નિર્જીવ વસ્તુઓનું જૂથ અથવા સમૂહ થતું જોઈએ છીએ.

નીચેના કેટલાક ઉદાહરણો પરથી ગણનો ખ્યાલ વધુ સરળતાથી સમજી શકીશું.

1. જુદાં જુદાં પ્રાણીઓનો ગણ
2. જુદાં જુદાં ફળોનો ગણ
3. અમદાવાદ શહેરની કોમર્સ કૉલેજોનો ગણ
4. મુંબઈની મીલોનું જૂથ

આ ઉદાહરણો સહેજ બારીકાઈથી તપાસીએ, તો માલુમ પડશે કે પ્રાણીઓના ગણ (1) માં કુતરું, બિલાડી આવી શકે. પરંતુ પોપટ કે કોયલ ના આવી શકે.

જુદાં જુદાં ફળોના ગણમાં ચીકુ, મોસંબી, નારંગી, અનાનસ આવી શકે પરંતુ દૂધી, રીંગણ, ફ્લાવર ના આવી શકે. અમદાવાદ શહેરની કોમર્સ કૉલેજોના ગણમાં નડિયાદ કે મહેસાણાની કોમર્સ કૉલેજો ના આવી શકે વગેરે.....

અહીં એક વાત સ્પષ્ટ કરવી જરૂરી છે કે કોઈપણ ગણમાં એક જ પ્રકારની વસ્તુઓ હોવી જોઈએ એવું નથી. દા.ત.

A = {ટેબલ, ખુરશી, ગુલાબ, પેન} પણ ગણ કહેવાય.

આમ, વ્યાખ્યાયિત વસ્તીઓના સમુહને ગણ કહેવામાં આવે છે. જે વસ્તુઓ ગણમાં આવેલી હોય તે દરેકને ગણનો ઘટક યા સભ્ય કહેવાય. દા.ત. ઉપરના ઉદાહરણમાં કુતરું, બિલાડી વગેરે ગણના ઘટકો છે.

ગણ ગણિતમાં ગણને સામાન્ય રીતે A, B, C ..... X, Y, Z વગેરે સંજ્ઞાઓ વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને તેમાં આવેલા ઘટકોને a, b, c ..... x, y, z સંજ્ઞાઓ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. કોઈ ઘટક x, ગણ A માં સમાયેલો છે. તે દર્શાવવામાં તેને $X \in A$ સંકેતથી દર્શાવાય છે. આ સંકેતને x ગણ A માં સમાયેલો છે તેમ વંચાય છે. (x belongs to A) તે જ રીતે જો ઘટક b ગણ B માં સમાયેલો નથી તે દર્શાવવા $b \neq B$ સંકેત વાપરીશું. આનો અર્થ ઘટક b, ગણ B માં સમાયેલો નથી. તે દર્શાવવા $b \notin B$ સંકેત વાપરીશું. આનો અર્થ ઘટક b, ગણ B સમાયેલો નથી તેમ થાય. (b dose not belong to B)

2. ગણને દર્શાવવાની રીત :

ગણ ગણિતમાં ગણને બે રીતે દર્શાવી શકાય છે.

(1) કોષ્ટક સ્વરૂપ (2) બંધારણ સ્વરૂપ

(1) કોષ્ટક સ્વરૂપ : આપેલા ગણમાં આવેલા દરેક ઘટકને { } કૌંસમાં લખીને ગણને દર્શાવી શકાય છે.

દા.ત. A : {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}

B : {અમદાવાદ, વડોદરા, સુરત, રાજકોટ}

C : {a, b, c, ...z}

D : {ચોપડી, ટેબલ, ખુરશી, કુતરો}

અહીં એ બાબત ધ્યાનમાં લેવી જોઈએ કે ગણનાં ઘટકોમાં ક્રમનું કાંઇ જ મહત્ત્વ નથી. તેથી તે ગમે તે ક્રમમાં લખી શકાય.

(2) બંધારણ સ્વરૂપ : જ્યારે ગણના ઘટકોમાં કોઈ એક સામાન્ય ગુણધર્મ આપેલો હોય ત્યારે ગણના કોઈ એક ઘટકને x વડે દર્શાવી, x જે ગુણધર્મનું પાલન કરતો હોય તે ગુણધર્મ દર્શાવાય છે. ત્યારે x અને તે ગુણધર્મ દર્શાવાય છે. ત્યારે x અને તે ગુણધર્મ વચ્ચે (:) આવું ચિહ્ન મૂકી { } કૌંસમાં લખવામાં આવે છે.

રીત (1) માં દર્શાવેલા ગણોને આ રીતમાં નીચે મુજબ લખાય.

A : {$x : x =$ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ}

B : {$x : x =$ ગુજરાત રાજ્યમાં આવેલા શહેરો}

C : $\{x : x =$ અંગ્રેજી ભાષાના મૂળાક્ષરો$\}$ વગેરે....

ઉપરની બંને રીતોમાંથી જરૂરિયાત પ્રમાણે યોગ્ય રીતની મદદથી ગણ દર્શાવી શકાય છે. વળી એ સ્પષ્ટ છે કે દરેક ગણ બંને રીતે રજુ થઈ શકે તે જરૂરી નથી.

9.3 ગણનાં પ્રકાર

જુદા-જુદા પ્રકારના ગણની વ્યાખ્યાઓ નીચે પ્રમાણે આપી શકાય.

1. સાન્ત ગણ : જે ગણમાં ઘટકોની સંખ્યા નિશ્ચિત હોય તે ગણને સાન્ત ગણ કહેવામાં આવે છે.

દા.ત. A = {4, 5, 6, 7, 9, 12}

B = $\{x : x =$ નવયુગ કૉલેજના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા$\}$

2. અનંત ગણ : જે ગણમાં ઘટકોની સંખ્યા અનિશ્ચિત હોય તે ગણને અનંતગણ કહેવામાં આવે છે.

દા.ત. પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ, આકાશમાં તારાઓનો ગણ વગેરે...

3. ખાલી ગણ : જે ગણમાં કોઈપણ ઘટક ન હોય તેને ખાલી ગણ કહેવામાં આવે છે. સંકેતમાં તેને વડે દર્શાવાય છે.

દા.ત. A = $\{x : x =$ પ્રિ. યુનિ. કોમર્સમાં સંસ્કૃતની પરીક્ષા આપનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા$\}$

B = {#} =

4. ઉપ ગણ : જો ગણ A અને B એવા હોય કે જેથી A ના બધા જ ઘટકો B નાં પણ ઘટક હોય ત્યારે A ને પણ B નો ઉપયોગ (Subset) કહેવામાં આવે છે. સંકેતમાં તેને $A \subset B$ અથવા $B \subset A$ વડે દર્શાવાય છે. અહીં એ નોંધાવું જોઈએ, A ના ઘટકો બધા B નાં ઘટકો હોય છે જે, પરંતુ B ના બધા જ ઘટકો A નાં ઘટકો હોય કે નાં પણ હોય વળી.

1. દરેક ગણ તેનો પોતાનો ઉપગણ છે.

(i) i.e. $A \subset B$

2. ખાલીગણ હંમેશા દરેક ગણનો ઉપગણ છે.

(i) i.e. $\subset A$

અહીં A અને ગણ A ના અનુચિત ઉપગણો કહેવાય જ્યારે તે સિવાયના A ના બાકીના ઉપગણોને ઉચિત ઉપગણો કહેવાય છે.

દા.ત. A = {1,2,3,} ગણનાં ઉપયોગો નીચે મુજબ થશે.

A, , {1}, {2}, {3}, {1,2}, {2,3}, {1,3}.

આમ, A અને અનુચિત ઉપગણો કહેવાય અને બાકીનાને ઉચિત ઉપગણો કહીશું.

5. તત્સમગણ : ગણ A નો પ્રત્યેક સભ્ય ગણ B માં આવેલો હોય અને ગણ B નો પ્રત્યેક સભ્ય ગણ A માં આવેલો હોય તો ગણ A અને ગણ B તત્સમ ગણ છે તેમ કહેવાય. સંકેતમાં A = B વડે દર્શાવાય છે.

6. અલગગણ : જો A અને B એ બે ગણ એવા હોય કે જેથી બંનેના ઘટકોમાંથી ઘટક સમાન ન હોય તો તે બંને ગણો અલગ ગણો કહેવાય છે.

7. **સાર્વત્રિક ગણ :** આપણે ઉપર જોયું કે કોઈપણ ગણને અનેક ઉપગણો હોઈ શકે અને જ્યારે આપણે ઉપગણોની વાત કરતા હોઈએ ત્યારે બધા જ ઉપગણો જે ગણમાં સમાયેલા હોય તે મૂળ ગણને સાર્વત્રિક ગણ કહેવામાં આવે છે. તેને સંકેતમાં $\cup$ વડે દર્શાવાય છે.

દા.ત. $\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7,8\}$આ બધા ગણો N = $\{x, x =$ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ$\}$ ના ગણમાં સમાઈ જાય છે. માટે ગણ N એ સાર્વત્રિક ગણ કહેવાય છે.

9.4 ગણ ઉપરની પ્રક્રિયાઓયોગગણ : જો બે ગણો A અને B આપેલા હોય તો ગણ A માં

હોય અથવા ગણ B માંહોય, તેવા પ્રત્યેક ઘટકોના ગણ C ને A અને B ગણનો યોગ ગણ કહે છે. તેને સંકેતમાં C =A$\cup$Bવડે દર્શાવીશું અને તેને 'A યોગ B' અને વેચાય છે.

દા.ત. $A = \{1,2,4,7,8\}B = \{3,5,10\}$

$A\cup B = \{1,2,3,4,5,7,8,10\}$

છેદગણ : જો A અને B કોઈપણ બે ગણો હોય તો ગણ A અને ગણ B બંનેમાં સામાન્ય હોય તેવા દરેક ઘટકોના ગણને A અને B નો છેદગણ કહે છે. સંકેતમાં તેને A$\cap$B વડે દર્શાવાય છે અને તે 'A છેદ B' એમ વંચાય છે.

દા.ત. $A = \{2,6,8,10,14,20\}$

$B = \{4,6,10,20,15\}$

$A\cap B = \{6,10,20\}$

તફાવત ગણ : જો A અને B કોઈપણ બે ગણ હોય તો ગણ A માં હોય અને ગણ B માં ન હોય તેવા ઘટકોથી બનતા ગણને B નો A પ્રત્યેનો તફાવત ગણ કહે છે અને તેને સંકેતમાં A – B વડે દર્શાવાય છે. જે A તફાવત B એમ વંચાય છે.

દા.ત. $A = \{2,4,6,8,10\}$

$B = \{4,8,12,16\}$

પૂરક ગણ : કોઈપણ ગણ A હોય અને તેને અનુવર્તી સાર્વત્રિક ગણ U હોય તો ગણ A માં ન હોય તેવા ગણ U ના બધા જ ઘટકોથી બનતા ગણને, U ની સાપેક્ષમાં A નો પૂરક ગણ કહેવામાં આવે છે અને સંકેતમાં તેને A′ વડે દર્શાવાય છે, જે A નો પૂરક ગણ એમ વંચાય છે.

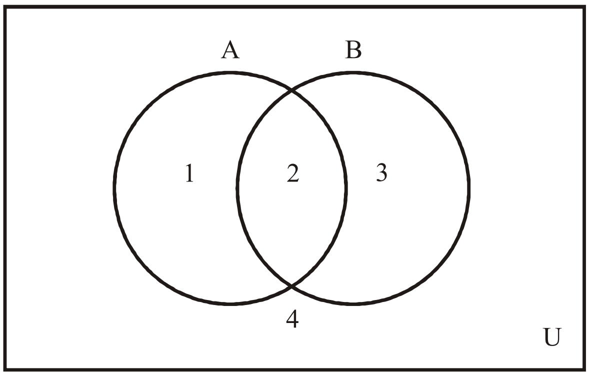
દા.ત. જો $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

અને $A = \{5,6,7,8\}$

તો $A' = \{1,2,3,4\}$

વેન આકૃતિઓ : ઘણીવાર જ્યાં શક્ય હોય ત્યાં ગણ અને તે વિશેના $A - B = \{2,6,10\}$ $B - A = \{12,16\}$ ખ્યાલોને સરળતાથી સમજવા આકૃતિઓનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ જાતની આકૃતિઓને વેન આકૃતિઓ કહે છે. વેન આકૃતિમાં સાર્વત્રિક ગણને ચોરસ કે લંબચોરસ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. સાર્વત્રિક ગણના ઉપગણોને ચોરસ કે લંબચોરસમાં પ્રમાણસર વર્તુળો દોરી દર્શાવવામાં આવે છે.

નીચેની આકૃતિમાં U, A અને B તથા A$\cup$B, A$\cap$B વગેરે દર્શાવેલ છે.



ગણ અને તેનો પ્રદેશ નીચે મુજબ થશે.

ગણ	વિસ્તાર
U	{1,2,3,4}
A	{1,2}
B	{2,3}
$A \cup B$	{1,2,3}
$A \cap B$	{2}
A'	{3,4}
A–B	{1}
B–A	{3}

આ ઉપરાંત નીચેના નિયમો પણ વેન આકૃતિથી સાબિત કરી શકાય.

સંગઠનના નિયમો :

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

વિભાજનના નિયમો :

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

દા.ત.

જો $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,3,5\}$, $C = \{3,5,6\}$ હોય તો નીચેનાની કિંમતો મેળવો.

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup (B \cap C)$, $A - B$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

$A \cap B = \{1,3,5\}$

$A \cup (B \cup C)$ મેળવવા માટે પહેલાં

$B \cap C = \{3,5\}$

હવે, $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4,5\}$

$A - B = = \{1,2,3,4,5\} - \{1,3,5\} = \{2,4\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C)$ માટે

$(A \cap B) = \{1,3,5\}$ અને $(A \cap C) = \{3,5\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,3,5\} \cup \{3,5\}$

$= \{1,3,5\}$

દ મોર્ગનના નિયમો :

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ઉપરની આકૃતિમાંથી,

ગણ	આકૃતિનો ભાગ
A	1,2
B	2,3
A'	3,4
B'	1,4
$A \cup B$	1,2,3
$(A \cup B)'$	4....... (i)
$A \cap B$	2
$(A \cap B)'$	1,3,4 .... (ii)
$A' \cap B'$	4 .... (iii)
$A' \cup B'$	1,3,4 .... (iv)

(i) અને (iii) પરથી $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) અને (iv) પરથી $(A \cap B) = A' \cup B'$

2. જો $A = \{x/x^2 - 9x + 20 = 0\}$ અને $B = \{x/x^3 - 3x^2 + 20x^2 = 0\}$

હોય તો સાબિત કરો કે A અને B અલગ ગણ છે.

$A = \{x/(x-4)(x-5) = 0\}$

$\{x/x = 4,5)$

$A = \{4, 5)$

અને

$B = \{x/(x-1)(x-2) = 0\}$

$\{x/x = 0,1,2,)$

$B = \{0,1,2)$

આમ, $A = \{4,5\}$ અને $B = \{0,1,2\}$ થાય.

બંનેમાં સામાન્ય ઘટક નથી.

બંને અલગ ગણ છે.

3. જો $x = \{x/x \in N$ અને $x<10\}$, $Y = \{x/x \in N$ અને $x>6\}$

$Z = x/x \in N$ અને x એ 5ની ગુણક સંખ્યા હોય$\}$ હોય તો $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \cap Y \cap Z$ શોધો.

$X \cup Y$, $X \cap Y$ અને $X \cap Y \cap Z$ શોધો.

આપેલા ગણોને કોષ્ટક સ્વરૂપમાં દર્શાવતા,

$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$Y = \{7,8,9,10,11,.....\}$

$Z = \{5,10,15,20,....\}$

$X \cup Y = \{1,2,3,...9\} \cup \{7,8,9,10,11,....\}$

$= \{1,2,3,4,.....\}$

$X \cap Y = \{1,2,3,4,...9\} \cap \{7,8,9,10,11,....\}$

$= \{7,8,9\}$

વળી $X \cap Y \cap Z = (X \cap Y) \cap Z$

$= \{7,8,9\} \cap \{5,10,15,20,....\}$

$=$

9.5 અભ્યાસ / સ્વાધ્યાય / તમારી પ્રગતિ ચકાસો

1. નીચેના ગણોને બંધારણ સ્વરૂપમાં ગોઠવો.

i. $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

ii. $A = \{4,5\}$

iii. 5 થી વિભાજન હોય તેવી ધનપૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ

iv. {અર્થશાસ્ત્ર, વાણિજ્ય, સંચાલન, એકાઉન્ટન્સી, અંગ્રેજી}

v. {લાલ, પીળો, વાદળી}

2. નીચેના ગણોને કોષ્ટક સ્વરૂપમાં ગોઠવો.

i. {2m + 3 જ્યાં m ધનપૂર્ણાંક છે}

ii. {x : x, 30 કરતા ઓછા દિવસવાળો મહિનો}

iii. {x : $x \in N$ અને $x^2 < 26$}

iv. {x : x વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય એવી પૂર્ણાંક એવી સંખ્યાઓ}

3. નીચે આપેલા ગણોના માત્ર પ્રકાર લખો.

i. {x : x વાસ્તવિક સંખ્યાઓ}

ii. {ગુજરાતની નદીઓનો ગણ}

iii. {x જ્યાં $x > 10$, અને $x < 5$}

iv. {4 અને 5 વચ્ચે આપેલી અપૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ}

v. {6 અને 7 વચ્ચેની પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ}

4. $\{1,2,3\}$ ના બધા જ ઉપગણો લખો.

5. જો $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{2,3,4\}$ અને $D = \{4,1\}$ હોય તો નીચેના વિધાનો સત્ય છે કે મિથ્યા તે નક્કી કરો.

(i) $A \subset B$ (ii) $D \subset B$ (iii) $B \subset C$ (iv) $C \not\subset A$ (v) $2 \in A$ (vi) $C \not\subset A$.

6. જો $A = \{3,5,7,9\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ અને $C = \{1,3,6,8\}$ હોય તો $A \cup (B \cap C)$ અને $A \cap (B \cup C)$ મેળવો.

7. જો $A = \{x : x^2 - 10x + 24 = 0\}$ અને $B = \{x : x^2 - 8x + 12 = 0\}$ હોય તો $A \cup B$ અને $A \cap B$ મેળવો.

8. જો સાર્વત્રિક ગણ $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ હોય અને તેના ઉપગણો $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ અને $C = \{3,4,5\}$ હોય તો A', B' અને $(A \cup B)'$ શોધો.

9. જો $A, A', \cup$ અને નો અર્થ સામાન્ય સંકેત મુજબ હોય અને $A \subset U$ હોય તો નીચેનાની કિંમત લખો.

$A \cap U, A \cup \ , A \cup A', A \cap A', \ \cap A.$

10. વેન આકૃતિથી સાબિત કરો.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap C.$

11. નીચે આપેલી માહિતી સાચી છે કે ખોટી ?

(i) $\{1\} \in \{1,2\}$

(ii) $1 \subset \{1,2\}$

(iii) $\{1\} \in \{1,2\}$

(v) $\{1,2\} \subset \{1,2,1,2,1\}$

(vi) $\subset \{\ \}$

(vii) $\in \{\ \}$

(iv) $1 \in \{1,2\}$

12. જો $A = \{x / x^2 + x - 12 = 0\}$ અને $B = \{x / x^3 - 5x^2 + 6x = 0\}$ હોય તો $A \cup B$, $A \cap B$ અને $A - B$ ની કિંમત મેળવો.

13. A, B અને C એવા ત્રણ ગણ શોધો કે જેથી $A \cap B = \ $, $B \cap C \neq \ $, $C \cap A \neq \ $ અને $A \cap B \cap C = \ $ થાય.

જવાબ :

1. (i) $\{x : x \in N$ અને $1 \le 8 \le 8\}$

(ii) $\{x : x^2 - 9x + 20 = 0\}$

(iii) $\{x : x = 5n$ અને $n \in N\}$

(iv) $\{x : x =$ પ્રથમ વર્ષ બી. કોમના વિષયો$\}$

(v) $\{x : x$ મૂળ રંગ$\}$

2. (i) $\{5,7,9,11,13\}$

(ii) {ફેબ્રુઆરી}

(iii) $\{1,2,3,4,5\}$

(iv) $\{3,9,15,21,27......\}$

3. (i) અનંત, (ii) સાન્ત, (iii) ખાલી ગણ, (iv) અનંત, (v) ખાલી ગણ

4. , {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}

5. (i) મિથ્યા, (ii) મિથ્યા, (iii) મિથ્યા, (iv) સત્ય, (v) મિથ્યા

6. (i) $A \cup (B \cup C) = \{3,5,7,9,6,8\}$

   (ii) $A \cap (B \cup C) = \{3\}$

7. {2,4,6}, {6}

8. {6,7,8}, {1,3,5,7}, {7}

9. U, A, A, U, ,

11. (i) ખોટું, (ii) ખોટું, (iii) સાચું, (iv) સાચું, (v) સાચું (vii) સાચું

12. {–4,0,2,3}, {3}, {–4}

13. A = {1,2,3}, B = {3,4}, C = {4,2}

એકમ 10

ક્રમચય, સંચય અને દ્વિપદી વિસ્તરણ (પ્રમેય)

Permutation and Combination and Binomial Expanssion (Theorem)

10.0 ઉદ્દેશ :

ક્રમચય અને સંચય પ્રકરણનો મુખ્ય ઉદ્દેશ વિદ્યાર્થીઓને ક્રમચય-સંચય અંગેની જાણકારી પૂરી પાડવી અને તે અંગેની વ્યહારિક તેમજ ગાણિતિક સૂઝ પેદા કરવાનો છે.

10.1 પ્રાસ્તાવિક :

સામાન્ય રીત ક્રમચય - સંચય એ બંને શબ્દો વધુ પ્રચલિત નથી તે બંને શબ્દો જુદા-જુદા છે. તેમાં ક્રમચયનો અર્થ ગોઠવણી અને સંચયનો અર્થ પસંદગી કરવામાં આવે છે. તેને અંગ્રેજીમાં Permutations અને Combination તરીકે બોલવામાં આવે છે. સંભાવનાના અભ્યાસમાં ક્રમચય સંચય ખૂબ મહત્ત્વનો ભાગ ભજવે છે.

10.2 ક્રમચય :

10.2.1 ક્રમચયનો અર્થ :

ઉપર જોયા મુજબ "ક્રમચય એટલે ગોઠવણી". ક્રમચયની સમજૂતી નીચેના ઉદાહરણ ઉપરથી સમજીશું.

ધારો કે, બાબા સાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીમાં ત્રણ પ્રોફેસરો છે તે પૈકી એક પ્રોફેસરને કુલપતિ અને બીજા એક પ્રોફેસરને ઉપ-કુલપતિ તરીકે નીમવા હોય તો આ ગોઠવણી કેટલી રીતે થઈ શકે ? ધારો કે ત્રણ પ્રોફેસરોને A, B અને C વડે દર્શાવીએ તો તેઓની ગોઠવણી નીચે પ્રમાણે થઈ શકે.

(1) A ને કુલપતિ અને B ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

(2) A ને કુલપતિ અને C ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

(3) B ને કુલપતિ અને A ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

(4) B ને કુલપતિ અને C ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

(5) C ને કુલપતિ અને A ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

(6) C ને કુલપતિ અને B ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

આમ, 3 પ્રોફેસરોમાંથી 2 પ્રોફેસરોની ગોઠવણી 6 રીતે કરી શકાય. બીજી રીતે જોતાં કુલપતિની પસંદગી A, B અને C પૈકી ગમે તે એક એમ કુલ ત્રણ રીતે કરી શકાય. આ દરેક રીત સાથે ઊપ-કુલપતિની પસંદગી બાકીના બે પ્રોફેસરો પૈકી ગમે તે એક એમ કુલ બે પ્રકારે કરી શકાય. તેથી કુલપતિ અને ઊપ-કુલપતિની નિમણૂંકની કુલ રીતો $= 3 \times 2 = 6$.

તેવી જ રીતે એક વ્યક્તિને ઘરેથી નોકરી ઉપર જવા માટે ચાર જુદા જુદા રસ્તાઓ P_1, P_2, P_3 અને P_4 છે. તે કોઈપણ એક રસ્તે નોકરી ઉપર જશે અને તે સિવાયના બીજા કોઈ પણ રસ્તે પાછો ફરશે. તો તેના ઘરેથી નોકરી ઉપર જઈ પાછા ફરવાની જુદી જુદી કેટલી રીતો થતી હશે ?

અહીં ચાર જુદા જુદા રસ્તાઓ P_1, P_2, P_3 અને P_4 છે. જો તે વ્યક્તિ P_1 રસ્તે ઘરેથી નોકરી ઉપર જશે તો બાકીના ત્રણ રસ્તા P_2, P_3, P_4 રસ્તે પાછો ફરશે. તે P_2 રસ્તે ઘરેથી નોકરી પર જશે તો P_1, P_3, P_4 એમ કુલ ત્રણ

રસ્તે પાછો ફરી શકશે. તેવી જ રીતે જો તે P_3 રસ્તે જશે તો પણ બાકીના ત્રણ રસ્તે પાછો ફરશે અને P_4 રસ્તે જશે તો પણ બાકીના ત્રણ રસ્તે પાછો ફરશે. આમ ઘરેથી નોકરી ઉપર જવાના કુલ ચાર રસ્તા અને પરત ફરવાના કુલ ત્રણ રસ્તા. ફરવાની કુલ ક્રિયાના કુલ પ્રકારો = $4 \times 3 = 12$.

આમ ઘરેથી નોકરી ઉપર જવાના અને પરત ફરવાની ક્રિયા નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.

$$\begin{array}{llll} P_1P_2 & P_2P_1 & P_3P_1 & P_4P_1 \\ P_1P_3 & P_2P_3 & P_3P_2 & P_4P_2 \\ P_1P_4 & P_2P_4 & P_3P_4 & P_4P_3 \end{array}$$

આ ગોઠવણીમાં પહેલો અક્ષર ઘરેથી નોકરી જવાનો અને બીજો અક્ષર પરત ફરવાની ક્રિયાનો છે. ઉપરના ઉદાહરણને આધારે નીચે પ્રમાણોનો સિદ્ધાંત તારવી શકાય.

"ધારો કે કોઈ એક ક્રિયા m રીતે થઈ શકે તેમ હોય અને તેમાંથી પ્રત્યેક માટે બીજી ક્રિયા n રીતે થતી હોય તો એક પછી એક એમ બંને ક્રિયાઓ સાથે થવાની કુલ રીતો = $m \times n$ થાય."

ઉપરના સિદ્ધાંત ઉપરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે ક્રમચય એ ગોઠવણી છે. એટલે કે ક્રમવાર રચના છે. તેને વિન્યાસ તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

10.2.2 ક્રમચયની વ્યાખ્યા અને સૂત્ર :"ધારો કે n જુદી જુદી વસ્તુઓ આપેલી હોય અને તેમાંથી r વસ્તુઓ ક્રમમાં ગોઠવવાની હોય તો ગોઠવણીની
કુલ રીતોને ક્રમચય અથવા રૈખિક ક્રમચય કહે છે." તેને સંકેતમાં np_r વડે દર્શાવવામાં આવે છે તે નીચેના સૂત્રની મદદથી શોધી શકાય.

$$nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

જ્યાં $n! = 1$ થી n સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (ક્રમ ગુણિત n)

જેને અંગ્રેજીમાં (n factorial) કહેવાય.

$\therefore\ n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots\ldots \times (n-1) \times n$

$\therefore\ n! = n(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots \times 2 \times 1.$

$(n-\mathrm{r})! = (n-\mathrm{r})\ (n-\mathrm{r}-1)\ \ldots\ldots\ldots \times 2 \times 1.$

હવે, ધારો કે $n = 5$ અને $r = 2$ હોય, તો

$n! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$(n - r)! = (5-2)! = 3! = 3 \times 2 \times 1$

$$\therefore\ 5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 20 \text{ થાય.}$$

કેટલાંક પરિણામો

(1) $nP_n = n!$

(2) $0! = 1$

(3) $nP_0 = 1$

ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 : કિંમત શોધો.

(1) $8P_6$ (2) $7P_2$ (3) $19P_4$

(4) $5P_5$ (5) $9P_0$

જવાબ :

(1) $8P_6 = nP_r$ $\therefore$ $n = 8$ અને $r = 6$ થાય.

$$nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{8\,!}{(8-6)!} = \frac{8\,!}{2\,!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2\,!}{2\,!}$$

$$= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 20,\ 160$$

અથવા (સીધી ગણતરી) બીજી રીત

$8P_6$ શોધવું છે.

એટલે કે

nP_r આપેલું હોય તો n થી શરૂ કરી r વખત ગુણાકાર કરો.

એટલે કે 8 થી શરૂ કરી 6 વખત ગુણાકાર કરો.

$\therefore$ $8P_6 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$

$= 20,\ 160$ (છ વખત ઉલટેથી ગુણાકાર કરો.)

(2) $7P_2 = \frac{n\,!}{(n-r)!} = \frac{7\,!}{(7-2)\,!} = \frac{7\,!}{5\,!} = \frac{7 \times 6 \times 5\,!}{5\,!} = 42$

અથવા (સીધી ગણતરી) બીજી રીત

$7P_2 = 7 \times 6 = 42$

(3) $19P_4 = \frac{19\,!}{(19-4)!} = \frac{19\,!}{15\,!} = \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15\,!}{15\,!}$

$= 19 \times 18 \times 17 \times 16 = 93{,}024$

અથવા (સીધી ગણતરી) બીજી રીત

$19P_4 = 19 \times 18 \times 17 \times 16$ (ચાર વખત)

$= 93{,}024$

(4) $5P_5 = \frac{5\,!}{(5-5)!} = \frac{5\,!}{0\,!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1\,!}{1} = 120$

અથવા (સીધી ગણતરી) બીજી રીત

$5P_5 = 5\,!$ $\quad\quad \therefore\ (nP_n = n\,!)$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 120$

(5) $9P_0 = \dfrac{9\,!}{(9-0)!} = \dfrac{9\,!}{9\,!} = 1$

ઉદાહરણ-2 : નીચે આપેલા સમીકરણોમાંથી n ની કિંમત શોધો.

(1) $nP_2 = 42$

(2) $nP_3 = 120$

જવાબ :

(1) $nP_2 = 42$

$\dfrac{n\,!}{(n-2)\,!} = 42$ $\quad\quad \therefore\ nP_r = \dfrac{n\,!}{(n-r)\,!}$

$\therefore\ \dfrac{n(n-1)\,(n-2)\,!}{(n-2)\,!} = 42$

$\therefore\ n(n-1) = 42$

$\therefore\ n(n-1) = 7 \times 6$

$\therefore\ 7(7-1) = 7 \times 6$

$\therefore\ n = 7$

	2	42
6	3	21
7	7	7
	1	1

(∵ અવયવ પાડતાં)

અથવા બીજી રીત

${}_nP_2 = 42$

$n(n-1) = 42$

$\therefore\ n^2 - n = 42$

$\therefore\ n^2 - n = 42 = 0$

$\therefore\ n^2 - 7n + 6n - 42 = 0$

$\therefore\ n(n-7) + 6(n-7) = 0$

$\therefore\ (n-7) = 0$ અથવા $(n+6) = 0$

$\therefore\ n = 7$ અથવા $n = -6$ $\quad\quad$ (ઋણ અશક્ય)

$\therefore\ n = 7$

(2) $nP_3 = 120$

$\dfrac{n\,!}{(n-3)\,!} = 120$

$$\frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,!}{(n-3)\,!} = 120$$

$\therefore\ n(n-1)\ (n-2) = 120$

$\therefore\ n(n-1)\ (n-2) = 6 \times 5 \times 4$

$\therefore\ 6(6-1)\ (6-2) = 6 \times 5 \times 4$

$\therefore\ n = 6$

4	2	120
	2	60
6	2	30
	2	15
5	5	5
	1	1

$\therefore\ 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$2 \times 2 = 4,\ 5, \qquad 2 \times 3 = 6$

$\therefore\ 6 \times 5 \times 4 = 120$

ઉદાહરણ-3 : $56n\,! = 8\,!$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$56 \times n\,! = 8\,!$

$\therefore\ 56 \times n\,! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$$\therefore\ n\,! = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{56}$$

$$\therefore\ n\,! = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{8 \times 7}$$

$\therefore\ n\,! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$\therefore\ n\,! = 6\,!$

$\therefore\ n = 6$

ઉદાહરણ-4 : નીચેના સમીકરણ ઉપરથી n ની કિંમત શોધો.

$\therefore\ (n + 1)P_3 = 11\ .\ nP_2$

જવાબ :

$(n+1)P_3 = 11 \times nP_2$

$\therefore\ (n+1) = 11 \times n$

$\therefore\ (n+1) = 11$

$\therefore\ n = 11 - 1$

$\therefore\ n = 10$

ઉદાહરણ-5 : જો $\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}=\frac{n}{11!}$ હોય તો *n* ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}=\frac{n}{11!}$

$\therefore\ \frac{1}{9!}+\frac{1}{10\times 9!}=\frac{n}{11\times 10\times 9!}$ ($\therefore \frac{1}{9!}$ કોમન લેતાં)

$\therefore\ \frac{1}{9!}\left[1+\frac{1}{10}\right]=\frac{1}{9!}\left[\frac{n}{11\times 10}\right]$ ($\therefore \frac{1}{9!}$ દૂરકરી લ.સા.અ. લેતા)

$\therefore\ \frac{10+1}{10}=\frac{n}{11\times 10}$

$\therefore\ \frac{11}{10}\times\frac{11\times 10}{1}=n$

$\therefore\ n = 121$

ઉદાહરણ-6 : 3, 4, 6, 7, 9, 10 એમ કુલ છ આંકડામાંથી કોઈપણ પાંચ જુદા જુદા આંકડા પસંદ કરી પાંચ આંકડાની કુલ કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય ?

જવાબ :

$n = 6$ $\therefore$ કુલ છ આંકડા છે 3, 4, 6, 7, 9, 10

$r = 5$ $\therefore$ પાંચ આંકડાની સંખ્યા બનાવવાની છે.

$\therefore$ ગોઠવણીના પ્રકારો = nP_r

$= 6P_5 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$

ઉદાહરણ-7 : 80432 સંખ્યાના બધા જ અંકોનો ઉપયોગ કરી પાંચ આંકડાની કુલ કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય.

જવાબ :

અહીં પાંચ આંકડાની સંખ્યા બનાવવાની છે. તેથી દરેક સંખ્યાને પ્રથમ સ્થાને મુકીએ તો 8, 4, 3, 2 મુકીને પાંચ અંકની સંખ્યા બનાવી શકાય. પરંતુ 0 ને પ્રથમ સ્થાને મુકવાથી ચાર અંકની સંખ્યા જ મળશે. તેથી 0 સિવાયના ચાર અંકોને પ્રથમ સ્થાને ગોઠવતાં ગોઠવણીના પ્રકાર = 4

પ્રથમ સ્થાનની પસંદગી થયા બાદ બીજા સ્થાને બાકીના ચાર અંકો (શૂન્ય સહિત) ગોઠવતાં ગોઠવણીના પ્રકાર = 4

પ્રથમ અને બીજા સ્થાનની પસંદગી થયા બાદ ત્રીજા સ્થાને બાકીના ત્રણ અંકો ગોઠવતાં ગોઠવણીના પ્રકાર = 3

તેવી જ રીતે,

ચોથા સ્થાને બાકીના બે અંકોની ગોઠવણીના પ્રકાર = 2

પાંચમા સ્થાને બાકીના એક અંકની ગોઠવણીના પ્રકાર = 1

$\therefore$ પાંચ આંકડાની કુલ સંખ્યા = $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$ સંખ્યાઓ બને.

ઉદાહરણ-8 : ''POEM'' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી કુલ કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ :

આપેલ શબ્દમાં કુલ ચાર અક્ષરો છે. બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી બનતા કુલ શબ્દોની સંખ્યા

$= {}_4P_4 = 4\,! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

અહીં એક શબ્દ POEM આપેલો છે. જે બાદ કરતાં બનાવી શકાતા નવા શબ્દોની સંખ્યા = $24 - 1 = 23$

ઉદાહરણ-9 : 'VOLUME' શબ્દનો ઉપયોગ કરી વ્યંજનો એકી સ્થાને જ આવે તે શરતે કુલ કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય.

જવાબ :

અહીં VOLUME શબ્દમાં કુલ 6 અક્ષરો આવેલા છે. તેમાંથી કુલ 3 વ્યંજનો (V, L, M) આવેલા છે.

$\therefore$ વ્યંજનોની ગોઠવણી = $3P_3 = 3\,! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

અને બાકીના ત્રણ શબ્દો બેકી સ્થાને ગોઠવતાં ગોઠવણીના પ્રકારો = $3P_3 = 3\,! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$\therefore$ કુલ શબ્દોની સંખ્યા = $6 \times 6 = 36$

ઉદાહરણ-10 : 'LOGARITHM'ની મદદથી બધા અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને નવ અક્ષરના કુલ કેટલાં નવા શબ્દો બનાવી શકાય ? તેમાંથી L પ્રથમ સ્થાને અને M છેલ્લે સ્થાને આવે તેવા કુલ કેટલાં નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ :

LOGARITHM શબ્દમાં કુલ 9 અક્ષરો છે. તેનો ઉપયોગ કરી 9 અક્ષરના શબ્દોની કુલ ગોઠવણી

$= 9P_9 = 9\,! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$

અહીં એક શબ્દ આપેલો છે તે બાદ કરતાં નવ અક્ષરના કુલ નવા શબ્દો = $362880 - 1 = 362879$

L પ્રથમ સ્થાને અને M છેલ્લે સ્થાને રાખવામાં આવે તો પ્રથમ સ્થાન $1P_1 = 1! = 1$ રીતે અને છેલ્લું સ્થાન $1P_1 = 1! = 1$ રીતે અને બાકીના 7 સ્થાન $7P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ રીતે ગોઠવી શકાય.

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકાર = $1 \times 1 \times 5040 = 5040$

એક શબ્દ આપેલો છે તે બાદ કરતાં,

નવા શબ્દોની કુલ સંખ્યા = $5040 - 1 = 5039$

ઉદાહરણ-11 : 'ENGLISH' શબ્દનો ઉપયોગ કરી E પ્રથમ સ્થાને આવે તે રીતે કુલ કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ :

'ENGLISH' શબ્દમાં કુલ 7 અક્ષરો આવેલા છે. તેમાંથી E પ્રથમ સ્થાને મુકવામાં આવે તો તેને $1P_1 = 1$ રીતે ગોઠવાય અને બાકીના 6 અક્ષરોને $6P_6 = 6!\ 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ રીતે ગોઠવાય.

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકાર = $1 \times 720 = 720$

એક શબ્દ આપેલો છે જે બાદ કરતાં E પ્રથમ સ્થાને આવે તેવા

કુલ નવા શબ્દોની સંખ્યા = 720 – 1 = 719

ઉદાહરણ-12 : પુસ્તક ગોઠવતી એક અભરાઈ ઉપર સમાજશાસ્ત્રના 5, અર્થશાસ્ત્રના 4 અને મનોવિજ્ઞાનના 2 પુસ્તકો એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી દરેક વિષયના પુસ્તકો એક સાથે આવે, તો ગોઠવણી કુલ કેટલી રીતે કરી શકાય ?

જવાબ :

સમાજશાસ્ત્રના 5 પુસ્તકોને $5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

અર્થશાસ્ત્રના 4 પુસ્તકોને $4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

અને મનોવિજ્ઞાનના 2 પુસ્તકોને $2P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$

ઉપરાંત ત્રણે વિષયોને સાથે $3P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ પ્રકારે ગોઠવી શકાય.

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો (ક્રમચયો) $= 120 \times 24 \times 2 \times 6 = 34560$

ઉદાહરણ-13 : એક સ્પર્ધામાં ચાર સ્ત્રીઓ અને ચાર પુરૂષો એક હારમાં એવી રીતે ગોઠવવા છે કે જેથી કોઈપણ બે પુરૂષો કે બે સ્ત્રીઓ એક સાથે ન આવે તો ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો શોધો.

જવાબ :

ધારો કે, સ્ત્રીને પ્રથમ સ્થાને રાખીએ તો ગોઠવણી નીચે મુજબ થશે.

સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી, પુ.

$\therefore$ ચાર સ્ત્રીઓને પ્રથમ, ત્રીજા, પાંચમા અને સાતમા સ્થાને ગોઠવીએ તો ગોઠવણીના ક્રમચયો

$= 4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

અને

ચાર પુરૂષોને બીજા, ચોથા, છઠ્ઠા અને આઠમા સ્થાને ગોઠવીએ તો ગોઠવણીના ક્રમચયો

$= 4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$\therefore$ સ્ત્રી પ્રથમ સ્થાને આવે તેવા ગોઠવણીના પ્રકાર $= 24 \times 24 = 576$

હવે તેવી જ રીતે,

પુરૂષને પ્રથમ સ્થાને રાખીએ તો ગોઠવણીની મુજબ થઈ શકે.

પુ., સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી

$\therefore$ ચાર પુરૂષોને $4P_4 = 4! = 24$ અને

ચાર સ્ત્રીઓને $4P_4 = 4! = 24$

$\therefore$ પુરૂષ પ્રથમ સ્થાને આવે તેવા ગોઠવણીના પ્રકાર $= 24 \times 24 = 576$

કોઈપણ બે સ્ત્રી કે બે પુરૂષો એક સાથે ન આવે તેવી ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો

$= 576 + 576$

$= 1152$

ઉદાહરણ-14 : એક ગૃપ ફોટા માટે હારબંધ ગોઠવેલી ખુરશીઓમાં 1 કેપ્ટન, 4 બોલર, 4 બેસ્ટમેન અને 2 અમ્પાયર મળી કુલ અગિયાર વ્યક્તિને ગોઠવવાના છે. કેપ્ટનને વચ્ચેની ખુરશી પર બેસાડવાના છે, બોલરોને પ્રત્યેક

છેડાની બબ્બે ખુરશીઓમાં બેસાડવાના છે અને કોઈપણ અમ્પાયરની ખુરશી બોલરની બાજુમાં ન આવે તે રીતે ગોઠવણ કરવી હોય તો તે ગોઠવણી કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ?

જવાબ :

B	B	X			C			X	B	B
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

વચ્ચેની ખુરશીમાં 1 કેપ્ટનને $1! = 1$ રીતે ગોઠવી શકાય.

4 બોલારોને બંને છેડા ઉપર $4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ રીતે બેસાડાય.

ખુરશી 3 અને 9માં અમ્પાયર બેસી ન શકે એટલે કે બાકીની 4, 5, 7, 8 નંબરની 4 ખુરશીમાં 2 અમ્પાયર $4P_2 = 4 \times 3 = 12$ રીતે બેસી શકશે અને બાકી રહેલ 4 ખુરશીમાં 4 બેટ્સમેનો $4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ રીતે બેસી શકશે.

$\therefore$ કુલ ક્રમચયો (ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો)

$= 1 \times 24 \times 12 \times 24$

$= 6912$

1.3 સમરૂપ વસ્તુઓના ક્રમચયોનો અર્થ અને ઉદાહરણો :

અર્થ :

ધારો કે, કુલ ક્રમચયો $= x$ છે. આમાંના કોઈ એક ક્રમચયમાં પ્રથમ પ્રકારની p સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ તેમના p સ્થાનોમાં ફેરબદલી કરીને $p\,!$ રીતે ગોઠવી શકાય. તે જ પ્રમાણે કોઈ બીજા ક્રમચયમાં બીજા પ્રકારની q સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ તેમના q સ્થાનોમાં ફેરબદલી કરીને q! રીતે ગોઠવી શકાય તો તે વસ્તુઓના કુલ ક્રમચયો $= x\,p!\,q!$ થાય પરંતુ n વસ્તુઓ જો જુદા જુદા સ્વરૂપે હોય તો તેમના કુલ ક્રમચયો $= n$ i થાય.

એટલે કે, $x\,p!\,q! - n!$ થાય.

$$\therefore \text{ કુલ ક્રમચયો } x = \frac{n!}{p!\,q!}$$

ઉદાહરણ-15 : 'ALLAHABAD' શબ્દના બધા અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને કુલ કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય.

જવાબ :

અહીં કુલ 9 અક્ષરો છે. જેમાંથી 'A' 4 વખત આવે છે અને 'L' 2 વખત આવે છે.

$\therefore n = 9 \quad p = 4, q = 2$

$$\text{કુલ ક્રમચયો (શબ્દો) } x = \frac{n!}{p!\,q!} = \frac{9!}{4!\,2!}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 9 \times 8 \times 7 \times 3 \times 5$$

$x = 7560$

ઉદાહરણ-16 : 'LITERATURE' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને કુલ કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ :

અહીં કુલ 10 અક્ષરો છે. જેમાંથી 'T' 2 વખત, 'E' 2 વખત અને 'R' 2 વખત છે.

$\therefore\ n = 10,\ \ p = 2,\ \ q = 2,\ \ r = 2$

કુલ ક્રમચયો (શબ્દો) $x = \dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$ (ઉદા. 15 અને 16ના સૂત્રો ચેક કરીને સમજો)

$$= \frac{10!}{2!\ 2!\ 2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1\ .\ 2 \times 1\ .\ 2 \times 1} = 4{,}53{,}600$$

$\therefore$ કુલ નવા શબ્દો $= 4{,}53{,}600 - 1 = 4{,}53{,}599$

ઉદાહરણ-17 : 'BOOK' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય.

જવાબ :

અહીં કુલ ચાર શબ્દો છે. જેમાં 'O' 2 વખત છે.

$\therefore$ કુલ ક્રમચયો $= \dfrac{4}{2!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$

કુલ નવા ક્રમચયો $= 12 - 1 = 11$

10.4 પુનરાવર્તિત ક્રમચય અને ઉદાહરણો :અર્થ :

ધારો કે n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓના ક્રમચયો (ગોઠવણી) એવી રીતે કરવાના હોય કે જેથી કોઈપણ વસ્તુ ગમે તેટલી વખત આવી શકે તો કુલ ક્રમચયોની સંખ્યા $= n^r$ થાય. દા.ત. કોઈપણ અંક ગમે તેટલી વખત આવે તે શરતે પાંચ આંકડાઓમાંથી ત્રણ આંકડાની કુલ સંખ્યા (ક્રમચયો) $= 5^3$ થાય.

ઉદાહરણ-18 : કોઈપણ એક વખત પહેરેલી બીજી વખત પહેરી શકાય તે શરતે 4 આંગળીઓમાં બે વીંટીઓ કેટલી વખત પહેરી શકાય ?

જવાબ : $n = 4$ અને $r = 2$

ચાર આંગળીમાં બે વીંટીઓના પુનરાવર્તનયુક્ત ક્રમચયો $= n^r = 4^2 = 16$

ઉદાહરણ-19 : કોઈપણ આંકડો ગમે તેટલી વખત આવે એ શરતે 1, 2, 3, 4, 5, 6 માંથી ત્રણ આંકડાની કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

જવાબ : $n = 6 \quad r = 3$

$\therefore$ પુનરાવર્તનયુક્ત ક્રમચયો $= n^r = 6^3 = 216$

10.5 સ્વાધ્યાય :

10.5.1 પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) ક્રમચયનો અર્થ સમજાવો.

(2) ક્રમચયની વ્યાખ્યા અને સૂત્ર લખો.

(3) સમસ્વરૂપ વસ્તુઓના ક્રમચય એટલે શું ?

(4) પુનરાવર્તિત ક્રમચય એટલે શું ?

(5) કિંમત શોધો.

(1) $8P_3$ (2) $8P_8$ (3) 5! (4) $10P_0$ (5) $6P_5 \times 6P_0$

જવાબ :

(1) 336 (2) 40320 (3) 120 (4) 1 (5) 720

(6) નીચે આપેલા સમીકરણોમાંથી 'n' ની કિંમત શોધો.

(1) $nP_2 = 72$ (2) $nP_3 = 504$

(3) $72 \,.\, n! = 9!$ (4) $12 \,.\, nP_3 = 5 \,.\, (n+2)P_3$

(5) $nP_3 : (n+1)P_3 = 3 : 4$

જવાબ : (1) 9, (2) 9, (3) 7, (4) 7, (5) 11

(7) 4, 5, 6, 7, 8, 9 એક કુલ છ આંકડામાંથી ચાર જુદા જુદા આંકડા પસંદ કરી ચાર આંકડાની કુલ કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય ?

જવાબ : 360

(8) 0 1 2 3 4 સંખ્યાના બધા જ અંકોનો ઉપયોગ કરી પાંચ આંકડાની કુલ કેટલી નવી સંખ્યા બનાવી શકાય ?

જવાબ : 97

(9) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 અંકોમાંથી ત્રણ અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

જવાબ : $6P_1 \times 6P_2 = 180$

(10) 'MONDAY' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ? તેમાંથી (i) M પ્રથમ સ્થાને હોય તેવા કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ? (ii) M પ્રથમ સ્થાને અને Y છેલ્લા સ્થાને હોય તેવા કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ : 720, (i) 120, (ii) 23

(11) 'GASOLINE' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી આઠ અક્ષરવાળા કુલ કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય કે જેથી વ્યંજન એકી સ્થાને અને સ્વર બેકી સ્થાને આવે ?

જવાબ : 575

(12) એક અભરાઈ ઉપર અંગ્રેજીના 5, ગુજરાતીના 3, અર્થશાસ્ત્રના 4 પુસ્તકો એવી રીતે ગોઠવવાના છે કે જેથી દરેક વિષયના પુસ્તકો સાથે જ આવે તો પુસ્તકો કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?

જવાબ : 1,03,680

(13) વીસ વિદ્યાર્થીઓમાં બે વિદ્યાર્થીઓને ઇનામ આપવાના છે. (i) જો બન્ને ઇનામ એક વ્યક્તિને ન આપી શકાય. (ii) બંને ઇનામ એક વ્યક્તિને આપી શકાય એમ હોય તો તે ઇનામ કેટલી રીતે વહેંચી શકાય ?

જવાબ : (i) $20P_2 = 380$ (ii) $20^2 = 400$

(14) એક અભરાઈ ઉપર છ પુસ્તકો કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી બે નિશ્ચિત પુસ્તકો (i) એક સાથે જ આવે (ii) એક સાથે ન આવે ?

જવાબ : (i) $2! \times 5! = 240$ (ii) $6! - 240 = 480$

(15) કોઈપણ આંકડો એકથી વધુ વખત ન વપરાય એ શરતે 0, 4, 7, 8, 9 માંથી ચાર અંકની કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ? તેમજ આમાંથી કેટલી સંખ્યાઓ 7000 કરતાં મોટી હશે ?

જવાબ : $5P_4 - 4P_3 = 96,\ 3 \times 4P_3 = 72$

(16) એક ફિલ્મના શુટિંગ સમયે એક ગૃપ ફોટા પાડવા માટે 13 ખુરશીઓને હારબંધ ગોઠવવામાં આવે છે. આ ખુરશીઓમાં 1 ડાયરેક્ટર, 4 હીરો, 2 હીરોઈન અને 6 વિલનો એમ કુલ 13 વ્યક્તિઓને બેસાડવાની છે. ડાયરેક્ટરને વચ્ચેની ખુરશીમાં બેસાડવા હોય તેમજ વિલનોને પ્રત્યેક છેડાની ત્રણ-ત્રણ ખુરશીઓમાં બેસાડવા હોય અને હીરોઈનોની ખુરશી કોઈપણ વિલનની બાજુમાં ન હોય તે રીતે ગોઠવણી કરવી હોય તો તે ગોઠવણી કુલ કેટલી રીતે કરી શકાય ?

જવાબ : $1! \times 6! \times 4P_2 \times 4! = 2{,}07{,}360$

(17) 'PERMUTATIONS' શબ્દનો ઉપયોગ કરી બાર અંકના કેટલા શબ્દો (ક્રમચયો) બનાવી શકાય ?

જવાબ : $\frac{12!}{2!} = 23{,}95{,}00{,}800$

(18) 'ARRANGE' શબ્દનો ઉપયોગ કરી સાત અંકના કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ : $\frac{7!}{2!\,2!} = 1260$

(19) 'INTRODUCTION' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી બાર અક્ષરના કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ : $\frac{12!}{2!\,2!\,2!\,2!} = 2{,}99{,}37{,}600$

(20) કોઈપણ આંકડો ગમે તેટલી વખત આવે તે શરતે 3, 4, 5, 8, 9 માંથી ત્રણ આંકડાની કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય ?

જવાબ : $5^3 = 125$

10.5.2 (MCQ's) જવાબ સહિત.

(i) n ! = ________ .

(a) nP_n (b) n (c) nxn (d) એકપણ નહીં

(ii) nP_n = ________ .

(a) $\frac{n}{n}$ (b) n! (c) n (d) એકપણ નહીં

(iii) nP_r = ________ .

(a) $\frac{r!}{(n-r)!}$ (b) $\frac{n!}{(r-n)!}$ (c) $\frac{n!}{(n-r)!}$ (d) એકપણ નહીં

(iv) 5! = ________ .

(a) 5 (b) 120 (c) 1 (d) એકપણ નહીં

(v) $5P_2 \times 3P_2$ = ________ .

(a) 20 (b) 15 (c) 120 (d) એકપણ નહીં

(vi) nP_0 = ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) n (d) એકપણ નહીં

(vii) $5P_0$ = ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) 5 (d) એકપણ નહીં

(viii) 0! = ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) (a) અને (b) બન્ને (d) એકપણ નહીં

(ix) $\frac{5!}{2!}$ = ________ .

(a) 120 (b) 60 (c) 10 (d) એકપણ નહીં

(x) પુનરાવર્તન યુક્ત ક્રમચયો = ...

(a) r^n (b) n^r (c) $\frac{n}{r}$ (d) એકપણ નહીં

જવાબ :

(i) a (ii) b (iii) c (iv) b (v) c (vi) b (vii) b

(viii) b (ix) b (x) b

10.6 સંચય (Combination) :

10.6.1 સંચયનો અર્થ :વિદ્યાર્થી મિત્રો આપણે આગળ જોયું કે ક્રમચય એટલે ગોઠવણી કે જેમાં કોઈ ચાર વસ્તુઓ (P_1, P_2, P_3 અને P_4) માંથી ગમે તે વસ્તુઓની ગોઠવણી (કુલ ક્રમચયો) $4P_2 = 4 \times 3 = 12$ થાય. જેને નીચે મુજબ ગોઠવી શકાય.

$$
\begin{array}{llll}
P_1P_2 & P_2P_1 & P_3P_1 & P_4P_1 \\
P_1P_3 & P_2P_3 & P_3P_2 & P_4P_2 \\
P_1P_4 & P_2P_4 & P_3P_4 & P_4P_3
\end{array}
$$

અહીં P અને P_1P_2 અને P_2P_1, P_1P_3 અને P_3P_1, P_1P_4 અને P_4P_1, P_2P_3 તથા P_3P_2, P_2P_4 અને P_4P_2 તથા P_3P_4 અને P_4P_3 એ દરેકની ગોઠવણી જુદી જુદી રીતે કરવામાં આવે છે. જ્યારે સંચય એટલે પસંદગી તેમાં ઉપરની દરેક જોડ માટે સંચયનો એક જ પ્રકાર છે જે નીચે મુજબ છે.

$$P_1P_2,\ P_1P_3,\ P_1P_4,\ P_2P_3,\ P_2P_4,\ P_3P_4,$$

એટલે કે ચાર વસ્તુઓ (P_1, P_2, P_3, P_4) માંથી ગમે તે વસ્તુઓની પસંદગી કરવી હોય તો તેની પસંદગીના કુલ પ્રકારો = 6 થાય. સંચયને અંગ્રેજીમાં Combination કહેવાય છે અને 4 વસ્તુમાંથી 2 વસ્તુની પસંદગીને સંકેતમાં 4_{C_2} વડે દર્શાવી શકાય.

સંચયની સમજૂતી નીચેના ઉદાહરણ ઉપરથી પણ સમજી શકાય.

ધારો કે બાબાસાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીમાં એક સ્પર્ધામાં ત્રણ પ્રોફેસરોમાંથી બે પ્રોફેસરોની પસંદગી કુલ કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ? આ પ્રશ્નનો જવાબ નીચે મુજબ આપી શકાય.

ધારો કે, ત્રણ પ્રોફેસરોને A, B અને C વડે દર્શાવીએ તો તેમાંથી બે પ્રોફેસરોની પસંદગી (સંચય)ના કુલ પ્રકારો નીચે મુજબ

AB,   BC,   CA

જેને સંકેતમાં $^3C_2$ વડે દર્શાવી શકાય. એટલે કે 3 પ્રોફેસરોમાંથી બે પ્રોફેસરોની પસંદગીના કુલ પ્રકારો (કુલ સંચયો) = $^3C_2 = 3$

10.6.2 સંચયની વ્યાખ્યા અને સૂત્ર :

વ્યાખ્યા :

n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓ પસંદ કરવાની કુલ રીતોને સંચય તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેને સંકેતમાં ^nC_r અથવા $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જે નીચેના સૂત્રની મદદથી શોધવામાં આવે છે.

સૂત્ર :

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

યાદ રાખવા જેવા પરિણામો :

(1) $^nC_O = {^nC_n} = 1$

(2) $^nC_r = {^nC_{(n-r)}}$

(3) $^nC_r + {^nC_{r-1}} = {^{n+1}C_r}$

(4) $r\left[^nC_r\right] = n\left[^{n-1}C_{r-1}\right]$

10.6.3 નીચેનાની કિંમત શોધો.

(1) $^{10}C_4$ (2) $^{30}C_{28}$ (3) $^6C_2$

(4) $^3C_2 \times {^5C_2}$ (5) $^6C_0 + {^4C_4}$

જવાબ :

(1) $^{10}C_4 = {^nC_r}$ અને $\therefore$ $n = 10$ અને $r = 4$

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{10!}{4!(10-4)!}$$

$$= \frac{10!}{4!\,6!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4 \times 3 \times 2 \times 1\ .\ 6!} = 210$$

અથવા (સીધી રીતે) બીજી રીત

$$10_{C_4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

(2) $30_{C_{28}} = n_{C_r}$ ... $n = 30$ અને $r = 28$

$$n_{C_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{30!}{28!(30-28)!} = \frac{30!}{28!\ 2!}$$

$$= \frac{30 \times 29 \times 28!}{28!\ .\ 2 \times 1} = 435$$

(3) $6_{C_2} = \frac{6!}{2!(6-2)!}$

$$= \frac{6!}{2!\ 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1\ .\ 4!} = 15$$

અથવા (સીધી રીતે) બીજી રીત

$$6_{C_2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

(4) $3_{C_2} \times 5_{C_2} = \left[\frac{3!}{2!(3-2)!} \times \frac{5!}{2!(5-2)!}\right]$

$$= \left[\frac{3!}{2!\ 1!} \times \frac{5!}{2!\ 3!}\right]$$

$$= \left[\frac{3 \times 2!}{2!} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!\ 2 \times 1}\right]$$

$= [3 \times 10] = 30$

અથવા (સીધી રીતે) બીજી રીત

$$3_{C_2} \times 5_{C_2} = \left[\frac{3 \times 2}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1}\right]$$

$= [3 \times 10] = 30$

(5) $6_{C_0} + 4_{C_4} = \left[\frac{6!}{0!(6-0)1} + \frac{4!}{4!(4-4)1}\right]$

$= \left[\frac{6!}{0!\ 6!} + \frac{4!}{4!\ 0!}\right]$ અહીં $0! = 1$ થાય.

$= [\ 1 + 1\ ]$

$= 2$

અથવા બીજી રીત

$6_{C_0} + 4_{C_4} = [1+1]$ $\therefore\ n_{C_0} = 1$ અને

$= [\ 1 + 1\ ]$ $n_{C_n} = 1$ થાય.

$= 2$

ઉદાહરણ-2 : નીચેના સમીકરણો છોડો.

(1) $n_{C_2} = 21$ (2) $32_{C_{3x+2}} = 32_{C_{x+10}}$ (3) $26_{C_{x+2}} = 26_{C_{2x-3}}$

જવાબ :

(1) $n_{C_2} = 21$

$\therefore\ \frac{n(n-1)}{2\times 1} = 21$

$\therefore\ n(n-1) = 42$

$\therefore\ n^2 - n - 42 = 0$

$\therefore\ n^2 - 7n + 6n - 42 = 0$

$\therefore\ n(n-7) + 6(n-7) = 0$

$\therefore\ (n-7)\ (n+6) = 0$

n અને 6 કોમન લેતા

$\therefore\ n - 7 = 0$ અથવા $n = -6$ (અશક્ય)

$\therefore\ n = 7$

સમજો :

$-7 \times 6 = -42$	$\therefore\ -7n \times 6n$
$-7 + 6 = -1$	$\therefore\ -7n + 6n$

(2) $32_{C_{3x+2}} = 32_{C_{x+10}}$

$\therefore\ 3x + 2 = x + 10$

$\therefore\ 3x - x = 10 - 2$

$\therefore\ 2x = 8$

$\therefore\ x = 4$

અથવા બીજી રીત

$(3x + 2) + (x + 10) = 32$

$\therefore\ 3x + 2 + x + 10 = 32$

$\therefore\ 4x = 32 - 12$

$\therefore\ 4x = 20$

$\therefore\ x = {}^{20}\!/_{4} = 5$

$\therefore\ x = 4$ અથવા $x = 5$

$26_{C_{x+2}} = 26_{C_{2x-3}}$

$\therefore\ 26_{C_{x+2}} = 26_{C_{2x-3}}$

$\therefore\ x + 2 = 2x - 3$

$\therefore\ 3 + 2 = 2x - x$

$\therefore\ x = 5$

અથવા બીજી રીત

$26_{C_{x+2}} = 26_{C_{2x-3}} \qquad \therefore\ n_{C_r} = n_{C_{n-r}}$

$\therefore\ 26_{C_{x+2}} = 26_{C_{26-[2x-3]}}$

$\therefore\ x + 12 = 26 - 2x + 3, \quad \therefore\ x + 2x = 26 + 3 - 2$

$\therefore\ 3x = 27$

$\therefore\ x = 3$

ઉદાહરણ-3 :

$28_{C_{2r}} : 24_{C_{2r-4}} = 225 : 11$ હોય તો r શોધો.

જવાબ :

$28_{C_{2r}} : 24_{C_{2r-4}} = 225 : 11$

$$\therefore\ \frac{\dfrac{28!}{2r!\,(28-2r)!}}{\dfrac{24!}{(2r-4)!\,(24-2r+4)!}} = \frac{225}{11}$$

$$\therefore\ \frac{28!}{2r!\,(28-2r)!} \times \frac{(2r-4)!\,(28-2r)!}{24!} = \frac{225}{11}$$

$$\therefore\ \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24!}{2r\,(2r-1)\,(2r-2)\,(2r-3)\,(2r-4)!\,(28-2r)!} \times \frac{(2r-4)!\,(28-2r)!}{24!} = \frac{225}{11}$$

$$\therefore\ \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25}{2r\,(2r-1)\,(2r-2)\,(2r-3)} = \frac{225}{11}$$

$$\therefore\ \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 11}{3 \times 3 \times 25} = 2r\,(2r-1)\,(2r-2)\,(2r-3)$$

$$\therefore\ \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 11}{9} = 2r\,(2r-1)\,(2r-2)\,(2r-3)$$

$\therefore\ 28 \times 3 \times 26 \times 11 = 2r\,(2r-1)\ (2r-2)\ (2r-3)$

$\therefore\ 14 \times 2 \times 3 \times 13 \times 2 \times 11 = 2r\,(2r-1)\ (2r-2)\ (2r-3)$

$\therefore\ 14 \times 13 \times 12 \times 11 = 2r\,(2r-1)\ (2r-2)\ (2r-3)$

$\therefore\ 14 \times (14-1)\ (14-2)\ (14-3) = 2r\ (2r-1)\ (2r-2)\ (2r-3)$

$\therefore\ 14 = 2r$

$\therefore\ r = 14/2 = 7$

ઉદાહરણ-4 :

$\dfrac{2x_{C_3}}{x_{C_3}} = 11$ હોય તો x શોધો.

$$\therefore\ \frac{\dfrac{2x!}{3!\,(2x-3)!}}{\dfrac{x!}{3!\,(x-3)!}} = 11$$

$$\therefore\ = \frac{2x!}{3!(2x-3)!} \times \frac{3!(x-3)!}{x!}$$

$$\therefore\ \frac{2x(2x-1)\ (2x-2)\ (2x-3)!}{(2x-3)!} \times \frac{(x-3)!}{x(x-1)\ (x-2)\ (x-3)!} = 11$$

$$\therefore\ \frac{2x(2x-1)\ (2x-2)}{x(x-1)\ (x-2)} = 11$$

$\therefore\ \dfrac{2x(2x-1)\ \ 2(x-1)}{x(x-1)\ (x-2)} = 11$ x અને $(x-1)$ દૂર કરતા

$$\therefore\ \frac{4(2x-1)}{x-2} = 11$$

$\therefore\ 8x - 4 = 11(x-2)$

$\therefore\ 8x - 4 = 11x - 22$

$\therefore\ 22 - 4 = 11x - 8x$

$\therefore\ 18 = 3x$

$\therefore\ x = 18/3 = 6$

ઉદાહરણ-5 : એક હોસ્પિટલના 12 ડૉક્ટરોમાંથી 5 ડૉક્ટરની કમિટિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ?

જવાબ : 12 ડૉક્ટરોમાંથી 5 ડૉક્ટરની પસંદગીના કુલ પ્રકારો (કુલ સંચયો) = $12_{C_5} = \dfrac{12!}{5!\,(12-5)!}$

$$= \frac{12!}{5!\ 7!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad 7!}$$

$= 11 \times 9 \times 8 = 792$

ઉદાહરણ-6 : એક ડબ્બામાં 6 સફેદ, 5 કાળા અને 4 લીલા દડા છે. તેમાંથી 3 સફેદ, 2 કાળા અને 1 લીલો એમ કુલ પાંચ દડાની પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

જવાબ :

6 સફેદ દડામાંથી 3 દડાની પસંદગી $^6C_3$ પ્રકારે થાય અને

5 કાળા દડામાંથી 2 દડાની પસંદગી $^5C_2$ પ્રકારે થાય અને

4 લીલા દડામાંથી 1 દડાની પસંદગી $^4C_1$ પ્રકારે થાય.

$\therefore$ કુલ સંચયો $= {^6C_3} \times {^5C_2} \times {^4C_1}$

$$= \frac{6!}{3!\ 3!} \times \frac{5!}{2!\ 3!} \times \frac{4!}{1!\ 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1\ .\ 3!} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \quad 3!} \times \frac{4 \times 3!}{3!} = 20 \times 10 \times 4 = 800$$

ઉદાહરણ-7 : એક કૉલેજમાં 8 પ્રાધ્યાપકો છે, જેમાં 3 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપકો છે. એક કાર્યક્રમમાં 3 પ્રાધ્યાપકો આમંત્રણ આપવું છે. તેમાં ઓછામાં ઓછા એક સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક હોવા જોઈએ. તો કેટલી રીતે આમંત્રણ આપી શકાય ?

જવાબ :

કુલ પ્રાધ્યાપકો = 8 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક = 3 $\therefore$ પુ. પ્રાધ્યાપકો = 5

3 પ્રાધ્યાપકોને આમંત્રણ આપવું છે. જેમાં ઓછામાં ઓછા 1 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક હોય તો પસંદગી નીચે મુજબ થશે.

3	5
સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક	પુરૂષ પ્રાધ્યાપક
1	2
2	1
3	0

એટલે કે 1 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક અને 2 પુરૂષ પ્રાધ્યાપક અથવા
2 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક અને 1 પુરૂષ પ્રાધ્યાપક અથવા
3 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક અને 0 પુરૂષ પ્રાધ્યાપકની પસંદગી થાય.

$\therefore$ કુલ સંચયો $= \left({^3C_1} \times {^5C_2}\right) + \left({^3C_2} \times {^5C_1}\right) + \left({^3C_3} \times {^5C_0}\right)$

$= (3 \times 10) + (3 \times 5) + (1 \times 1)$

$= 30 + 15 + 1 = 46$

ઉદાહરણ-8 : એક બંડલમાં 4 લાલ, 3 વાદળી અને 5 સફેદ પતંગો છે તો તેમાંથી 3 પતંગો પસંદ કરવામાં આવે તો તેમાંથી;

(1) ત્રણેય પતંગ એક જ રંગના હોય.

(2) ત્રણેય પતંગ જુદા જુદા રંગના હોય.

(3) બે પતંગો એક સરખા રંગના અને એક પતંગ જુદા રંગનો હોય, તો તેની પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

પતંગો :

લાલ = 4 વાદળી = 3 સફેદ = 5 પસંદ કરેલ = 3

(1) ત્રણેય પતંગ એક જ રંગના હોય એટલે કે ત્રણેય લાલ હોય અથવા ત્રણેય વાદળી હોય અથવા ત્રણેય સફેદ હોય.

$\therefore$ કુલ ક્રમચયો (રીતો) = $4_{C_3} + 3_{C_3} + 5_{C_3}$ $^n c_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)1} = ^4 c_3 = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = \dfrac{4\times 3!}{3!1!} = 4$

= 4 + 1 + 10

= 15 (તેવી જ રીતે $^3C_3$ અને $^SC_3$ શોધાશે.

(2) ત્રણેય પતંગ જુદા જુદા રંગના હોય એટલે કે એક લાલ અને એક વાદળી અને એક સફેદ હોય.

$\therefore$ કુલ ક્રમચયો (રીતો) = $4_{C_1} \times 3_{C_1} \times 5_{C_1}$ $^n c_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)}$ નો ઉપયોગ શોધો.

= 4 × 3 × 5 = 60

(3) બે પતંગો એક સરખા રંગના હોય અને એક પતંગ જુદા રંગનો હોય એટલે કે;

4 લાલમાંથી 2 લાલ હોય અને બાકીના (વાદળી + સફેદ) 8 માંથી 1 પસંદ થાય.

અથવા

3 વાદળી માંથી 2 વાદળી હોય અને બાકીના (લાલ + સફેદ) 9 માંથી 1 પસંદ થાય.

અથવા

5 સફેદમાંથી 2 સફેદ હોય અને બાકીના (લાલ + વાદળી) 7 માંથી 1 પસંદ થાય.

$\therefore$ કુલ ક્રમચયો = $\left(4_{C_2} \times 8_{C_1}\right) + \left(3_{C_2} \times 9_{C_1}\right) + \left(5_{C_2} \times 7_{C_1}\right)$

= (6 × 8) + (3 × 9) + (10 × 7)

= 48 + 27 + 70

= 145

ઉદાહરણ-9 : ત્રણ પ્રાધ્યાપકો અને 10 વિદ્યાર્થીઓમાંથી બે પ્રાધ્યાપકો અને 4 વિદ્યાર્થીઓની એક સમિતિ બનાવવી છે તો તે કેટલી રીતે બનાવી શકાય ? ઉપરાંત (1) અમુક ચોક્કસ પ્રાધ્યાપકને તે સમિતિમાં લેવાના જ હોય તો સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ? (2) જો અમુક ચોક્કસ વિદ્યાર્થીને તે સમિતિમાં ન લેવાનો હોય તો તે સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ?

જવાબ :

પ્રાધ્યાપકો = 3 વિદ્યાર્થીઓ = 10

3 પ્રાધ્યાપકોમાંથી 2 પ્રાધ્યાપક અને 10 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 4 વિદ્યાર્થીઓની પસંદગીના

કુલ ક્રમચયો = $3_{C_2} \times 10_{C_4}$

$= \dfrac{3!}{2!\ 1!} \times \dfrac{10!}{4!\ 6!}$

$= \dfrac{3\times 2!}{2!} \times \dfrac{10\times 9\times 8\times 7\times 6!}{4\times 3\times 2\times 1.6!} = 3 \times \dfrac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1} = = \dfrac{3\times 2!}{2!}$

= 3 × 210 = 630

(1) અમુક ચોક્કસ પ્રાધ્યાપકને તે સમિતિમાં લેવાના જ હોય અને સમિતિ બનાવવી હોય તો;

3 પ્રાધ્યાપકોમાંથી 1 પ્રાધ્યાપક ચોક્કસ લેવાના અને બાકીના 2 પ્રાધ્યાપકોમાંથી 1 પ્રાધ્યાપકની પસંદગી થશે અને 10 વિદ્યાર્થીઓમાંથી

4 વિદ્યાર્થીઓની પસંદગીના કુલ ક્રમચયો = $^{1}C_{1} \times {}^{2}C_{2} \times {}^{10}C_{4}$

$$= 1 \times 2 \times \frac{10!}{4!\,6!}$$

$$= 2 \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

= 2 × 210

= 420

(2) જો અમુક ચોક્કસ વિદ્યાર્થીને તે સમિતિમાં ન લેવાનો હોય તો તે સમિતિ બનાવવાના કુલ ક્રમચયો = 3 પ્રાધ્યાપકોમાંથી 2 પ્રાધ્યાપકો $^{3}C_{2}$ પ્રકારે પસંદ થશે અને 10 વિદ્યાર્થીઓમાંથી કોઈ એક ચોક્કસ વિદ્યાર્થીને ન લેવામાં આવે 9 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 4 વિદ્યાર્થીઓની પસંદગી કરવાના કુલ ક્રમચયો

$$= {}^{3}C_{2} \times {}^{9}C_{4}$$

$$= \frac{3!}{2!\,1!} \times \frac{9!}{4!5!}$$

$$= \frac{3 \times 2!}{2!} \times \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4 \times 3 \times 2 \times 1.5!}$$

$$= 3 \times \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

= 3 × 126 = 378

ઉદાહરણ-10 : આઠ જુદા જુદા વ્યંજનો અને ત્રણ જુદા જુદા સ્વરોમાંથી 3 વ્યંજન અને 2 સ્વર એમ કુલ પાંચ અક્ષરોવાળા કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ :

8 વ્યંજનોમાંથી 3 વ્યંજનોની પસંદગી = $^{8}C_{3}$

3 સ્વરોમાંથી 2 સ્વરોની પસંદગી = $^{3}C_{2}$

પસંદ થયેલા (3 વ્યંજનો અને + 2 સ્વરો) 5 અક્ષરોની ગોઠવણી $5P_{5} = 5!$

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો = $^{8}C_{3} \times {}^{3}C_{2} \times 5!$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times 3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \qquad \because {}^{3}C_{2} = 3$$

= 56 × 3 × 120

= 20,160

ઉદાહરણ-11 : $\dfrac{{}^8C_3}{3P_3}$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $${}^8C_3 = \frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1} = 56$$

$$\frac{{}^8C_3}{3P_3} = \frac{\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}}{3\times 2\times 1} = \frac{56}{6} = 9.33 \qquad \because {}^3P_3 = 3! = 3\times 2\times 1 = 6$$

1.7 સ્વાધ્યાય અને MCQ's જવાબ સહિત.

(1) નીચેનાની કિંમત શોધો.

(i) ${}^7C_4$ (ii) ${}^{40}C_{38}$ (iii) ${}^5C_2$ (iv) ${}^5C_3 \times {}^4C_3$ (v) ${}^9C_0 + {}^3C_3$

(vi) ${}^6C_0 \times 4$

જવાબ : (i) 35 (ii) 780 (iii) 10 (iv) 40 (v) 2 (vi) 4

(2) નીચેના સમીકરણો છોડો.

(i) ${}^xC_2 = 55$ (ii) ${}^{12}C_{n-2} = {}^{12}C_n$ (iii) ${}^{52}C_{4x+2} = {}^{52}C_{2x+14}$

(iv) ${}^{24}C_{n+3} = {}^{24}C_{2n-3}$

જવાબ : (i) $x = 11$ (ii) $n = 7$ ... ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

(iii) $x = 6$ (iv) $n = 6$ અથવા $n = 8$

(3) જો ${}^nC_4 : {}^nC_3 = 7 : 4$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $n = 10$

(4) જો $\dfrac{{}^{2n}C_3}{{}^nC_2} = \dfrac{44}{3}$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $n = 6$

(5) બાબાસાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીના 16 જેટલા વિદ્યાર્થીઓમાંથી 5 વિદ્યાર્થીઓની સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ?

જવાબ : 4368

(6) 7 ગુજરાતીઓ, 3 બંગાળીઓ અને 5 મરાઠીમાંથી 3 ગુજરાતી 2 બંગાળી અને 2 મરાઠી એમ મળીને કુલ 7 વ્યક્તિઓ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

જવાબ : ${}^7C_3 \times {}^3C_2 \times {}^5C_2 = 1050$

(7) એક પેટીમાં 4 કાળા અને 3 સફેદ દડા છે. તો તેમાંથી ઓછામાં ઓછા એક સફેદ દડો લઈ ત્રણ દડાઓ કેટલી રીતે લઈ શકાય ?

જવાબ : 31

(8) એક ડબ્બામાં 4 સફેદ, 3 કાળા અને 2 વાદળી દડા છે. તો તેમાંથી

(1) ત્રણેય દડા એક જ રંગના હોય.

(2) ત્રણેય દડા જુદા જુદા રંગના હોય.

(3) બે દડા એક જ રંગના અને એક દડો જુદા રંગનો હોય તો તે રીતે તે ડબ્બામાંથી ત્રણ દડાઓ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

જવાબ : (1) 5 (2) 24 (3) 55

(9) એક સોસાયટીમાં કુલ 12 સભ્યો છે. તેમાંથી 7 સભ્યોની એક સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ? ઉપરાંત

(1) એક પ્રમુખ અને એક ઉપપ્રમુખનો સમિતિમાં સમાવેશ કરવાનો જ હોય.

(2) અમુક બે સભ્યોનો નિશ્ચિતપણે સમાવેશ ન કરવાનો હોય; તો તે સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ?

જવાબ : 792, (1) 252 (2) 56

(10) 8 સ્ત્રીઓ અને 7 પુરૂષોમાંથી 3 સ્ત્રીઓ અને 4 પુરૂષોની સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ? જો સમિતિમાં અમુક ચોક્કસ સ્ત્રી અને અમુક ચોક્કસ પુરૂષ સાથે રહેવા ન માંગતા હોય તો સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ?

જવાબ : 1960, 1540

(11) 10 જુદા જુદા વ્યંજન અને 5 જુદા જુદા સ્વરોમાંથી 3 વ્યંજન અને 2 સ્વરવાળા કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ : $10_{C_3} \times 5_{C_2} \times 5P_5 = 1,44,000$

(12) એક ડબ્બામાં 4 કાળા, 3 સફેદ અને 5 લાલ દડા છે. (1) બે દડા એક જ રંગના હોય. (2) બે દડા જુદા જુદા રંગના હોય તો તે કેટલી રીતે લઈ શકાય ?

જવાબ : (1) $4_{C_2} + 3_{C_2} + 5_{C_2} = 19$

(2) $4_{C_1} \times 3_{C_1} + 4_{C_1} \times 5_{C_1} + 3_{C_1} \times 5_{C_1} = 12 + 20 + 15 = 47$

(13) 15 પ્રધાનોમાંથી 5 પ્રધાનોની એક સમિતિ બનાવવી છે. તેમાં મુખ્ય પ્રધાન અને ગૃહપ્રધાન આવે જ એ શરતે સમિતિની રચના કેવી રીતે કરી શકાય ? જો સંરક્ષણખાતાના પ્રધાનને નહીં જ લેવાના હોય તો સમિતિની રચના કેટલી રીતે કરી શકાય ?

જવાબ : 286, 220

(14) જો $n_{C_4} = n_{C_3}$ હોય તો n ની કિંમત શોધો અને તે ઉપરથી $2n_{C_2}$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ : n = 7, 91

(15) $nP_2 = 12$ હોય તો n_{C_3} અને nP_3 ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $n(n-1) = 12$ ... $n = 4$, $n_{C_3} = 4$, $nP_3 = 24$

(16) સંચયનો અર્થ લખો.

(17) સંચયની વ્યાખ્યા અને સૂત્ર લખો.

(18) ટૂંકા પ્રશ્નો (MCQ's)

(i) $n_{C_0} =$ ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) n (d) એકપણ નહીં

(ii) $^{n}C_{n}$ = ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) n (d) એકપણ નહીં

(iii) $^{n}C_{r}$ = ________ .

(a) $\frac{n!}{(n-r)!}$ (b) $\frac{r!}{n!(n-r)!}$ (c) $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (d) એકપણ નહીં

(iv) $^{5}C_{3}$ = ________ .

(a) 5 (b) 3 (c) 10 (d) એકપણ નહીં

(v) $^{6}C_{2}$ = ________ .

(a) $^{6}C_{4}$ (b) $^{5}C_{4}$ (c) $^{6}C_{3}$ (d) એકપણ નહીં

(vi) $^{n}C_{r}$ = ________ .

(a) $^{n}C_{(n-r)}$ (b) np_{r} (c) (a) અને (b) બંને (d) એકપણ નહીં

(vii) $^{5}C_{0}$ = ________ .

(a) 0 (b) 5 (c) (a) અને (b) બંને (d) એકપણ નહીં

(viii) $^{5}C_{5}$ = ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) 5 (d) એકપણ નહીં

(ix) $^{3}C_{1} + 3P_{1}$ = ________ .

(a) 6 (b) 9 (c) 18 (d) એકપણ નહીં

(x) 10 વ્યક્તિઓમાંથી 7 વ્યક્તિઓની પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

(a) $10P_{7}$ (b) $^{10}C_{7}$ (c) (a) અને (b) બંને (d) એકપણ નહીં

(xi) $^{6}C_{3} \div 4P_{4}$ = ________ .

(a) 10 (b) 12 (c) 1.2 (d) એકપણ નહીં

(xii) $^{5}C_{3} \times 0!$ = ________ .

(a) 5 (b) 3 (c) 10 (d) એકપણ નહીં

જવાબ : (i) b (ii) b (iii) c (iv) c

(v) a (vi) a (vii) b (viii) b

(ix) a (x) b (xi) d (xii) c

10.8 દ્વિપદી વિસ્તરણ :

10.8.1 દ્વિપદી પદાવલી :

$(a + b), (3x - y), (x + \frac{1}{y}), (2x^2 - 5y^2)$ વગેરે જેવી પદાવલીઓને દ્વિપદી પદાવલી તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

10.8.2 દ્વિપદી વિસ્તરણ :દ્વિપદી પદાવલીની જુદી જુદી ઘાત આપેલી હોય અને તેનું વિસ્તરણ કરવામાં આવે તો તે પ્રકારના વિસ્તરણને
દ્વિપદી વિસ્તરણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

સામાન્ય રીતે નીચે આપેલા દ્વિપદી વિસ્તરણો આપણે જાણીએ છીએ.

$(x + a)^0 = 1$

$(x + a)^1 = x + a$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

અહીં આપણે $(x + a)$ દ્વિપદી પદાવલીની 0 ઘાત, 1 ઘાત, 2 ઘાત અને 3 ઘાત માટેના વિસ્તરણો જોયા. હવે જો આપણે $(x + a)$ ની 4, 5, 6 કે ગમે તે n ઘનપૂર્ણાંક ઘાત માટેના વિસ્તરણો મેળવવા માંગતા હોય તો તેનું વિસ્તરણ દ્વિપદી પ્રમેય તરીકે ઓળખાય છે.

આ પ્રકારના વિસ્તરણો મેળવવા માટે સંચય અને પાસ્કલના સહગુણાંકના નિયમનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે જે નીચે મુજબ છે.

દ્વિપદી સહગુણાકો માટે પાસ્કલનો ત્રિકોણ :

ઘાત	સહગુણાકો
0	**1**
1	**1 1**
2	**1 2 1**
3	**1 3 3 1**
4	**1 4 6 4 1**
5	**1 5 10 10 5 1**
તેવી જ રીતે	” ” ” ” ” ”
	” ” ” ” ” ” ”
	” ” ” ” ” ” ”
n સુધી	” ” ” ” ” ”

પાસ્કલના ત્રિકોણ સમજૂતી :

ઉપરના ત્રિકોણમાં જોઈ શકાય છે કે દરેક હારના બંને છેડે 1 છે. ત્યારબાદ ત્યાર પછીની ઘાત એ તેથી નાની ઘાતની છેડે આવેલ રકમ અને તેના પછીથી રકમનો સરવાળો કરી વચ્ચે મુકવામાં આવે છે અને સહગુણક શોધવામાં આવે છે જેમકે;

$(x + a)^0 = 1$

$(x + a)^1 = x + a$

અથવા

$(x + a)1 \quad = {}^1C_0 x^1 a^0 + {}^1C_1 x^0 a^1$

$= 1.x.1 + 1.1.a \qquad \therefore\ {}^1C_0 = {}^1C_1 = 1$

$= x + a$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

અથવા

$(x + a)^2 = {}^2C_0 x^2 a^0 + {}^2C_1 x^1 a^1 + {}^2C_2 x^0 a^2$

$= 1.x^2.1 + 2.x.a + 1.1.a^2 \qquad [\therefore\ {}^2C_0 = 1\ ,\ {}^2C_2 = 1\ ,\ {}^2C_1 = 2]$

$= \underline{1}x^2 + \underline{2}ax + \underline{1}a^2$

સહગુણકો જુઓ

ઘાત   **સહગુણક**

1   1   1

2   1   2   1 $\therefore$ આજુ બાજુ 1 વચ્ચે $1 + 1 = 2$

$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2\text{a} + 3xa^2 + a^3$

અથવા

$(x + a)^3 = {}^3C_0 x^3 a^0 + {}^3C_1 x^2 a^1 + {}^3C_2 x^1 a^2 + {}^3C_3 x^0 a^3$

$= 1.x^3.1 + 3x^2a + 3xa^2 + 1.1.a^3$

$= 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3$

સહગુણકો જુઓ

ઘાત   **સહગુણક**

2   1   2   1

3   1   3   3   1

3 ઘન   બંને છેડે 1 પછી

$1 + 2 = 3$ અને $2 + 1 = 3$

આમ દ્વિપદી વિસ્તરણના જુદા જુદા પદના સહગુણકો સંચયના સ્વરૂપમાં લખી શકાય. આ જ પ્રમાણે આપણે $(x + a)^n$ નું વિસ્તરણ નીચે મુજબ લખી શકીએ.

$$(x + a)^n = {}^nC_0 x^n a^0 + {}^nC_1 x^{n-1} . a^1 + {}^nC_2 x^{n-2} . a^2 + \ldots\ldots + {}^nC_{n-1} x^1 . a^{n-1} + {}^nC_n x^0 . a^n$$

$\therefore\ (x + a)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1} \,.\, a + {}^nC_2\, x^{n-2} \,.\, a^2 + ... + {}^nC_n\, a^n$

આ વિસ્તરણને દ્વિપદી વિસ્તરણ અથવા દ્વિપદી પ્રમેય તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. જેને નીચે મુજબ પણ દર્શાવી શકાય.

$$(x + a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, x^{n-r} \,.\, a^r$$

10.8.3 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 : $(x + 2a)^5$ નું વિસ્તરણ કરો.

જવાબ :

$(x + a)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1} \,.\, a + ... + {}^nC_n\, a^n$

$n = 5$, $x = x$ અને $a = 2a$ મુકતા

$(x + 2a)^5 = {}^5C_0\, x^5 + {}^5C_1\, x^4 \,.\, (2a) + {}^5C_2\, x^3(2a)^2 + {}^5C_3\, x^2(2a)^3 + {}^5C_4\, x(2a)^4 + {}^5C_5\, (2a)^5$

$= (1)\, x^5 + (5)\, x^4\ (2a) + (10)\ x^3 \,.\, (4a^2) + (10) \,.\, x^2(8a^3) + 5 \,.\, x(16a^4) + (1) \,.\, (32)a^5$

$= x^5 + 10x^4 \,.\, a + 40x^3 \,.\, a^2 + 80x^2 \,.\, a^3 + 80x \,.\, a^4 + 32a^5$

ઉદાહરણ-2 : $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^4$ નું વિસ્તરણ કરો.

જવાબ :

$n = 4,\ x = \left(\frac{x}{3}\right),\ a = \left(-\frac{3}{x}\right)$

$$(x + a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, x^{n-r} \,.\, a^r$$

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^4 = 4_{C_0}\left(\frac{x}{3}\right)^4 + 4_{C_1}\left(\frac{x}{3}\right)^3\left(-\frac{3}{x}\right) + 4_{C_2}\left(\frac{x}{3}\right)^2\left(-\frac{3}{x}\right)^2 + 4_{C_2}\left(\frac{x}{3}\right)\left(-\frac{3}{x}\right)^3 + 4_{C_4}\left(-\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= \frac{x^4}{81} + 4.\left(\frac{x^3}{27}\right)\left(-\frac{3}{x}\right) + 6.\left(\frac{x^2}{9}\right)\left(\frac{9}{x^2}\right) + 4\left(\frac{x}{3}\right)\left(-\frac{27}{x^3}\right) + \left(\frac{81}{x^4}\right)$$

$$= \frac{x^4}{81} - \frac{4x^2}{9} + 6 + \frac{36}{x^2} + \frac{81}{x^4}$$

ઉદાહરણ-3 : $(99)^4$ ની કિંમત મેળવો.

જવાબ :

$(99)^4 = (100 - 1)^4$

$n = 4,\ x = 100,\ a = -1$

$$(x + a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r \, x^{n-r} \, . \, a^r$$

$$(100 - 1)^4 = {}^4C_0 (100)^4 + {}^4C_1 (100)^3 (-1) + {}^4C_2 (100)^2 (-1)^2$$

$$+ {}^4C_3 (100) (-1)^3 + {}^4C_4 (-1)^4$$

$= (10,00,00,000) + 4(10,00,000) (-1) + 6(10,000) (1) + 4(100) (-1) + (1)$

$= 10,00,00,000 - 40,00,000 + 60,000 - 400 + 1$

$= 9,60,59,601$

ઉદાહરણ-4 : $(10.1)^5$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$(10.1)^5 = (10 + 0.1)^5$

$n = 5, x = 10, a = 0.1$

$$(x + a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r \, x^{n-r} \, . \, a^r$$

$$(10.1)^5 = {}^5C_0 (10)^5 + {}^5C_1 (10)^4 (0.1) + {}^5C_2 (10)^3 (0.1)^2$$

$$+ {}^5C_3 (10)^2 (0.1)^3 + {}^5C_4 (10) (0.1)^4 + {}^5C_5 (0.1)^5$$

$= (1) (1,00,000) + 5(10,000) (0.1) + 10(1000) (0.01) + 10(100) (0.001)$

$+ 5(10) (0.0001) + (1) (0.00001)$

$= 1,00,000 + 5000 + 100 + 1 + 0.005 + 0.00001$

$= 105101.00501$

ઉદાહરણ-5 : $\left(\sqrt{4}+1\right)^4 - \left(\sqrt{4}-1\right)^4$ કિંમત શોધો.

જવાબ :

$\left(\sqrt{4}+1\right)^4 - \left(\sqrt{4}-1\right)^4$

$\left(\sqrt{4}+1\right)^4 \Rightarrow n = 4 \, , x = \sqrt{4}$ અને $a = 1$

$$\left(\sqrt{4}+1\right)^4 = {}^4C_0 \left(\sqrt{4}\right)^4 + {}^4C_1 \left(\sqrt{4}\right)^3 (1) + {}^4C_2 \left(\sqrt{4}\right)^2 (1)^2 + {}^4C_3 \sqrt{4} (1)^3 + {}^4C_4 (1)^4 \quad \text{— (1)}$$

$\left(\sqrt{4}-1\right)^4 \Rightarrow n = 4, x = \sqrt{4}$, અને $a = -1$

$$\left(\sqrt{4}-1\right)^4 = {}^4C_0\left(\sqrt{4}\right)^4 + {}^4C_1\left(\sqrt{4}\right)^3(-1) + {}^4C_2\left(\sqrt{4}\right)^2(-1)^2 + {}^4C_3\sqrt{4}(-1)^3 + {}^4C_4(-1)^4 \quad \text{— (2)}$$

$$\left(\sqrt{4}+1\right)^4 - \left(\sqrt{4}-1\right)^4$$

$$= \left[4_{C_0}\left(\sqrt{4}\right)^4 + 4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3 + 4_{C_2}\left(\sqrt{4}\right)^2 + 4_{C_3}\left(\sqrt{4}\right) + 3_{C_4}\right]$$

$$- \left[4_{C_0}\left(\sqrt{4}\right)^4 - 4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3 - 4_{C_2}\left(\sqrt{4}\right)^2 - 4_{C_3}\sqrt{4} + 4_{C_4}\right]$$ (∵સમીકરણ 1 માંથી 2 બાદ કરતાં)

$$= \left[4_{C_0}\left(\sqrt{4}\right)^4 + 4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3 + 4_{C_2}\left(\sqrt{4}\right)^2 + 4_{C_3}\sqrt{4} + 4_{C_4}\right.$$

$$\left. - 4_{C_0}\left(\sqrt{4}\right)^4 + 4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3 - 4_{C_2}\left(\sqrt{4}\right)^2 + 4_{C_3}\sqrt{4} - 4_{C_4}\right]$$

$$= 2\left[4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3 + 4_{C_1}\sqrt{4}\right]$$

$$= 2\left[4\left(\sqrt{4}\right)^3 + 4(2)\right]$$

$$= 8\left[\left(\sqrt{4}\right)^3 + 2\right]$$

ઉદાહરણ-6 : $\left(\sqrt{5}+1\right)^3 - \left(\sqrt{5}-1\right)^3$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^3 = 3_{C_0}\left(\sqrt{5}\right)^3 + 3_{C_1}\left(\sqrt{5}\right)^2(1) + 3_{C_2}\left(\sqrt{5}\right)(1)^2 + 3_{C_3}(1)^3 \quad \text{— (1)}$$

$$\left(\sqrt{5}-1\right)^3 = 3_{C_0}\left(\sqrt{5}\right)^3 + 3_{C_1}\left(\sqrt{5}\right)^2(-1) + 3_{C_2}\left(\sqrt{5}\right)(-1)^2 + 3_{C_3}(-1)^3 \quad \text{— (2)}$$

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^3 - \left(\sqrt{5}-1\right)^3$$

$$= 2\left[3_{C_1}\left(\sqrt{5}\right)^2 + 1\right]$$

$$= 2\ [3(5) + 1] = 32$$

10.8.4 દ્વિપદી વિસ્તરણનું સામાન્ય પદ :

આપણે જાણીએ છીએ કે દ્વિપદી પ્રમેય $(x+a)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1} \,.\, a + {}^nC_2\, x^{n-2}a^2 + \ldots\ldots + {}^nc_n\, a^n$ છે.

જેનું

પ્રથમ પદ = $T_1 = {}^nC_0 x^n$

બીજુ પદ = $T_2 = {}^nC_1 x^{n-1} . a$

ત્રીજુ પદ = $T_3 = {}^nC_2 x^{n-2} a^2$

તેવી જ રીતે તેના સામાન્ય પદને $r + 1$ કહીએ તો $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} . a^r$ થાય.

નોંધ : ઉપરના સૂત્રની મદદથી કોઈપણ પદ શોધી શકાય.

ઉદાહરણ-7 : $\left(x+\frac{1}{y}\right)^7$ ના વિસ્તરણમાં ત્રીજુ પદ મેળવો.

જવાબ :

$\left(x+\frac{1}{y}\right)^7$ નું ત્રીજુ પદ મેળવવું છે.

$\because r + 1 = 3 \qquad \therefore r = 2, n = 7, x = x, a = \frac{1}{y}$

$T_{r+1} = {}^nC_r \; x^{n-r} . a^r$

$\therefore T_3 = {}^7C_2 \; x^{7-2} . \left(\frac{1}{y}\right)^2$

$= 21 . x^5 . \frac{1}{y^2}$

$= \frac{21x^5}{y^2}$

10.8.5 દ્વિપદી વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ :

દ્વિપદી વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ શોધવું હોય તો $\frac{n}{2}+1$ મુ પદ શોધાય. હવે ધારો કે $n = 10$ આપેલા હોય અને મધ્યમ પદ શોધવું હોય તો $\frac{10}{2}+1=6$ ઠ્ઠું પદ શોધાય. પરંતુ ધારો કે $n = 9$ આપેલા હોય તો $\frac{9}{2}+1=5.5$ મળે તેથી પાંચમું અને છઠ્ઠું એમ બે મધ્ય પદો શોધવા પડે.

ઉદાહરણ-8 : $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ શોધો.

જવાબ :

$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં $\frac{n}{2}+1$ માં મૂકતા $\frac{10}{2}+1=6$ ઠું પદ મધ્યમ પદ બનશે.

$\therefore\ T_{r+1} = {}^{n}C_{r} x^{n-r} \cdot a^{r}$ માં

$r = 5,\ n = 10,\ x = \frac{x}{y}$ અને $a = \left(-\frac{y}{x}\right)$

$\therefore\ T_6 = 10_{C_5}\left(\frac{x}{y}\right)^{10-5} \cdot \left(\frac{-y}{x}\right)^{5}$

$= 252 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{5} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{5}$

$= -\ 252 \cdot \left(\frac{x^5}{y^5} \times \frac{y^5}{x^5}\right)$

$= -252$

ઉદાહરણ-9 : $\left(3x-\frac{1}{x}\right)^{7}$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદો શોધો.

જવાબ :

$\left(3x-\frac{1}{x}\right)^{7}$ ના વિસ્તરણમાં $\frac{n}{2}+1$ મૂકતાં,

$\frac{7}{2}+1$ મું પદ એટલે કે ચોથુ અને પાંચમું પદ એ મધ્યમ પદો બનશે.

$T_{r+1} = {}^{n}C_{r} x^{n-r} \cdot a^{r}$ માં $r = 3,\ n = 7,\ x = 3x$ અને $a = \frac{1}{x}$ મૂકતાં,

ચોથુ પદ $=\ T_4 = 7_{C_3}(3x)^{7-3} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^{3}$

$= 35 \cdot (3x)^4 \left(-\frac{1}{x^3}\right)$

$= 35. (81) \cdot x^4\left(-\frac{1}{x^3}\right)$

$= -\ 2835x$

પાંચમું પદ $=\ T_5 = 7_{C_4}(3x)^{7-4} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^{4}$

$= 35 \ . \ (3x)^3 \ . \ \left(\frac{1}{x^4}\right)$

$= (35 \times 27) \ x^3 \left(\frac{1}{x^4}\right)$

$= \frac{945}{x}$

ઉદાહરણ-10 : $\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં (i) x^2 નો સહગુણક (ii) અચળ પદ મેળવો.

જવાબ : $\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)^{10}$

$$T_{r+1} = 10_{C_r}\left(\frac{x}{3}\right)^{10-r}\left(\frac{3}{x}\right)^r$$

$$= 10_{C_r}\left(\frac{x^{10-r}}{3^{10-r}}\right)\left(\frac{3^r}{x^r}\right)$$

$$= 10_{C_r}\left(\frac{x^{10-2r}}{3^{10-2r}}\right) \qquad \text{— (I)}$$

(i) x^2 નો સહગુણક મેળવવો છે એટલે કે x ની ઘાતમાં 2 મુકવાના છે. જે સમી-(I) માંથી

$\therefore \ x^{10-2r} = x^2$

$\therefore \ 10 - 2r = 2$

$\therefore \ 2r = 8$

$r = 4$

$\therefore \ T_{r+1}$ માં $r = 4$ મુકતાં

$T_5 = 10_{C_4}\left(\frac{x^{10-2(4)}}{3^{10-2(4)}}\right)$

$= \frac{210}{9} \ . \ x^2$

$= \frac{70}{3} x^2$

$\therefore \ x^2$ નો સહગુણક $= \frac{70}{3}$

(ii) અચલ પદ શોધવા x ની ઘાત 0 લેવી પડે.

$\therefore\ x^{10-2r} = x^0$

$\therefore\ 10 - 2r = 0$

$\therefore\ 10 = 2r$

$\therefore\ r = 5$

(જો r ની કિંમત ઘનપૂર્ણાંક ન હોય તો અચળ પદ શોધી શકાતું નથી.)

જે T_{r+1} માં મુકતાં અચલ પદ મળશે.

$$T_6 = 10_{C_5}\ \frac{x^{10-2(5)}}{3^{10-2(5)}}$$

$$= 10_{C_5}\ \frac{x^0}{3^0}$$

$= 210(1)$

$= 210$ જે અચલ પદ છે.

નોંધ : આ દાખલામાં આપણે x ની 2 ઘાત, x ની 0 ઘાત મુકી x^2 નો સહગુણક અને અચલપદ શોધ્યા તેવી જ રીતે x ની 1 ઘાત મુકી x નો સહગુણક તેમજ બીજી ગમે તે ઘાત (પ્લસ, માઈનસ બંને જેમ કે x^{-6}, x^6, ...) લઈને તેના સહગુણકો શોધી શકાય.

ઉદાહરણ-11 : કોઈ એક દ્વિપદી વિસ્તરણમાં

મધ્યમ પદ = $60K^3 = 1620$ હોય તો (K) ની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$60K^3 = 1620$

$\therefore\ K^3 = \frac{1620}{60}$

$\therefore\ K^3 = 27$

$\therefore\ K = 3$

1.8.6 સ્વાધ્યાય :

(1) $(a + 2x)^5$ નું વિસ્તરણ કરો.

(**જવાબ :** $a^5 + 10a^4 . x + 40a^3 . x^2 + 80a^2x^3 + 80ax^4 + 32x^5$)

(2) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^4$ નું વિસ્તરણ કરો.

(**જવાબ :** $\frac{a^4}{b^4} - \frac{4a^2}{b^2} + 6 - \frac{4b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}$)

(3) $(101)^5$ ની કિંમત શોધો.

(**જવાબ :** 10510100501)

(4) $(9.9)^5$ ની કિંમત શોધો.

(**જવાબ :** 95099.00499)

(5) $(1.9)^4$ ની કિંમત શોધો.

(**જવાબ :** 13.0321)

(6) $\left(\sqrt{5}+1\right)^5 - \left(\sqrt{5}-1\right)^5$ ની કિંમત શોધો.

(**જવાબ :** 352)

(7) $\left(\frac{5a}{3}+\frac{3}{5a}\right)^{12}$ ના વિસ્તરણમાં પાંચમું પદ શોધો.

(**જવાબ :** $\frac{309375(a^4)}{81}$)

(8) $\left(\frac{2a}{5}-\frac{5}{2b}\right)^9$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદો શોધો.

(**જવાબ :** $T_5 = \frac{252a^5}{5b^4}$ અને $T_6 = \frac{315a^4}{b^5}$)

(9) $\left(\frac{x}{5}-\frac{5}{x}\right)^8$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ શોધો.

(**જવાબ :** $T_5 = \frac{70x^2}{25}$)

(10) $\left(\frac{4a}{3}-\frac{3}{a}\right)^9$ ના વિસ્તરણમાં અચલ પદ શોધો.

(**જવાબ :** $T_{r+1} = 1{,}45{,}152,\ r = 6$)

(11) $\left(\sqrt{a}-\frac{3}{a}\right)^{12}$ ના વિસ્તરણમાં અચલ પદ શોધો.

(**જવાબ :** 40095)

(12) $\left(\frac{x}{b}-\frac{b}{x}\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં x^4 ઘાત વાળુ પદ શોધો અને x^4 નો સહગુણક જણાવો.

(**જવાબ :** $T_4 = \frac{-120x^4}{b^4}$ અને સહગુણક = $\frac{-120}{b^4}$)

(13) $(3x^2 - x)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં x^{16} નો સહગુણક શોધો.

(**જવાબ :** $r = 4$, સહગુણક = 1,53,090)

(14) $\left(x^3+\frac{1}{x^8}\right)^{11}$ ના વિસ્તરણમાં અચલ પદ શોધો.

(**જવાબ :** $r = 3$, $T_4 = 165$)

(15) $\left(5x^2 - \frac{5}{x}\right)^9$ ના વિસ્તરણમાં r ની કિંમત શોધો.

(જવાબ : 6)

(16) $\left(4x^2 - \frac{4}{x}\right)^7$ ના વિસ્તરણમાં અચલ પદ મળે છે ?

(જવાબ : અચલ પદ નથી $\therefore$ r ની કિંમત ઘનપૂર્ણાંક મળતી નથી.)

(17) ટૂંકમાં જવાબ લખો.

(i) કોઈ એક દ્વિપદી વિસ્તરણમાં છઠ્ઠું પદ = $20K^4 = 320$ હોય તો K ની કિંમત શોધો.

(જવાબ : K = 2)

(ii) દ્વિપદી પ્રમેલ લખો.

(iii) દ્વિપદી પદાવલી એટલે શું ?

(iv) $(x + a)^3$ નું વિસ્તરણ લખો.

(v) અચલ પદ એટલે શું ? તેનું સૂત્ર લખો.

(vi) મધ્યમ પદ કેવી રીતે શોધાય.

(vii) દ્વિપદી સહગુણાકો માટેનો પાસ્કલ ત્રિકોણ લખો.

10.9 ચાવીરૂપ શબ્દો

ક્રમચય – ગોઠવણી

સંચય – પસંદગી

^nP_r – n વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓની ગોઠવણી

^nC_r – n વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓની પસંદગી

n ! (n ફેક્ટોરીયલ) – n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ક્રમિક ગુણાકાર એટલે કે $1 \times 2 \times 3 \, ... \times (n-1) \times n$

સમરૂપ વસ્તુઓ – એક સરખી વસ્તુઓ

દ્વિપદી પદાવલી – જે પદમાં બે પદો આપેલા હોય તે પદાવલી

T_n – n મું પદ

T_{r+1} – સામાન્ય પદ

$T_{\frac{n}{2}+1}$ – મધ્યમ પદ

x ની શૂન્ય ઘાત લેતાં મળતું પદ – અચલ પદ

x નો સહગુણક – x સાથે ગુણાયેલો અંક દા.ત. $2x$ માં 2 એ સહગુણક છે.

★ ★ ★

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) 'Basic Statistics' Das and Gupta, Calcutta.

(2) Sancheti & Kapoor, 'Business Statistics', S Chaw & sons, New Delhi.

(3) Mathematics, R. D. Sharma, Dhanpat Rai Publications Pvt. Ltd., New Delhi.

એકમ-11 વિધેય

: રૂપરેખા :

11.0 ઉદ્દેશા

`આ એકમના અભ્યાસથી તમે નીચેની બાબતોથી માહિતગાર થશો.

- વિધેયના અર્થ વિશે જાણકારી મળશે.
- વિધેયની ઉપયોગિતા વિશે જાણી શકાશે.

11.1 પ્રસ્તાવના :

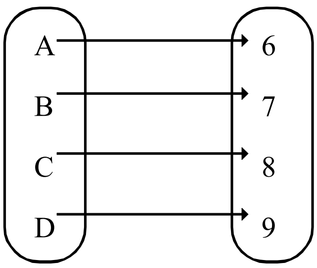
વ્યવહારમાં આર્થિક, સામાજિક, વૈજ્ઞાનિક, રાજકીય ક્ષેત્રે જુદી જુદી ચલરાશીઓ વચ્ચે સંબંધ જોવા મળે છે. વ્યવહારમાં આવક અને ખર્ચ, કિંમત અને માંગ, વેચાણ અને નફો – આમ બે ચલ વચ્ચે સંબંધ હોય છે. આ પ્રકારના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા વિધેય ઉપયોગી છે.

11.2 વિધેયનો ખ્યાલ :

બે ચલરાશી વચ્ચેના ગાણિતિક સંબંધ રજૂ કરવા વિધેય ઉપયોગી છે. નિરપેક્ષ ચલ અને સાપેક્ષ ચલની કિંમતો વચ્ચેનો સંબંધ રજૂ કરતા નિયમ કે સંગતતાને વિધેય તરીકે ઓળખાવાય.

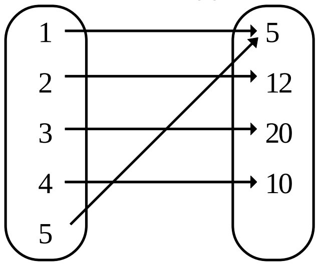
વિધેયનો અર્થ સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

(1) વિદ્યાર્થીના નામ વિદ્યાર્થીના રોલ નંબર



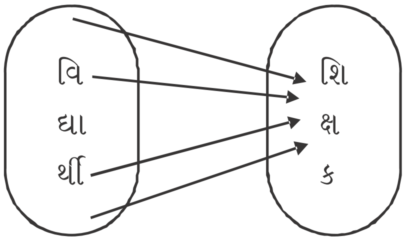
અહીં ગણ A ના દરેક ઘટક ગણ B ના અનન્ય ઘટક સાથે સંકળાયેલ છે. તેથી ગણ A અને Bના ઘટકો વચ્ચેની સંગતતાને વિધેય કહેવાય છે.

(2) બાળકોની સંખ્યા કુટુંબોની સંખ્યા



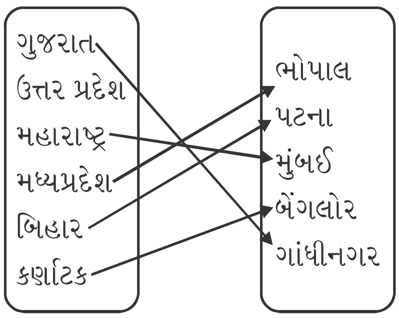
અહીં ગણ A ના દરેક ઘટક ગણ B ના કોઈ એક ઘટક સાથે સંકળાયેલ છે. તેથી આ સંગતતા વિધેય છે.

(3) વિદ્યાર્થી વર્ગ શિક્ષક



અહીં ગણ A ના બધા જ ઘટકો ગણ B ના એક જ ઘટક સાથે સંકળાયેલ છે. માટે A અને B ના ઘટકો વચ્ચેની સંગતતા વિધેય છે.

(4)



અહીં ગણ A નો એક ઘટક ઉત્તરપ્રદેશ ગણ B ના કોઈ ઘટક સાથે સંકળાયેલ નથી. તેથી A અને B ના ઘટકો વચ્ચેના સંબંધને વિધેય કહેવાય નહી.

11.૩ વિધેયની વ્યાખ્યા :

જો A અને B બે ખાલી ગણ ન હોય અને કોઈ નિયમ કે સંગતતા દ્વારા ગણ A ના પ્રત્યેક ઘટકને ગણ B ના એક અને માત્ર એક (અનન્ય) ઘટક સાથે સાંકળી શકાતા હોય તો તે નિયમ કે સંગતતાને A થી B પરનું વિધેય કહેવામાં આવે છે. સંકેતમાં તેને $f : A \rightarrow B$ વડે દર્શાવાય.

11.4 પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર : Domain, Co-domain, Range

ધારો કે, $f : A \rightarrow B$ છે. અહીં ગણ A ને વિધેયનો પ્રદેશ અને ગણ B ને વિધેયનો સહપ્રદેશ કહે છે.

પ્રદેશ એ નિરપેક્ષ ચલ x ની કિંમતોનો ગણ છે. ચલ x ની કિંમતોને અનુરૂપ વિધેયના મૂલ્યના ગણને વિધેયનો વિસ્તાર કહે છે. સંકેતમાં તેને R_f વડે દર્શાવાય. વિધેયનો વિસ્તાર એ સહપ્રદેશનો ઉપગણ અથવા સહપ્રદેશ પોતે જ હોઈ શકે.

દા.ત. (૧) $f : A \rightarrow B$, $A = \{1,2,5\}$, $B = \{1,4,5,7,25,28\}$ અને $f(x) = x^2 + 3$ હોય તો વિધેયનો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર જણાવો.

અહીં પ્રદેશ $D_f = A = \{1, 2, 5\}$

સહપ્રદેશ $B = \{1,4,5,7,25,28\}$

હવે વિસ્તાર શોધવા x ની કિંમતોને અનુરૂપ વિધેયના મૂલ્ય મેળવીએ.

$f(x) = x^2 + 3$

(i) $f(1) = (1)^2 + 3 = 4$

(ii) $f(2) = (2)^2 + 3 = 7$

(iii) $f(5) = (5)^2 + 3 = 28$

$\therefore$ વિસ્તાર $Rf = \{4,7,28\}$

અહીં જોઈ શકાય છે કે વિસ્તાર એ સહપ્રદેશનો ઉપગણ છે.

(૨) $f : A \rightarrow B$, $A = \{2,5,10\}$, $B = \{7,22,47\}$ અને $f(x) = 5x - 3$ હોય તો વિધેયનો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર જણાવો.

અહીં પ્રદેશ $A = \{2, 5, 10\}$

સહપ્રદેશ $B = \{7, 22, 47\}$

હવે વિસ્તાર શોધવા ચલ ની કિંમતોને અનુરૂપ વિધેયના મૂલ્ય શોધીએ.

$f(x) = 5x - 3$

(i) $f(2) = 5(2) - 3 = 7$

(ii) $f(5) = 5(5) - 3 = 22$

(iii) $f(10) = 5(10) - 3 = 47$

વિસ્તાર $Rf = \{7, 22, 47\}$

અહીં જોઈ શકાય છે કે વિધેયનો સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર બંને સમાન છે.

11.5 વિધેયના પ્રકાર : વિધેયના મુખ્ય પ્રકારો નીચે મુજબ છે.

11.5.1 એક એક વિધેય :ધારો કે $f : A \rightarrow B$ છે. જો ગણ Aના બે જુદા જુદા ઘટકો માટે ગણ B માં મળતા

સંગત પ્રતિબિંબો પણ જુદા જુદા હોય તો વિધેય f ને એક એક વિધેય કહેવાય. આમ, જો વિધેયમાં ચલ x ની જુદી જુદી કિંમતો માટે વિધેયના મૂલ્ય પણ જુદા જુદા હોય તો તે વિધેયને એક એક વિધેય કહે છે.

દા.ત. જો $f : N \rightarrow Z$ $f(x) = 5x - 3$ છે. તો

$f(1) = 5(1) - 3 = 2$

$f(2) = 5(2) - 3 = 7$

$f(3) = 5(3) - 3 = 12$

આમ x ની જુદી જુદી કિંમતો માટે વિધેયના મૂલ્ય પણ અલગ અલગ મળે છે. તેથી f એ એક-એક વિધેય છે.

11.5.2 અનેક-એક વિધેય :

ધારો કે $f : A \rightarrow B$ છે. જો ગણ Aના બે જુદા જુદા ઘટકો માટે ગણ B માં મળતું પ્રતિબિંબ સમાન હોય તો વિધેય f ને અનેક-એક વિધેય કહેવાય. આમ જો નિરપેક્ષ ચલ x

ની બે કે તેથી વધુ કિંમતો માટે વિધેયનું મૂલ્ય એક સરખું મળતું હોય તો તે વિધેયને અનેક-એક વિધેય કહે છે.

દા.ત. $f : Z \rightarrow Z$ $f(x) = x^2 + 5$ છે.

અહીં વિધેયનો પ્રદેશ Z હોવાથી xની કિંમત ધન કે ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા લઈ શકાય.

$f(-2) = (-2)^2 + 5 = 9$

$f(-1) = (-1)^2 + 5 = 6$

$f(0) = (0)^2 + 5 = 5$

$f(1) = (1)^2 + 5 = 6$

આમ, x ની બે અલગ અલગ કિંમત માટે વિધેયનું મૂલ્ય સમાન મળે છે. તેથી વિધેય f અનેક એક વિધેય છે.

11.5.3 અચળ વિધેય :

ધારો કે $f : A \rightarrow B$ છે. જો ગણ Aના બધા જ ઘટકો માટે ગણ B માં મળતું પ્રતિબિંબ એક જ હોય તો વિધેય f ને અચળ વિધેય કહેવાય. આમ, જો નિરપેક્ષ ચલ x ની દરેક કિંમતો માટે વિધેયનું મૂલ્ય અચળ રહેતું હોય તો તે વિધેયને અચળ વિધેય કહે છે. અચળ વિધેયના વિસ્તારમાં માત્ર એક જ ઘટક આવેલો હોય છે.દા.ત.$f : A \rightarrow B$ A = {1, 2, 6}, B = {4, 5, 8} અને $f(x) = 5$ છે.અહીં વિધેયમાં xની કિંમત 1, 2 અને 6 મૂકતાં વિધેયનું મૂલ્ય 5 જ મળશે. આમ
x ની બધી જ કિંમતો માટે વિધેયનું મૂલ્ય સમાન રહે છે. તેથી વિધેય f અચળ વિધેય છે.

11.5.4 સમાન વિધેય :

જો (i) બે વિધેય f અને g સમાન પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત થયેલાં હોય અને (ii) નિરપેક્ષ ચલ x ની પ્રત્યેક કિંમત માટે બંને વિધેયનાં મૂલ્ય પણ સમાન હોય એટલે કે $x \in A$ માટે $f(a) = g(a)$ થાય તો f અને g ને સમાન વિધેય કહેવાય.

11.5.5 વાસ્તવિક વિધેય :

જે વિધેયનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર બંને વાસ્તવિક ગણ અથવા તેનો કોઈપણ ઉપગણ હોય તો તે વિધેયને વાસ્તવિક વિધેય કહે છે.

વ્યવહારમાં બે ચલરાશી વચ્ચે જોવા મળતા વાસ્તવિક સંબંધને રજૂ કરતા વિધેયને વાસ્તવિક વિધેય કહેવાય. દા.ત. (1) માંગનું વિધેય $D = f(p)$ એ કિંમત અને માંગ વચ્ચેનો સંબંધ રજૂ કરતું વાસ્તવિક વિધેય છે.

(2) $c = f(x)$ એ ઉત્પાદનના એકમો(x) અને ઉત્પાદન ખર્ચ વચ્ચેનો સંબંધ રજૂ કરતું વાસ્તવિક વિધેય છે.

11.5.6 યુગ્મ (બેકી) અને અયુગ્મ (એકી) વિધેય :

જો વિધેય $f(x)$ માટે xની દરેક કિંમત માટે $f(-x) = f(x)$ થાય તો તેવા વિધેયને યુગ્મ વિધેય કહે છે. અને જો $f(-x) = -f(x)$ થાય તો તે વિધેયને અયુગ્મ વિધેય કહેવાય.

11.5.7 ઘાતાંકીય વિધેય :

જો $y = a_x$, જ્યાં $x \neq 0$ હોય તો y ને a આધારવાળું ઘાતાંકીય વિધેય કહેવાય.
દા.ત.

$y = 3^x$; $y = e^x$

11.5.8 સુરેખ વિધેય :

જો બહુપદી વિધેયમાં ચલ xનો ઘાત 1 હોય તો તેવા વિધેયને સુરેખ વિધેય કહેવાય, સુરેખ વિધેયનું સામાન્ય સ્વરૂપ $y = ax + b$ છે. સુરેખ વિધેયના આલેખમાં બધા જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર આવેલાં હોય છે.

11.5.9 દ્વિઘાતી વિધેય :

જો n ઘાતી બહુપદી વિધેયમાં $n = 2$ હોય એટલે કે ચલ x નો ઘાત 2 હોય તેવા વિધેયને દ્વિઘાત વિધેય કહેવાય. તેનું સામાન્ય સ્વરૂપ $y = ax^2 + bx + c$ છે. દ્વિઘાત વિધેયનો આલેખ પરવલય વક્ર સ્વરૂપનો હોય છે.

11.6 ઉદાહરણ :

1. જો $f : A \rightarrow B$ $f(x) = x + 3$, $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ હોય તો વિધેયનો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

જવાબઃ ગણ A = પ્રદેશ = $\{0, 1, 2\}$

ગણ B = સહપ્રદેશ = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

હવે $f(x) = x + 3$

ગણ Aમાં આપેલી xની કિંમતોને અનુરૂપ વિધેયનાં મૂલ્ય શોધીએ.

$f(0) = 0 + 3 = 3$

$f(1) = 1 + 3 = 4$

$f(2) = 2 + 3 = 5$

વિસ્તાર $Rf = \{3, 4, 5\}$

2. જો $f : N \rightarrow Z$ $f(x) = x^2 - 2x + 1$ હોય $f(2), f(3), f(0)$ અને $f(-1)$ માંથી જે શક્ય હોય તે મેળવો.

જવાબઃ $f(x) = x^2 - 2x + 1$

$f(2) = (2)^2 - 2(2) + 1$

$= 4 - 4 + 1$

$f(2) = 1$

(ii) $f(3) = (3)^2 - 2(3) + 1$

$= 9 - 6 + 1$

$f(3) = 4$

હવે, આ વિધેયનો પ્રદેશ N હોવાથી $x = 0$ અને $x = -1$ લઈ શકાય નહીં. તેથી $x = 0$ અને -1 ને અનુરૂપ વિધેય $f(x)$ ના મૂલ્ય શોધી શકાય નહીં.

3. જો $f(x) = 2x^2 + x - 1$ હોય તો (i) $f(1) - f(-1)$ અને (ii) $f(2) - f(1/2)$ ની કિંમત શોધો.

જવાબઃ $f(x) = 2x^2 + x - 1$

(i) $f(1) = 2(1)^2 + 1 - 1$

$= 2 + 1 - 1$

$f(1) = 2$

હવે, $f(-1) = 2(-1)^2 + (-1) - 1$

$= 2 - 1 - 1$

$f(-1) = 0$

$\therefore \quad f(1) - f(-1) = 2 - 0$

$= 2$

(ii) $f(x) = 2x^2 + x - 1$

$f(2) = 2(2)^2 + 2 - 1$

$= 8 + 2 - 1$

$f(2) = 9$

$$f(1/2) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1$$

$$= 2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$$

$$= \frac{1+1-2}{2}$$

$f(1/2) = 0$

$\therefore \quad f(1) - f(-1) = 9 - 0$

$= 9$

4. જો $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ અને $g(x) = 2^x + x - 1$ હોય તો $2f(3) - 3g(0)$ નું મૂલ્ય શોધો.

જવાબ: $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ $\qquad g(x) = 2^x + x - 1$

$\therefore \quad f(3) = (3)^2 + \frac{1}{3}$ $\qquad \therefore \quad g(0) = 2^0 + 0 - 1$

$= 9 + \frac{1}{3}$ $\qquad = 1 + 0 - 1$

$= \frac{28}{3}$ $\qquad g(0) = 0$

હવે, $2f(3) - 3g(0) = 2\left(\frac{28}{3}\right) - 3(0)$

$$= \frac{56}{3}$$

5. જો $f : A \rightarrow B$ $f(x) = 2x^2 - 3$ અને $A = \{1, 3, 5\}$ હોય તો વિસ્તાર શોધો.

જવાબ : અહીં પ્રદેશ $A = \{1, 3, 5\}$ આપેલ છે. તેથી આપેલા વિધેયમાં $x = 1$, 3 અને 5 મૂકી વિધેયના મૂલ્ય શોધીએ.

(i) $f(x) = 2x^2 - 3$

$\therefore \quad f(1) = 2(x)^2 - 3$

$= 2 - 3$

$f(1) = -1$

(ii) $f(3) = 2(3)^2 - 3$

$= 18 - 3$

$f(3) = 15$

(iii) $f(5) = 2(5)^2 - 3$

$= 50 - 3$

$f(3) = 47$

વિસ્તાર $Rf = \{-1, 15, 47\}$

6. $f : A \rightarrow B$ $f(x) = 5x - 1$ અને $Rf = \{4, 9, 19\}$ હોય તો વિધેયનો પ્રદેશ A શોધો.

જવાબ: અહીં વિધેયનો વિસ્તાર એટલે કે વિધેયના મૂલ્ય આપેલ છે અને પ્રદેશ એટલે કે ચલ xના મૂલ્ય શોધવાના છે.

(i) $f(x) = 4$

$5x - 1 = 4$

$5x = 4 + 1$

$5x = 5$

$x = 1$

(ii) $f(x) = 9$

$5x - 1 = 9$

$5x = 9 + 1$

$5x = 10$

$x = 2$

(iii) $f(x) = 19$

$5x - 1 = 19$

$5x = 19 + 1$

$5x = 20$

$x = 4$

$\therefore$ પ્રદેશ $A = \{1, 2, 4\}$

7. જો $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ જ્યાં $x \in z - \{-2\}$ હોય, તો $\dfrac{f(1)+f(-1)}{f(3)+f(0)}$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ: $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

(i) $f(1) = \dfrac{2(1)-1}{1+2}$

$= \dfrac{1}{3}$

(ii) $f(-1) = \dfrac{2(-1)-1}{-1+2}$

$= \dfrac{-3}{1}$

$f(-1) = -3$

(iii) $f(3) = \dfrac{2(3)-1}{3+2}$

$= \dfrac{5}{5}$

$= 1$

(iv) $f(-1) = \dfrac{2(0)-1}{0+2}$

$f(-1) = \dfrac{-1}{2}$

હવે, $\dfrac{f(1)+f(-1)}{f(3)+f(0)} = \dfrac{\frac{1}{3}+(-3)}{1+\left(\frac{-1}{2}\right)}$

$= \dfrac{-8/3}{1/2}$

$$= -\frac{8}{3} \times \frac{2}{1}$$

$$= -16/3$$

8. **$f : N \rightarrow Z$ $f(x) = x^2 + x + 1$ અને $g : Z \rightarrow Z$ $g(x) = 5x - 3$ જ્યાં $x \in \{1, 2, 3\}$ હોય તો વિધેયની સમાનતા તપાસો.**

જવાબ: અહીં વિધેય f નો પ્રદેશ N છે અને વિધેય g નો પ્રદેશ Z છે. આમ બંને વિધેય સમાન પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત નથી, તેથી f અને g સમાન વિધેય નથી.

9. **$f : N \rightarrow N$ $f(x) = x^3$ અને $g : N \rightarrow Z$ $g(x) = 3x^2 - 2x$; જ્યાં $x \in \{1, 2\}$ હોય તો બંને વિધેયની સમાનતા તપાસો.**

જવાબ: અહીં વિધેય f નો પ્રદેશ N છે અને વિધેય g નો પ્રદેશ પણ N છે. આમ બંને વિધેય સમાન પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત હોવાથી વિધેયની સમાનતા તપાસવા x ની આપેલ કિંમતો આગળ બંને વિધેયના મૂલ્ય શોધીએ.

(i) $x = 1$ આગળ

$f(x) = x^3$ $\quad$ $g(x) = 3x^2 - 2x$

$f(1) = (1)^3$ $\quad$ $g(1) = 3(1)^2 - 2(1)$

$= 1$ $\quad$ $= 3 - 2$

$= 1$

$\therefore \quad f(1) = g(1)$

(ii) $x = 2$ આગળ

$f(x) = x^3$ $\quad$ $g(x) = 3x^2 - 2x$

$f(2) = (2)^3$ $\quad$ $g(2) = 3(2)^2 - 2(2)$

$= 8$ $\quad$ $= 12 - 4$

$= 8$

$\therefore \quad f(2) = g(2)$

આમ, f અને g બંને વિધેય સમાન પ્રદેશ ઉપર વ્યાખ્યાયિત છે અને x ની આપેલી કિંમતો માટે બંને વિધેયના મૂલ્ય પણ સમાન છે. તેથી f અને g સમાન વિધેય છે.

10. **જો $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$ હોય તો $f(-2)$, $f(1)$ અને $f(2)$ ની કિંમત શોધો.**

જવાબ: $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

(i) $f(-2) = 1 - \left(\frac{1}{-2} + \frac{1}{(-2)^2}\right)$

$$= 1 - \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{-2+1}{4}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$= \frac{4+1}{4}$$

$$f(-2) = 5/4$$

(ii) $$f(1) = 1 - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{(1)^2}\right)$$

$$= 1 - (1+1)$$

$$= 1 - 2$$

$$f(1) = -1$$

(iii) $$f(2) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(2)^2}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)$$

$$f(2) = \frac{1}{4}$$

11. નીચેના વિધેયોના પ્રકાર નક્કી કરો.

(i) $f : N \to N$ $f(x) = x^2 + 5$; $x \in N$

(ii) $g : N \to Z$ $g(x) = 2x + x^2$; $x \in N$

(iii) $f : Z \to Z$ $f(x) = x^2 - 2x - 3$; $x \in Z$

(iv) $f : R \to R$ $f(x) = 5$; $x \in R$

જવાબ : (i) $f : N \to N$ $f(x) = x^2 + 5$

અહીં વિધેયનો પ્રદેશ N હોવાથી $x = 1, 2, 3, ...$ આગળ વિધેયના મૂલ્ય શોધીએ.

$f(1) = (1)^2 + 5 = 6$

$f(2) = (2)^2 + 5 = 9$

$f(3) = (3)^2 + 5 = 14$

અહીં xની જુદી જુદી કિંમતો માટે વિધેયના મૂલ્ય પણ જુદા જુદા મળે છે. તેથી આપેલું વિધેય એક-એક વિધેય છે.

(ii) $g : N \to Z$ $g(x) = 2x + x^2$

અહીં વિધેયનો પ્રદેશ N હોવાથી $x = 1, 2, 3, ...$ ને અનુરૂપ વિધેયનાં મૂલ્ય શોધીએ.

$g(1) = 2(1) + (1)^2 = 1$

$g(2) = 2(2) + (2)^2 = 0$

$g(3) = 2(3) + (3)^2 = -3$

અહીં xની જુદી જુદી કિંમતો માટે વિધેયના મૂલ્ય પણ જુદા જુદા મળે છે. તેથી આપેલું વિધેય એક-એક વિધેય છે.

(iii) $f : Z \to Z$ $f(x) = x^2 - 2x - 3$

અહીં વિધેયનો પ્રદેશ Z હોવાથી x નાં મૂલ્ય $-2, -1, 0, 1, 2, ...$ ને અનુરૂપ વિધેયનાં

મૂલ્ય શોધીએ.

(1) $f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 3$

$= 4 + 4 - 3$

$f(-2) = 5$

(2) $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3$

$= 1 + 2 - 3$

$f(-1) = 0$

(3) $f(0) = (0)^2 - 2(0) - 3$

$= 0 - 0 - 3$

$f(0) = -3$

(4) $f(1) = (1)^2 - 2(1) - 3$

$= 1 - 2 - 3$

$f(1) = -4$

(5) $f(2) = (2)^2 - 2(2) - 3$

$= 4 - 4 - 3$

$f(2) = -3$

અહીં $x = 0$ અને $x = 2$ માટે વિધેયનું મૂલ્ય -3 છે. આમ x ની બે જુદી જુદી કિંમત માટે વિધેયનાં મૂલ્ય સમાન છે. તેથી આપેલ વિધેય અનેક-એક વિધેય છે.

(iv) $f : R \rightarrow R$ $f(x) = 5$

અહીં વિધેયનો પ્રદેશ R હોવાથી x ની કિંમત કોઈપણ વાસ્તવિક કિંમત લખી શકાય.

$f(-2) = 5$

$f(-1) = 5$

$f(0) = 5$

$f(1) = 5$

$f(2) = 5$

અહીં x ની દરેક કિંમત માટે વિધેયનું મૂલ્ય સ્થિર (અચળ) રહે છે. તેથી આપેલું વિધેય અચળ વિધેય છે.

12. જો $f(x) = x(x + 1)(2x + 1)$ હોય તો $f(x) - f(x - 1)$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ: $f(x) = x(x + 1)(2x + 1)$

$x = x - 1$ મૂકતાં

$f(x - 1) = (x - 1)(x - 1 + 1)\{2(x - 1) + 1\}$

$= (x - 1)(x)(2x - 2 + 1)$

$f(x - 1) = (x - 1)(x)(2x - 1)$

હવે $f(x) - f(x - 1) = x\ (x + 1)\ (2x + 1) - (x - 1)\ (x)\ (2x - 1)$

$= x\ \{(x + 1)\ (2x + 1) - (x - 1)\ (2x - 1)\}$

$= x\ \{2x^2 + x + 2x + 1 - 2x^2 + x + 2x - 1\}$

$= x\ \{6x\}$

$f(x) - f(x - 1) = 6x^2$

13. જો $f(x) = \dfrac{1}{x}$ હોય તો $2.f(x + a) - f(x - a)$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$\therefore \quad f(x+a) = \dfrac{1}{x+a}$

$2.f(x+a) = \dfrac{2}{x+a}$

તેમજ $f(x-a) = \dfrac{1}{x-a}$

હવે, $2.f(x+a) - f(x-a) = \dfrac{2}{x+a} - \dfrac{1}{x-a}$

$$= \frac{2x-2a-x-a}{(x+a)(x-a)}$$

$$= \frac{x-3a}{x^2-a^2}$$

14. જો $y = f(x) = \dfrac{Px+q}{rx-P}$ હોય તો સાબિત કરો કે $x = f(y)$

જવાબ: $y = \dfrac{Px+q}{rx-P}$

$y(rx - P) = Px + q$
$rxy - Py = Px + q$
$rxy - Px = Py + q$
$x(ry - P) = Py + q$

$x = \dfrac{Py+q}{ry-P}$

આમ, $x = f(y)$

15. જો $f(x) = 5x^2 + kx + 3$ અને $f(3) = 60$ હોય તો kની કિંમત શોધો.

જવાબ: $f(x) = 5x^2 + kx + 3$

અહીં, $f(3) = 60$ આપેલ છે.

$\therefore \quad 5(3)^2 + k(3) + 3 = 60$

$45 + 3k + 3 = 60$

$3k = 60 - 48$

$3k = 12$

$k = 4$

16. એક વસ્તુની માંગનો નિયમ $d = f(p) = \sqrt{2500 - 3P^2}$ છે. જ્યારે વસ્તુની કિંમત રૂા. 25 હોય ત્યારે માંગ શોધો. વસ્તુની કઈ કિંમતે માંગ શૂન્ય થશે ?

જવાબ: (i) $d = \sqrt{2500 - 3P^2}$

જ્યારે કિંમત $P = 25$ હોય ત્યારે માંગ $d = ?$

$$d = \sqrt{2500-3(25)^2}$$

$$= \sqrt{2500-1875}$$

$$= \sqrt{625}$$

$$d = 25$$

આમ જ્યારે કિંમત રૂા. 25 હોય ત્યારે વસ્તુની માંગ 25 એકમ હશે.

(ii) જ્યારે માંગ $d = 0$ હોય ત્યારે કિંમત P = ?

$$d = \sqrt{2500-3P^2}$$

$$0 = \sqrt{2500-3P^2}$$

બંને બાજુ વર્ગ લેતાં,

$$0 = 2500 - 3P^2$$

$$3P^2 = 2500$$

$$P^2 = 833.33$$

$$P = \sqrt{833.33}$$

$$P = 28.87$$

આમ જ્યારે વસ્તુની કિંમત 28.87 રૂા. હોય ત્યારે તેની માંગ શૂન્ય થશે.

17. એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $d = f(p) = 1500 - 3P^2$ છે. જ્યારે વસ્તુની કિંમત ₹ 10 હોય ત્યારે માગ શોધો અને જ્યારે માગ 300 એકમ હોય ત્યારે કિંમત કેટલી હશે ?

જવાબ : (*i*) $d = f(p) = 1500 - 3P^2$

જ્યારે કિંમત ₹ P = 10 હોય ત્યારે માગ d = ?

વિધેયમાં $P = 10$ મૂકતાં

$$d = 1500 - 3(10)^2$$

$$= 1500 - (3 \times 100)$$

$$= 1500 - 300$$

$$d = 1200$$

આમ, જ્યારે વસ્તુની કિંમત ₹ 10 હોય ત્યારે વસ્તુની માંગ 1200 એકમ હશે.

(*ii*) જ્યારે માગ $d = 300$ એકમ હોય ત્યારે કિંમત P = ?

$$d = 1500 - 3P^2$$

વિધેયમાં d = 300 મૂકતાં

$\therefore\ 300 = 1500 - 3P^2$

$\therefore\ 3P^2 = 1500 - 300$

$\therefore\ 3P^2 = 1200$

$\therefore\ P^2 = \frac{1200}{3}$

$\therefore\ P^2 = 400$

$\therefore\ P = \sqrt{400}$

$\therefore\ P = \pm 20$ પરંતુ –20 શક્ય નથી. $\therefore\ P = 20$

આમ જ્યારે વસ્તુની માંગ 300 એકમ હોય ત્યારે વસ્તુની કિંમત ₹ 20 હશે.

18. બદામના પુરવઠાનું વિધેય S = 700 P – 10,000 છે. જો બદામની કિંમત ₹ 500 પ્રતિકિલો હોય ત્યારે પુરવઠો શોધો.

જવાબ : $S = 700P - 10,000$

જ્યારે કિંમત ₹ 500 હોય ત્યારે S = ?

વિધેય માં P = 500 મૂકતાં

$S = 700(500) - 10,000$

$S = 3,50,000 - 10,000$

$S = 3,40,000$

આમ જ્યારે બદામની કિંમત ₹ 500 હોય ત્યારે પુરવઠો 3,40,000 એકમ હશે.

19. એક વસ્તુના પુરવઠાનું વિધેય $S = f(p) = 5P^2 + 10P - 120$ છે. જ્યારે ભાવ ₹ 8 હોય ત્યારે પુરવઠો શોધો.

જવાબ : $S = 5P^2 + 10P - 120$

વિધેય માં P = 8 મૂકતાં

$S = 5(8)^2 + 10(8) - 120$

$S = 5 \times 64 + 80 - 120$

$S = 320 + 80 - 120$

$S = 280$

આમ જ્યારે વસ્તુની કિંમત ₹ 8 હોય ત્યારે પુરવઠો 280 એકમ હશે.

20. એક વસ્તુ માટે કુલ આમદાની (આવક) વિધેય $R = 100x - \frac{x^2}{2}$ છે. જો ઉત્પાદન 20 એકમ હોય ત્યારે કુલ આમદાની (આવક) મેળવો.

જવાબ : $R = 100x - \frac{x^2}{2}$

જ્યારે ઉત્પાદન $x = 20$ હોય ત્યારે આવક $R = ?$

વિધેયમાં $x = 20$ મૂકતાં

$$\therefore R = 100(20) - \frac{(20)^2}{2}$$

$$\therefore R = 2000 - \frac{400}{2}$$

$$\therefore R = 2000 - 200$$

$$\therefore R = 1800$$

આમ જ્યારે ઉત્પાદન 20 એકમ હોય ત્યારે આવક ₹ 1800 હશે.

21. એક વસ્તુ માટે કુલ આમદાની (આવક વિધેય) $R = 18x - 0.1x^2$ છે. જો ઉત્પાદન 30 એકમ હોય ત્યારે કુલ આમદાની મેળવો.

જવાબ : $R = 18x - 0.1x^2$

જ્યારે ઉત્પાદન $x = 30$ હોય ત્યારે આવક $R = ?$

વિધેયમાં $x = 30$ મૂકતાં

$$\therefore R = 18(30) - 0.1(30)^2$$

$$\therefore R = 540 - 0.1(900)$$

$$\therefore R = 540 - 90$$

$$\therefore R = 450$$

આમ જ્યારે ઉત્પાદન 30 એકમ હોય ત્યારે આવક $R = 450$ હશે.

22. કોઈ એક વસ્તુના x એકમોના ઉત્પાદનના ખર્ચનું વિધેય $C = f(x) = \frac{8x^2}{5} + 10x - 200$ છે. તો 10 એકમોના ઉત્પાદનનું કુલ ખર્ચ શોધો.

જવાબ : $C = f(x) = \frac{8x^2}{5} + 10x - 200$

$x = 10$ હોય ત્યારે $C = ?$

વિધેયમાં $x = 10$ મૂકતાં

$$\therefore C = \frac{8(10)^2}{5} + 10(10) - 200$$

$$\therefore\ C = \frac{800}{5} + 100 - 200$$

$$\therefore\ C = 160 + 100 - 200$$

$$\therefore\ C = 60$$

આમ જ્યારે ઉત્પાદન 30 એકમ હોય ત્યારે ખર્ચ ₹ 60 થશે.

23. કોઈ એક વસ્તુના x એકમોના ઉત્પાદનના ખર્ચનું વિધેય $C = f(x) = 45x + 850$ છે. તો

(*i*) 50 એકમોના ઉત્પાદનનું કુલ ખર્ચ શોધો.

(*ii*) કુલ ખર્ચ ₹ 5350 હોય ત્યારે ઉત્પાદન કેટલું હશે ?

જવાબ : $C = 45x + 850$

(*i*) $x = 50$ હોય ત્યારે $C = ?$

$$\therefore\ C = 45(50) + 850$$

$$\therefore\ C = 2250 + 850$$

$$\therefore\ C = 3100$$

આમ 50 એકમોના ઉત્પાદન માટે ખર્ચ ₹ 3100 થશે.

(*ii*) $C = 5350$ હોય ત્યારે $x = ?$

વિધેયમાં $C = 5350$ મૂકતાં

$$\therefore\ 5350 = 45x + 850$$

$$\therefore\ 5350 - 850 = 45x$$

$$\therefore\ 4500 = 45x$$

$$\therefore\ \frac{4500}{45} = x$$

$$\therefore\ x = 100$$

આમ ખર્ચ 5350 હોય ત્યારે ઉત્પાદન 100 એકમ હશે.

5.7 સ્વાધ્યાય

1. વ્યાખ્યા આપો : વિધેય, પ્રદેશ, સહપ્રદેશ, વિસ્તાર

2. એક-એક વિધેય અને અનેક-એક વિધેયનો અર્થ સમજાવો.

3. બે વિધેય સમાન વિધેય છે એમ ક્યારે કહેવાય ?

દાખલાઓ :

1. $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ હોય તો $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$ શોધો.

[**જવાબ :** 1, 5, 31, 1]

2. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ હોય તો $f(0)$ શોધો.

[જવાબ : 1]

3. જો $f(x) = x^3 + 3^x$ હોય તો $f(1) - f(0)$ ની કિંમત શોધો.

[જવાબ : 3]

4. જો $f : A \rightarrow B$, $f(x) = 4x - 1$ અને $R^f = \{3, 11, 19\}$ હોય તો વિધેય f નો પ્રદેશ A શોધો.

5. $f : A \rightarrow B$ અને $f(x) = 2x^2 - x - 1$ તેમજ $A = \{1, -1, 2\}$ હોય તો વિધેયનો વિસ્તાર Rf શોધો.

[જવાબ : $R_f = \{0, 2, 5\}$]

6. જો $f(x) = 2x^{2} + \frac{1}{x}$ અને $g(x) = 5x - 3$ હોય તો $2f(1) - 3g(-1)$ ની કિંમત શોધો.

[જવાબ : 30]

7. જો $f : Z - \{-2\} \rightarrow Z$ $f(x) = \frac{x^2-2}{x+2}$ અને $g : Z \rightarrow Z$ $g(x) = x^2 - 5$ જ્યાં $x \in \{1, 2, 5\}$ હોય તો વિધેય f અને g સમાન વિધેય છે કે નહીં તે જણાવો.

[જવાબ : બંને વિધેય જુદા જુદા પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત હોવાથી સમાન વિધેય નથી.]

8. જો $f : N \rightarrow N$ $f(x) = x^2$ અને $g : N \rightarrow Z$ $g(x) = 5x - 6$ જ્યાં $x \in \{2, 3\}$ હોય તો વિધેય f અને g ની સમાનતા તપાસો.

[જવાબ : f અને g સમાન વિધેય છે.]

9. જો $f : N \rightarrow Z$ $f(x) = x^2 + x - 3$ અને $x < 4$ હોય તો વિધેયનો પ્રદેશ સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર જણાવો.

[જવાબ : પ્રદેશ = $\{1, 2, 3\}$, સહપ્રદેશ = Z અને વિસ્તાર $R_f = \{-1, 3, 9\}$]

10. જો $f(x) = x + \frac{1}{x}$ હોય તો $f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)$ ની કિંમત શોધો.

[જવાબ : 0]

11. નીચેના વિધેયના પ્રકાર નક્કી કરો.

(*i*) $f : N \rightarrow Z$ $f(x) = 9x - 3$, $x \in N$

(*ii*) $f : N \rightarrow Z$ $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $x \in N$

(*iii*) $g : N \rightarrow Z$ $g(x) = 5x - x^2$, $x \in N$

(*iv*) $f : N \rightarrow N$ $f(x) = 8,\ x \in N$

[**જવાબ** : (*i*) એક-એક વિધેય (*ii*) એક-એક વિધેય (*iii*) અનેક-એક વિધેય (*iv*) અચળ વિધેય]

12. જો $f(x) = x^2 - x$ હોય તો સાબિત કરો કે $f(x + 1) = f(-x)$.

13. જો $f(x) = \frac{x(x+2)}{3}$ હોય તો $f(x + 2) - f(x)$ ની કિંમત શોધો.

[**જવાબ** : $\frac{4(x+2)}{3}$]

14. વિધેય $f(x) = x^2 + 3x + 1$ હોય તો x ની કઈ કિંમત માટે $f(x) = f(1)$ થાય ?

[**જવાબ** : $x = -4$ અથવા $x = 1$]

15. જો $f(x) = x^2 + x - 1$ હોય તો $\frac{2f(2)+f(1)}{f(3)}$ ની કિંમત શોધો.

[**જવાબ** : 1]

16. એક વસ્તુની માંગની નિયમ $x = \frac{100-2P}{3}$ છે. જ્યારે વસ્તુની કિંમત રૂ. 35 હોય ત્યારે તેની માંગ શોધો. વસ્તુની કઈ કિંમતે માંગ શૂન્ય થશે ?

[**જવાબ** : માંગ $x = 10$, $P = 50$]

17. એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $P = f(x) = 15 - 0.02x$ છે. જ્યાં P = કિંમત અને x = માંગ છે. જ્યારે

(*i*) વસ્તુની માંગ 500 એકમ હોય ત્યારે તેની કિંમત કેટલી હોય ?

(*ii*) વસ્તુની કિંમત ₹ 7 હોય ત્યારે તેની માંગ કેટલી હશે ?

(*iii*) કઈ કિંમતે માંગ શૂન્ય થશે ?

[**જવાબ** : (*i*) $x = 500$ ત્યારે $P = 5$

(*ii*) $P = 7$ હોય ત્યારે $x = 400$

(*iii*) $x = 0$ હોય ત્યારે $P = 15$]

18. બજારમાં ખાંડની માગનું વિધેય $d = f(P) = 6400 - P^2$ છે. જ્યારે ખાંડનો ભાવ કિગ્રા. દીઠ અનુક્રમે ₹ 40, ₹ 45 અને ₹ 50 હોય ત્યારે તેની માંગ કેટલી હશે તે શોધો. કયા ભાવે ખાંડની માંગ શૂન્ય થશે.

[**જવાબ** : (*i*) $P = 40$ ત્યારે $d = 4800$

(*ii*) $P = 45$ ત્યારે $d = 4375$

(*iii*) $P = 50$ ત્યારે $d = 3900$

(iv) d = 0 ત્યારે P = 80]

19. એક વસ્તુનું પુરવઠા વિધેય $S = f(P) = 5P^2 + P - 10$ છે, જ્યાં S = પુરવઠો, **P** = કિંમત છે. જ્યારે વસ્તુની કિંમત ₹ 40, ₹ 42 અને ₹ 45 હોય ત્યારે વસ્તુનો પુરવઠો શોધો.

[**જવાબ :** P = 40 હોય ત્યારે S = 8030

P = 42 હોય ત્યારે S = 8852

P = 45 હોય ત્યારે S = 10,160]

20. કોઈ એક વસ્તુના પુરવઠાનું વિધેય $S = f(P) = 10P^2 + 8P + 100$ છે, જ્યારે વસ્તુની કિંમત ₹ 8, ₹ 10 અને ₹ 12 હોય ત્યારે વસ્તુનો પુરવઠો શોધો.

[**જવાબ :** P = 8 હોય ત્યારે S = 804

P = 10 હોય ત્યારે S = 1180

P = 12 હોય ત્યારે S = 1636]

21. પ્રેસર કુકર બનાવનાર એક પેઢીનું દરરોજ x પ્રેસર કુકરના ઉત્પાદનનું કુલ ખર્ચ $C = \frac{9x^2}{5} + 250x + 25000$ છે, તો દરરોજ 50 પ્રેસર કુકરના ઉત્પાદનનું કુલ ખર્ચ શોધો.

[**જવાબ :** x = 50 હોય ત્યારે C = 42000]

22. એક વસ્તુના x એકમોના ઉત્પાદનનું કુલ ખર્ચ $C = f(x) = 60x + \frac{x^2}{50}$ છે. તો દરરોજ 100 એકમોના ઉત્પાદનનું કુલ ખર્ચ શોધો.

[**જવાબ :** x = 100 હોય ત્યારે C = 6200]

23. કોઈ એક વસ્તુ માટે કુલ આમદાની (આવક) વિધેય $R = 75 - \frac{3x^2}{5}$ છે. તો જ્યારે વસ્તુની માંગ x = 30 એકમ હોય ત્યારે કુલ આમદાની (આવક) શોધો.

[**જવાબ :** x = 30 હોય ત્યારે R = 1710]

24. કોઈ એક વસ્તુ માટે કુલ આમદાની (આવક) વિધેય $R = 36x^2 + 2000x$ છે. તો જ્યારે વસ્તુની માંગ 100 એકમ હોય ત્યારે કુલ આમદાની (આવક) શોધો.

[**જવાબ :** x = 100 હોય ત્યારે R = 5,60,000]

25. મીઠાઈની માગનું વિધેય $d = f(P) = \sqrt{22500 - 9P}$ છે. જ્યારે મીઠાઈનો ભાવ કિગ્રા. દીઠ ₹ 900 હોય ત્યારે તેની માંગ શોધો.

[**જવાબ :** P = 900 હોય ત્યારે d = 120]

26. નીચેની ખાલી જગ્યા પૂરો.

1. જો $f(x)$ = K જ્યાં $x \in$ N હોય તો f એ .... વિધેય છે.

2. વિધેયનો વિસ્તાર એ સહપ્રદેશનો .... ગણ હોય છે.

3. ગણ A = (વિદ્યાર્થીઓના નામ) અને B = (વિદ્યાર્થીઓના રોલ નંબર) હોય તો ગણ A અને ગણ B વચ્ચેની સંગતતાને .... પ્રકારનું વિધેય કહેવાય.

4. f : Z → Z $f(x) = x^2 - x - 3$ એ .... પ્રકારનું વિધેય છે.

5. જો $f(x)$ = Kx + 3 અને $f(x)$ = 7 હોય તો K = ...

6. જો $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ હોય તો $f(0)$ = ...

7. જો વિધેય $g(x) = 2x^2 + \dfrac{1}{x}$ હોય તો $g(x) + g(-x)$ = ...

8. જો વિધેય f : A → B અને $f(x) = 2x^2 - 2x$ તેમજ A = {1, 3} હોય તો R_f = ...

9. જો f : A → B અને $f(x) = 5x - 1$ જ્યાં R_f = {6, 21, 36} હોય તો પ્રદેશ A = ...

10. વિધેય $f(x) = ax + k$ માટે જો $f(2) + f(-2) = 10$ હોય તો k = ...

11. f : {1, 3} → Z; $f(x)$ = 5x – 1 હોય તો વિધેયનો પ્રદેશ = ... સહ પ્રદેશ = ... અને વિસ્તાર = ...

12. $f(x) = x^3 + 1$ હોય તો $f(0)$ = ...

13. જો $f(x) = x^2 - 2x + 1$ હોય તો $f(0)$ = ... અને $f(1)$ = ...

14. જો $f(x) = 5x + 2$ અને $f(x) = 12$ હોય તો x = ...

15. એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $d = \sqrt{3200 - 3P^2}$ છે. જ્યારે વસ્તુની કિંમત રૂ. 15 હોય ત્યારે તેની માંગ .... થાય.

[**જવાબ :** (1) અચળ (2) ઉપગણ (3) એક-એક વિધેય (4) અનેક-એક વિધેય (5) 2 (6) 1 (7) $4x^2$ (8) {0, 12} (9) {1, 5, 7} (10) 5 (11) પ્રદેશ = {1, 3}, સહપ્રદેશ = Z, વિસ્તાર = {4, 14} (12) 0 (13) 1, 0 (14) 2 (15) 52.44**]**

એકમ-12 લક્ષ

રૂપરેખા

12.0 ઉદ્દેશો

12.1 પ્રસ્તાવના

12.2 'ને' અનુલક્ષે છે નો અર્થ

12.2.1 $x \to a$ નો અર્થ

12.2.2 $x \to 0$ નો અર્થ

12.2.3 $x \to \infty$ નો અર્થ

12.2.4 સ્વાધ્યાય

12.3 વિધેયનું લક્ષની વ્યાખ્યા (અર્થ)

12.4 કોષ્ટકની રચના કરી લક્ષની કિંમત શોધવી.

12.4.1 ઉદાહરણો અને સ્વાધ્યાય 2 અને 3

12.5 લક્ષના નિયમો

12.6 લક્ષ શોધવાની પદ્ધતિ

12.7 ચાવીરૂપ શબ્દો

12.8 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

12.0 ઉદ્દેશોઆ પ્રકરણના મુખ્ય ઉદ્દેશો નીચે મુજબ છે.

(1) સામીપ્યની સમજૂતી મેળવી લક્ષ અંગેની જાણકારી મેળવવી.

(2) 'ને' અનુલક્ષે છે નો અર્થ સમજાવો.

(3) વિધેયના લક્ષની વ્યાખ્યા સમજવી.

(4) x ની નજીકની કિંમત (x ની કિંમતમાં વધારો કે ઘટાડો કરતા) લઈ વિધેયનું લક્ષ કેવી રીતે શોધી શકાય તે અંગેની જાણકારી મેળવવી.

(5) લક્ષના નિયમોની જાણકારી મેળવી તેની મદદથી વિવિધ પ્રકારના વિધયેનું લક્ષ કેવી રીતે શોધી શકાય તે અંગેનું જ્ઞાન મેળવવું.

12.1 પ્રસ્તાવના :

વિદ્યાર્થી મિત્રો તમે ઝડપથી કેટલા કિલોમીટર સુધી દોડો શકો ? બરફનો ટુકડો રૂમનાં સામાન્ય તાપમાનમાં રાખવામાં આવે તો તે કેટલા સમયમાં સંપૂર્ણ ઓગળી જશે ? કોઈ એક વાહનની મહત્તમ સ્પીડ કેટલી ? એક લિટર પેટ્રોલ કસટલી એવરેજ આપે છે ?

તમે ઉપરનાં વાક્યો વાંચ્યા પછી સમજી શક્યાં હશો કે દરેક બાબતને મર્યાદા હોય છે. જેને અંગ્રેજીમાં Limitકહેવાય છે. ગાણિતીક ચિહ્ન તેનું Limછે. અર્થશાસ્ત્રમાં ઉત્પાદનમાં

સાધનોની, ટેકનોલોજીની, સમયની વગેરે મર્યાદાઓ હોય છે. જો ઉત્પાદન વધારવું હોય તો ? જો નફો વધારવો હોય તો ...? આમ મર્યાદાઓને ધ્યાનમાં રાખીને ઉતપાદક સીમાંત એટલે કે Marginal ફેરફાર કરે છે તે એક નિશ્ચિત લક્ષ સુધી પહોંચે છે. ગાણિતિક પદ્ધતિઓમાં વિધેયનું લક્ષ અને શ્રેણીનું લક્ષ હોય છે. આ એકમમાં આપણને શ્રેણીનાં લક્ષનો અભ્યાસ કરવાનાં છીએ. ગણિતની પરિભાષામાં શ્રેણીનું લક્ષ એ શ્રેણીની એક મિંમત હોય છે જે તેનાં લક્ષ સુધી ક્રમશઃ કે તબક્કાવાર પહોંચે છે. જેમ કે $\frac{lim}{x\to 3}$ એટલે કે xની કિંમત જે 3 સુધી પહોંચવાનું લક્ષ રાખે છે. જ્યાં xની જુદી જુદી કિંમતો જેવી કે 2.9, 2.99, 2.999વગેરે 3 તરફ લઈ જાય છે. ઉત્પાદક પણ ધારો કે વેચાણ વધારવાના હેતુથી કિંમતમાં એકસાથે જ ઘટાડો કરવાને બદલે સીમાંત ઘટાડો કરે કે તબક્કાવાર ઘટાડો કરે ત્યારે તે તેના નિર્ધારિત નફાનાં લક્ષ તરફ લઈ જતી કિંમતોની શ્રેણી એ શ્રેણીનું લક્ષ બને છે.

ધારો કે $y = f(x)$ એ વાસ્તવિક ચલx નું વિધેય હોય અને xની જુદી જુદી કિંમતો માટે yની જુદી જુદી કિંમતો મેળવી શકાય છે. આ કિંમતો બે પ્રકારની હોય છે. ((1)પરિમિત કિંમત (2) અપરિમિત કિંમત) પરંતુ આ કિંમતો $\div$ સ્વરૂપે મળે તો તે કિંમતનો કોઈ અર્થ રહેતો નથી તેથી તેવા સંજોગોમાં xની જે કિંમતે અર્થહીન કિંમત મળે તે કિંમતની નજીકની કિંમત લઈને વિધેયની કિંમત મેળવવામાં આવે છે.

કલનશાસ્ત્રમાં નજીક (સમીપ)માં લેવામાં આવતી કિંમતનો ખ્યાલ અતિ મહત્ત્વનો છે અને તેના દ્વારા મળતા તફાવતને સામીપ્ય કહેવાય છે. આ સામીપ્યને લગભગ શૂન્યવત્ કરી નાખવાથી વિધેયની મળતી કિંમતને તે વિધેયનું 'લક્ષ' તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

12.2 'ને' અનુલક્ષે છે નો અર્થ (Meaning of tends to)

12.2.1 $x \to a$નો અર્થ :

ધારો કે xએ વાસ્તવિક ચલ અને $'\alpha'$ એ કોઈ એક ચોક્કસ કિંમત છે. હવે જો વાસ્તવિક ચલx ની કિંમત ઘટાડો કરતા કરતા કે વધારો કરતા કરતા કોઈ એક ચોક્કસ કિંમત $'\alpha'$ ની અતિ સમીપ લઈ જવામાં આવે તો $'x'$ એ $'\alpha'$ને અનુલક્ષે છે. એમ વંચાય અને તેને સંકેતમાં $x \to a$વડે દર્શાવાય. જ્યાં $x \neq a$છે. દા.ત. $x \to 3$નો અર્થ સમજવો હોય તો x એ વાસ્તવિક ચલ છે અને $4 = 3$એ કોઈ એક અપરિમિત હોય તો x ની જુદી જુદી કિંમતો જેવી કે 3.1, 3.01, 3.001, 3.0001ની કિંમતમાં ઘટાડો કરતા કરતા કે 2.9, 2.99, 2.999, 2.999.... દ્વારા x ની કિંમતમાં વધારો કરતા કરતા '3' તરફ લઈ જવામાં આવે તો એમ કહી શકાય કે x એ $'3'$ને અનુલક્ષે છે અને તેને સંકેતમાં $x \to 3$વડે દર્શાવાય જ્યાં x#3 થાય.

12.2.2 $x \to 0$નો અર્થ

ધારોકે વાસ્તવિક ચલx ની જુદી જુદી કિંમતો જેવી કે 0.1, 0.01, 0.001.... દ્વારા x ની કિંમતમાં ઘટાડો કરતા કરતા કે -0.1, -0.01, -0.001...દ્વારા x ની કિંમતમાં વધારો કરતા કરતા $'0'$તરફ લઈ જવામાં આવે તો એમ કહી શકાય કે $'x'$એ $'0'$ને અનુલક્ષે છે અને તેને

સંકેતમાં $x \to 0$વડે દર્શાવાય જ્યાં $x = 0$થાય.

12.2.: $x \to \infty$ નો અર્થ

ધારો કે વાસ્તવિક ચલx ની કિંમતમાં વધારો કરતા કરતા કોઈ એક ખૂબ જ મોટી સંખ્યા N ધારી લઈએ તો xની કિંમત વધુમાં વધુ લેવાથી એક સંજોગ એવો આવશે કે x ની કિંમત Nકરતા પણ વધુ થશે. તેથી xએ અનંતને અનુલક્ષે છે એમ કહી શકાશે અને તેને સંકેતમાં $x \to \infty$વડે V દર્શાવાય જ્યાં $x \neq \infty$ થાય.

[નોંધ : જ્યારે $x \to \infty$ત્યારે $\frac{a}{x} \to 0, \frac{a}{x^2} \to 0$ $\frac{a}{\sqrt{x}} \to 0$જ્યાં aએ અચલાંક છે.]

12.2.4 સ્વાધ્યાય-1

(જાતે લખો)

$x \to 2$ નો અર્થ

$x \to -2$નો અર્થ

12.3 વિધેયનું લક્ષની વ્યાખ્યા (અર્થ)

ધારો કે $y = f(x)$એ વાસ્તવિક ચલ xનું વિધેય હોય અને x ની કિંમતે કોઈ એક કિંમત $'a'$ ની અત્યંત નજીક લઈ જવામાં આવે ત્યારે વિધેય $f(x)$ની કિંમત કોઈ એક ચોક્કસ સંખ્યા l(એલ)ની અત્યંત નજીક હોય તો એમ કહી શકાય કે જ્યારે x, aને અનુલક્ષે છે ત્યારે વિધેય $f(x)$ એ $'l'$ ને અનુલક્ષે છે. એટલે કે જ્યારે $x \to a$ ત્યારે $f(x) \to l$થાય. અને તેને સંકેતમાં $\lim_{x\to a} f(x) = l$વડે દર્શાવાય.

12.4 કોષ્ટકની રચના કરી લક્ષની કિંમત શોધવી.

કોષ્ટકની રચના દ્વારા લક્ષની કિંમત કેવી રીતે શોધી શકાય તે નીચેના ઉદાહરણો ઉપરથી સમજીશું.

12.4.1 ઉદાહરણો અને સ્વાધ્યાય-2

ઉદાહરણ :1 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ની કિંમત મેળવો જ્યાં $x \in R - \{2\}$

જવાબ : $\lim_{x\to a} +(x) = l$

$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = ?$ (અહીં વિધેયનું લક્ષ l શોધવાનું છે)

અહીં $a = 2$અને $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$અને $l = ?$

$\therefore$ x ની કિંમત 2 ની વધુને વધુ નજીક લઈ નીચેના કોષ્ટકની રચના કરીશું.

x ની કિંમતમાં ઘટાડો કરતા કરતા	$f(x)$	x ની કિંમતમાં વધારો કરતા કરતા	$f(x)$
2.1	4.1	1.9	3.9
2.01	4.01	1.99	3.99
2.001	4.001	1.999	3.999
2.0001	4.0001	1.9999	3.9999
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

ઉપરના કોષ્ટક પરથી કહી શકાય કે xની કિંમતમાં ઘટાડો કરતા કરતા કે વધારો કરતા કરતા 2 ની નજીક લેવામાં આવે છે ત્યારે $f(x)$ની કિંમત 4ની નજીક જાય છે. તેથી કહી શકાય કે જ્યારે $x \to 2$ ત્યારે $f(x) \to 4$ તેને સંકેતમાં નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

એટલે કે આપેલ વિધેયનું લક્ષ $'l' = 4$

(જાતે શોધો) (સ્વાધ્યાય-૨)

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1}$ની કિંમત મેળવો જ્યાં$x \in R - \{1\}$

(Hint :$x = 1.1, 1.01, 1.001$ ....અને $x = 0.9, 0.99, 0.999$ ....લો)

(જવાબ :$l = 2$)

2. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}, x \in R - \{3\}$મેળવો.

(Hint :$x = 3.1, 3.01, 3.001,$ ....અને $x = 2.9, 2.99, 2.999$ .....લો)

(જવાબ :$l = 6$)

3. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4}, x \in R - \{4\}$મેળવો.

(Hint :$x = 4.1, 4.01, 4.001,$ ....અને $x = 3.9, 3.99, 3.999$ ....લો)

(જવાબ :$l = 8$)

4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x+2}$ની કિંમત મેળવો.

(Hint :$x = 2.1, -2.01, 02.001, ...$અને $x = -1.9, -1.99, -1.999$ ....લો)

(જવાબ :$l = 4$)

ઉદાહરણ-2

$\lim\limits_{x\to 0} (3x-1)$ કોષ્ટકની રચના કરી મેળવો.

જવાબ : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

અહીં $x = o, f(x) = 3x - 1$ અને $l = ?$

xની કિંમત oની વધુને વધુ નજીક લઈ નીચેના કોષ્ટકની રચના કરતા

x	$f(x)$	x	$f(x)$
-0.1	-1.3	0.1	-0.7
-0.01	-1.03	0.01	-0.97
-0.001	-1.003	0.001	-0.997
-0.0001	-1.0003	0.0001	-0.9997
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

$$\therefore \lim_{x\to 0} (3x-1) = -l$$

(જાતેગણો) (સ્વાધ્યાય-3)

1. $\lim\limits_{x\to 0} (2x-4)$ કોષ્ટકની રચના કરી કિંમત શોધો.

(જવાબ :$= -4$)

2. $\lim\limits_{x\to a}(4x+5)$ કોષ્ટકની રચના કરી શોધો.

(જવાબ :$= 5$)

12.5 લક્ષના નિયમો :

ધારો કે $f(x)$ અને $g(x)$ એ વાસ્તવિક ચલ x ના વાસ્તવિક વિધેયો હોય અને તેનું લક્ષ અનુક્રમે

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$,અને $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$હોય તો લક્ષના નિયમો નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

1. **સરવાળાનો નિયમ :** બે વિધેયો $f(x)$અને $g(x)$ના સરવાળાનું લક્ષને બે વિધેયોના લક્ષના સરવાળા જેટલું થાય છે.

   જેમ કે $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$

2. **બાદબાકીનો નિયમ :** બે વિધેયો $f(x)$અને $g(x)$ના બાદબાકીનું લક્ષ તે બે વિધેયોના લક્ષના બાદબાકી જેટલું થાય છે.

   જેમ કે $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = l_1 - l_2$

3. **ગુણાકારનો નિયમ :** બે વિધેયો $f(x)$ અને $g(x)$ના ગુણાકારનું લક્ષ તે બે વિધેયોના લક્ષના ગુણાકાર જેટલું થાય છે.

   જેમ કે $\lim_{x \to a}[f(x) \times g(x)] = l_1 \times l_2$

4. **ભાગાકારનો નિયમ :** બે વિધેયો $f(x)$ અને $g(x)$ના ભાગાકારનું લક્ષ તે બે વિધેયોના લક્ષના ભાગાકાર જેટલું થાય છે. (અહીં છેદના વિધેયનું લક્ષ શૂન્ય ન હોવું જોઈએ)

   જેમ કે $\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{l_1}{l_2}$જ્યાં $l_2 \neq o$

12.6 લક્ષ શોધવાની પદ્ધતિ :

ધારો કે, $\lim_{x \to a} f(x)$શોધવું હોય તો નીચેના પગથિયાંથી શોધીશું.

પ્રથમ પગથિયું :

વિધેય$f(x)${ાં $x = a${ૂકતા મળેલ કિંમત પરિમિત મળે તો તે પરિમિત કિંમત જ વિધેયનું લક્ષ બને છે.

ઉદાહરણ-3

$\lim_{x \to 2} 2x + 3$શોધવું હોય તો

વિધેય$f(x) = 2x + 3${ાં $x = 2$ {ૂકતા

$f(x) = 2(2) + 3 = 7${ળે છે. જે પરિમિત કિંમત છે. તેથી તેને વિધેયનું લક્ષ કહેવાય.

બીજું પગથિયું :

વિધેય$f(x)$ માં $x = a$ {ૂકતા મળેલ કિંમત અંશમાં શૂન્ય મળે તો તે વિધેયનું લક્ષ શૂન્ય જેટલું છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ-4

$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x-2}$ શોધવું હોય તો

વિધેય$f(x) = \frac{x-3}{x-2}${i $x = 3${કતા

$$f(x) = \frac{3-3}{3-2} = \frac{0}{1} = 0$$

ત્રીજું પગથિયું :

વિધેય$f(x)$ માં $x = a$ {કતા મળેલ કિંમત છેદમાં શૂન્ય મળે તો તે વિધેયનું લક્ષ અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી.

ઉદાહરણ-5

$\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x-3}$શોધવું હોય તો

વિધેય $f(x) = \frac{x-2}{x-3}${i $x = 3$ મુકતા

$f(x) = \frac{3-2}{3-3} = \frac{1}{0} = 0$અર્થહીન કિંમત

ચોથું પગથિયું :

વિધેય $f(x)${i $x = a${કતા મળેલ કિંમત$\div$ સ્વરૂપે મળે તો અંશ અને છેદમાં તેના અવયવો શોધી સામાન્ય અવયવ $x - a$ અંશ અને છેદમાંથી દૂર કરો ત્યારબાદ તેમાં $x = a$ મૂકી લક્ષની કિંમત શોધો.

ઉદાહરણ-6

$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-3x-4}{x^2-2x-8}$ ની કિંમત શોધવી હોય તો

$x = 4${કતા

$$\lim_{x \to 4} \frac{4^2 - 3(4) - 4}{4^2 - 2(4) - 8} = \frac{16 - 12 - 4}{16 - 8 - 8} = \frac{0}{0}$$

મળે છે. જે અર્થહીન કિંમત છે તેથી અંશ અને છેદના અવયવો કરતા

અંશ :

$x^2 - 3x - 4$ $\qquad \because \frac{-4+1=-3}{-4\times1=-4}$

$$\frac{x^2 - 4x + x - 4}{x(x-4) + 1(x-4)}$$

$$(x-4)(x+1)$$

છેદ :

$$x^2 - 2x - 8 \qquad \because \frac{-4+2=-2}{-4\times2=-8}$$

$$x^2 - 4x + 2x - 8$$

$$x(x-4) + 2(x-4)$$

$$(x-4)(x+2)$$

$$\therefore \lim_{x\to4} \frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+2)}$$

અહીં $\lim_{x\to4}$ છે તેથી સામાન્ય અવયવ

$(x-4)$અંશ-છેદમાંથી દૂર કરતા

$$= \lim_{x\to4} \frac{x+1}{x+2}$$

$$= \frac{4+1}{4+2} = 5/6$$

ઉદાહરણ-7

$\lim_{x\to3} \frac{x^2-3x+6}{x+3}$શોધો

જવાબ :

$$\lim_{x\to3} \frac{x^2-3x+6}{x+3}$$

$x = 3$ મૂકતાં

$$\lim_{x\to3} \frac{3^2-3(3)+6}{3+3} = \frac{6}{6} = 1$$

જાતે ગણો (સ્વાધ્યાય-4)

(પ્રથમ પગથિયાનો ઉપયોગ કરો)

1. $\lim_{x\to2} \frac{2x+5}{3x-1}$ (જવાબ : $\frac{9}{5}$)

2. $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2-2x+4}{3x-1}$ (જવાબ : $\frac{12}{7}$)

3. $\lim_{x \to a} \frac{x^3+a^3}{x^2+a^2}$ (જવાબ :a)

4. $\lim_{x \to h} \frac{x}{h-\sqrt{h^2-x^2}}$ (જવાબ :1)

ઉદાહરણ-8 :કિંમત શોધો

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$$

જવાબ :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = 2\frac{1^2+2(1)-3}{1^2+1-2} = \frac{0}{0}\text{{જે છે.}}$$

તેથી અંશ અને છેદના અવયવો પાડતા (અહીં $x \to 1$ આપેલ છે તેથી સામાન્ય અવયવ $(x-1)$ મળશે)

અંશ :	**છેદ :**
x^2+2x-3	x^2+x-2
$x^2-x+3x-3$	$x^2-x+2x-2$
$x(x-1)+3(x-1)$	$x(x-1)+2(x-1)$
$(x-1)(x+3)$	$(x-1)(x+2)$

$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}$ $(x-1)$અંશ અને છેદમાંથી દૂર કરતા

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x+2}$$

$$= \frac{1+3}{1+2} = 4/3$$

ઉદાહરણ-9

$$\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2-9}$$

જવાબ : $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9}$ માં $x = -3$ મૂકતા

$$\frac{-3+3}{(-3)^2-9}=\frac{0}{0}$$

$\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2-3^2} = \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x-3)(x+3)}$ (અહીં $x \to -3$ આપેલું છે તેથી સામાન્ય અવયવ $x+3$ અંશ-છેદમાંથી દૂર કરતા

$$\lim_{x\to -3}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{-3-3}=-{}^{1}/_{6}$$

ઉદાહરણ-10

$$\lim_{x\to -{}^{1}/_{2}}\frac{6x^2-x-2}{2x^2+11x+5}$$

જવાબ :

$$\lim_{x\to -{}^{1}/_{2}}\frac{6x^2-x-2}{2x^2+11x+5}$$

$x = {}^{1}/_{2}$ મૂકતા

$$\lim_{x\to -{}^{1}/_{2}}\frac{6(-\frac{1}{2})^2-2(-\frac{1}{2})-2}{2(-\frac{1}{2})^2+11(-\frac{1}{2})+5}=\frac{0}{0}$$ મળે છે.

તેથી અંશ અને છેદના અવયવો પાડતા અહીં સામાન્ય અવયવ $(2x+1)$ શોધી અંશ અને છેદમાંથી દૂર કરવા.

અંશ :	**છેદ :**
$6x^2-x-2$	$2x^2+11x+5$
$6x^2-4x+3x-2$	$2x^2+10x+x+5$
$2x(3x-2)+1(3x-2)$	$2x(x+5)+1(x+5)$
$(2x+1)(3x-2)$	$(2x+1)(x+5)$

$$\lim_{x\to -{}^{1}/_{2}}\frac{(2x+1)(3x-2)}{(2x+1)(x+5)}$$

અહીં સામાન્ય અવયવ $(2x+1)$ અંશ અને છેદમાંથી દૂર કરી $x = -\frac{1}{2}$ મૂકો.

$$\lim_{x \to -1/2} \frac{3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2}{\left(-\frac{1}{2}\right) + 5} = \frac{-7/2}{9/2} = -7/9$$

ઉદાહરણ-11

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

જવાબ :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$x = 2$ મૂકતા

$\frac{2^3-8}{2-2} = \frac{8-8}{0} = \frac{0}{0}$ મળે છે.

અંશના અવયવ પાડી સામાન્ય અવયવ $(x-2)$ દૂર કરો.

$\lim_{x \to 2} \frac{x-2(x^2+2x+4)}{(x-2)}$ $\quad \because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$(x-2)$ દૂર કરો.

$\lim_{x \to 2} x^2 - 2x + 4$ $\quad x = 2$ મૂકો.

$= 2^2 + 2(2) + 4$

$= 12$

(જાતે ગણો) (સ્વાધ્યાય-5)

(નોંધ : ચોથા પગથિયાનો ઉપયોગ કરો)

1. $\lim_{x \to 3} \frac{3x^2-10x+3}{4x^2-7x-15}$ (જવાબ : $8/17$)

[Hint : અંશ $(x-3)(3x-1)$ છેદ : $(x-3)(4x+5)$]

2. $\lim_{x \to 15} \frac{x^2-8x-105}{2x^2-29x-15}$ (જવાબ : $22/31$)

[Hint : અંશ $(x-15)(x+7)$ છેદ : $(x-15)(2x+1)$]

3. $\lim_{x \to -2} \frac{9x^2+5x-26}{5x^2+17x-14}$ (જવાબ : $31/3$)

[Hint :અંશ $(x+2)(9x-13)$છેદ : $(x+2)(5x+7)$]

4. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+8}{x^2+8x+12}$ (જવાબ : 3)

[Hint : અંશ :$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)$

છેદ : $(x+2)(x+6)$

5. $\lim_{x\to 5}\frac{x^3-125}{x^2-25}$ (જવાબ : $^{15}/_{2}$)

[Hint : અંશ : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$x^3-5^3=(x-5)(x^2+5x+25)$

છેદ :$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$\therefore x^3-5^2=(x-5)(x+5)$

ઉદાહરણ-12

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-3x^2+6x-5}{x^3+2x-3}$$

જવાબ : $\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-3x^2+6x-5}{x^3+2x-3}$ માં $x=1$મૂકતા

$\frac{2(1)^3-3(1)^2+6(1)-5}{1^3+2(1)-3}=\frac{0}{0}$ મળે છે.

તેથી અંશ અને છેદના અવયવો પાડતા અહીં સામાન્ય અવયવ $(x-1)$ છે.

અંશ : $2x^3-3x^2+6x-5$

અહીં સૌથી મોટી ઘાત ત્રણ છે અને સામાન્ય અયવય $(x-1)$ છે.

$2x^3-3x^2+6x-5$ માંથી સામાન્ય અવયવ $(x-1)$ નીચે આપેલી રીત દ્વારા અલગ કરીશું.

ધારો કે $(x-1)=0$

$\therefore x=1$

$(x-1)$					
$1x^3$ x^2	x	$c \leftarrow x$			મોટામાં મોટી ઘાતથી અચળ પદ સુધી
	2	-3	$6-5$	$\leftarrow$	સહગુણકની કિંમતો
$+0$	$2-1\,5+$		0		લખી ગણતરીની શરૂઆત કરો
	$2-1\,5$		0		
	$x^2 x$	c	$\leftarrow$		x^2થી શરૂ કરો

ગણતરી

2   1   2

+ 0   તેથી   x =   એટલે કે 1 x 2 કરી 2 લખો

2   2

તેવી જ રીતે

- 3   1   -1

+2   તેથી   x =   (1 x -1) = -1

-1   -1

6   1   5

- 1   તેથી   x =   (1 x 5) = 5

5   5

- 5

+5

0

અવયવ : $(x-1)\ (2x^2 - x + 5)$

તેવી જ રીતે

છેદ : $x^3 + 2x - 3$

$(x-1)$			
$1x^3$	x^2	x	c
	1	0	$2-3$
+0	113		
	11	30	
	$x^2 x$	c	

∴   અવયવ :$(x-1)\ (x^2 + x + 3)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(2x^2-x+5)}{(x-1)(x^2+x+3)}$$ $(x-1)$ સામાન્ય અવયવ દૂર કરતા

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-x+5}{x^2+x+3}$$ $x = 1$ મૂકતાં

$$\frac{2(1)^2 - 1 + 5}{1^2 + 1 + 3} = {}^6/_5$$

(જાતે ગણો) (સ્વાધ્યાય-6)

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-8x+6}{x^3-5x+4}$ (જવાબ : ${}^3/_2$)

[Hint : અંશ $(x-1)(x^2+2x-6)$ છેદ : $(x-1)(x^2+x-4)$

2. $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+2x^2+2x+15}{x^3+4x^2+4x+3}$ (જવાબ : ${}^{17}/_{7}$)

[Hint : અંશ $(x+3)(x^2-x+5)$છેદ : $(x+3)(x^2+x+1)$

3. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x-4}{x^3+x^2-x-2}$ (જવાબ : ${}^{10}/_{7}$)

[Hint : અંશ $(x-2)(x^2+2x+2)$ છેદ : $(x-2)(x^2+x+1)$

4. $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+x^2-2x+12}{x^3+6x^2+11x+6}$ (જવાબ : ${}^{19}/_{2}$)

[Hint : અંશ $(x+3)(x^2-2x+4)$છેદ : $(x+3)(x^2+3x+2)$

ઉદાહરણ-13

$\lim_{x\to -5} \frac{\sqrt{x+9}-2}{x-5}$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ : અહીં અંશમાં $\sqrt{x+a}-2$ને $\sqrt{x+a}+2$વડે અંશ અને છેદમાં લઈ ગુણતા (—ને બદલે +લઈ મૂકતા)

$$\lim_{x\to -5} \frac{\sqrt{x+9}-2}{x+5} \times \frac{\sqrt{x+9}+2}{\sqrt{x+9}+2}$$

$$\lim_{x\to -5} \frac{(\sqrt{x+9})^2-2^2}{(x+5)\{\sqrt{x+9}+2\}}$$

$$\lim_{x\to -5} \frac{x+9-4}{(x+5)\{\sqrt{x+9}+2\}}$$

$$\lim_{x\to -5} \frac{(x+5)}{(x+5)\{\sqrt{x+9}+2\}}$$ સામાન્ય અવયવ $x+5$ દૂર કરતા

$$\lim_{x\to -5} \frac{1}{\sqrt{x+9}\ +2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-5+9}+2} = \frac{1}{4}$$

ઉદાહરણ-14

$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x-2}+1}$ ની કિંમત શોધો. $\begin{Bmatrix} - \text{ નેબદલે } + \\ + \text{ નેબદલે } + \end{Bmatrix}$ અંશ-છેદમાં લઈ ગુણતા

જવાબ :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x-2}+1} \times \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} \times \frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3)^2} - 2^2\{\sqrt{x-2}+1\}}{(\sqrt{x-2})^2 + 1^2\{\sqrt{x+3}+2\}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3)^2} - 2^2\{\sqrt{x-2}+1\}}{(\sqrt{x-2})^2 + 1^2\{\sqrt{x+3}+2\}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+3-4\{\sqrt{x-2}+1\}}{x-2+1\{\sqrt{x+3}+2\}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\{\sqrt{x-2}+1\}}{(x-1)\{\sqrt{x+3}+2\}}$$ [સામાન્ય અવયવ $x+1$ દૂર કરતા]

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-2}+1}{\sqrt{1+3}+2} = \frac{\sqrt{-1}+1}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

(જાતે ગણો) (સ્વાધ્યાય-7)

(બે પદ વચ્ચે $-$ ને બદલે $+$ લઈ અંશમાં અને છેદમાં લઈ ગુણાકાર કરો.)

1. $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{x-3}$ (જવાબ : $\frac{1}{2\sqrt{5}}$)

2. $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ (જવાબ : $\frac{1}{4}$)

3. $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$ (જવાબ : $\frac{2}{3}$)

4. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ (જવાબ : $\frac{1}{2\sqrt{2}}$)

5. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ (જવાબ : $-\frac{1}{2}$)

- જ્યારે $\lim_{x \to \infty}$ આપેલું હોય ત્યારેજો $x \to \infty$ હોય તો $\frac{1}{x^n \to 0}$ થાય.

ઉદાહરણ-15

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x+7}{3x^2-2x+1}$$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x+7}{3x^2-2x+1}$$

અહીં $x \to \infty$ આપેલું છે.તેથીx ની સૌથી મોટી ઘાતવાળો ચલ છૂટો કરીને જો અંશ અને છેદમાંથી દૂર કરી આપેલા વિધેયને $\frac{1}{x^n}$ના સ્વરૂપમાં ફેરવો.

(દા.ત.$\left(3x^2 => \frac{3x \times x}{x} => x^2\left(\frac{3}{x}\right)\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(5+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2})}{x^2(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}$$ હવે સામાન્ય અવયવ x^2દૂર કરતા

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

જ્યારે $x \to \infty$ ત્યારે $\frac{1}{x^n} \to 0$ થાય

$$=\frac{5+0+0}{3-0+0}={}^5\!/_3$$

ઉદાહરણ-16

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(x+5)(x+7)}{(2x^2-5x+3)(x-3)}$$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $$\lim_{x\to\infty}\frac{x(x+5)(x+7)}{(2x^2-5x+3)(x-3)}$$

અંશ : પ્રથમ અને બીજા કૌંસમાંથી xબહાર કાઢો.

છેદ : પ્રથમ કૌંસમાંથી સૌથી મોટી ઘાત x^2 બહાર કાઢો અને બીજા કૌંસમાંથી x બહાર કાઢો.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\,.x\left(1+\frac{5}{x}\right)x\left(1+\frac{7}{x}\right)}{x^2\left(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)x\left(1-\frac{3}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{5}{x}\right)\left(1+\frac{7}{x}\right)}{x^3\left(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)}$$

અંશ-છેદમાંથી x^3 દૂર કરો.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{5}{x}\right)\left(1+\frac{7}{x}\right)}{\left(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)}$$

જ્યારે $x \to \infty$ત્યારે $\frac{1}{x^n} \to 0$

$$= \frac{(1+0)(1+0)}{(2-0+0)(1-0)} = \frac{1}{2}$$

(જાતે ગણો) (સ્વાધ્યાય-8)

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)(2x+1)}{5x^2-4x+1}$ (જવાબ : $\frac{2}{5}$)

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-5x+7}{x^2+x+2}$ (જવાબ : 4)

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-2)(x+2)(5-x)}{(3x^2+4)(2+x)}$ (જવાબ : $\frac{-1}{3}$)

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{(x^2+3)(x+2)}$ (જવાબ : 1)

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ (જવાબ : -1)

યાદ રાખો :

1. $1+2+3+\cdots+n = \sum n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \sum n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ઉદાહરણ-17

$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{(4n+3)(n-3)}$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{(4n+3)(n-3)}$

$1+2+3\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ મૂકતા

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2.(4n+3)(n-3)}$$

અંશ અને છેદના દરેક કૌંસમાંથી nબહાર કાઢતા

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n.n(1+{}^{1}/_{n})}{2.n(4+{}^{3}/_{n})n(1-{}^{3}/_{n})}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+{}^{1}/_{n})}{2n^2(4+{}^{3}/_{n})n(1-{}^{3}/_{n})}$$ અંશ-છેદમાંથી n^2 દૂર કરતા

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+{}^{1}/_{n})}{(4+{}^{3}/_{n})(1-{}^{3}/_{n})}$$

જ્યારે $n \to \infty$ત્યારે $\frac{1}{n} \to 0$

$$= \frac{1+0}{(4+0)(1-0)} = \frac{1}{4}$$

ઉદાહરણ-18

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x+10}{x^2+3x+8}$$

જવાબ : $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x+10}{x^2+3x+8}$

$x = 0$ મૂકતા

$$= \frac{3(0)^2+5(0)+10}{(0)^2+3(0)+8}$$

$$= \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

ઉદાહરણ-19

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{2x}-4a^x+3}{a^{2x}+4a^x+5}$$

ધારો કે $y = a^x$ અને જ્યારે $x \to 0$ ત્યારે $y \to 1$ થાય.

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^2-4y+3}{y^2+4y-5}$$

અંશ :	છેદ :
y^2-4y+3	y^2+4y-5
$y^2-3y-y+3$	$y^2+5y-y-5$
$y(y-3)-1(y-3)$	$y(y+5)-1(y+5)$
$(y-3)(y-1)$	$(y+5)(y-1)$

$\therefore \lim_{y\to 1}\frac{(y-3)(y-1)}{(y-5)(y-1)}$ અંશ-છેદમાંથી સામાન્ય અવયવ $y-1$ દૂર કરતા

$$\lim_{y\to 1}\frac{1-3}{1-5}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ-20

જો $f(x) = x^2$ હોય તો

$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+3)-f(x-3)}{x}$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $f(x) = x^2$

$x = x+3$ મૂકતા

$f(x+3) = (x+3)^2$

$f(x+3) = x^2+6x+9$

$f(x) = x^2$

$x = x-3$ મૂકતા

$f(x-3) = (x-3)^2$

$= x^2-6x+9$ $\qquad \because (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+3)-f(x-3)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+6x+9)-(x^2-6x+9)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+6x+9-x^2+6x-9}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{12x}{x}$$

$$= 12$$

(જાતે ગણો) (સ્વાધ્યાય-9)

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{(n^2-n+4)(2n+5)}$ (જવાબ : $\frac{1}{6}$)

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum n^3}{(n^2-4n+7)(2n^2+n+5)}$ (જવાબ : $\frac{1}{8}$)

[Hint : $\sum n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$]

3. $\lim_{x\to 0} \frac{3x^3+6x^2+4x+4}{x^2+6x+2}$ (જવાબ : 2)

[Hint : $x = 0$ મૂકો]

4. $\lim_{x\to 0} \frac{a^{2x}+3a^x-4}{a^{2x}-4a^x+3}$ (જવાબ : $\frac{5}{2}$)

[Hint : $y = a^x$ ધારી જ્યારે $x \to 0$ ત્યારે $y \to 1$ થાય]

5. જો $f(x) = x^2 + 5$ હોય તો સાબિત કરો કે $\lim_{x\to 0} \frac{f(3+4)-f(3)}{4} = 6$

ઉદાહરણ-21

$\lim_{x\to 0} 2 + \frac{5}{6+\frac{7}{x}}$ ની કિંમત શોધો.

$$\lim_{x\to 0} 2 + \frac{5}{\frac{6}{1}+\frac{7}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} 2 + \frac{5}{\frac{6x+7}{x}}$$ છેદમાં લ.સા.અ. લેતા

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{1} + \frac{5x}{6x+7}$$ છેદમાં લ.સા.અ. લેતા

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(6x+7)+5x}{6x+7}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{12x+14+5x}{6x+7}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{17x+14}{6x+7}$$

$x = 0$ મૂકતા

$$=\frac{0+14}{0+7}=\frac{14}{7}=2$$

ઉદાહરણ-22

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{2x+9}{x+3}-\frac{3}{1}\right)\right]$$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{2x+9-3(x+3)}{x+3}\right)\right]$$ લ.સા.અ. લેતા

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{2x+9-3x-9}{x+3}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{-x}{x+3}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{-1}{x+3}\right]$$

$x = 0$ મૂકતા

$$=-\frac{1}{0+3}=-{}^{1}\!/_{3}$$

(જાતે ગણો) (સ્વાધ્યાય-10)

1. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{5x+14}{x+2}-7\right)\right]$ (જવાબ : 1)

2. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right]$ (જવાબ : 1)

3. $\lim_{x\to 3}\left[\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x^2-3x}\right]$ (જવાબ : ${}^{1}\!/_{3}$)

4. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2x}\left(x+\frac{3x}{2x+5}\right)\right]$ (જવાબ : ${}^{4}\!/_{5}$)

ઉદાહરણ-23

$\lim_{x\to 1} \frac{x^{5/2}-1}{x-1}$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{5/2}-1}{x-1} = \frac{5}{2}(1)^{5/2-1} = \frac{5}{2}$$

$\because \lim_{x\to a} \frac{x^n-a}{x-a} = na^{n-1}$ થાય.

ઉદાહરણ-24

$\lim_{x\to 1} \frac{x^{3/2}-1}{x^{5/2}-1}$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{3/2}-1}{x^{5/2}-1} \times \frac{x-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{x^{3/2}-1}{x-1}}{\frac{x^{5/2}-1}{x-1}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}(1)^{3/2-1}}{\frac{5}{2}(1)^{3/2-1}} \qquad \because \frac{x^n-a=na^{n-1}}{x-a}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}(1)}{\frac{5}{2}(1)}$$

$$= \frac{3}{5}$$

12.7 ચાવીરૂપ શબ્દો

- **અનુલક્ષે છે :** ના તરફ જાય છે.
- **વિસ્તાર :** પ્રતિબિંબોનો ગણ
- **અવયવ :** સમીકરણને બે થી વધુ ભાગોમાં વિભાજન કરવું
- **સામાન્ય અવયવ :** અંશ અને છેદમાં મળતો એક સરખો અવયવ
- **a → b :** a થી b તરફ

12.8 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

(જાતે ગણો) (સ્વાધ્યાય-11)

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{1/2}-1}{(x-1)}$ (જવાબ : $\frac{1}{2}$)

2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{3/2}-1}{(x^{1/2}-1)}$ (જવાબ : 3)

3. લક્ષનો અર્થ લખો.

4. નીચેના પદો સમજાવો.

   $x \to 9, x \to 0, x \to \infty$

5. $\lim_{x\to a} f(x) = l$ એટલે શું ?

6. નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) x એ 'a' ને અનુલક્ષે છે. તેને સંકેતમાં ________ વડે દર્શાવાય.

(a) $x \to a$ (b) $a \to x$ (c) $x = a$ (d) એકપણ નહીં

(ii) જ્યારે $x \to \infty$ ત્યારે $\frac{a}{x^2} \to$ ___________

(a) a (b) x^2 (c) 0 (d) એકપણ નહીં

(iii) વિધેયના લક્ષની વ્યાખ્યા અનુસાર

$\lim_{x\to a} f(x) =$ ______

(a) x (b) a (c) l (d) એકપણ નહીં

(iv) વિધેયના લક્ષની વ્યાખ્યા અનુસાર

જ્યારે, $x \to$ _____ત્યારે $f(x) \to$ _____

(a) a, l (b) l, a (c) $x, f(x)$ (d) એકપણ નહીં

(v) વિધેયના લક્ષની વ્યાખ્યા અનુસાર

જ્યારે, $x \to a$_____ ત્યારે $f(x) \to$ _____

(a) l (b) a (c) x (d) એકપણ નહીં

(vi) બે વિધેયો $f(x)$ અને $g(x)$ના સરવાળાનું લક્ષ તે બે વિધેયોના __________જેટલું થાય છે.

(a) લક્ષ (b) લક્ષના સરવાળા

(c) સરવાળા (d) એકપણ નહીં

(vii) બે વિધેયો $f(x)$ અને $g(x)$ ના બાદબાકીનું લક્ષ તે બે વિધેયોના __________ જેટલું થાય છે.

(a) લક્ષ (b) બાદબાકી

(c) લક્ષની બાદબાકી (d) એકપણ નહીં

(viii) બે વિધેયો $f(x)$ અને $g(x)$ ના ગુણાકારનું લક્ષ તે બે વિધેયોના _________ જેટલું થાય છે.

(a) લક્ષ (b) ગુણાકાર

(c) લક્ષના ગુણાકાર (d) એકપણ નહીં

(ix) લક્ષના ભાગાકારના નિયમમાં છેદના વિધેયનું લક્ષ_________ન હોવું જોઈએ.

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) એકપણ નહીં

(x) જો $\lim_{x \to a} f(x) = l,$ અને $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$ હોય તો

$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] =$ _________

(a) $l_2 + l_1$ (b) $l_1 + l_2$

(c) $l_1 - l_2$ (d) એકપણ નહીં

(xi) જો $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ અને $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$ હોય તો

$\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] =$ _____

(a) $l_2 + l_1$ (b) $l_1 + l_2$

(c) $l_1 - l_2$ (d) એકપણ નહીં

(xii) જો $\lim_{x \to a} f(x) = l,$ અને $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$ હોય તો

$\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] =$ _____ જ્યાં છેદ $\neq 0$

(a) $\frac{l_2}{l_1}$ (b) $\frac{l_1}{l_2}$ (c) $l_1 \times l_2$ (d) એકપણ નહીં

(xiii) જો $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ અને $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$ હોય તો

$\lim_{x \to a}[f(x) \times g(x)] =$ _____

(a) $l_1 + l_2$ (b) $l_1 \times l_2$

(c) $l_1 - l_2$ (d) એકપણ નહીં

(xiv) $\lim_{x \to 2} 3x + 5 =$ _____

(a) 5 (b) 11 (c) 3 (d) એકપણ નહીં

(xv) જ્યારે $x \to \infty$ ત્યારે $\frac{1}{x^n} \to$ ______

(a) 0 (b) 1 (c) ∞ (d) એકપણ નહીં

(xvi) જ્યારે $x \to 0$ ત્યારે $y \to$ ______

(a) 0 (b) 1 (c) ∞ (d) એકપણ નહીં

(xvii) $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a}{x - a} =$ ______

(a) nx^{n-1} (b) na^{n-1} (c) an^{n-1} (d) એકપણ નહીં

તમારી પ્રગતિ ચકાસોના જવાબ :

(i) a	(ii) c	(iii) c
(iv) a	(v) a	(vi) b
(vii) c	(viii) c	(ix) a
(x) b	(xi) c	(xii) b
(xiii) b	(xiv) b	(xv) a
(xvi) b	(xvii) b	

Reference Book :

(1) Business mathematics by Kapur V.K. S. chand & sons-New Delhi.

(2) Business mathematics by Trivedi & Trivedi. Pearson Publication India Ltd.

(3) ગાણિતિક આંકડાશાસ્ત્ર - ગુજરાત યુનિવર્સિટી

એકમ-13	# વિકલન

રૂપરેખા

13.0 ઉદ્દેશો :

આ પ્રકરણ અર્થશાસ્ત્રમાં આગવું સ્થાન ધરાવે છે. તેની મદદથી વિકલનનો અર્થ સમજીતેના ઉપયોગ અંગે માહિતી મેળવી શકાશે, તેના વિવિધ નિયમોની જાણકારી મેળવી તેનાપ્રથ મ અને દ્વિતીય કક્ષાના વિકલનો કેવી રીતે મેળવી શકાય તે અંગેનું જ્ઞાન મેળવવાનો ઉદ્દેશ સિદ્ધ કરી શકાશે.

7.1 પ્રસ્તાવના

વિકલનનું ગણિતશાસ્ત્રમાં આગવું સ્થાન છે. તે ધંધા અને અર્થશાસ્ત્ર માટે ખૂબ જ ઉપયોગી સાધન છે. તેની મદદથી ધંધામાં કોઈ એક વસ્તુના ભાવ વધતા તેની માંગ ઉપર કેવી અસર થશે તે જાણી શકાય છે.

જો $y = f(x)$ હોય તો yને xનું વિધેય કહેવામાં આવે છે. જ્યાં y એ આધારિત ચલ અને x એ સ્વતંત્ર ચલ છે. જો x ની કિંમતમાં ફેરફાર કરવામાં આવે તો તેને અનુરૂપ yની કિંમત પર થતી અસર (ફેરફાર) વિકલનની મદદથી જાણી શકાય છે.

વિકલનને અંગ્રેજીમાં Derivatives અથવા Differentiation કહેવાય છે. વિકલનનો ગણિતનાં સાધન તરીકે આપણે આપણાં જીવનમાં અનેક જગ્યાએ ઉપયોગ જોઈ શકીએ છીએ. વિકલન એ કોઈ સ્વતંત્ર ચલમાં થતા ફેરફારને કારણે આધારિત ચલમાં કેટલો ફેરફાર થાય છે તેનું માપન કરે છે. એટલે કે ધારો કે xએ સ્વતંત્ર ચલ છે અને y તેના ઉપર આધારિત ચલ છે. આપણે અર્થશાસ્ત્રનું ઉદાહરણ લઈએ તો... ધારો કે વસ્તુની કિંમત x સ્વતંત્ર ચલ છે અને તે વસ્તુની માંગ y આધારિત ચલ છે. તો વસ્તુની કિંમતમાં જે ફેરફાર થાય તેનાથી માંગમાં કેટલો ફેરફાર થાય તે વિકલનની મદદથી જાણી શકાય છે. તેવી જ રીતે વેચાણ, નફો, ખોટ, કિંમતમાં કરવામાં આવતો ફેરફાર. આમ કોઈ પણ ચલમાં કેટલો ફેરફાર થશે તે વિશેનું આયોજન કરવું હોય તો વિકલનનો ઉપયોગ કરી શકાય છે.

વિદ્યાર્થી મિત્રો આપણે એક વધુ ઉદાહરણ લઈએ. ધારો કે 10 kgઆઈસ્ક્રીમનું ઉત્પાદન કરવું હોય તો તેમાં દૂધ, ખાંડ, ડ્રાયફ્રુટ વગેરેની અમુક માત્રામાં જરૂર પડે. આમ, 10 kg આઈસ્ક્રીમ એ આધારિત ચલ છેyહવે ધારો કે 10 kg આઈસ્ક્રીમ માટે 20 લિટર દૂધ જોઈએ, 10 kg ખાંડ જોઈએ અને 2 kg ડ્રાયફ્રુટ જોઈએ તો,

10 kg આઈસ્ક્રીમનો આધાર $(f) = 10\ kg$ખાંડ $+20$લિટર દૂધ

$+2kg$ ડ્રાયફ્રુટ

હવે ધારો કે કોઈપણ કારણોસર માત્ર 10 લિટર દૂધ જ મળી શકે તેમ છે તો આઈસ્ક્રીમનું ઇચ્છિત ઉત્પાદન મેળવી શકાશે નહીં. આમ, Inputમાં ફેરફાર થાય (x) તો Output (y)માં ફેરફાર થાય તે બાબત પણ વિકલનની મદદથી જાણી શકાય છે.

કિંમતમાં કેટલો ફેરફાર થશે ? કિંમતમાં કેટલો ફેરફાર કરવાથી વેચાણના જથ્થામાં કેટલો ફેરફાર થશે ? ... વગેરે ઉપરાંત સમય, ઝડપ વગેરે જાણવા માટે ભૌતિકશાસ્ત્ર પણ આનો ઉપોગ કરે છે.

વિદ્યાર્થી મિત્રો, અર્થશાસ્ત્રમાં તમે માંગની મૂલ્યસાપેક્ષતા, આવક સાપેક્ષતા, પ્રતિમૂલ્ય સાપેક્ષતા જેવા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કરો છો ! તેમાં આપણે જોઈએ છીએ કે એક ફેરફાર થાય તેની સાપેક્ષમાં આધારિત ચલમાં કેટલો ફેરફાર થાય છે...? તે અભ્યાસ કરવા માટે વિકલનનો તમે ઉપયોગ કરી શકો છો.

13.2 વિકલનનો અર્થ અને વ્યાખ્યા:

$y = f(x)$ એ ચલxનું વાસ્તવિક વિધેય હોય કે જ્યાં y એ આધારિત ચલ અને xે સ્વતંત્ર ચલ છે. હવે xની કિંમતમાં અલ્પ વધારો કરી $x + h$ કરવામાં આવે તો તેને કારણે વિધેયની x આગળની કિંમતમાં પણ ફેરફાર થશે અને તે કિંમત $f(x + h)$ થશે. આમ $f(x + h) - f(x)$ એ વિધેયની કિંમતમાં થયેલા ફેરફાર છે અને xની કિંમતમાં થયેલ ફેરફાર $(x + h) - x = h$.તમાં ખૂબ 'h અલ્પ વધારો કરવામાં આવે તો આ ગુણોત્તરને y નું x આગળનું વિકલનફળ કહેવામાં આવે છે. અને તેને $f'(x)$ વડે દર્શાવવામાં

આવે છે.

વિકલનની વ્યાખ્યા :

વિધેય $f(x)$ના પ્રદેશગણનો કોઈપણ સભ્ય x માટે

$$f^{|}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ થાય.}$$

જ્યાં $h = x$ની કિંમતમાં થતો વધારો દર્શાવતું હોય અને લક્ષ અસ્તિત્વ ધરાવતું હોય તો $f^{|}x$ એ વિધેય $f(x)$ નું x પ્રત્યેનું પ્રથમ વિકલનફળ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

ટૂંકમાં $y = f(x)$ એ વિધેય હોય તો તેના વિકલનફળને $\frac{dy}{dx}$ અથવા $f^{|}(x)$ અથવા $\frac{df(x)}{dx}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

7.3 વિકલનની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ શોધવું

Step-1 : આપેલ વિધેય બરાબર $f(x)$ધારો.

Step-2 : $x = x + h$ ધારી $f(x+h)$ શોધો.

Step-3 : વિકલનની વ્યાખ્યા નીચે દર્શાવ્યા મુજબ લખો.

$$f^{|}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Step-4 : $f(x+h)$ની શોધેલી કિંમત અને $f(x)$ની કિંમત ઉપરના સૂત્રમાં મૂકો.

Step-5 : મળેલ કિંમતમાંથી + ચિહ્ન અને - ચિહ્નવાળા પદો દૂર કરો (દા.ત. $+x^2$ અને $-x^2$)

Step-6 : h કોમન કાઢી તેને અંશ અને છેદમાંથી દૂર કરો.

Step-7 : $h = 0$ મૂકી $f^{|}(x)$ની કિંમત મેળવો.

ઉદાહરણ-1

x^2નું વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવો.

જવાબ :

Step-1 : $f(x) = x^2$

Step-2 : $x = x + h$

$f(x+h) = (x+h)^2$

$= x^2 + 2xh + h^2$

$\therefore (a+b)^2 = a^2 + 2xb + b^2$

Step-3 : **વિકલનની વ્યાખ્યા**

$$f^{|}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Step-4 : $= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h}$

Step-5 : $= \lim_{h \to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$ ($+x^2 - x^2$ દૂર કરતા)

$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh+h^2}{h}$

Step-6 : $= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$ h કોમન લઈ અંશ-છેદમાંથી દૂર કરતા $\therefore h \neq 0$

Step-7 : $= \lim_{h \to 0} 2x + h$

$= 2x + 0$ $h = 0$ મૂકતાં

$f^{|}(x) = 2x$

ઉદાહરણ-2

$3x^2 - 5$નું વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવો.

Step-1 : $f(x) = 3x^2 - 5$

Step-2 : $x = x + h$

$f(x+h) = 3(x+h)^2 - 5$

$= 3(x^2 + 2xh + h^2) - 5$

$\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5$

Step-3 : **વિકલનની વ્યાખ્યા**

$f^{|}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Step-4 : $\lim_{h \to 0} \frac{(3x^2+6xh+3h^2-5)-(3x^2+5)}{h}$

Step-5 : $\lim_{h \to 0} \frac{3x^2+6xh+3h^2-5-3x^2+5}{h}$ $+3x^2$અને$-3x^2$દૂર કરો

-5અને$+5$ દૂર કરો

$\lim_{h \to 0} \frac{6xh+3h^2}{h}$

Step-6 : $\lim_{h \to 0} \frac{h(6x+3h)}{h}$ h કોમન લઈ દૂર કરતા $h \neq 0$

Step-7 : $\lim_{h\to 0} 6x + 3h$

$= 6x + 3(0)$

$f^{|}(x) = 6x$

ઉદાહરણ-3

$\sqrt{x}$નું વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવો.

જવાબ :

$f(x) = \sqrt{x}$

$x = x + h$ મૂકતાં

$f(x+h) = \sqrt{x+h}$

વિકલનની વ્યાખ્યા

$$f^{|}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{(x)}}{h}$$

$\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$વડે અંશ અને છેદમાં ગુણતા

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{(x)}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$ $\rightarrow h$અંશનો ગુણાકાર કરતા વર્ગમૂળ દૂર થાય

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\}}$$ h કોમન લઈ દૂર કરો $\because h \neq 0$તથા $+x$અને $-x$દૂર કરો

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}$$ $h = 0$મૂકતાં

$$f^{|}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ઉદાહરણ-4

$5x^2 + 4x - 2$ નું વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવો.

જવાબ :

$f(x) = 5x^2 + 4x - 2$

$x = x + h$ મૂકતાં

$f(x+h) = 5(x+h)^2 + 4(x+h) - 2$

$= 5(x^2 + 2xh + h^2) + 4x + 4h - 2$

$= 5x^2 + 10xh + 5h^2 + 4x + 4h - 2$

વિકલનની વ્યાખ્યા

$$f^{|}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \quad (5x^2 + 10xh + 5h^2 + 4x + 4h - 2 - (5x^2 + 4h - 2)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 + 4x + 4h - 2 - 5x^2 - 4x + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{10xh+5h^2+4h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(10x+5h+4)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \quad 10x + 5h + 4$$

$$= 10x + 5(0) + 4$$

$$f^{|}(x) = 10x + 4$$

(જાતેગણો) (સ્વાધ્યાય-1)

વિકલનની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી નીચે આપેલ વિધેયનું વિકલનફળ શોધો.

1. x^3 (જવાબ : $3x^2$)

[Hint :$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\therefore (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + 4^3$]

2. $9x^2 + 5x + 3$ (જવાબ : $18x + 5$)

[Hint :$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^3$]

3. $3x + 5$ (જવાબ : 3)

4. $ax^2 + 6$ (જવાબ : $2ax$)

13.4 વિધેયના વિકલનફળના પ્રમાણિતરૂપો (સાબિતી વગર)નોંધ : ખાસ યાદ રાખો.

(1) જો $y = f(x) = x^n$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = f^{|}(x) = nx^{n-1}$ થાય.

દા.ત. $f(x) = x^2$ હોય તો____ $f^{|}(x) = 2x^{2-1} = 2x$

(2) જો $y = f(x) = e^x$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = f^{|}(x) = e^x$ થાય.

(3) જો $y = f(x) = log_e^x$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = f^{|}(x) = \frac{1}{x}$ થાય.

(4) જો $y = f(x) = a^x$ (જ્યાં a એ ધનપૂર્ણાંક) હોય તો

$\frac{dy}{dx} = f^{|}(x) = a^x . log_e^a$ થાય.

(5) જો $y = f(x) = k$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = f^{|}(x) = 0$ થાય.

(અચળ)

13. 5 વિકલનના નિયમો

જો u અને v એ x ના વિધેયો હોય તો તે બે વિધેયોના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર માટે વિકલનફળો મેળવવા માટેના નિયમો નીચે મુજબ લખી શકાય. (સાબિતી વગર)

નિયમ-1 સરવાળાનો નિયમ

બે વિધેયોના સરવાળાનું વિકલનફળ તે બે વિધેયોના વિકલનફળોના સરવાળા જેટલું જ થાય છે. એટલે કે

જો $y = u + v$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

જ્યાં u નું વિકલનફળ $= \frac{du}{dx}$ અને vનું વિકલનફળ $= \frac{dv}{dx}$

નિયમ-2બાદબાકીનો નિયમ

બે વિધેયોનું બાદબાકી (તફાવત)નું વિકલનફળ તે બે વિધેયોના વિકલનફળોના બાદબાકી જેટલું જ થાય છે. એટલે કે

જો $y = u - v$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

જ્યાં u નું વિકલનફળ $= \frac{du}{dx}$ અને vનું વિકલનફળ $= \frac{dv}{dx}$

નિયમ-3 ગુણાકારનો નિયમ:(A) બે વિધેયોનો ગુણાકાર

બે વિધેયોના ગુણાકારનું વિકલનફળ

$=$ {પ્રથમ વિધેય $\times$બીજા વિધેયનું વિકલનફળ} $+$ {બીજું વિધેય $\times$પ્રથમ વિધેયનું વિકલનફળ}

એટલે કે

જો $y = u.v$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

(B) ત્રણ વિધેયોનો ગુણાકાર

જો $y = u.v.w$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = u.v\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$

નિયમ-4ભાગાકારનો નિયમ

બે વિધેયોના ભાગાકારનું વિકલનફળ

$= \dfrac{\text{(છેદનું વિધેય} \times \text{અંશના વિધેયનું વિકલનફળ)} - \text{(અંશનું વિધેય} \times \text{છેદના વિધેયનું વિકલનફળ)}}{\text{(છેદનું વિધેય)}^2}$

એટલે કે

જો $y = \frac{u}{v}$હોય તો$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

નિયમ-5 સાંકળનો નિયમ : આ નિયમ મિશ્ર વિધેયના વિકલનફળ શોધવા માટે ઉપયોગી છે.

ǒ ɩy એ u નું વિધેય હોય અને u એ x નું વિધેય હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ થાય.

13. 6 x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલનના ઉદાહરણો

ઉપરના પાંચ નિયમોનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવીશું.

13.6.1 સરવાળાના નિયમનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવવાના ઉદાહરણો x ને સાપેક્ષપ્રથમ વિકલન)

ઉદાહરણ-1 $y = x^2 + 5$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$શોધો.

જવાબ : $y = x^2 + 5$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx} + \frac{d(5)}{dx}$ $\quad \because y = u + v$હોય તો$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

$= 2x + 0$ $\quad \because y = x^n$હોય તો$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

$\frac{dy}{dx} = 2x$ $\quad \because y = x^2$

હોય તો $\frac{dy}{dx} = 2x^{2-1} = 2x$ થાય અને $y = 5$

હોય તો $\frac{dy}{dx} = 0$ થાય કારણ 5 એ અચળ સંખ્યા છે. અચળ સંખ્યાનું વિકલનફળ હંમેશા શૂન્ય થાય. (એટલે કે જેનીસાથે x ન હોય તેનું વિકલનફળ = 0)

ઉદાહરણ-2 $y = x^5 + 4x^4 + 3x + 9$નું વિકલનફળ શોધો.

જવાબ : $y = x^5 + 4x^4 + 3x + 9$

$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 4(4x^3) + 3(1) + 0$

$= 5x^4 + 16x^3 + 3$

સમજૂતી : $y = x^n$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

$y = x^5$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = 5x^{5-1} = 5x^4$

$y = x^4$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = 4x^{4-1} = 4x^3$

$y = x^1$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = 1x^{1-1} = x^0 = 1$

9 અચળ છે તેથી તેનું વિકલનફળ $= 0$

ઉદાહરણ-3 જો $y = x^2 + e^x + logx + 5^x$ હોય તો તેનું વિકલનફળ મેળવો.

જવાબ : $y = x^2 + e^x + logx + 5^x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x + e^x + \frac{1}{x} + 5^x log5$

સમજૂતી: $y = x^2$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = 2x^{2-1} = 2x$

$y = e^x$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = e^x$

$y = logx$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

[$y = 5^x$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = 5^x log5$

$\because y = a^x$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = a^x . loga$]

13.6.2 બાદબાકીના નિયમનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવવાના ઉદાહરણો

ઉદાહરણ-4 $y = x^3 - 6$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ $\qquad u = x^3 \text{ , } v = 6$

$= 3x^2 + 0$ $\qquad \therefore \frac{du}{dx} = 3x^2, \frac{dv}{dx} = 0$

$= 3x^2 + 0$

$= 3x^2$

ઉદાહરણ-5 $y = x^4 - 3x^2 - 3^x$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 3(2x) - 3^x \ log3$

$= 4x^3 - 6x - 3^x \ log3$

13. 6.3 ગુણાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ શોધવાના ઉદાહરણો

ઉદાહરણ-6 જો $y = (x^2 - 5)(2x^2 + 1)$હોય તો $\frac{dy}{dx}$શોધો.

જવાબ : $y = (x^2 - 5)(2x^2 + 1)$

ધારો કે $u = x^2 - 5$, $v = 2x^2 + 1$

$\therefore \frac{du}{dx} = 2x - 0 \quad \frac{dv}{dx} = 4x + 0$

$= 2x \quad = 4x$

હવે $y = u.v$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

ઉપરની ચારેય કિંમત સૂત્રમાં મૂકતાં

$= (x^2 - 5)(4x) + (2x^2 + 1)(2x)$

$= 4x^3 - 20x + 4x^3 + 2x$

$\frac{dy}{du} = 8x^3 - 18x$

ઉદાહરણ-7 જો $y = e^x.x^e$હોય તો તેનું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલન શોધો.

જવાબ : $y = e^x.x^e$

ધારો કે $u = e^x \quad v = x^e$

$\therefore \frac{du}{dx} = e^x \frac{dv}{dx} = ex^{e-1}$

જો $y = u.v$ હોય તો

$\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$= e^x.e.x^{e-1} + x^e.e^x$

$= e^x.x^e\left[\frac{e}{x} + 1\right]$ ..$e^x x^e$ મેળવી કાઢતા અને $\{x^{e-1} = x^e.x^{-1} = \frac{x^e}{x}\}$

ઉદાહરણ-8 $x(x + 2)(x^2 + 2)$ નું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલન મેળવો.

જવાબ : ધારો કે $y = x(x + 2)(x^2 + 2)$

અને $u = x \qquad v = x + 2 \qquad w = x^2 + 2$

$\frac{du}{dx} = 1 \qquad \frac{dv}{dx} = 1 \qquad \frac{dw}{dx} = 2x$

જો $y = u.v.w$ હોય તો

$$\frac{dy}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\ \frac{du}{dx}$$

$$= x.(x+2)(2x) + x.(x^2+2)(1) + (x+2)(x^2+2)(1)$$

$$= (x^2+2x)(2x) + x^3 + 2x + x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

$$= 2x^3 + 4x^2 + x^3 + 2x + x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

$$= 4x^3 + 6x^2 + 4x + 4$$

અથવા

ટૂંકી રીત $\quad y = x(x+2)(x^2+2)$

$$= (x^2+2x)(x^2+2)$$

$$= x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 4$$

13.6.4 ભાગાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવવાના ઉદાહરણો

ઉદાહરણ-9 $\quad \frac{x^3-2}{x^2+7}$ નું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલનફળ શોધો.

જવાબ :

ધારો કે $\quad y = \frac{x^3-2}{x^2+7}$

અને $\quad u = x^3 - 2 \qquad v = x^2 + 7$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 0 \qquad \frac{dv}{dx} = 2x + 0$$

$$= 3x^2 \qquad = 2x$$

$\therefore y = \frac{u}{v}$ હોય ત્યારે $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$$= \frac{(x^2+7)(3x^2)-(x^3-2)(2x)}{(x^2+7)^2}$$

$$= \frac{3x^4+21x^2-2x^4+4x}{(x^2+7)^2}$$

$$= \frac{x^4+21x^2-2x^4+4x}{(x^2+7)^2}$$

ઉદાહરણ-10 $\quad 1 + \frac{2}{3+\frac{4}{x}}$ નું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલનફળ મેળવો.

જવાબ :

ધારો કે $\quad y = 1 + \frac{2}{3+\frac{4}{x}}$

$= 1 + \frac{2}{\frac{3x+4}{x}}$ છેદમાં લ.સા.અ. લેતા

$= 1 + \frac{2x}{3x+4}$

$= \frac{3x+4+2x}{3x+4}$ લ.સા.અ. લેતા

$y = \frac{5x+4}{3x+4}$

હવે $u = 5x + 4$ $v = 3x + 4$

$\frac{du}{dx} = 5 + 0$ $\frac{dv}{dx} = 3 + 0$

$= 5$ $= 3$

જો $y = \frac{u}{v}$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x+4)(5) - (5x+4)(3)}{(3x+4)^2}$$

$$= \frac{15x + 20 - 15x - 12}{(3x+4)^2}$$

$$= \frac{8}{(3x+4)^2}$$

ઉદાહરણ-11 $\frac{e^x}{logx}$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલનફળ શોધો.

જવાબ :

ધારો કે $y = \frac{e^x}{logx}$

અને $u = e^x$ $v = logx$

$\frac{du}{dx} = e^x$ $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$

$y = \frac{u}{v}$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$= \frac{logx(e^x) - e^x\,({}^1/_x)}{(logx)^2}$

$$= \frac{e^x\left[logx - \frac{1}{x}\right]}{(logx)^2}$$

ઉદાહરણ-12 $y = \frac{1}{1+x}$ હોય તો $\frac{dy}{du}$ શોધો.

જવાબ : ધારો કે

$$y = \frac{1}{1+x}$$

અને $u = 1$ $v = 1 + x$

$\frac{du}{dx} = 0$ $\frac{dv}{dx} = 0 + 1 = 1$

$y = \frac{u}{v}$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = v\frac{\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{du}}{v^2}$

$$= \frac{(1+x)(0) - (1)(1)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-1}{(1+x)^2}$$

13.6.5 સાંકળના નિયમનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવવાના ઉદાહરણો

નોંધ : નીચેના પ્રકારના વિધેયો માટે સાંકળનો નિયમ ઉપયોગમાં લઈ શકાય. (ધારો કે $f(x) = 2x^2 + 5$)

(1) $y = \{f(x)\}^n$ દા.ત. $y = (2x^2 + 5)^5$

(2) $y = log\{f(x)\}$ દા.ત. $y = log(2x^2 + 5)$

(3) $y = e^{\{f(x)\}}$ દા.ત. $y = e^{2x^2+5}$

(4) $y = a^{f(x)}$ દા.ત. $y = a^{2x^2+5}$

(5) $y = \sqrt{f(x)}$ દા.ત. $y = \sqrt{2x^2 + 5}$

$y = \{f(x)\}^n$

ઉદાહરણ-13

$y = (x^2 + 3x + 5)^7$ નું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલનફળ શોધો.

જવાબ :

$$y = (x^2 + 3x + 5)^7$$

ધારો કે $u = x^2 + 3x + 5$ વિકલન કરતી વખતે($y = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$નો ઉપયોગ કરો)

$$\therefore \frac{du}{dx} = 2x + 3$$

અને $y = u^7$

$$\therefore \frac{dy}{du} = 7u^6$$

સાંકળનો નિયમ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

$= 7u^6 . (2x + 3)$ સૂત્રમાં કિંમત મૂકતાં

$= 7(x^2 + 3x + 5)^6(2x + 3)$ $\therefore u = x^2 + 3x + 5$ મૂકતાં

ઉદાહરણ-14

જો $y = log(4x^2 + 5x + 2)$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ :

$y = \log{(4x^2 + 5x + 2)}$

ધારો કે $u = 4x^2 + 5x + 2$ વિકલન કરતી વખતે ($y = x^n => \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ નો ઉપયોગ કરો)

$$\frac{du}{dx} = 8x + 5$$

અને $y = \log u$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

સાંકળનો નિયમ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

$= \frac{1}{u} . (8x + 5)$ સૂત્રમાં કિંમત મૂકતાં

$\frac{dy}{dx} = \frac{8x+5}{4x^2+5x+2}$ $\therefore u = 4x^2 + 5x + 2$ મૂકતાં

ઉદાહરણ-15

$y = e^{x^2+x+3}$હોય તો $\frac{dy}{dx} =?$

જવાબ :

$y = e^{x^2+x+3}$

ધારો કે $u = x^2 + x + 3$

$\frac{du}{dx} = 2x + 1$ અહીં $x^n => nx^{n-1}$ નો ઉપયોગ કરો

અને $y = e^u$

$\frac{dy}{du} = e^u$ $\because e^x => e^x$

સાંકળનો નિયમ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$= e^u . (2x + 1)$ સૂત્રમાં કિંમત મૂકતાં

$\frac{dy}{dx} = e^{x^2+x+3} . (2x + 1)$ $u = x^2 + x + 3$ મૂકતાં

ઉદાહરણ-16

જો $y = 5^{2x^2-x+2}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ :

$y = 5^{2x^2-x+2}$

ધારો કે $u = 2x^2 - x + 2$

$\frac{du}{dx} = 4x - 1$ અહીં $x^n => nx^{n-1}$ નો ઉપયોગ કરો

અને $y = 5^u$

$\frac{dy}{du} = 5^u . log_e^5$ અહીં $a^x => a^x . log_e^a$ નો ઉપયોગ કરો

સાંકળનો નિયમ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$= 5^u . log_e^5 . (4x - 1)$ સૂત્રમાં કિંમત મૂકતાં

$= 5^{2x^2-x+2} . log_e^5 . (4x - 1)$ અહીં $u = 2x^2 - x + 2$ મૂકતાં

ઉદાહરણ-17

$y = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$ નું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલનફળ શોધો.

જવાબ :

$y = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$

ધારો કે $u = x^2 + 2x - 1$

$\frac{du}{dx} = 2x + 2$ અહીં $x^n => nx^{n-1}$

અને $y = \sqrt{u}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ અહીં $\sqrt{x}$ નું વિકલન $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ યાદ રાખો અને તે ઉપરથી $\sqrt{u}$ નું વિકલન $\frac{1}{2\sqrt{u}}$ થાય.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} . (2x + 2)$$

$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x - 1}} . (2x + 2)$ $\therefore u = x^2 + 2x - 1$ મૂકતાં

$= \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$ અંશમાંથી '2'બહાર લઈ અંશ, છેદમાંથી દૂર કરો.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$$

13.7 મિશ્ર ઉદાહરણો અને સ્વાધ્યાય

વિકલનફળ મેળવો :

ઉદાહરણ-18

$$x^4 - x^3 + x^2 - 5$$

જવાબ : ધારો કે $y = x^4 - x^3 + x^2 - 5$

(સરવાળા-બાદબાકીના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં)

$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^4}{dx} - \frac{dx^3}{dx} + \frac{dx^2}{dx} - \frac{d(5)}{dx}$ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$નો ઉપયોગ કરો

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 3x^2 + 2$$

ઉદાહરણ-19

$f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 8x + 10$ હોય તો $f^{|}(x)$અને$f(-2)$ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 8x + 10$

સરવાળા-બાદબાકીના નિયમનો ઉપયોગ કરતા

$$f^{|}(x) = 3\frac{dx^5}{dx} - 2\frac{dx^2}{dx} + 8\frac{dx}{dx} + \frac{d(10)}{dx}$$

$= 3(5x^4) - 2(2x) + 8(1) + 0$ $x^n \Rightarrow nx^{n-1}$

$f^{|}(x) = 15x^4 - 4x + 8$

$x = -2$ મૂકતાં

$f^{|}(x = -2) = 15(-2)^4 - 4(-2) + 8$

$= 15(16) + 8 + 8$

$= 240 + 8 + 8$

$= 256$

ઉદાહરણ-20

જો $f(x) = x^3 + logx + 3^x + e^x + 5$હોય તો$f^{|}(x)$ શોધો.

(7.4 માં આપેલ વિધેયના વિકલનફળના પ્રમાણિત રૂપોનો ઉપયોગ કરો)

જવાબ : $f(x) = x^3 + logx + 3^x + e^x + 5$

$f^{|}(x) = \frac{dx^3}{dx} + \frac{d\, logx}{dx} + \frac{d3^x}{dx} + \frac{de^x}{dx} + \frac{d(5)}{dx}$

$= 3x^2 + \frac{1}{x} + 3^x log_e 3 + e^x + 0$

$f^{|}(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} + 3^x log3 + e^x$

ઉદાહરણ-21

જો $y = \frac{5}{x^5} + \frac{4}{x^4} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x} + 4$હોય તો$\frac{dy}{dx}$શોધો.

$$y = \frac{5}{x^5} + \frac{4}{x^4} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x} + 4$$

$y = 5.x^{-5} + 4.x^{-4} + 3.x^{-3} + x^{-1} + 4$ ($x^n = nx^{n-1}$નો ઉપયોગ કરતા)

$$\frac{dy}{dx} = 5\frac{d(x^{-5})}{dx} + 4\frac{d(x^{-4})}{dx} + 3.\frac{d(x^{-3})}{dx} + \frac{d(x^{-1})}{dx} + \frac{d(4)}{dx}$$

$= 5.(-5x^{-6}) + 4(-4x^{-5}) + 3(-3x^{-4}) + (-x^{-2}) + 0$

$= -25x^{-6} - 16x^{-5} - 9x^{-4} - x^{-2}$

$$= -\frac{25}{x^6} - \frac{16}{x^5} - \frac{9}{x^4} - \frac{1}{x^2}$$

ઉદાહરણ-22

જો $y = logx.\sqrt{x}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$શોધો.

જવાબ : $y = logx.\sqrt{x}$

ધારો કે $u = logx$ અને $v = \sqrt{x}$

$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$અને $\quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = u.v$

$\therefore \frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$= logx.\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}.\frac{1}{x}$

$= \frac{logx}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad \frac{\sqrt{x}}{x^1} = x.^{-1}\sqrt{x}$

$= x^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left\{\frac{logx}{2} + 1\right\}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{x}}$ કોમન લેતાં

ઉદાહરણ-23

$y = \log(x^3.e^x)$હોય તો$\frac{dy}{dx}$શોધો.

જવાબ :

$y = \log(x^3.e^x)$

$y = \log x^3 + loge^x$

લઘુગુણકનો નિયમ∴ $MN = logM + logN$

$= 3\log x + xlog_e^e$ $\qquad \therefore logM^n = nlogM$

$= 3\log x + x(1)$ $\qquad \therefore log_e^e = 1$

$\frac{dy}{dx} = 3.\frac{1}{x} + 1$ $\qquad logx => \frac{1}{x}$

$= \frac{3}{x} + 1$ $\qquad$ લ.સા.અ. લેતા

$\frac{dy}{dx} = \frac{3+x}{x}$

ઉદાહરણ-24

$y = \log(x^4.e^x.4^x)$

જવાબ :

$y = \log(x^4.e^x.4^x)$

$= \log x^4 + loge^x + log4^x$

$\because log\ MNP = logM + logN + logP$

$= 4logx + xlog_e^e + xlog4$ $\quad\because logM^n = nlogM$

$= 4logx + x(1) + xlog4$ $\quad\because log_e^e = 1$

$y = 4logx + x + xlog4$

$\frac{dy}{dx} = 4.\frac{1}{x} + 1 + (1).log4$

$= \frac{4}{x} + \frac{1}{1} + \frac{log4}{1}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4+x+xlog4}{x}$ લ.સા.અ. લો

ઉદાહરણ-25

જો $y = \log\left(\frac{2x+5}{x-5}\right)$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ :

$y = \log\left(\frac{2x+5}{x-5}\right)$

$= \log(2x+5) - \log(x-5)$ $\quad\because log\frac{M}{N} = logM - logN$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d(log\, u)}{dx} - \frac{d(log v)}{dx}$

$\frac{d(log\, u)}{dx} = \frac{d\, log\, u}{du}.\frac{du}{dx}$ જ્યાં $u = 2x + 5$અને$\frac{dlogu}{du} = \frac{1}{u}$

$\frac{du}{dx} = 2$

$\frac{d(logu)}{dx} = \frac{1}{u}.2$

$\frac{d(logu)}{dx} = \frac{2}{2x+5}$

$\frac{d(logv)}{dx} = \frac{d(logv)}{dv}.\frac{dv}{dx}$ જ્યાં $v = x - 5$અને $\frac{d(logv)}{dx} = \frac{1}{v}$

$\frac{dv}{dx} = 1$

$\frac{d(logv)}{dx} = \frac{1}{v}.(1)$

$$\frac{d(\log v)}{dx}$$

$$=\frac{1}{x-5}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d(\log u)}{dx}-\frac{d(\log v)}{dx}$$

$$=\frac{2}{2x+5}-\frac{1}{x-5}$$

ઉદાહરણ-26

$y=\frac{3}{(x+1)(x+2)}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ :

$$y=\frac{3}{(x+1)(x+2)}$$

$$y=\frac{3}{x^2+x+2x+2}$$

$$y=\frac{3}{x^2+3x+2}$$

ધારો કે $u=3 \qquad v=x^2+3x+2$

$$\frac{du}{dx}=0\ \frac{dv}{dx}=2x+3$$

જો $y=\frac{u}{v}$ હોય તો(ભાગાકારનો નિયમ) $\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$$\frac{x^2+3x+2)\ (0)-3(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}$$

$$=\frac{-3(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(6x+9)}{(x^2+3x+2)^2}$$

ઉદાહરણ-27

xને સાપેક્ષ વિકલનફળ શોધો.

$$y=\left(x+\frac{2x+2}{x+2}\right)\left(\frac{x+5}{x^2+4x+3}\right)$$

જવાબ :

$$y = \left(\frac{x}{1} + \frac{2x+3}{x+2}\right)\left(\frac{x+5}{x^2+4x+3}\right)$$ લ.સા.અ. લેતાં

$$= \left(\frac{x(x+2) + 2x + 3}{x+2}\right)\left(\frac{x+5}{x^2+4x+3}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2 + 2x + 2x + 3}{x+2}\right)\left(\frac{x+5}{x^2+4x+3}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2+4x+3}{x+2}\right)\left(\frac{x+5}{x^2+4x+3}\right)$$

$$y = \frac{x+5}{x+2}$$

ધારો કે $u = x + 5$ $\quad v = x + 2$

$$\frac{du}{dx} = 1 \text{ અને } \frac{dv}{dx} = 1$$

$$y = \frac{u}{v} \text{ હોય તો } \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(x+2)(1) - (x+5)(1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x+2-x-5}{(x+2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{(x+2)^2}$$

ઉદાહરણ-28

$(x+2)(y+1) = 20$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ :

$$(x+2)(y+1) = 20$$

$$y + 1 = \frac{20}{x+2}$$

$$y = \frac{20}{x+2} - 1$$

ધારો કે $u = 20$ $\quad v = x + 2$

$\frac{du}{dx} = 0 \quad \frac{dv}{dx} = 1$

$y = \frac{u}{v}$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{du}}{v^2} - \frac{d(1)}{dx}$

$$= \frac{(x+2)0 - 20(1)}{(x+2)^2} - 0$$

$$= -\frac{20}{(x+2)^2}$$

સ્વાધ્યાય-2 (જાતે કરો)

નીચે આપેલ વિધેયનું વિકલનફળ મેળવો.

(1) $x^5 - 4x^4 + \frac{3x^2}{2} - x + 20$ જવાબ : $(5x^4 - 16x^3 + 3x - 1)$

(2) $\frac{3x^5}{3} - e^x + x^e - logx$ જવાબ : $(5x^4 - e^x + ex^{e-1} - \frac{1}{x})$

(3) $8^x + 3x^2 + \frac{1}{x}$ જવાબ : $(8^x.log^8 + 6x - \frac{1}{x^2})$

(4) $\sqrt{x} + Rx^2 + R$ જવાબ : $(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2Rx)$

(5) $9x^3 + 3x^2 + 2x - 2$ જવાબ : $(27x^2 + 6x + 2)$

(6) $(3x^2 + 2x - 5)\ (2x + 1)$ જવાબ : $(18x^2 + 14x - 8)$

(7) $(x^2 + 1)\ (x + 1)$ જવાબ : $(3x^2 - 2x - 3)$

(8) $(x^2 + logx)\ (e^x + 1)$

જવાબ : $\left(x^2e^x + e^x logx + 2xe^x + \frac{e^x}{x} + 2x + \frac{1}{x}\right)$

(9) $(2x + 3)\ (3x - 1)(5x + 2)$ જવાબ : $(90x^2 + 94\ \ x - 1)$

(10) $x^5.logx.e^x$ જવાબ : $(x^4e^x\{5logx + 1 + x.logx\})$

(11) $\frac{2x^2-3}{x^2+7}$ જવાબ : $\left(\frac{34x}{(x^2+7)^2}\right)$

(12) $\frac{e^x}{logx}$ જવાબ : $\left(\frac{e^x\left(logx - \frac{1}{x}\right)}{(logx)^2}\right)$

(13) $3 + \frac{2}{1+\frac{4}{x}}$ જવાબ : $\left(\frac{8}{(x+4)^2}\right)$

(14) $\left(x + \frac{5}{x+2}\right)\left(\frac{3x+2}{x^2+2x+5}\right)$ જવાબ : $\left(\frac{4}{(x+2)^2}\right)$

(15) $(3x+2)(y+2)=10$ જવાબ : $\left(\frac{-30}{(3x+2)^2}\right)$

(16) $y = log\left(\frac{x^5}{e^x}\right)$ જવાબ : $\left(\frac{5-x}{x}\right)$

(નોંધ : $log\frac{M}{N} = logM - logN logM^N = NlogM$ નો ઉપયોગ કરો.)

(17) $xy - 4x + 9y = -7$ જવાબ : $\left[\frac{43}{(x+9)^2}\right]$

(18) $y = 3 - \frac{4}{x+3}$ જવાબ : $\left[\frac{4}{(x+3)^2}\right]$

(19) $\log(2x^2 + 5x + 1)$ જવાબ : $\left[\frac{4x+5}{2x^2+5x+1}\right]$

(20) $\log\left[\frac{2x+1}{3x-1}\right]$ જવાબ : $\left[\frac{2}{2x+1} - \frac{3}{3x-1}\right]$

(21) $\log[e^x.logx^3]$ જવાબ : $\left[3e^x\frac{1}{x} + logx)\right]$

($logMN = logM + logN$ અને $logM^N = NlogM$ નો ઉપયોગ કરો.)

(22) $5^x.x^5$ જવાબ : $[5^{x+1}.x^4 + x^5.5^x.log_e^5]$

(23) $(x^2+8x+5)^3$ જવાબ : $[6(x^2+8x+5)^2\ (x+4)]$

(24) e^{3x+2} જવાબ : $[3.e^{3x+2}]$

(25) e^{3x^2-5x-1} જવાબ : $\left[e^{3x^2-5x+1}(6x-5)\right]$

(26) $\frac{1}{1-x}$ જવાબ : $\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]$

(27) $\frac{1}{2x+3}$ જવાબ : $\left[-\frac{2}{(2x+3)^2}\right]$

(28) $\frac{x^5-1}{x-1}$ જવાબ : $\left[\frac{4x^5-5x^4+1}{(x-1)^2}\right]$

(29) $xy + 3x + 5y = 1$ જવાબ : $\left[-\frac{16}{(x+5)^2}\right]$

(30) $log(x^e.e^x)$ જવાબ : $\left[\frac{e}{x} + 1\right]$

13.8 દ્વિતીય વિકલનફળનો અર્થ સમજાવો

જો $y = f(x)$ એ ચલ x નું વાસ્તવિક વિધેય હોય અને તેનું x ને સાપેક્ષ વિકલનફળ શોધવામાં આવે તો તેને વિધેયનું પ્રથમ વિકલનફળ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેને $\frac{dy}{dx}$ અથવા f^I અથવા $\frac{df(x)}{dx}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને જો મળેલ વિકલનનું ફરીથી x ને સાપેક્ષ વિકલનફળ શોધવામાં આવે તો તેને તે વિધેયનું દ્વિતીય વિકલનફળ કહેવાય અને તેને $\frac{d^2y}{dx^2}$

અથવા $f^{||}(x)$ વડે દર્શાવી શકાય.

દા.ત. $y = x^4$ નું દ્વિતીય વિકલનફળ નીચે મુજબ શોધાય.

$y = x^4$

$\frac{dy}{dx} = 4x^3$ $\quad\quad => x^n => nx^{n-1}$

$\frac{d^2y}{dx} = 12x^2$ $\quad\quad => x^n => nx^{n-1}$

13.9 દ્વિતીય વિકલનફળ શોધવાના ઉદાહરણો :

વિકલનના નિયમો અને પ્રમાણિત રૂપોનો ઉપયોગ કરી દ્વિતીય વિકલનફળ નીચેના ઉદાહરણો મુજબ શોધી શકાય.

ઉદાહરણ-29

જો$y = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + x - 3$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ :

$y = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + x - 3$

$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 24x^2 - 4x + 1$ $\quad\quad$ પ્રથમ વિકલન કરતા

$\frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 + 48\,x - 4$ $\quad\quad$ ફરીથી વિકલન કરતા

ઉદાહરણ-30

જો $y = xlogx^3$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ :

$y = x.logx$

$\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + logx(1)$ $\quad\quad$ ભાગાકારના નિયમ મુજબ

$\frac{dy}{dx} = 1 + logx$

$\frac{d^2y}{dx} = 0 + \frac{1}{x}$ $\quad\quad$ ફરીથી વિકલન કરતા

$= \frac{1}{x}$

ઉદાહરણ-31

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ :

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$$

$$\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$$

બંને બાજુ વર્ગ કરતા

$$y=(1-\sqrt{x})^2$$

$y=1-2\sqrt{x}+x$ $\quad\quad\quad$ $\therefore (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$\frac{dy}{dx}=0-2.\frac{1}{2\sqrt{x}}+1$ $\quad\quad\quad$ પ્રથમ વિકલન કરતા$\sqrt{x}\rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x}}+1$$

$$=-x^{-1/2}+1$$

$$\frac{dy}{du}=-x+1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}+0 \quad\quad =\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2x^{3/2}}$$

ઉદાહરણ-32

જો $y=\frac{2x+1}{x}$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ :

$$y=\frac{2x+1}{x}$$

$\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ $\quad\quad\quad$ $u=2x+1 \quad\quad v=x$

$=\frac{x(2)-(2x+1)(1)}{x^2}$ $\quad\quad\quad$ $\frac{du}{dx}=2 \quad\quad \frac{dv}{dx}=1$

$$\frac{2x-2x-1}{x^2}$$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$ $\quad\quad\quad$ ફરીથી વિકલન કરતા

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x^2(0)-(-1)(2x)}{(x^2)^2}$ $\quad\quad\quad$ $u=-1 \quad\quad v=x^2$

$=\frac{2x}{x^4}$ $\quad\quad\quad$ $\frac{du}{dx}=0 \quad\quad \frac{dv}{dx}=2x$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{x^3}$$

ઉદાહરણ-33

જો $y = 3e^{2x} + 3e^{-2x}$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ :

$y = 3e^{2x} + 3e^{-2x}$

$\frac{dy}{dx} = 3(2e^{2x}) + 3(-2e^{-2x})$ => $e^{2x} = 2e^{2x}$ સાંકળનો નિયમ મુજબ

$\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} - 6e^{-2x}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(2e^{2x}) - 6(-2e^{-2x})$ ફરીથી વિકલન કરતા

$= 12e^{2x} + 12e^{-2x}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(e^{2x} + e^{-2x})$

13.10 સંકેતો

સંકેતો	આ રીતે વંચાય
lim	લીમીટ
$\therefore$	માટે (તેથી)
?	કારણ કે
$f^{I}(x)$	એફ ડેશ એક્સ
$f^{II}(x)$	એફ ડબલ ડેશ એક્સ

સ્વાધ્યાય-૩ (જાતે કરો)

(1) $y = 4x^3 + 8x^2 + 9x + 25$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ : $(24x + 16)$

(2) $y = 3e^{2x} + logx + 3x^3$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ : $\left(12e^{2x} - \frac{1}{x^2} + 18x\right)$

(3) $y = 9x^4 + 12x^3 + 7x^2 + x - 5$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ : $(108x^2 + 72x + 14)$

(4) $f(x) = x^2e^x$ હોય તો $f^{II}(x)$ શોધો.

જવાબ : $e^x[x^2 + 4x + 2]$

(5) જો $y = \frac{logx}{x}$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ : $\left(\frac{2logx-3}{x^3}\right)$

(6) જો $y = 5e^{3x} + 5e^{-3x}$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ :$45(e^{3x} + e^{-3x})$

(7) $y = (x^2 - 2)^2$ હોય તો તેનું દ્વિતીય વિકલનફળ શોધો.

જવાબ : $(12x^2 - 8)$

(8) $y = e^{5x} + e^{-5x}$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2} = 25y$ થાય એમ સાબિત કરો.

(9) $y = \frac{1}{x}$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ :$\frac{2}{x^3}$

(10) જો $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 5x + 11$ હોય તો xની કઈ કિંમતે $f^{||}(x) = 38$ થાય.

જવાબ :$x = 2$

13.11 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) વિધેયના x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલનને _____ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

(a) $f^{|}(x)$ (b) $f(x)$

(c) $f^{||}(x)$ (d) એકપણ નહીં

(ii) જો$y = x^n$ હોય તો $\frac{dy}{dx} =$ _____

(a) xn^x (b) nx^{n-1}

(c) nx^n (d) એકપણ નહીં

(iii) જો$f(x) = e^x$ હોય તો $f^{|}(x) =$ _____

(a) x^e (b) e^x

(c)1 (d) એકપણ નહીં

(iv) જો$y = logx$ હોય તો $\frac{dy}{dx} =$ _____

(a) $logx$ (b) x

(c)$\frac{1}{x}$ (d) એકપણ નહીં

(v) જો$y = a^x$ હોય તો $\frac{dy}{dx} =$ _____

(a) a^x (b) log_e^a

(c)$a_e^x loga$ (d) એકપણ નહીં

(vi) જો $f(x) = k$ હોય તો $f^{|}(x) =$ _____

(a) k (b) 0

(c) x (d) એકપણ નહીં

(vii) બે વિધેયોના સરવાળાનું વિકલનફળ તે બે વિધેયોના ________ ના સરવાળા જેટલું જ થાય છે.

(a) લક્ષ (b) વિકલનફળો

(c) વિચલનો (d) એકપણ નહીં

(viii) બે વિધેયોના તફાવતનું વિકલનફળ તે બે વિધેયોના ________ ના તફાવત જેટલું જ થાય છે.

(a) લક્ષ (b) વિકલનફળો

(c) વિચરણ (d) એકપણ નહીં

(ix) જો $y = u \pm v$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm$ _____

(a) $\frac{dy}{dx}$ (b) $\frac{dv}{dx}$

(c) $\frac{du}{dx}$ (d) એકપણ નહીં

(x) જો y એ u નું વિધેય હોય અને u એ x નું વિધેય હોય તો $\frac{dy}{dx} =$ _____

(a) $\frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}$ (b) $\frac{du}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

(c) $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ (d) એકપણ નહીં

(xi) જો $y = 5x^2$ હોય તો $\frac{dy}{dx} =$ _____

(a) $5x$ (b) $10x^2$

(c) $10x$ (d) એકપણ નહીં

(xii) જો $f(x) = x^2$ હોય તો $f^{|}(-2) =$ _____

(a) $2x$ (b) -2

(c) -4 (d) એકપણ નહીં

(xiii) જો $y = \frac{1}{x}$ હોય તો $\frac{dy}{dx} =$ _____

(a) $logx$ (b) $-\frac{1}{x^2}$

(c) $\sqrt{x}$ (d) એકપણ નહીં

(xiv) જો $f(x) = \sqrt{x}$ હોય તો $f^{|}(x) =$ _____

(a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(c) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (d) એકપણ નહીં

(xv) જો $y = \frac{1}{x}$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____

(a) $-\frac{1}{x^2}$ (b) $-\frac{1}{x^3}$

(c) $\frac{2}{x^3}$ (d) એકપણ નહીં

(xvi) જો $y = 5x^3$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____

(a) $30x$ (b) $15x^2$

(c) $15x$ (d) એકપણ નહીં

(xvii) જો $f(x) = 0$ હોય તો $f^{|}(x) =$ _____

(a) 0 (b) 1

(c) x (d) એકપણ નહીં

(12) વિકલનનો સરવાળાનો નિયમ લખો.

(13) વિકલનનો બાદબાકીનો નિયમ લખો.

(14) વિકલનનો ભાગાકારનો નિયમ લખો.

(15) વિકલનનો ગુણાકારનો નિયમ લખો.

(16) વિકલનનો સાંકળનો નિયમ જણાવો.

(17) વિકલનની વ્યાખ્યા આપો.

(18) દ્વિતીય વિકલનફળ એટલે શું ?

(19) x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલનફળ શેના વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

(20) x ને સાપેક્ષ દ્વિતીય વિકલનફળ શેના વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

જવાબ :11

(i) a	(ii) b	(iii) b	(iv) c	(v) c	(vi) b
(vii) b	(viii) b	(ix) b	(x) c	(xi) c	(xii) c
(xiii) b	(xiv) c	(xv) c	(xvi) a	(xvii) a	

13.12 ચાવીરૂપ શબ્દો અને સમજૂતી

પ્રથમ વિકલન ફળ :

વિધેય $f(x)$ આપેલું હોય તો તેના વિકલનને વિકલન ફળ $\frac{dy}{dx}$ અથવા $f^{|}(x)$ વડે ઓળખવામાં આવે છે. તેને પ્રથમ વિકલન ફળ તરીકે પણ ઓળખી શકાય.

દ્વિતીય વિકલન ફળ :

પ્રથમ વિકલન ફળ $f^{|}(x)$નું ફરીથી x ને સાપેક્ષ વિકલન કરવામાં આવે તો તેને દ્વિતીય વિકલન ફળ કહેવાય અને તેને $f^{||}(x)$ અથવા $\frac{d^2y}{dx^2}$ વડે દર્શાવાય.

13.13 સંદર્ભ વાચન

(1) Business Mathematics by Kapoor V.K. S chand & son, New Delhi

(2) Business Mathematics by Trivedi & Trivedi - Keron India Ltd., New Delhi

એકમ 14

દ્વિતીય વિકલન અને વિકલનના અર્થશાસ્ત્રમાં ઉપયોગો

રૂપરેખા

14.0. ઉદ્દેશ :

આ પ્રકરણનો મુખ્ય ઉદ્દેશ વિદ્યાર્થીઓને અર્થશાસ્ત્રના નફાને મહત્તમ બનાવવાનો અને ખર્ચને ન્યૂનતમ કેવી રીતે બનાવવું તે શીખવવાનો છે.

14.1. પ્રાસ્તાવિક :

આજના આધુનિક યુગમાં અર્થશાસ્ત્રનો અભ્યાસ અત્યંત આવશ્યક છે. અર્થશાસ્ત્રના અભ્યાસથી આર્થિક વિકાસને વેગ મળે છે. આ વિકાસને સિદ્ધ કરવા માટે અર્થશાસ્ત્રમાં કલનશાસ્ત્રનો ઉપયોગ ખૂબ જ બહોળા પ્રમાણમાં કરવામાં આવે છે. અગાઉના પ્રકરણમાં આપણે વિધેય, લક્ષ, પ્રથમ વિકલન જેવાં કલનશાસ્ત્રના વિવિધ પગથિયાંઓનો અભ્યાસ કર્યો. હવે, આ પ્રકરણમાં દ્વિતીય વિકલન અને તેનો અર્થશાસ્ત્રમાં થતા વિવિધ ઉપયોગોની ચર્ચા કરીશુ અને અર્થશાસ્ત્રનો મુખ્ય હેતુ નફાને મહત્તમ બનાવવો અને ખર્ચને ન્યૂનતમ બનાવવાં, માટે દ્વિતીય વિકલનનો કેવી રીતે ઉપયોગ કરવો તે શીખીશું.

14.2. દ્વિતીય વિકલનફળની વ્યાખ્યા

જો $y = f(x)$ એ કોઈ એક વિધેય હોય અને તેને x ને સાપેક્ષ વિકલન કરવામાં આવે તો તેને પ્રથમ વિકલનફળ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેને સંકેતમાં $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ અથવા $f'(x)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જો આ પ્રથમ વિકલનફળનું ફરીથી x ને સાપેક્ષ વિકલન કરવામાં આવે તો તેના પરિણામને x ને સાપેક્ષ દ્વિતીય વિકલનફળ કહેવાય છે અને તેને $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x)}{dx}$ અથવા $f''(x)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે, જે દ્વિતીય કક્ષાનું વિકલનફળ તરીકે પણ ઓળખાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે :

જો $y = 4x^5$ આપેલ વિધેય હોય તો તેનું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલન

$$\frac{dy}{dx} = 4(5x^{5-1}) \qquad \Rightarrow x^n \Rightarrow nx^{n-1}$$

$$= 4 \times 5x^4$$

$$= 20x^4$$

હવે મળેલ જવાબનું ફરીથી x ને સાપેક્ષ વિકલન કરવામાં આવે તો,

દ્વિતીય વિકલનફળ $= 20(4x^{4-1})$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20 \times 4x^3$$

$$= 80x^3$$

જેને x ને સાપેક્ષ દ્વિતીય વિકલનફળ કહેવાય.

ખાસ નોંધ :

દ્વિતીય વિકલનનો અભ્યાસ કરતા પહેલા પ્રથમ વિકલનના નિયમો અને પ્રમાણિત સ્વરૂપો (જે આપણે વિકલનના પ્રકરણમાં શીખી ગયા છે.) યાદ રાખવા અત્યંત જરૂરી જ નહીં, પરંતુ ફરજિયાત છે. **– ડૉ. મહેન્દ્ર મેસુરીયા**

14.4. ઉદાહરણો અને તમારી પ્રગતિ ચકાસો.

14.4.1. ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ : 1. જો $y = 11x^3 + 5x^2 + 2$ હોય તો તેનું x ને સાપેક્ષ દ્વિતીય વિકલનફળ મેળવો.

જવાબ : $y = 11x^3 + 5x^2 + 2$ નું પ્રથમ વિકલનફળ શોધતાં,

$$\frac{dy}{dx} = 11(3x^{3-1}) + 5(2x^{2-1}) + 0 \qquad (x^n \Rightarrow nx^{n-1} \text{ નો ઉપયોગ કરતા.})$$

$$\frac{dy}{dx} = 11 \times 3x^2 + 5 \times 2\ x$$

$$= 33x^2 + 10x$$

હવે, મળેલ પરિણામનું ફરીથી વિકલન કરતાં,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 33\ (2x^{2-1}) + 10\ (1x^{1-1})$$

$$= 33 \times 2x^1 + 10\ (1)$$

$$= 66x + 10$$

ઉદાહરણ : 2. જો $y = 3x^4 + 12x^3 - 4x^2 + 1$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ : $y = 3x^4 + 12x^3 - 4x^2 + 1$ નું પ્રથમ વિકલનફળ શોધતાં,

$$\frac{dy}{dx} = 3 \times 4x^{4-1} + 12 \times 3x^{3-1} - 4 \times 2x^{2-1} + 0$$

$(x^n \Rightarrow nx^{n-1}$ ઉપયોગ કરો.)

$$= 12x^3 + 36x^2 - 8x \qquad (\text{ફરીથી } x^n \Rightarrow nx^{n-1} \text{ નો ઉપયોગ કરો.})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12 \times 3x^{3-1} + 36 \times 2x^{2-1} - 8 \times 1x^{1-1}$$

$$= 36x^2 + 72x - 8(1) \qquad \because 1\,x^{\circ} = 1$$

$$= 36x^2 + 72x - 8$$

ઉદાહરણ : **3.** જો $y = (x^2 - 1)^2$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ : $y = (x^2 - 1)^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ નો ઉપયોગ કરતાં

$\because\ y = (x^2)^2 - 2(x^2)(1) + 1^2$ ($x^n \Rightarrow nx^{n-1}$ ઉપયોગ કરો.)

$y = x^4 - 2x^2 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^{4-1} - 2 \times 2x^{2-1} + 0$$

$= 4x^3 - 4x$ ફરીથી $x^n \Rightarrow nx^{n-1}$ ઉપયોગ કરો.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4 \times 3x^{3-1} - 4 \times 1x^{1-1}$$

$= 12x^2 - 4(1)$

$= 12x^2 - 4$ $\because x^\circ = 1$

ઉદાહરણ : **4.** જો $y = x^2 \cdot e^{2x}$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ મેળવો.

જવાબ : $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}$ અને $\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^{2x}$.

ઉદાહરણ : **5.** જો $y = x^2 \cdot e^{2x}$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ : $y = x^2 \quad e^{2x}$

$y = u \quad v$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{du} + v\ \frac{dy}{dx}$ નો ઉપયોગ કરો.

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 \quad 2e^{2x}) + (e^{2x} \quad 2x)$$

ફરીથી આ જ નિયમનો ઉપયોગ કરતા ધ્યાન રાખો. અહીં બે પદ વચ્ચે સરવાળાનું ચિહ્ન છે. તેથી બે વખત નિયમનો ઉપયોગ કરો.

$$\frac{d^2y}{dx} = [(x^2 \quad 4e^{2x}) + (2e^{2x} \quad 2x)] + [(e^{2x} \quad 2) + (2x \quad 2e^{2x})]$$

$= 2e^{2x}\ [2x^2 + 2x + 1 + 2x]$

$= 2e^{2x}\ [2x^2 + 4x + 1]$

ઉદાહરણ : **6.** જો $y = 3e^{2x} + 2e^{-2x}$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$

જવાબ : $y = 3e^{2x} + 2e^{-2x}$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \times 2e^{2x} + 2 \times (-2)\ e^{-2}$$

$= 6\,e^{2x} - 4e^{-2x}$ નું ફરીથી વિકલન કરતાં

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6 \times 2e^{2x} - 4 \times (-2)\, e^{-2x}$$

$= 12e^{2x} + 8e^{-2x}$

$= 4(3e^{2x} + 2e^{-2x})$ (4 કોમન લેતાં)

$= 4y$ $\because\ y = 3e^{2x} + 2e^{-2x}$ આપેલું છે.

ઉદાહરણ : 7. જો $y = \dfrac{1 - log\ x}{x}$ હોય તો $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ : $y = \dfrac{1 - log\ x}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \log x)(1)}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$ ભાગાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં,

$$= \frac{-1 - 1 + \log x}{x^2}$$

$$y = \frac{-2 + log\ x}{x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right) - (-2 + \log x)(2x)}{(x^2)^2}$$ ફરીથી ભાગાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં,

$$= \frac{x - (-4x + 2x.\log x)}{x^4}$$

$$= \frac{x + 4x - 2x \log x}{x^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5x - 2x \log x}{x^4}$$

ઉદાહરણ : 9. જો $y = x^2 \log x$ હોય તો સાબિત કરો કે $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2x = 0$

જવાબ : $y = x^2 \log x$

$$\frac{dy}{dx} = x^2\left(\frac{1}{x}\right) + \log x\ (2x)$$ (વિકલનના ગુણાકારના નિયમ મુજબ)

$= [x] + (2x \quad \log x)$ (ફરીથી ગુણાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + 2x\left(\frac{1}{x}\right) + \log x\ (2)$$

$= 1 + 2 + 2 \log x$

$= 3 + 2\ log\ x$

ડા.બા. $= x\ \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2x$

$= x\ (3 + 2log\ x) - (x + 2x\ log\ x) - 2x$

$= 3x + 2x\ log\ x - x - 2x\ log\ x - 2x$

$= 0$ જ.બા.

ઉદાહરણ : 10. જો $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + x + 1$ હોય તો x ની કઈ કિંમત આગળ $f''(x) = 6$ થાય ?

જવાબ : $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + x + 1$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 6x + 1$ ($x^n \Rightarrow nx^{n-1}$ નો ઉપયોગ કરતાં)

$f'(x)$ નું ફરીથી x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$f''(x) = 12x^2 - 24x + 6$

$f''(x) = 6$ આપેલું છે. જે સમીકરણમાં મુકતાં

$\therefore\ 6 = 12x^2 - 24x + 6$

બંને બાજુ છ વડે ભાગતાં,

$1 = 2x^2 - 4x + 1$

$2x^2 - 4x + 1 - 1 = 0$

$2x^2 - 4x = 0$

$2x\ (x - 2) = 0$

$2x = 0$ અથવા $x - 2 = 0$

$x = 0/2 = 0$ અથવા $x = 2$

ઉદાહરણ : 11. જો $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 11x - 2$ હોય તો $f''(x)$ મેળવો.

જવાબ : $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 11x - 2$ ($x^n \Rightarrow nx^{n-1}$ મુજબ)

$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 10x + 11$ ફરીથી ($x^n \quad nx^{n-1}$ મુજબ)

$f''(x) = 36x^2 - 12x + 10$

14.4.2 (સ્વાધ્યાય) (તમારી પ્રગતિ ચકાસો.)

(1) જો $y = 10x^3 + 3x^2 + 1$ હોય તો તેનું x ને સાપેક્ષ દ્વિતીય વિકલનફળ મેળવો.

(**જવાબ :** $\frac{dy}{dx} = 30x^2 + 6x, \ \frac{d^2y}{dx^2} = 60x + 6$)

(2) જો $y = 2x^4 + 8x^3 - 2x^2 + 5$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ મેળવો.

(**જવાબ :** $\frac{dy}{dx} = 8x^3 + 24x^2 - 4x, \ \frac{d^2y}{dx^2} = 24x^2 + 48x - 4$)

(3) જો $y = (x^2 - 2)^2$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

(**જવાબ :** $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 8x, \ \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 8$)

(4) જો $y = x^2 \quad e^x$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

(**જવાબ** : $\frac{dy}{dx} = (x^2 \quad e^x) + (e^x \quad 2x) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x\ [x^2 + 4x + 2]$)

(5) જો $y = 2e^{3x} + 3e^{-3x}$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} = 9y.$

(**Hint** : ઉદાહરણ - 6 મુજબ ગણો)

(6) જો $y = \frac{\log x}{x}$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

(**જવાબ :** $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \log x}{x^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\log x - 3}{x^3}$)

(7) જો $y = x \quad \log x$ હોય તો સાબિત કરો કે $x^2\left(\frac{d^2y}{dx}\right) - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = 0.$

(ઉદા. 9 મુજબ ગણો.)

(8) જો $f(x) = 3x^3 + 5x - 9$ હોય તો x ની કઈ કિંમત માટે $f''(x) = 18$ થાય ?

(**જવાબ** : $f'(x) = 9x^2 + 5, \ f''(x) = 18x, \ x = 1$)

(9) જો $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 5x + 8$ હોય તો $f''(2)$ ની કિંમત શોધો.

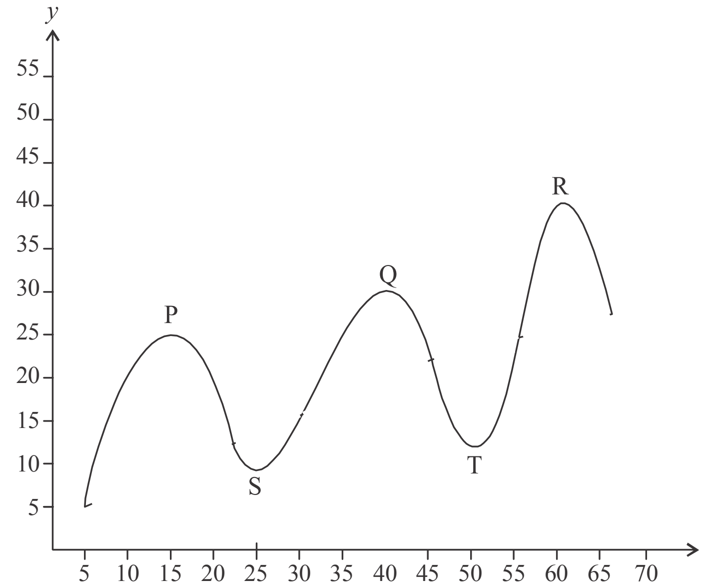
(**જવાબ :** $f'(x) = 6x^2 + 14x - 5, \ f'(x) \ 12x + 14 \ f''(2) = 38$)

(10) જો $f(x) = 5x^4 + 11x^2 - 2x + 5$ હોય તો $f''(x)$ ની કિંમત શોધો.

(**જવાબ :** $f''(x) = 60x^2 + 22$)

14.5 સ્થિર કિંમતો - વિધેયની અધિકતમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો :

જો y એ x નું વિધેય હોય એટલે કે $y = f(x)$ હોય અને x ની જુદી જુદી કિંમતો (5, 15, 25, 40, 50, 65, 75) લેવાથી y ની જુદી જુદી કિંમતો (5, 25, 7, 36, 18, 47, 30) મળેલ હોય અને આ કિંમતોને નીચે મુજબ આલેખપત્ર ઉપર દર્શાવી $y = f(x)$નો આલેખ દોરવામાં આવે છે.



ઉપરના આલેખમાં સમજી શકાય છે કે બિંદુઓ P, Q અને R આગળ મળતી x ની કિંમતો તેની આજુબાજુની કિંમતો કરતાં મોટી એટલે કે અધિકતમ છે. જ્યારે બિંદુઓ S અને T આગળ મળતી x ની કિંમતો તેની આજુબાજુની કિંમતો કરતાં નાની એટલે કે ન્યૂનતમ છે. આમ આપેલું વિધેય $y = f(x)$ ની કિંમત x ની જુદી જુદી કિંમતો માટે અધિકતમ મળે છે, જ્યારે કેટલીક કિંમતો માટે તે ન્યૂનતમ મળે છે. આમ, આ અધિકતમ કે ન્યૂનતમ કિંમતોને સ્થિર કિંમતો તરીકે ઓળખવામાં ઓવે છે. આ મહત્તમ (અધિકતમ) અને લઘુતમ (ન્યૂનતમ) કિંમતોને નીચે મુજબ સમજી શકાય છે.

સમજૂતી :

● મહત્તમ અને લઘુતમ કિંમતો સમજવા માટે નીચેની બાબતો ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ.

→ જે બિંદુઓ આગળ વિધેયની મહત્તમ અને લઘુતમ કિંમતો મળે છે. તેને સ્થિર બિંદુઓ કહે છે.

→ મહત્તમ કિંમતનો અર્થ વિધેયની મહત્તમ કિંમત એવુ નથી, પરંતુ મહત્મ કિંમત એટલે $x = a$ આગળ આપેલું વિધેય મહત્તમ છે એવો થાય છે. એટલે કે $x = a$ ની આજુબાજુના અલ્પગાળામાં $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત મહત્તમ છે.

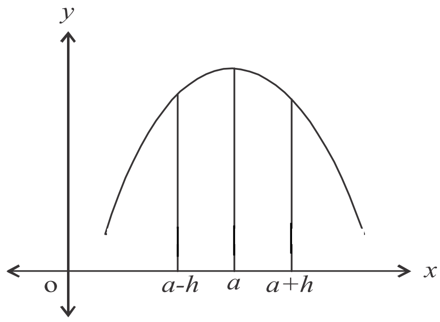
→ વિધેયની મહત્તમ અને લઘુતમ કિંમતો એક પછી એક વારાફરતી આવે છે. જેમ કે મહત્તમ કિંમત પછી લઘુતમ કિંમત પછી મહત્તમ કિંમત.....

→ વિધેયની મહત્તમ અથવા લઘુતમ કિંમતો એકથી વધુ હોઈ શકે છે.

→ વિધેયની મહત્તમ કિંમત તેની કોઈ લઘુતમ કિંમત કરતાં પણ નાની હોઈ શકે છે.

- **વિધેયની મહત્તમ કિંમત :**

જો $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત તેની આજુબાજુના ગાળામાં મહત્તમ મળતી હોય તો $x = a$ આગળ આપેલું વિધેય મહત્તમ છે એમ કહેવાય, જે નીચેની આકૃતિની મદદથી સમજીશું.



ઉપરની આકૃતિ ઉપરથી સમજી શકાય છે કે વિધેય $x = a$ આગળ -

$f(a) > f(a - h)$ જ્યાં, h અલ્પ ધન સંખ્યા છે.

$f(a) > f(a + h)$ જ્યાં, h અલ્પ ધન સંખ્યા છે.

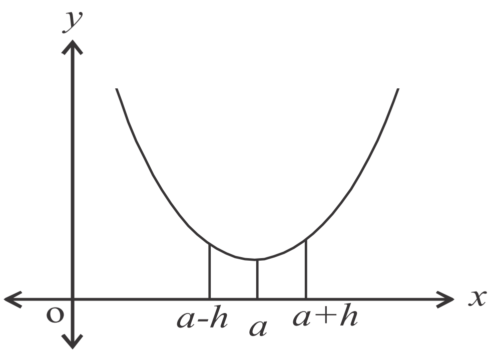
એટલે કે $f(a)$ તેની આજુબાજુની કિંમત $f(a - h)$ અને $f(a + h)$ કરતાં મોટી છે, એટલે કે મહત્તમ છે. જો આવુ બને તો આપેલું વિધેય $x = a$ આગળ મહત્તમ કિંમત ધરાવે છે એમ કહેવાય. વિધેયની મહત્તમ કિંમત મેળવવા માટે બે શરતો જરૂરી છે.

(1) જરૂરી શરત : $f'(a) = 0$ એટલે કે આપેલ વિધેયનું પ્રથમ વિકલન બરાબર શૂન્ય થાય.

(2) પર્યાપ્ત શરત : $f''(a) < 0$ (ઋણ કિંમત) એટલે કે પ્રથમ વિકલનના વિકલનફળનું ફરીથી વિકલન કરતાં (દ્વિતીય વિકલન કરતા) જે કિંમત મળે તે શૂન્યથી ઓછી હોવી જોઈએ.

- **વિધેયની લઘુતમ કિંમત :**

જો $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત તેની આજુબાજુના ગાળામાં લઘુતમ મળતી હોય તો $x = a$ આગળ આપેલું વિધેય લઘુતમ છે એમ કહેવાય, જે નીચેની આકૃતિની મદદથી સમજીશું.



ઉપરની આકૃતિ ઉપરથી સમજી શકાય છે કે વિધેય $x = a$ આગળ -

$f(a) < f(a - h)$ જ્યાં, h અલ્પ ધન સંખ્યા છે.

$f(a) < f(a + h)$ જ્યાં, h અલ્પ ધન સંખ્યા છે.

એટલે કે $f(a)$ તેની આજુબાજુની કિંમત $f(a - h)$ અને $f(a + h)$ કરતાં નાની છે, એટલે કે લઘુતમ છે. જો આવું બને તો આપેલું વિધેય $x = a$ આગળ લઘુતમ કિંમત ધરાવે છે, એમ કહેવાય.

વિધેયની લઘુતમ કિંમત મેળવવા માટે બે શરતો જરૂરી છે.

(1) જરૂરી શરત : $f'(a) = 0$ એટલે કે આપેલ વિધેયનું પ્રથમ વિકલન બરાબર શૂન્ય થાય.

(2) પર્યાપ્ત શરત : $f''(a) > 0$ (ધન કિંમત) એટલે કે પ્રથમ વિકલનફળના વિકલન ફળનું ફરીથી વિકલન કરતાં (દ્વિતીય વિકલન કરતાં) જે કિંમત મળે તે શૂન્યથી મોટી હોવી જોઈએ.

- **કોઈ પણ વિધેયની મહત્તમ કિંમત અને લઘુતમ કિંમતની ગણતરી કરવાની રીત :**

પગલું - 1 : આપેલ વિધેય $y = f(x)$ નું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલન શોધો એટલે $\frac{dy}{dx}$ અથવા $f'(x)$ શોધો.

પગલું - 2 : $\frac{dy}{dx} = 0$ અથવા $f'(x) = 0$ મુકી જે સમીકરણ મળે તેમાંથી x ની કિંમત શોધો.

પગલું - 3 : x ની કિંમતો શોધીશું. ત્યારે x ની બે કિંમતો મળશે. (તેને સ્થિર કિંમતો તરીકે ઓળખીશું.)

પગલું - 4 : $f'(x)$ અથવા $\frac{dy}{dx}$ નું ફરીથી વિકલન વિકલન કરી $f''(x)$ અથવા $\frac{d^2y}{dx^2}$ મેળવો.

પગલું - 5 : $f''(x)$ અથવા $\frac{d^2y}{dx^2}$ નું જે સમીકરણ મળશે. તેમાં બંને સ્થિર કિંમતો એટલે

x ની બંને કિંમતો મૂકી $f''(x)$ અથવા $\frac{d^2y}{dx^2}$ ની બે કિંમતો શોધો.

પગલું - 6 : જો $f''(x)$ અથવા $\frac{d^2y}{dx^2}$ નું કિંમત જે x ની કિંમત માટે ઋણ કિંમત મળે, એટલે કે $f''(x) < 0$ અથવા $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ થાય તો x ની તે કિંમત મહત્તમ કિંમત આપશે અને જો x ની કિંમત ધન કિંમત મળે, એટલે કે $f''(x) > 0$ અથવા $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ થાય તો x ની

તે કિંમત લઘુતમ કિંમત આપશે.

પગલું - 7 : $y = f(x)$ જે સમીકરણ આપેલ છે તેમાં $\frac{d^2y}{dx^2}$ ની ઋણ કિંમતવાળી x ની કિંમત મૂકતાં વિધેયની મહત્તમ કિંમત મળશે અને $\frac{d^2y}{dx^2}$ ની ધન કિંમતવાળી x ની કિંમત મુકતાં વિધેયની લઘુતમ કિંમત મળશે.

14.6 ઉદાહરણો અને સ્વાધ્યાય (તમારી પ્રગતિ ચકાસો.)

14.6.1 ઉદાહરણો

ઉદાહરણ : 1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 10$ ની મહત્તમ અને લઘુતમ કિંમતો મેળવો.

જવાબ : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 10$

$f'(x) = 3x^3 - 6x$ (પ્રથમ વિકલન કરતાં)

$f'(x) = 0$ (જરૂરી શરત)

$3x^2 - 6x = 0$

$x^2 - 2x = 0$ (3 વડે ભાગતાં)

$x(x - 2) = 0$ (x કોમન લેતાં)

x અથવા $(x - 2) = 0$

$x = 0$ અથવા $x - 2 = 0$

$x = 0$ અથવા $x = 2$ (બે સ્થિર કિંમતો મળશે.)

$f'(x)$ નું ફરીથી વિકલન કરતાં,

$f''(x) = 6x - 6$

x ની બંને કિંમત $x = 0$ અને $x = 2$ મુકતા

$f''(x = 0) = 6(0) - 6 = -6$ (ઋણ કિંમત)

$f''(x = 0) < 0$ (પર્યાપ્ત શરત)

$f''(x = 2) = 6(2) - 6 = 12 - 6 = 6$ (ધન કિંમત)

$f''(x = 2) > 0$ (પર્યાપ્ત શરત)

$x = 0$ જે $f''(x)$ ની ઋણ કિંમત આપે છે. તેથી મૂળ વિધેય માં $x = 0$ મૂકતાં વિધેયની મહત્તમ કિંમત મળશે.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 10$

$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 10$

$= 10$ જે વિધેયની મહત્તમ કિંમત છે.

$x = 2$ જે $f''(x)$ ની ધન કિંમત આપે છે. તેથી મૂળ વિધેયમાં $x = 2$ મૂકતાં,

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 10$

$f(x = 2) = 2^3 - 3(2)^2 + 10$

$= 8 - 12 + 10$

$= 6$ જે વિધેયની લઘુત્તમ કિંમત છે.

ઉદાહરણ : 2. $y = 2x^3 + 3x^2 + 13$ ની લઘુતમ કિંમત શોધો.

જવાબ. : $y = 2x^3 + 3x^2 + 13$

$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x + 0$ (પ્રથમ વિકલન કરતાં)

$\frac{dy}{dx} = 0$ (જરૂરી શરત)

$6x^2 + 6x = 0$ (બંને બાજુ 6 વડે ભાગતાં)

$x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$

$x = 0$ અથવા $x + 1 = 0$

$x = 0$ અથવા $x = -1$

$\frac{d^2y}{dx} > 0$ (પર્યાપ્ત શરત)

$\therefore \frac{d^2y}{dx} = 12x + 6$ (દ્વિતીય વિકલન કરતાં)

$x = 0$ મુકતા

$\frac{d^2y}{dx^2} \} x = 0 = 12(0) + 6$

$= 6 > 0$ (ધન કિંમત મળે છે.)

એટલે કે પર્યાપ્ત શરત સંતોષાય છે. તેથી મૂળ વિધેયમાં $x = 0$ મૂકતાં,

$y = 2x^3 + 3x^2 + 13$

$= 2(0)^3 + 3(0)^2 + 13$

$= 13$ જે લઘુતમ કિંમત છે.

ઉદાહરણ : 3. જો $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 9$ હોય તો તે વિધેયની મહત્તમ કિંમત શોધો.

જવાબ. : $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 9$

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$ (પ્રથમ વિકલન કરતાં)

$f'(x) = 0$ (જરૂરી શરત)

$6x^2 - 30x + 36 = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ (બંને બાજુ 6 વડે ભાગતાં,)

$x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

$x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

$(x - 3)(x - 2) = 0$ (અવયવ પાડતાં)

$x - 3 = 0$ અથવા $x - 2 = 0$,

$\therefore x = 3$ અથવા $x = 2$ (જે સ્થિર કિંમતો છે.)

$f''(x) < 0$ (ઋણ કિંમત) પર્યાપ્ત શરત

$\therefore f''(x) = 12x - 30$ (દ્વિતીય વિકલન કરતા)

$x = 2$ મૂકતાં,

$f''x = 2 = 12(2) - 30$

$= 24 - 30$

$= -6$ (ઋણ કિંમત મળે છે.)

$\therefore x = 2$ આગળ વિધેય મહત્તમ કિંમત આપશે તેથી મૂળ વિધેયમાં $x = 2$ મૂકતાં,

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 9$

$= 2(2)^3 - 15(2)^2 + 36(2) - 9$

$= 16 - 60 + 72 - 9$

$= 19$ જે મહત્તમ કિંમત છે.

ઉદાહરણ : 4. જો $f(x) = x \cdot e^{-x}$ હોય તો તે વિધેયની મહત્તમ કિંમત શોધો.

જવાબ. : $f(x) = x \cdot e^{-x}$ (વિકલનના ગુણાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરો.)

$f'(x) = x \cdot (-e^{-x}) + e^{-x}(1)$ ....(1)

$f'(x) = e^{-x}(-x + 1)$ (e^{-x} સામાન્ય લેતાં)

$f'(x) = 0$ (જરૂરી શરત)

$e^{-x}(-x + 1) = 0$

$e^{-x} = 0$ અથવા $-x + 1 = 0$

$e^{-x} = 0$ અથવા $x = 1$ (અનંત કિંમત)

$f''(x) < 0$ (ઋણ કિંમત) પર્યાપ્ત શરત

$f''(x) = x \cdot (e^{-x}) + (-e^{-x})(1) - e^{-x}$

સમી. (I)નું ફરીથી વિકલન કરતાં

$f''(x) = x \cdot e^{-x} - e^{-x} - e^{-x}$

$= e^{-x} (x - 1 - 1)$ (e^{-x} સામાન્ય લેતાં)

$= e^{-x} (x - 2)$

$x = 1$ મુકતા

$f''(x = 2) = e^{-1} (1 - 2)$

$= -e^{-1}$

$= -e^{-1} < 0$ ઋણ કિંમત મળે છે.

તેથી $x = 1$ આગળ વિધેય મહત્તમ કિંમત આપશે. તેથી મૂળ વિધેયમાં $x = 1$ મૂકતાં,

$f(x) = x \cdot e^{-x}$

$= (1) \cdot e^{-1} = e^{-1} = 1/e$ જે વિધેયની મહત્તમ કિંમત છે.

ઉદાહરણ : 5. 40 ના એવા બે ભાગ પાડો કે જેથી તેમનો ગુણાકાર મહત્તમ થાય.

જવાબ : ધારો કે પ્રથમ ભાગ $= x$

$\therefore$ બીજો ભાગ $= 40 - x$

બંનેનો ગુણાકાર $= x (40 - x)$

$\therefore f(x) = x (40 - x)$

$f(x) = 40x - x^2$

ગુણાકારને મહત્તમ બનાવવાની શરતો

$f'(x) = 0$ (જરૂરી શરત)

$f''(x) < 0$ (પર્યાપ્ત શરત)

$f'(x) = 40 - 2x$ પ્રથમ વિકલન કરતાં)

$40 - 2x = 0$

$40 = 2x$

$x = 40/2 = 20$

$f''(x) = 0 - 2(1) = -2 < 0$ ઋણ કિંમત છે.

તેથી પર્યાપ્ત શરતનું સમાધાન થાય છે. તેથી કહી શકાય કે

પ્રથમ ભાગ $= x = 20$

બીજો ભાગ $= 40 - x$

$= 40 - 20$

$= 20$

14.6.2 સ્વાધ્યાય (તમારી પ્રગતિ ચકાસો.)

(1) $f(x) = x^3 + 6x^3 - 15x + 10$ ની મહત્તમ અને લઘુતમ કિંમત મેળવો.

જવાબ : ($x = -5$ અને $x = 1$, મહત્તમ કિંમત $= 110$ લઘુતમ કિંમત $= 2$)

(2) $f(x) = 2x^3 + 3x^3 + 20$ ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

જવાબ : ($x = -1$ અને $x = 0$, $x = -1$ માટે મહત્તમ કિંમત $= 21$)

(3) જો $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 36$ હોય તો તે વિધેયની લઘુતમ કિંમત મેળવો.

જવાબ : ($x = 3$ અને $x = 2$, $x = 3$ આગળ વિધેયની લઘુતમ કિંમત $= 63$)

(4) જો $f(x) = 2x \cdot e^{-x}$ હોય તો તે વિધેયની લઘુતમ કિંમત મેળવો.

જવાબ : $x = e^{-x}$ (અનંત) અને $x = 1$, $x = 1$ આગળ વિધેયની મહત્તમ કિંમત $= 2 \cdot e^{-1}$

(5) 60 ના એવા બે ભાગ પાડો કે જેથી તેમનો ગુણાકાર મહત્તમ થાય.

જવાબ : $f(x) = x\ (60 - x)$, $f'(x) = 0$ મૂકતાં $x = 30$

$f''(x) = -2 < 0$ ગુણાકાર મહત્તમ થતાં,

પ્રથમ ભાગ $= 30$ અને બીજો ભાગ $= 30$

(6) એવી સંખ્યા શોધો કે જેનો સરવાળો 100 હોય અને ગુણાકાર મહત્તમ થાય.

જવાબ : પ્રથમ સંખ્યા $= 50$, બીજી સંખ્યા $= 50$

14.7 અર્થશાસ્ત્રમાં વિકલનના ઉપયોગો :

અર્થશાસ્ત્રમાં વિકલનનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરી શકાય તે સમજતાં પહેલાં અર્થશાસ્ત્રના અગત્યના પદો જેવા કે માંગ, પુરવઠો, કુલ ખર્ચ, કુલ આવક વગેરેનો સમજૂતી મેળવીશું.

14.7.1 માંગ અને પુરવઠાના નિયમો અને તેના વિધેયો :

- **માંગનો નિયમ :**

  જો અન્ય પરિબળો સ્થિર રહે અને ત્યારે જો કોઈ વસ્તુની કિંમત વધે તો તેની માંગ ઘટે અને જો કોઈ વસ્તુની કિંમત ઘટે ત્યારે તેની માંગ વધે તો તેને માંગના નિયમ તરીકે ઓળખી શકાય.

- **માંગનું વિધેય :**

  માંગનું વિધેય એ ઘટતું વિધેય છે. તેનું વિકલન ઋણ મળે છે. જો માંગનો એકમને x અને વસ્તુની કિંમતને P વડે દર્શાવીએ તો માંગનું વિધેય.

  $x = f(\mathrm{P})$ અથવા $\mathrm{P} = \phi(x)$ છે.

  જેને નીચેના જુદાં જુદાં સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.

$$x = \frac{a-p}{b} \qquad x = \frac{a\sqrt{\mathrm{P}}}{b}$$

અથવા **અથવા**

$$bx = a - p \qquad P = \sqrt{a - bx}$$

$$\therefore\ x = a - bx$$

પુરવઠાનો નિયમ :

જો અન્ય પરિબળો સ્થિર રહે અને ત્યારે જો વસ્તુની કિંમત વધે તો તેનો પુરવઠો વધે અને જો વસ્તુની કિંમત ઘટે તો પુરવઠો ઘટે, તો તેને પુરવઠાનો નિયમ તરીકે ઓળખી શકાય.

પુરવઠાનું વિધેય :

પુરવઠાનું વિધેય વધતું વિધેય છે તેનું વિકલન ધન મળે છે, જો પુરવઠાના એકમને x વડે અને કિંમતને P વડે દર્શાવીએ તો પુરવઠાના વિધેયને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.

$x = f(\mathrm{P})$

અથવા

$\mathrm{P} = \phi(x)$

જેને નીચેના વિવિધ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.

$x = a + bp$ $\quad\quad$ $\mathrm{P} = a + b + x$

$x = a + bp + cp^2$ $\quad\quad$ $\mathrm{P} = a + bx + cx^2$

14.7.2. ખર્ચનું વિધેય સરેરાશ ખર્ચ અને સીમાંત ખર્ચ :

વિકલનનો અર્થશાસ્ત્રમાં ઉપયોગ કરતાં પહેલા આપણે માંગ, પુરવઠો, માંગનું વિધેય અને પુરવઠાના વિધેયનો અભ્યાસ કર્યો. હવે ખર્ચ, સરેરાશ ખર્ચ, સીમાંત ખર્ચ અને તેના વિધેયો અંગે ચર્ચા કરીશું.

ખર્ચ : ધંધામાં થતા ઉત્પાદન પાછળ જે ખર્ચાઓ થાય છે, તે બે પ્રકારના હોય છે.

(1) સ્થિર ખર્ચ (2) ચલિત ખર્ચ.

સ્થિર ખર્ચ એટલે ભાડું કે સ્થિર વહીવટી ખર્ચાઓ કે જે ચૂકવવાના નક્કી જ હોય છે. તેને ઉત્પાદિત એકમો સાથે કોઈ સંબંધ હોતો નથી. જ્યારે ચલિત ખર્ચ એ ઉત્પાદન ઉપર આધારિત છે. કુલ ખર્ચ = સ્થિર ખર્ચ + ચલિત ખર્ચ

- **કુલ ખર્ચનું વિધેય :** કુલ ખર્ચનું વિધેય નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

કુલ ખર્ચ વિધેય $\mathrm{C} = f(x)$

જ્યાં, C = કુલ ખર્ચ અને x = ઉત્પાદિત એકમો

ઉદાહરણ તરીકે કુલ ખર્ચ $\mathrm{C} = a + bx$ હોય તો a = સ્થિર ખર્ચ અને x = ઉત્પાદિત એકમો.

ધારો કે કુલ ખર્ચ $\mathrm{C} = 500 + 6x$ હોય અને ઉત્પાદિત એકમોની સંખ્યા 100 હોય તો કુલ ખર્ચ

$$\begin{aligned} \mathrm{C} &= 500 + 6(100) \quad\quad \because x = 100 \\ &= 500 + 600 \\ &= 1100 \end{aligned}$$

જો $x = 0$ હોય એટલે કે ઉત્પાદિત એકમોની સંખ્યા શૂન્ય હોય તો,

કુલ ખર્ચ C = 500 + 6(0)

= 500 + 0

= 500

એટલે કે એક પણ એકમનું ઉત્પાદન ન કરવામાં આવે તો કુલ ખર્ચ = સ્થિર ખર્ચ થાય તેમજ જેમ જેમ ઉત્પાદન વધતુ જશે તેમ તેનો ખર્ચ વધતો જશે એટલે કે ખર્ચનું વિધેય એ વધતું વિધેય છે.

- **સરેરાશ ખર્ચ :**

  કુલ ખર્ચને ઉત્પાદિત એકમો વડે ભાગવામાં આવે તો સરેરાશ ખર્ચ મળે છે.

  સરેરાશ ખર્ચ વિધેય = $\frac{C}{x}$

  જ્યાં, C = કુલ ખર્ચ અને x = ઉત્પાદિત એકમો

  ઉપરના ઉદાહરણમાં C = 1100 અને x = 100 છે તેથી

  સરેરાશ ખર્ચ = $\frac{1100}{100}$ = 11 રૂ.

- **સીમાંત ખર્ચ :**

  કોઈ પણ એકમનું ઉત્પાદન કરવામાં આવતું હોય છે ત્યારે ઉત્પાદિત એકમની કોઈપણ કક્ષાએ વધારાનો એકમ બનાવવામાં આવે તો વધારાના પ્રત્યેક એકમ બનાવવાથી જે વધારાનો ખર્ચ થાય છે તેને સીમાંત ખર્ચ કહે છે.

  વિકલનમાં કુલ ખર્ચ C = $f(x)$ હોય તો સીમાંત ખર્ચ = $\frac{dc}{dx}$ થાય એટલે કે ખર્ચનું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલન.

14.7.2 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ : 1 કોઈ એક વસ્તુના ઉત્પાદનમાં એકમદીઠ ચલિત ખર્ચ રૂ. 22 છે અને તેની સ્થિર ખર્ચ રૂ. 2000, હોય તો x એકમો બનાવવા માટેનું કુલ ખર્ચ વિધેય મેળવી તે વસ્તુના 1000 એકમો બનાવવા માટેનો કુલ ખર્ચ અને સરેરાશ ખર્ચ શોધો.

જવાબ : એકમદીઠ ચલિત ખર્ચ = 22,   સ્થિર ખર્ચ = 2000

$\therefore$ કુલ ખર્ચ C =.કુલ સ્થિર ખર્ચ + (કુલ ચલિત ખર્ચ)

C = 2000 + 22x

જે કુલ ખર્ચનું વિધેય છે.

1000 એકમો બનાવવાનો કુલ ખર્ચ શોધવા x = 1000 મૂકતાં,

C = 2000 + 22(1000)

= 2000 + 22,000

$= 24{,}000$

$\therefore$ સરેરાશ ખર્ચ : $\frac{C}{x}$

$= \frac{24{,}000}{1{,}000} = 24$

ઉદાહરણ - 2 : જો ખર્ચનું વિધેય $C = x^3 + 4x^2 + 3x + 300$ હોય તો સરેરાશ ખર્ચ વિધેય અને સીમાંત ખર્ચ વિધેય શોધો.

જવાબ : કુલ ખર્ચ વિધેય T.C. $= x^3 + 4x^2 + 3x + 300$

$\therefore$ સરેરાશ ખર્ચ વિધેય A.C. $= \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 300}{x} = x^2 + 4x + 3x + \frac{300}{x}$

સીમાંત ખર્ચ વિધેય $\frac{dc}{dx} = 3x^2 + 8x + 3$

ઉદાહરણ - 3 : જો $C = \frac{x^2}{10} + 5x + 200$ એ ખર્ચનું વિધેય હોય અને 10 એકમોનું ઉત્પાદન કરવામાં આવે તો થતો સીમાંત ખર્ચ શોધો.

જવાબ : કુલ ખર્ચ $C = \frac{x^2}{10} + 5x + 200$

સીમાંત ખર્ચ $= \frac{dc}{dx} = \frac{2x}{10} + 5$ ($x = 10$ મૂકતાં)

$= \frac{dc}{dx} = \frac{2(10)}{10} + 5$

$= 7$

ઉદાહરણ - 4 : જો ખર્ચનું વિધેય T. C. $= x^3 + 3x^2 + 2x + 200$ હોય તો સીમાંત ખર્ચ અને સરેરાશ ખર્ચનું વિધેય મેળવો. જો 15 એકમોનું ઉત્પાદન કરવામાં આવે તો સીમાંત ખર્ચ શોધો.

જવાબ : કુલ ખર્ચ (T. C.) $= x^3 + 3x^2 + 2x + 200$

સરેરાશ ખર્ચ (A. C.) $= \frac{x^3 + 3x^2 + 2x + 200}{x}$

$= x^2 + 3x + 2 + \frac{200}{x}$

સીમાંત ખર્ચ $= \frac{dc}{dx} = 3x^2 + 6x + 2$

$x = 15$ મૂકતાં,

$$\frac{dc}{dx} = 3(15)^2 + 6(15) + 2$$

$$= 3 \times 225 + 90 + 2$$

$$= 767$$

14.7.3 સ્વાધ્યાય (જાતે ગણો)

1. એક વસ્તુનો એકમદીઠ ચલિત ખર્ચ રૂ. 30 છે અને તેનો સ્થિર ખર્ચ રૂ. 3,000 હોય તો ઉત્પાદિત એકમોના x જેટલાં એકમોનું ઉત્પાદનનું કુલ ખર્ચ વિધેય શોધો. ઉપરાંત જો તે વસ્તુના કુલ 800 એકમો ઉત્પાદન કરવામાં આવે તો તે વસ્તુનો કુલ ખર્ચ અને સરેરાશ ખર્ચ શોધો.

જવાબ : $C = 3000 + 30x$, T.C. = 27,000, A.C. = 33.75

2. જો ખર્ચનું વિધેય $C = x^3 + 6x^2 + 5x + 500$ હોય તો સરેરાશ ખર્ચ વિધેય અને સીમાંત ખર્ચ વિધેય શોધો.

જવાબ : $x^2 + 6x + 5 + \frac{500}{x}$, $3x^3 + 12x + 5)$

3. જો ખર્ચનું વિધેય $C = \frac{3x^2}{3} + 3x + 300$ હોય તો 20 એકમોનું ઉત્પાદન કરવા માટે તો સીમાંત ખર્ચ શોધો.

જવાબ : 43

14.7.4 કુલ આમદાની, કુલ આમદાની વિધેય, સરેરાશ આમદાની, સરેરાશ આમદાની વિધેય અને સીમાંત આમદાની

કુલ આમદાની (Total Revenue) :

કુલ આમદાની અથવા કુલ આવકને **R** વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

કુલ આમદાની $R = x \,.\, P$

જ્યાં, P = કિંમત x = માંગ

ટૂંકમાં, કિંમત અને માંગનો ગુણાકાર કરવાથી કુલ આવક કે કુલ આમદાની મળે છે.

કુલ આમદાની વિધેય :

કુલ આમદાનીને કિંમતના વિધેય અથવા માંગના વિધેય એમ બે રીતે દર્શાવી શકાય છે.

જો માંગનું વિધેય $P = f(x)$ સ્વરૂપે હોય તો કુલ આમદાની વિધેય $R = x.\, f(x)$ થાય જે

માંગ x ઉપર આધારિત છે.

જો માંગનું વિધેય $x = \phi(P)$ સ્વરૂપે હોય તો કુલ આમદાની $R = P \,.\, \phi(P)$ થાય જે કિંમત P ઉપર આધારિત છે.

સરેરાશ આમદાની (A.R.) : કુલ આમદાની Rને કુલ માંગ x વડે ભાગવામાં આવે તો સરેરાશ આમદાની મળે છે.

સરેરાશ આમદાની વિધેય :

સરેરાશ આમદાની : $\frac{R}{x} = \frac{x \cdot P}{x} = P$

સરેરાશ આમદાનીની કિંમત વસ્તુની કિંમત P જેટલી જ થાય છે, એટલે કે સરેરાશ આમદાની એ વસ્તુની એકમદીઠ કિંમત છે.

સીમાંત આમદાની : આમદાની વિધેય R નું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલન કરવામાં આવે તો તેને સીમાંત આમદાની કહેવાય.

સીમાંત આમદાની $= \frac{dR}{dx}$ જેની કિંમત ધન, ઋણ કે શૂન્ય જેટલી હોય છે.

14.7.5 ઉદાહરણો

ઉદાહરણ - 1 : એક વસ્તુનું માંગનું વિધેય $\mathbf{P = 20 - 2x}$ હોય તો કુલ આમદાની વિધેય અને સરેરાશ આમદાની શોધો.

જવાબ : $P = 20 - 2x$

$\therefore$ કુલ આમદાની વિધેય $= R = x \,.\, P$

$$= x\,(20 - 2x)$$
$$= 20x - 2x^2$$

સરેરાશ આમદાની (A.R.) $= \frac{R}{x} = \frac{x \cdot P}{x} = P$

$\therefore$ સરેરાશ આમદાની (A.R.) $= 20x - 2x$

ઉદાહરણ - 2 : એક વસ્તુનું માંગનું વિધેય $P = 30 - 5x$ હોય તો સીમાંત આમદાની શોધો.

જવાબ : $P = 30 - 5x$

કુલ આમદાની $R = x \,.\, P$

$$= x\,(30 - 5x)$$
$$= 30x - 5x^2$$

સીમાંત આમદાની $= \frac{d \cdot R}{dx} = 30 - 10x$ ($\because$ x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલન કરતાં)

ઉદાહરણ - 3 : એક વસ્તુની માંગનો નિયમ $x = \frac{100 - P}{5}$ છે. માંગ 5 એકમો હોય તો સીમાંત આમદાની મેળવો.

જવાબ : $x = \frac{100 - P}{5}$

$$5x = 100 - P$$
$$P = 100 - 5x$$

કુલ આમદાની $R = xP$

$$= x(100 - 5x)$$
$$R = 100x - 5x^2$$

સીમાંત આમદાની $= \frac{dR}{dx} = 100 - 10x$

$x = 5$ મૂકતાં,

$$\frac{dR}{dx} = 100 - 10(5)$$
$$= 100 - 50$$
$$= 50$$

14.7.6 સ્વાધ્યાય (જાતે ગણો) :

1. એક વસ્તુનું માંગનું વિધેય $P = 25 - 3x$ હોય તો કુલ આમદાની વિધેય અને સરેરાશ આમદાની શોધો :

જવાબ : $25x - 3x^2$, $25 - 3x$

2. એક વસ્તુનું માંગનું વિધેય $P = 50 - 2x$ હોય તો સીમાંત આમદાની શોધો.

જવાબ : $50 - 4x$

3. એક વસ્તુની માંગનો નિયમ $x = \frac{200 - P}{3}$ છે. માંગ 20 એકમ હોય તો સીમાંત આમદાની શોધો.

જવાબ : 80

14.7.7 માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા અને તેનું અર્થઘટન (Price Elasticity of demand and it's Interpatation) :

- **માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા :** પ્રૉ.માર્શલના મતે માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા એટલે માંગમાં થતાં ટકાવારી ફેરફાર અને કિંમતમાં થતા ટકાવારી ફેરફારનો ગુણોત્તર. માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાને માંગની મૂલ્ય અપેક્ષતા પણ કહેવાય છે. તેને e' અથવા η' વડે દર્શાવી શકાય છે, જે નીચેના સૂત્રોની મદદથી શોધી શકાય છે.

સૂત્ર - 1 : માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= -\dfrac{\text{માંગમાં થતાં ટકાવારી ફેરફાર}}{\text{કિંમતમાં થતો ટકાવારી ફેરફાર}}$

માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાનો ગુણોત્તર ઋણ હોય છે, કારણ કે માંગના નિયમ અનુસાર માંગ અને કિંમતમાં થતો ફેરફાર વચ્ચેનો સંબંધ ઋણ કે વ્યસ્ત હોય છે.

સૂત્ર - 2 : માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= \eta = \left(\dfrac{P_1 + P_0}{P_1 - P_0} \times \dfrac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0}\right)$

જ્યાં P_0 = શરૂઆતની કિંમત (ભાવ)

P_1 = છેલ્લી કિંમત (ભાવ)

x_0 = શરૂઆતની માંગ

x_1 = છેલ્લી માંગ

સૂત્ર - 3 : જો માંગનું વિધેય $x = f(P)$ હોય તો માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= \eta = -\dfrac{P}{x} \cdot \left(\dfrac{dx}{dP}\right)$

જ્યાં P = ભાવ

x = માંગ

$\dfrac{dx}{dP}$ વિધેય x નું P ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલન

- **માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાનું અર્થઘટન :**

માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની જુદી જુદી કિંમતોનું અર્થઘટન જુદી જુદી રીતે કરી શકાય છે, જે નીચે મુજબ સમજીશું.

1. $\eta > 1$ (મૂલ્ય સાપેક્ષ માંગ) :

જો માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની કિંમત 1 (એક) કરતાં વધારે હોય એટલે કે $\eta > 1$ હોય તો તેનું અર્થઘટન મૂલ્ય સાપેક્ષ માંગ એવું કરવામાં આવે છે. તેનો અર્થ એ થાય છે કે વસ્તુની કિંમત (ભાવ)માં થતા ફેરફાર કરતા તેની માંગમાં થતો ફેરફાર વધારે હોય છે.

2. $\eta < 1$ (મૂલ્ય અનપેક્ષ માંગ) :

જો માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની કિંમત 1 (એક) કરતાં ઓછી હોય એટલે કે $\eta < 1$ હોય તો તેનું અર્થઘટન મૂલ્ય અનપેક્ષ માંગ એવું કરવામાં આવે છે. તેનો અર્થ એ થાય છે કે વસ્તુની કિંમત (ભાવ)માં થતા ફેરફાર કરતા તેની માંગમાં થતો ફેરફાર ઓછો હોય છે.

3. $\eta = 1$ (એકમ-સાપેક્ષ કે મૂલ્ય-એકમ માંગ) :

જો માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની કિંમત 1 (એક) જેટલી જ હોય એટલે કે $\eta = 1$ હોય તો

તેનું અર્થઘટન મૂલ્ય એકમ માંગ અથવા એકમ સાપેક્ષ માંગ એવું કરવામાં આવે છે. તેનો અર્થ એ થાય છે કે વસ્તુની કિંમત (ભાવ)માં થતો ફેરફાર અને તેની માંગમાં થતો ફેરફાર સરખા પ્રમાણમાં હોય છે.

4. $\eta = 0$ (સંપૂર્ણ મૂલ્ય અનપેક્ષ કે સંપૂર્ણ સ્થિર માંગ) :

જો માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની કિંમત શૂન્ય હોય એટલે કે $\eta = 0$ હોય તો તેનું અર્થઘટન સંપૂર્ણ મૂલ્ય અનપેક્ષ અથવા સંપૂર્ણ સ્થિર માંગ એવું કરવામાં આવે છે. તેનો અર્થ એ થાય છે કે વસ્તુની કિંમત (ભાવ)માં ગમે એટલો ફેરફાર થાય તો પણ તેની માંગ સ્થિર જ રહે છે.

5. $\eta =$ (અનંત મૂલ્ય સાપેક્ષ માંગ) :

જો માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની કિંમત ∞ (અનંત) જેટલી જ હોય એટલે કે $\eta = \infty$ (અનંત) હોય તો તેનું અર્થઘટન અનંત મૂલ્ય સાપેક્ષ માંગ એવું કરવામાં આવે છે. તેનો અર્થ એ થાય છે કે વસ્તુની કિંમત (ભાવ)માં થતો ફેરફાર ગમે એટલો નજીવો હોય તેમ છતાં પણ માંગમાં થતો ફેરફાર અમર્યાદિત હોય છે તેને અસ્થિર માંગ તરીકે પણ ઓળખી શકાય છે.

14.7.8 પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા અને તેનું અર્થઘટન (Price Elasticity of Supply and it's Interpretation) :

પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા પ્રૉ. માર્શલના મતે : "પુરવઠાની મુલ્ય સાપેક્ષતા એટલે "પુરવઠામાં થતા ટકાવારી ફેરફાર અને કિંમતમાં થતા ટકાવારી ફેરફારનો ગુણોત્તર." તેને 'E' વડે દર્શાવી શકાય છે, જે નીચેના સૂત્રોની મદદથી શોધી શકાય છે.

સૂત્ર - 1 પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $(\in) = \dfrac{\text{પુરવઠામાં થતો ટકાવારી ફેરફાર}}{\text{કિંમતમાં થતો ટકાવારી ફેરફાર}}$

સૂત્ર - 2 પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $(\in) = \left(\dfrac{P_1 + P_0}{P_1 - P_0} \times \dfrac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0}\right)$

જ્યાં, P_0 = શરૂઆતની કિંમત (ભાવ)

P_1 = છેલ્લી કિંમત (ભાવ)

x_0 = શરૂઆતનો પુરવઠો

x_1 = અંતિમ પુરવઠો

સૂત્ર - 3 જો પુરવઠાનું વિધેય $x = f(P)$ હોય તો પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $(\in) = \dfrac{P}{x} \cdot \dfrac{dx}{dp}$

જ્યાં, P = ભાવ

x = પુરવઠો

$\frac{dx}{dp}$ = વિધેય x નું P ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલન

- **પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતાનું અર્થઘટન :** પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની જુદી જુદી કિંમતોનું અર્થઘટન જુદી જુદી રીતે કરી શકાય છે, જે નીચે મુજબ સમજીશું.

1. $\in > 1$ (મૂલ્ય સાપેક્ષ પુરવઠો) :

જો પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની કિંમત **1** (એક) કરતાં વધારે હોય એટલે કે $\in > 1$ હોય તો તેનું અર્થઘટન મૂલ્ય સાપેક્ષ પુરવઠો એવું કરવામાં આવે છે. તેનો અર્થ એ થાય છે કે વસ્તુની કિંમત (ભાવ)માં થતા ફેરફાર કરતા તેના પુરવઠામાં થતો ફેરફાર વધારે હોય છે.

2. $\in < 1$ (મૂલ્ય અનપેક્ષ પુરવઠો) :

જો પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની કિંમત 1 (એક) કરતાં ઓછી હોય એટલે કે $\in < 1$ હોય તો તેનું અર્થઘટન મૂલ્ય અનપેક્ષ પુરવઠો એવું કરવામાં આવે છે. તેનો અર્થ એ થાય છે કે વસ્તુની કિંમત (ભાવ)માં થતા ફેરફાર કરતા તેના પુરવઠામાં થતો ફેરફાર ઓછો હોય છે.

3. $\in = 1$ (એકમ-સાપેક્ષ કે મૂલ્ય-એકમ પુરવઠો) :

જો પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની કિંમત 1 (એક) જેટલી જ હોય એટલે કે $\in = 1$ હોય તો તેનું અર્થઘટન મૂલ્ય એકમ પુરવઠો અથવા એકમ સાપેક્ષ પુરવઠો એવું કરવામાં આવે છે. તેનો અર્થ એ થાય છે કે વસ્તુની કિંમતમાં થતો ફેરફાર અને તેના પુરવઠામાં થતો ફેરફાર સરખા પ્રમાણમાં હોય છે.

4. $\in = 0$ (સંપૂર્ણ મૂલ્ય અનપેક્ષ કે સંપૂર્ણ સ્થિર પુરવઠો) :

જો પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની કિંમત શૂન્ય હોય એટલે કે $\in = 0$ હોય તો તેનું અર્થઘટન સંપૂર્ણ મૂલ્ય અનપેક્ષ અથવા સંપૂર્ણ સ્થિર પુરવઠો એવું કરવામાં આવે છે. તેનો અર્થ એ થાય છે કે વસ્તુની કિંમત (ભાવ)માં ગમે એટલો ફેરફાર થાય તો પણ તેનો પુરવઠો સ્થિર જ રહે છે.

5. $\in = \infty$ (અનંત મૂલ્ય સાપેક્ષ પુરવઠો) :

જો પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની કિંમત અનંત જેટલી જ હોય એટલે કે $\eta = \infty$ (અનંત) હોય તો તેનું અર્થઘટન અનંત મૂલ્ય સાપેક્ષ પુરવઠો એવું કરવામાં આવે છે. તેનો અર્થ એ થાય છે કે વસ્તુની કિંમત (ભાવ)માં થતો ફેરફાર ગમે એટલો નજીવો હોય તેમ છતાં પણ પુરવઠામાં થતો ફેરફાર અમર્યાદિત હોય છે તેને અસ્થિર પુરવઠા તરીકે પણ ઓળખી શકાય છે.

14.7.9 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ - 1 માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાના ઉદાહરણો :

બાસમતી ચોખાનો ભાવ કિગ્રા. દીઠ રૂ. 190 હતો ત્યારે તેની માંગ 5200 કિગ્રા. હતી અને જ્યારે ભાવ કિગ્રા.દીઠ રૂ. 200 થયો ત્યારે તેની માંગ ઘટીને 4800 કિગ્રા. થઈ તો ચોખાની માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો.

જવાબ : P_0 = શરૂઆતનો ભાવ = 190

P_1 = છેલ્લો ભાવ = 200

x_0 = શરૂઆતનો માંગ = 5200

x_1 = છેવટની માંગ = 4800

માંગની મુલ્ય સાપેક્ષતા $\eta = -\frac{(P_1+P_0)}{(P_1-P_0)} \times \frac{(x_1-x_0)}{(x_1+x_0)}$

$$= \frac{(200+190)}{(200-190)} \times \frac{(4800+5200)}{4800+5200}$$

$$= -\left(\frac{390}{10}\right) \times \left(\frac{-400}{10,000}\right)$$

$$= (39) \times (-0.04)$$

$$= (-1.56)$$

$$= 1.56$$

ઉદાહરણ - 2 : એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $x = 30 - 3P$ છે. વસ્તુની કિંમત 3 એકમ હોય ત્યારે માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો.

જવાબ : માંગનું વિધેય $x = 30 - 3P$ અને $P = 3$

$$x = 30 - 3P$$

$\therefore \frac{dx}{dp} = -3$ x નું P ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલન કરતાં,

$x = 30 - 3P$ માં $P = 3$ મૂકતાં,

$$x = 30 - 3(3)$$

$$= 21$$

માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $(\eta) = -\frac{P}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

$$= -\left(\frac{3}{21}\right)(-3)$$

$$= \frac{9}{21}$$

$$= \frac{3}{7}$$

ઉદાહરણ - 3 : એક વસ્તુનું માંગનું વિધેય $x = 20 - \sqrt{P}$ છે. વસ્તુની કિંમત 49 હોય ત્યારે માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો.

જવાબ : માંગનું વિધેય $x = 20 - \sqrt{P}$, $P = 49$

$$= 20 - \sqrt{49}$$

$$= 20 - 7$$

$$= 13$$

$$x = 20 - \sqrt{P}$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{2\sqrt{P}}$$

$P = 49$ મૂકતાં,

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{2\sqrt{49}}$$

$$= -\frac{1}{2(7)}$$

$$= --\frac{1}{14}$$

માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= -\frac{P}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

$$= --\frac{49}{13} \times \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{49}{182}$$

$$= 0.2692$$

ઉદાહરણ - 4 : જો માંગનો નિયમ $P = 36 - \sqrt{x}$ હોય તો $x = 49$ આગળ માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો.

જવાબ : માંગનું વિધેય $P = 36 - \sqrt{x}$,

$x = 49$ મૂકતાં,

$$P = 36 - \sqrt{49}$$

$$= 36 - 7$$

$$= 29$$

$$P = 36 - \sqrt{x}$$

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{49}}$$

$$= -\frac{1}{2(7)}$$

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{14} \qquad \therefore \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dp}} = -14$$

$$\text{માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા} = -\frac{\mathrm{P}}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dp}}$$

$$= -\frac{29}{49}\ (-14)$$

$$= \frac{406}{49}$$

$$= 8.29$$

પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતાના દાખલા :

ઉદાહરણ - 5 : એક વસ્તુનો ભાવ કિગ્રા. દીઠ રૂ. 30 થી વધીને 32 થાય છે. ત્યારે તેનો પુરવઠો 2000 કિગ્રા.થી વધી 2500 કિગ્રા. થાય છે. તો તે વસ્તુની પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો.

જવાબ : શરૂઆતનો ભાવ $P_0 = 30$

છેવટનો ભાવ $P_1 = 32$

શરૂઆતનો પુરવઠો $x_0 = 2000$

છેવટનો પુરવઠો $x_1 = 2500$

$$\text{પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા} = \left(\frac{P_1 - P_0}{P_1 + P_0} \times \frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0}\right)$$

$$= \left(\frac{32-30}{32+30} \times \frac{2500-2000}{2500+2000}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{62} \times \frac{500}{4500}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{31} \times \frac{1}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{279}$$

ઉદાહરણ - 6 : ચોખાનો ભાવ કિગ્રા. દીઠ રૂ. 30 થી ઘટીને 24 થાય છે ત્યારે તેનો પુરવઠો 2000 કિગ્રા.થી ઘટીને 1800 કિગ્રા. થાય છે, તો ચોખાના પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો.

જવાબ : શરૂઆતનો ભાવ = 30 = P_0

છેવટનો ભાવ = 24 = P_1

શરૂઆતનો પુરવઠો = 2000 = x_0

છેવટનો પુરવઠો = 1800 = x_1

પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= \left(\frac{P_1 - P_0}{P_1 + P_0} \times \frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0}\right)$

$$= \left(\frac{24-30}{24+30} \times \frac{1800-2000}{1800+2000}\right)$$

$$= \left(\frac{-6}{54} \times \frac{-200}{3800}\right)$$

$$= \left(\frac{-3}{27}\right) \times \left(-\frac{1}{19}\right)$$

$$= \frac{3}{513}$$

ઉદાહરણ - 7 : એક વસ્તુના પુરવઠાનું વિધેય 20 + $2P^2$ માટે P = 3 આગળ પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો.

જવાબ : પુરવઠાનું વિધેય $x = 20 + 2P^2$

$\frac{dx}{dp} = 4P$ (પ્રથમ વિકલન કરતાં)

$= 4(3) = 12$

$x = 20 + 2P^2$

$P = 3$

$= 20 + 2(3)^2$

$= 20 + 2(9)$

$= 38$

પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= \eta = \frac{P}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

$$= -\frac{3}{38} \times 12$$

$$= \frac{24}{38}$$

$$= \frac{12}{19}$$

14.7.10 સ્વાધ્યાય (તમારી પ્રગતિ ચકાસો)

માંગની મુલ્યસાપેક્ષતાના દાખલા :

1. ખાંડનો ભાવ કિગ્રા. દીઠ રૂ. 25 હતો ત્યારે તેની માંગ 3000 કિગ્રા. હતી અને જ્યારે ભાવ કિગ્રા. દીઠ રૂ. 30 થયો ત્યારે તેની માંગ ઘટીને 2800 કિગ્રા. થઈ તો ખાંડની માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

(**જવાબ :** 0.3784, અર્થઘટન : મૂલ્ય અનપેક્ષ માંગ)

2. એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $x = 10 - 2\text{P}$ છે. વસ્તુની કિંમત 2 એકમ હોય ત્યારે માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો.

(**જવાબ :** $\frac{2}{3} = 0.67$)

3. એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $x = 30 - \sqrt{\text{P}}$ છે. વસ્તુની કિંમત 100 હોય ત્યારે માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો.

(**જવાબ :** 0.25)

4. માંગનો નિયમ $\text{P} = 50 - \sqrt{x}$ હોય તો $x = 36$ આગળ માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો.

(**જવાબ :** 14.67)

- **પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતાના દાખલા :**

5. ચોખાનો ભાવ કિગ્રા. દીઠ રૂ. 40 થી ઘટીને રૂ. 32 થાય છે. ત્યારે તેનો પુરવઠો 2000 કિગ્રા. થી ઘટીને 1800 કિગ્રા. થાય છે. તો ચોખાના પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો અને તેનો અર્થ લખો.

(**જવાબ :** 0.47)

6. એક વસ્તુનો ભાવ કિગ્રા. દીઠ રૂ. 2 થી વધીને રૂ. 3 થાય છે ત્યારે તેનો પુરવઠો 2000 કિગ્રા. થી વધીને 2500 કિગ્રા. થાય છે, તો તે વસ્તુની પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો.

(**જવાબ :** 0.55)

7. એક વસ્તુનું પુરવઠાનું વિધેય $x = 5 + 3\sqrt{\text{P}}$ માટે $x = 14$ આગળ પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો.

(**જવાબ :** 0.32)

14.7.11 સીમાંત આવક (MR), સરેરાશ આવક (AR) અને માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા વચ્ચેનો સંબંધ :

જવાબ : કુલ આમદાની $\text{R} = x \cdot \text{P}$

$$\frac{d\text{R}}{dx} = x \cdot \frac{dp}{dx} + \text{P} \cdot \frac{dx}{dp}$$ (વિકલનના ગુણાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં)

$$\frac{d\text{R}}{dx} = x \cdot \frac{dp}{dx} + \text{P} \ (1)$$

$$\frac{dR}{dx} = P\left(\frac{x}{p} \cdot \frac{dp}{dx} + 1\right)$$ ......સમી. – I (P કૌંસ બહાર લેતાં)

માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= \eta = -\frac{P}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

$$-\frac{1}{\eta} = \frac{x}{P} \cdot \frac{dx}{dp}$$ ......સમી. - II

(ઉલટાવીને લખી ઋણ ચિહ્નની સાઈડ બદલતાં)

સમીકરણ - II ને સમીકરણ - I માં મૂકતાં,

$$\frac{dR}{dx} = P\left(-\frac{1}{\eta} + 1\right)$$

$$\text{M.R.} = \text{AR}\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

જ્યાં $\text{M.R.} = 1 - \frac{1}{\eta}$ $\quad P = \text{A.R.}$

$$\frac{\text{M.R.}}{\text{A.R.}} = 1 - \frac{1}{\eta}$$

$$\frac{1}{\eta} = 1 - \frac{\text{M.R.}}{\text{A.R.}}$$

$$\frac{1}{\eta} = \frac{\text{A.R.} - \text{M.R.}}{\text{A.R.}}$$ (લ.સા.અ. લેતાં)

$$\eta = \frac{\text{A.R.}}{\text{A.R.} - \text{M.R.}}$$ (ઉલટાવીને નિયમ)

માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= \dfrac{\text{સરેરાશ આમદાની (આવક)}}{\text{સરેરાશ આવક - સીમાંત આવક}}$

14.7.12 ઈજારો અને ઈજારદારના આવક ખર્ચના વિધેયો :

ઈજારો અને ઈજારેદાર : કેટલીક વખત અમુક વસ્તુઓ એવી હોય છે કે તેનું ઉત્પાદન કે વેચાણ કરનારની સંખ્યા કોઈ એક વ્યક્તિ કે પેઢી જ હોય છે. તો તેવા સંજોગોમાં આ વ્યક્તિ કે પેઢી વસ્તુના પુરવઠા ઉપર નિયંત્રણ રાખી વસ્તુના ભાવ ઉપર પોતાનો કાબૂ રાખે છે અને તે મુજબ વસ્તુનું ઉત્પાદન કે વેચાણ કરે છે. આવી પરિસ્થિતિને ઈજારો કહે છે. જ્યારે તે પેઢી કે વ્યક્તિને ઈજારેદાર તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. દા.ત. AMTS કે BRTS નાં ભાડાંની બાબત, ઈલેક્ટ્રિસિટી કંપનીઓ વીજળી અને તેના ભાવની બાબત વગેરે.

- ઈજારેદારનું આવકનું વિધેય :

  કુલ આવક = R = $f(x)$

- ઈજારેદારના ખર્ચનું વિધેય :

  કુલ ખર્ચ C = $f(x)$

- નફો = કુલ આવક – કુલ ખર્ચ

  $\pi = R - C$

જ્યાં, π = નફો

R = કુલ આવક

C = કુલ ખર્ચ

નોંધ : આવક, ખર્ચ અને નફાને મહત્તમ અને લઘુતમ કરવા માટેની શરતો.

- આવકને મહત્તમ બનાવવા માટેની શરતો.

(1) $\frac{dR}{dx} = 0$

(2) $\frac{d^2R}{dx^2} < 0$

- ખર્ચને લઘુતમ બનાવવા માટેની શરતો.

(1) $\frac{dc}{dx} = 0$ (2) $\frac{d^2R}{dx^2} > 0$

- નફાને મહત્તમ બનાવવા માટેની શરતો.

  નફો $\pi = R - C$

(1) $\frac{d\pi}{dx} = 0$ (2) $\frac{d^2\pi}{dx^2} < 0$

14.7.3 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ - 1 : એક વસ્તુનો ઉત્પાદન ખર્ચ $x^3 - 15x^2 - 600x + 1800$ થાય છે. તો ન્યૂનતમ ખર્ચ માટેનું ઉત્પાદન અને ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધો.

જવાબ : ઉત્પાદન ખર્ચ = C = $x^3 - 15x^2 - 600x + 1800$

$\frac{dc}{dx} = 3x^2 - 30x - 600$ (પ્રથમ વિકલન કરો.)

$\frac{dc}{dx} = 0$ (ખર્ચ ન્યૂનતમ કરવાની પ્રથમ શરત)

$3x^2 - 30x - 600 = 0$ (3 વડે ભાગો)

$x^2 - 10x - 200 = 0$

$x^2 - 20x + 10x - 200 = 0$

$x(x-20) + 10(x-20) = 0$

$(x-20)(x+10) = 0$

$(x-20) = 0$ અથવા $(x+10) = 0$

$\therefore x = 20$ અથવા $x = -10$

ઉત્પાદન ઋણ શક્ય નથી તેથી $x = -20$ લઈશું જે ઉત્પાદન છે.

$\frac{d^2c}{dx^2} > 0$ (બીજી શરત)

$\frac{dc}{dx} = 3x^2 - 30x - 600$ નું ફરીથી વિકલન કરતાં,

$\therefore \frac{d^2c}{dx^2} = 6x - 30$ $\qquad$ $x = 20$ મુકતાં,

$\frac{d^2c}{dx^2} = 6(20) = 30$

$= 120 - 30$

$\frac{d^2c}{dx^2} = 90$ જે શૂન્યથી વધારે છે.

એટલે કે $\frac{d^2c}{dx^2} > 0$ શરતનું સમાધાન થાય છે.

$\therefore x = 20$ આગળ ઉત્પાદન ખર્ચ ન્યૂનતમ આવશે

તેથી ન્યૂનતમ ઉત્પાદન ખર્ચ $= x^3 - 15x^2 - 600x + 1800$ $\qquad$ ($x = 20$ મૂકતાં)

$= (20)^3 - 15(20)^2 - 600(20) + 1800$

$= 8000 - 6000 - 12000 + 18000$

$= 8000$

ઉદાહરણ - 2 : માંગનું વિધેય $P = 27 - \frac{x^2}{100}$ હોય તો કઈ કિંમતે આવક મહત્તમ થશે ? ઉપરાંત મહત્તમ આવક શોધો.

જવાબ : $P = 27 - \frac{x^2}{100}$

આવક $= R = x \cdot P$

$= x\left(27 - \frac{x^2}{100}\right)$

$R = 27x - \frac{x^3}{100}$ મહત્તમ આવક માટેની પ્રથમ શરત $\frac{dR}{dx} = 0$ થવું જોઈએ.

$\therefore \frac{dR}{dx} = 27 - \frac{x^3}{100} = 0$ (પ્રથમ વિકલન કરતાં)

$27 = \frac{3x^2}{100}$

$27 = \frac{3x^2}{100}$

$\therefore \frac{27 \times 100}{3} = x^2$

$x^2 = 900$

$\therefore x = 30$

બીજી શરત $\frac{d^2R}{dx^2} < 0$

$\therefore \frac{d^2R}{dx^2} = -\frac{6x}{100}$ ($\frac{d^2R}{dx^2}$ નું ફરીથી વિકલન કરતાં)

$x = 30$ મૂકતાં,

$\frac{d^2R}{dx^2} = -\frac{6(30)}{100}$

$= -\frac{180}{100}$ ઋણ કિંમત મળે છે.

તેથી બીજી શરતનું સમાધાન થાય છે. તેથી કહી શકાય કે $x = 30$ આગળ વિધેય મહત્તમ છે.

$P = 27 - \frac{x^2}{100}$

$x = 30$ મૂકતાં,

$P = 27 - \frac{(30)^2}{100}$

$= 27 - \frac{900}{100}$

$= 27 - 9$

કિંમત P = 18 આગળ વિધેય મહત્તમ થશે.

મહત્તમ આવક = $R = 27x - \frac{x^3}{100}$

$x = 30$ મુકતા

$$R = 27(30) - \frac{(30)^3}{100}$$

$$= 810 - \frac{27000}{100} = 540$$

ઉદાહરણ - 3 : એક ઈજારદારનું માંગનું વિધેય $P = 35 - x$ અને ખર્ચનું વિધેય $C = 5x$ હોય તો મહત્તમ નફો શોધો.

જવાબ : $P = 35 - x$

$\therefore$ $R = xP$

$= x\ (35 - x)$

$R = 35x - x^2$

$C = 5x$

$\therefore$ $\pi = R - C$

$= 35x - x^2 - 5x$

$\pi = 30x - x^2$

મહત્તમ નફો મેળવવા માટેની શરતો પૈકી

પ્રથમ શરત $\frac{d\pi}{dx} = 0$

$$\frac{d\pi}{dx} = 30 - 2x = 0$$

$$30 = 2x$$

$$x = \frac{30}{2} = 15$$

બીજી શરત $\frac{d^2\pi}{dx^2} < 0$

$\therefore$ $\frac{d^2\pi}{dx^2} = -2$ ($\frac{d\pi}{dx}$નું ફરીથી વિકલન કરતાં)

જે ઋણ કિંમત મળે છે તેથી બીજી શરતનું સમાધાન થાય છે.

$\therefore$ કહી શકાય કે $x = 15$ આગળ નફો મહત્તમ થશે.

$\therefore$ મહત્તમ નફો $\pi = 30x - x^2$

$x = 15$ મુજબ

$\pi = 30(15) - (15)^2$

$= 450 - 225$

$\pi = 225$

14.7.14 (સ્વાધ્યાય) જાતે કરો.

1. કોઈ એક વસ્તુ માટેનું કુલ ખર્ચ વિધેય $C = 5 + \frac{3x}{2} + \frac{24}{x}$ હોય તો ન્યૂનતમ ખર્ચ માટેનું ઉત્પાદન અને ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધો.

(જવાબ : $x = 4$, ન્યૂનતમ ખર્ચ $= 17$)

2. જો માંગનું વિધેય $P = \frac{7500 - x^2}{100}$ હોય તો કઈ કિંમતે આવક મહત્તમ થશે ? ઉપરાંત મહત્તમ આવક પણ શોધો.

(જવાબ : $P = 50$, R મહત્તમ $= 2500$)

3. એક ઈજારેદાર માટે માંગનું વિધેય $P = 40 - x$ અને કુલ ખર્ચનું વિધેય $C = 10 + 5x + \frac{x^2}{4}$ હોય તો (1) મહત્તમ નફો મેળવવા ઈજારેદાર કેટલા એકમોનું ઉત્પાદન કરશે ? (2) મહત્તમ નફા માટેની કિંમત શોધો. (3) મહત્તમ નફો શોધો.

(જવાબ : (1) $x = 14$, (2) $P = 26$ (3) 235)

14.7.15 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો (જવાબ સહિત)

1. જો $y = 3x^3 - 2x^2 + 2x + 9$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ = ……… અને $\frac{d^2y}{dx^2}$ = …….

(a) $3x^2 - 4x + 2,\ 6x - 4$ (b) $9x - 4x^2 + 2,\ 9 - 4x$

(c) $9x^2 - 4x + 2,\ 18x - 4$ (d) $9x^2 - 4x + 2x + 9,\ 18x - 4$

2. જો $f(x) = \log x$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ = ……….

(a) $\frac{1}{x}$ (b) $-\frac{1}{x^2}$

(c) x^2 (d) એક પણ નહીં.

3. વિધેયની અધિકતમ અને ન્યૂનતમ કિંમતોને ………. કહે છે.

(a) સ્થિર કિંમતો (b) અસ્થિર કિંમતો

(c) આપેલા બંન્ને (d) એક પણ નહીં.

4. વિધેય $x = a$ આગળ મહત્તમ બનાવવા માટેની શરતો કઈ છે ?

(a) $f'(a) = f''(a),\ f''(a) > 0$ (b) $f'(a) = 0,\ f''(a) < 0$

(c) $f'(a) = 0,\ f''(a) > 0$ (d) $f'(a) = f''(a),\ f'(a) < 0$

5. વિધેય x = a આગળ લઘુત્તમ બનાવવા માટેની શરતો કઈ છે ?

(a) $f'(a) = 0,\ f''(a) > 0$ (b) $f'(a) = 0,\ f''(a) < 0$

(c) $f'(a) = 0,\ f''(a) > 0$ (d) $f'(a) = f''(a),\ f''(a) < 0$

6. સીમાંત ખર્ચનું વિધેય = ...

(a) $\frac{dR}{dx}$ (b) $\frac{dC}{dx}$

(c) $\frac{d\pi}{dx}$ (d) એક પણ નહીં.

7. સીમાંત આવકનું વિધેય = ...

(a) $\frac{dR}{dx}$ (b) $\frac{dC}{dx}$

(c) $\frac{d\pi}{dx}$ (d) એક પણ નહીં.

8. નફાનું વિધેય = ...

(a) $R - x$ (b) $x \cdot P$

(c) $R - C$ (d) એક પણ નહીં.

9. કુલ આમદાની = ... × ....

(a) x, P (b) x, C

(c) P, R (d) એક પણ નહીં.

10. માંગનું વિધેય $P = 30 - 3x$ હોય તો R = ...

(a) $30 - 3x$ (b) $30x - 3x^2$

(c) $30 - 6x$ (d) એક પણ નહીં.

11. માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $\eta > 1$ હોય તો તેને .... માંગ કહે છે.

(a) મૂલ્ય સાપેક્ષ (b) મૂલ્ય અનપેક્ષ

(c) મૂલ્ય એકમ (d) એક પણ નહીં.

12. માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $\eta < 1$ હોય તો તેને .... માંગ કહે છે.

(a) મૂલ્ય સાપેક્ષ (b) મૂલ્ય અનપેક્ષ

(c) મૂલ્ય એકમ (d) એક પણ નહીં.

13. માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $\eta = 1$ હોય તો તેને .... માંગ કહે છે.

(a) મૂલ્ય સાપેક્ષ (b) મૂલ્ય અનપેક્ષ

(c) મૂલ્ય એકમ (d) એક પણ નહીં.

14. માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $\eta = 0$ હોય તો તેને .... માંગ કહે છે.

(a) મૂલ્ય અનપેક્ષ (b) સંપૂર્ણ મૂલ્ય અનપેક્ષ

(c) મૂલ્ય સાપેક્ષ (d) એક પણ નહીં.

15. માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $\eta = \infty$ હોય તો તેને .... માંગ કહે છે.

(a) અનંત મૂલ્ય સાપેક્ષ (b) મૂલ્ય સાપેક્ષ

(c) એકમ સાપેક્ષ (d) એક પણ નહીં.

16. માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા = ...

(a) $\left(\frac{P_1 + P_0}{P_1 - P_0} \times \frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0}\right)$ (b) $\left[-\frac{P_1 + P_0}{P_1 - P_0} \times \frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0}\right]$

(c) $\left(\frac{P_1 - P_0}{P_1 + P_0} \times \frac{x_1 + x_0}{x_1 - x_0}\right)$ (d) $\left\{-\frac{P_1 - P_0}{P_1 + P_0} \times \frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0}\right\}$

17. પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા = ...

(a) $\left(\frac{P_1 + P_0}{P_1 - P_0} \times \frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0}\right)$ (b) $-\left(\frac{P_1 + P_0}{P_1 - P_0} \times \frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0}\right)$

(c) $\left(\frac{P_1 - P_0}{P_1 + P_0} \times \frac{x_1 + x_0}{x_1 - x_0}\right)$ (d) $-\left(\frac{P_1 - P_0}{P_1 + P_0} \times \frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0}\right)$

18. માંગની મૂલ્યસાપેક્ષતા, સીમાંત આમદાની અને સરેરાશ આમદાની વચ્ચેનો સંબંધ = ...

(a) $\eta = \frac{MR}{MR - AR}$ (b) $\eta = \frac{MR - AR}{MR}$

(c) $\eta = \frac{AR}{AR - MR}$ (d) એક પણ નહીં.

19. પુરવઠાની મુલ્ય સાપેક્ષતા $\in > 1$ હોય તો તેને .... પુરવઠો કહેવાય.

(a) મૂલ્ય સાપેક્ષ (b) મૂલ્ય અનપેક્ષ

(c) મૂલ્ય એકમ (d) એક પણ નહીં.

20. પુરવઠાની મુલ્ય સાપેક્ષતા $\in < 1$ હોય તો તેને .... પુરવઠો કહેવાય.

(a) મૂલ્ય સાપેક્ષ (b) મૂલ્ય અનપેક્ષ

(c) મૂલ્ય એકમ (d) એક પણ નહીં.

21. પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $\in < 1$ હોય તો તેને .... પુરવઠો કહેવાય.

(a) મૂલ્ય સાપેક્ષ (b) મૂલ્ય અનપેક્ષ

(c) મૂલ્ય એકમ (d) એક પણ નહીં.

22. પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $\in = 0$ હોય તો તેને .... પુરવઠો કહેવાય.

(a) મૂલ્ય સાપેક્ષ (b) મૂલ્ય અનપેક્ષ

(c) મૂલ્ય એકમ (d) એક પણ નહીં.

23. પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $\in = \infty$ હોય તો તેને .... પુરવઠો કહેવાય.

(a) મૂલ્ય સાપેક્ષ (b) મૂલ્ય અનપેક્ષ

(c) મૂલ્ય એકમ (d) એક પણ નહીં.

24. માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $\eta = 0.47$ નું અર્થઘટન કરો.

(a) મૂલ્ય સાપેક્ષ માંગ (b) મૂલ્ય અનપેક્ષ માંગ

(c) મૂલ્ય એકમ માંગ (d) એક પણ નહીં.

25. પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $\in = 1.25$ નું અર્થઘટન કરો.

(a) મૂલ્ય સાપેક્ષ માંગ (b) મૂલ્ય અનપેક્ષ માંગ

(c) મૂલ્ય એકમ માંગ (d) એક પણ નહીં.

14.7.16 ચાવીરૂપ શબ્દો.

વિકલન : સ્વતંત્રચલને કારણે આધારિત ચલમાં કેટલો ફેરફાર થાય છે. તેનું માપન.

વિધેય : વિધેયને સૂત્ર સ્વરૂપે, આલેખ સ્વરૂપે કે વેન આકૃતિ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય છે. (દા.ત. $y = f(x)$ એ વિધેય છે.)

માંગ : ઈચ્છા, શક્તિ અને તૈયારી એટલે માંગ

પુરવઠો : વસ્તુનો જથ્થો

આમદાની : વ્યક્તિની આવક

માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા : માંગમાં થતા ટકાવારી ફેરફાર અને કિંમતમાં થતા ટકાવારી ફેરફારનો ગુણોત્તર

પુરવઠાની મૂલ્ય સાપેક્ષતા : પુરવઠામાં થતા ટકાવારી ફેરફાર અને કિંમતમાં થતા ટકાવારી ફેરફારનો ગુણોત્તર

ઈજારેદાર : બજારમાં એક વેચનાર હોય તેને ઈજારેદાર કહેવાય.

ઈજારો : બજારમાં એક વેચનાર હોય છે તેથી તે બજાર ઉપર કાબુ રાખે છે. તેને ઈજારો કહેવાય.

અધિકતમ કિંમત : અધિકતમ કિંમત એટલે મહત્ત્મ કિંમત નહીં પરંતુ $x = a$ (કોઈ ચોક્કસ કિંમત)ની આજુબાજુના અલ્પગાળામાં $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત મહત્તમ હોય.

ન્યૂનતમ કિંમત : ન્યૂનતમ કિંમત એટલે લઘુત્તમ કિંમત નહી પરંતુ $x = a$ ની આજુબાજુની અલ્પગાળામાં $x = a$ આગળ વિધેય ન્યૂનતમ હોય.

સ્થિર કિંમતો : મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતોને સ્થિર કિંમતો કહેવાય.

સીમાંત આવક કે ખર્ચ : વધારાની આવક કે ખર્ચ.

- **સંદર્ભ ગ્રંથ :**

(1) Business Mathematics' V.K. Kapoor, S.Chand & Sons, New Delhi.

(2) 'Mathematical Statistics' Mukhopadhyay, Kolkata.

❖ ❖ ❖

યુનિવર્સિટી ગીત

સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ
સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ
સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ

શિક્ષણ, સંસ્કૃતિ, સદ્ભાવ, દિવ્યબોધનું ધામ
ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી નામ;
સૌને સૌની પાંખ મળે, ને સૌને સૌનું આભ,
દશે દિશામાં સ્મિત વહે હો દશે દિશે શુભ-લાભ.

અભણ રહી અજ્ઞાનના શાને, અંધકારને પીવો ?
કહે બુદ્ધ આંબેડકર કહે, તું થા તારો દીવો;
શારદીય અજવાળા પહોંચ્યાં ગુર્જર ગામે ગામ
ધ્રુવ તારકની જેમ ઝળહળે એકલવ્યની શાન.

સરસ્વતીના મયૂર તમારે ફળિયે આવી ગહેકે
અંધકારને હડસેલીને ઉજાસના ફૂલ મહેંકે;
બંધન નહીં કો સ્થાન સમયના જવું ન ઘરથી દૂર
ઘર આવી મા હરે શારદા દૈન્ય તિમિરના પૂર.

સંસ્કારોની સુગંધ મહેંકે, મન મંદિરને ધામે
સુખની ટપાલ પહોંચે સૌને પોતાને સરનામે;
સમાજ કેરે દરિયે હાંકી શિક્ષણ કેરું વહાણ,
આવો કરીયે આપણ સૌ
ભવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ...
દિવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ...
ભવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ

DR. BABASAHEB AMBEDKAR OPEN UNIVERSITY
(Established by Government of Gujarat)
'Jyotirmay' Parisar, Opp. ShriBalaji Temple
Sarkhej-Gandhinagar Highway, Chharodi, Ahmedabad-382 481
Website : www.baou.edu.in

978-93-5598-983-3