BAOU
Education for All

NAAC ACCREDITED A++ GRADE 3.55/4

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી

(ગુજરાત સરકાર દ્વારા સ્થાપિત)

અર્થશાસ્ત્ર
ECOM-309
ECONMJ502
આંકડાશાસ્ત્ર

સ્વાધ્યાયનું અજવાળું

ભારતના સંવિધાનના સર્જક ભારત રત્ન ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકરની પાવન સ્મૃતિમાં ગરવા ગુજરાતમાં ગુજરાત સરકારશ્રીએ ઇ.સ. 1994 માં યુનિવર્સિટી ગ્રાન્ટ્સ કમિશન અને ડિસ્ટન્સ એજ્યુકેશન કાઉન્સિલની માન્યતા મેળવી અમદાવાદમાં ગુજરાતના એક માત્ર મુક્ત વિશ્વ વિદ્યાલય ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટીની સ્થાપના કરી છે.

ડૉ. બાબા સાહેબ આંબેડકરની 125 મી જન્મજયંતીના અવસરે જ ગુજરાત સરકાર દ્વારા યુનિવર્સિટી માટે અદ્યતન સગવડ સાથે, શાંત જગ્યા મેળવી, જ્યોતિર્મય પરિસરનું નિર્માણ કરી આપ્યું. BAOU ના સત્તા મંડળે પણ યુનિવર્સિટીના ઉજ્જવળ ભવિષ્ય માટે ખૂબ સહયોગ આપ્યો છે.

શિક્ષણ એટલે માનવમાં થતું મૂડી રોકાણ. શિક્ષણ લોકસમાજની ગુણવત્તા સુધારવામાં અધિક ફાળો આપી શકે છે. અહીં મને સ્વામી વિવેકાનંદનું શિક્ષણ વિષયક દર્શન યાદ આવે છે : 'જેનાથી ચારિત્ર્યઘડતર થાય, માનસિક ક્ષમતાનું નિર્માણ થાય, જેનાથી બૌદ્ધિક વિકાસ સાધી શકાય અને જેના થકી વ્યક્તિ પગરભર બની શકે તેને શિક્ષણ કહેવાય.'

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી શિક્ષણમાં આવા ઉમદા વિચારને વરેલી છે. તેથી વિદ્યાર્થીઓને ગુણવત્તાયુક્ત, વ્યવસાયલક્ષી, જીવનલક્ષી શિક્ષણની સગવડ ઘરે બેઠા મળી રહે એવા પ્રયત્નો મક્કમતા પૂર્વક કરે છે. સમાજના વિશાળ વર્ગને ઉચ્ચ શિક્ષણ પ્રાપ્ત થાય, છેવાડાના માણસોને ઉત્તમ કેળવણી એમનાં રોજિંદાં કામો કરતાં પ્રાપ્ત થતી રહે. વ્યાવસાયિક લોકોને આગળ ભણતરની ઉત્તમ તક સાંપડે અને જીવનમાં પોતાની ક્ષમતાઓ, કૌશલ્યોને પ્રગટ કરી સારી કારકિર્દી ઘડે, સ્વાવલંબી બની ઉત્તમ જીવન જીવતાં સમાજ અને રાષ્ટ્ર નિર્માણમાં પોતાનું પ્રદાન આપે એ માટે પ્રયાસરત છે.

'સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ' સૂત્રને ઓપન યુનિવર્સિટીએ કેન્દ્રમાં રાખીને પ્રવેશ મેળવતાં છાત્રોને સ્વઅધ્યયન માટે સરળતાથી સમજાય એવો ગુણવત્તાલક્ષી શૈક્ષણિક અભ્યાસક્રમ ઉપલબ્ધ કરાવી આપે છે. દરેક વિષયની પાયાની સમજણ મળે તેની કાળજી રાખવામાં આવે છે. વિદ્યાર્થીઓને રસ પડે અને રુચિ કેળવાય તેવાં પાઠ્ય પુસ્તકો નિષ્ણાત અધ્યાપકો દ્વારા તૈયાર કરવામાં આવે છે. દૂરવર્તી શિક્ષણ પ્રાપ્ત કરવા ખેવના રાખતા કોઈ પણ ઉંમરના છાત્રોને માટે અભ્યાસ સામગ્રી તૈયાર કરવા માટે શિક્ષણવિદો સાથે પરામર્શન કરવામાં આવે છે. એ પછી જ માળખુ રચી, અભ્યાસ સામગ્રી તૈયાર કરી પુસ્તક સ્વરૂપે છાત્રોનાં કર કમળોમાં આપે છે. જેનો ઉપયોગ કરીને વિદ્યાર્થી સંતોષપ્રદ અનુભવ કરી શકે છે.

યુનિવર્સિટીના તજ્જ્ઞ અધ્યાપકો ખૂબ કાળજીથી આ અભ્યાસક્રમોનું લેખન કરે છે, વિષય નિષ્ણાત પ્રોફેસરો દ્વારા એમનું પરામર્શન થાય પછી જ પરિણામલક્ષી અભ્યાસ સામગ્રી યુનિવર્સિટીના વિદ્યાર્થીઓને પહોંચે છે. ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી જ્ઞાનનું કેન્દ્રબિંદુ રહી છે. વિદ્યાર્થીઓને 'સ્વાધ્યાય ટેલિવિઝન', 'સ્વાધ્યાય રેડિયો' જેવા દૂરવર્તી ઉપાદાનો થકી પણ એમના ઘર સુધી શિક્ષણ પહોંચાડવાનો પુરુષાર્થ થઈ રહ્યો છે. ઉમદા હેતુ, શ્રેષ્ઠ ધ્યેયને આંબવા પરિશ્રમરત યુનિવર્સિટીના જ્ઞાનની પરબમાં અધ્યાપકો તેમજ કર્મઠ કર્મચારીગણને અભિનંદન આપવા સાથે અમારી યુનિવર્સિટીના વિદ્યાર્થીઓ સફળ થવા ખૂબ મહેનત કરી, જીવન સફળ કરવાની સાથે જીવન સાર્થક કરે એવી પરમેશ્વરને પ્રાર્થના કરું છું.

અસ્તુ !

પ્રો. (ડૉ.) અમી ઉપાધ્યાય

કુલપતિ

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, જ્યોતિર્મય પરિસર,

સરખેજ-ગાંધીનગર હાઈવે, છારોડી અમદાવાદ

નિદર્શન :

પ્રોફેસર ડૉ. અમી ઉપાધ્યાય, નિયામક, સ્કૂલ ઓફ હ્યુમેનિટીઝ એન્ડ સોસિયલ સાયન્સીસ, કુલપતિ,
ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ

સંપાદન :

ડૉ. કૃતિ છાયા, આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, અર્થશાસ્ત્ર, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ

વિષય સમિતિ :

ડૉ. કૃતિ છાયા, આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, અર્થશાસ્ત્ર, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ

ડૉ. ગૌરાંગ રામી, પ્રોફેસર, અર્થશાસ્ત્ર, વીર નર્મદ દક્ષિણ ગુજરાત યુનિવર્સિટી, સુરત

ડૉ. ગીતા પંડ્યા, આચાર્ય, સરકારી વિનયન કોલેજ, શ્રી કે. કે. શાસ્ત્રી શૈક્ષણિક સંકુલ, મણિનગર, અમદાવાદ

વિષય સલાહકાર સમિતિ :

ડૉ. ઓમ એમ. તેરૈયા, એસોસિએટ પ્રોફેસર, આત્મીય યુનિવર્સિટી, રાજકોટ

શ્રી ડી. એમ. ભારદીયા, એસોસિએટ પ્રોફેસર, આર. સી. કોમર્સ કોલેજ, અમદાવાદ

શ્રી બી. વી. વ્યાસ, એસોસિએટ પ્રોફેસર (નિવૃત્ત) તોલાણી કોમર્સ કોલેજ, આદિપુર

વિષય પરામર્શન :

ડૉ. મહેન્દ્ર મૈસુરિયા, એસોસિએટ પ્રોફેસર, સિટી સી. યુ. શાહ કોલેજ, લાલ દરવાજા, અમદાવાદ.

લેખન :

ડૉ. મહેન્દ્ર મૈસુરિયા, એસોસિએટ પ્રોફેસર, સિટી સી. યુ. શાહ કોલેજ, લાલ દરવાજા, અમદાવાદ

શ્રી હિમાંશુ રાચ્છ, એસોસિએટ પ્રોફેસર, શ્રી સ્વામીનારાયણ આર્ટસ કોલેજ, અમદાવાદ

ડૉ. દિનેશ પટેલ, એસોસિએટ પ્રોફેસર, એચ. કે. કોમર્સ કોલેજ, અમદાવાદ

ભાષા પરામર્શન :

ડૉ.લીનાબેન સ્વાદિયા, પી. કે. ચૌધરી મહિલા આર્ટસ કોલેજ, ગાંધીનગર

પ્રકાશન વર્ષ : 2023

ISBN : **978-9355-98-709-9**

9 789355 987099

પ્રકાશક : ડૉ. ભાવિન ત્રિવેદી, કુલસચિવ, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ

સર્વાધિકાર સુરક્ષિત

આ પાઠ્યપુસ્તક ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટીના ઉપક્રમે વિદ્યાર્થીલક્ષી સ્વઅધ્યયન હેતુથી દૂરવર્તી શિક્ષણના ઉદ્દેશને કેન્દ્રમાં રાખીને તૈયાર કરવામાં આવેલ છે. જેના સર્વાધિકાર સુરક્ષિત છે. આ અભ્યાસસામગ્રીનો કોઈપણ સ્વરૂપમાં ઉપયોગ કરતાં પહેલાં ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટીની લેખિત પરવાનગી લેવાની રહેશે.

આંકડાશાસ્ત્ર

અનુક્રમ	એકમ શીર્ષક અને સમાવિષ્ટ મુદ્દાઓ
1	**ક્રમચય, સંચય** અર્થ, વ્યાખ્યા, દ્વિપદી પ્રમેય (દ્વિપદી વિસ્તરણ, પાસ્કલ ત્રિકોણ), અનુરૂપ દાખલાઓ અને ઉદાહરણો
2	**સંભાવના (ખ્યાલો, વ્યાખ્યા)** અર્થ, ખ્યાલો, સંભાવનાની ગાણિતિક, અંકશાસ્ત્રીય અને આધુનિક વ્યાખ્યા, સંભાવનાનો સિદ્ધાંત, સરવાળા અને ગુણાકારના પ્રમેય, ઘટનાઓ, શરતી સંભાવના (બેઈઝનો પ્રમેય સાબિતી વગર)
3	**યદચ્છ ચલ, ગાણીતીય અપેક્ષા (ગુણધર્મો)** વ્યાખ્યા અને તેને સંબંધિત દાખલાઓ.
4	**સંભાવના વિતરણો** અસતત સંભાવના વિતરણ, દ્વિપદી વિતરણ, દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના વિધેય અને તેને અનુરૂપ દાખલાઓ, મધ્યક, વિચરણ અને તેના ગુણધર્મો
5	**પોયસન વિતરણ** - તેનું સંભાવના વિધેય, મધ્યક, વિચરણ, ગુણધર્મો અને તેને સંબંધિત દાખલાઓ
6	**સતત સંભાવના વિતરણ** (Normal Distribution), પ્રમાણ્ય વિતરણ, ગુણધર્મો, સાદા દાખલાઓ
7	**સમયશ્રેણીનું પૃથક્કરણ - 1** - અર્થ, અભ્યાસની જરૂરિયાત, સમયશ્રેણીનુ પૃથ્થકરણ, સામાયિક શ્રેણીના ઘટકો, વલણ નક્કી કરવાની આલેખની રીત (ફાયદા, મર્યાદા અને ઉદાહરણો)
8	**સમયશ્રેણીનું પૃથક્કરણ - 2** - વલણ નક્કી કરવાની ચલિત સરેરાશની રીત (૩ અને 4 વર્ષની ચલિત સરેરાશ સુધી), ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત - મોસમી વધઘટ શોધવાની રીત
9	**સૂચક આંક - 1** - અર્થ, વ્યાખ્યા, લક્ષણો, ઉપયોગિતા (મહત્વ), આધાર વર્ષની પસંદગી (અચલ આધાર અને પરંપરિત આધાર) સાદા દાખલાઓ, ફાયદા, મર્યાદા, ઉપયોગો, કુલ ખર્ચની રીત, કૌટુંબિક બજેટની રીત
10	**સૂચક આંક - 2** - લાસ્પેયર, પાશે, ફિશર, માર્શલ એજવર્થ, ડોરબીશ - બાઉલિ, જીવનનિર્વાહનો સૂચક આંક (ઉપયોગો, મર્યાદાઓ, ઉદાહરણો)
11	**સહસંબંધ -** - અર્થ, પ્રકારો, સહસંબંધાંક, અભ્યાસની રીતો - વિકીર્ણ આકૃતિની રીત, કાર્લ પિયર્સનની રીત, ક્રમાંક સહસંબંધ - સહસંબંધનું અર્થઘટન
12	**નિયતસંબંધ** - અર્થ, ગુણધર્મો, અભ્યાસની ઉપયોગિતા, સુરેખ નિયતસંબંધનાં સમીકરણો, નિયત સંબંધાંકોની ગણતરી, સહસંબંધ અને નિયત સંબંધ વચ્ચેનો સંબંધ, તેને અનુરૂપ દાખલાઓ

13	**વસ્તી વિષયક અભ્યાસની રીતો** - અર્થ,ઉપયોગિતા, વસ્તી વિષયક આંકડા / માહિતી મેળવવાની રીતો (નોંધણીની રીત, વસ્તી ગણતરીની રીત, વિશ્લેષણની રીત), વસ્તી વિષયક આંકડાની મર્યાદા, જુદાજુદા વસ્તી વિષયક દર (જન્મ દર, મૃત્યુદર, પ્રજનન દર- GFR, TFR, SFR; વસ્તીવૃદ્ધિ દર - અર્થ, શોધવાની રીત), સાદો અને પ્રમાણિત મૃત્યુ દર, બાળ મૃત્યુદર, બે શહેરો વચ્ચે તુલના-ઉદાહરણો, દાખલાઓ
14	**કાર્યાત્મક સંશોધન** વાહનવ્યવહારની સમસ્યા- અર્થ, મહત્વ, ઉકેલ મેળવવાની રીત, વાયવ્ય ખૂણાની રીત, ન્યૂનતમ શ્રેણિક/ લઘુત્તમ ખર્ચની રીત, વોગેલની અંદાજીત રીત
15	**ફેરબદલીની સમસ્યા** - ફેરબદલીની સમસ્યા અથવા પુન:સ્થાપનનો પ્રશ્ન (અર્થ અને તેનાં સાદા ઉદાહરણો / દાખલાઓ)
16	**નિયુક્તિની સમસ્યા** - નિયુક્તિ સમસ્યા (અર્થ, ગાણિતિક સ્વરૂપ અને તેના ઉકેલની હંગેરિયન પદ્ધતિ) નોંધ: - ફક્ત ખર્ચ અને સમયના સંદર્ભમાં ઉદાહરણો લેવાં
17	**રમતનો સિદ્ધાંત -** - વ્યાખ્યા, ગુણધર્મો, Saddle Point, શૂન્ય યોગ રમત, સરસાઈનો સિદ્ધાંત (અર્થ, ઉપયોગ અને સાદા દાખલાઓ)

statistics

Srl no.	Unit and included Points
1	**Permutations, Combination** - Meaning, definition - Binomial Theorems (binomial expansion,pascal's triangle) - Related examples and illustrations
2	**Probabilities (meaning, concept, definition)** - Mathematical, statistical and Modern Definition of Probability - Theorey of probabilities - Additions and Multiplication Rules of Probability - Events - Conditional Probability (Bays' Theorem Without proof)
3	**Mathematical Expectation , Random variable** - Definition and related Examples
4	**Probability distributions** - Discrete Probability distributions - Binomial distribution, mass probability function of binomial distribution (Without proof) and Related illustrations - Mean, variance and its Properties
5	- **Poison Distribution** (Without Proof), Its mass probability function and Related illustrations - Mean, variance and its Properties
6	Normal Distribution, its Properties and Related illustrations
7	**Analysis of Time series -1** - Meaning and uses of Time series - Analysis of Time series, Component of time series - Methods of finding trends (Merits – Demerits and Related illustrations)
8	**Analysis of Time series -2** - Method of Moving Average for obtaining Trend - Least Square method - Method of obtaining Seasonal variations - Method of obtaining Seasonal indices
9	**Index Numbers -1** - Meaning, definition, characteristics and Uses of index numbers - Selection of Base year (Fixed base and chain base Method) It's simple examples, merits, demerits and Uses, - Aggregate Expenditure Method, Family Budget Method)
10	**Index Numbers - 2** - Methods of Calculating index numbers : - Laspeyre's, paache's, Fishers's, Dorbish and Bowely's and Marshall – Edgeworth's etc. - Cost of Living Index Number, It's Uses and Illustrations

11	- **Correlation :** It's Meaning and Types - Methods of studying correlation : - Scatter diagram method, karl Pearson's product moment method, spearman's method of Rank correlation - Coefficient of correlation - Interpretation of correlation coefficient
12	**Regression :** its meaning and Utility of study, Linear regression model, Equations of lines of regression, Calculations and properties of regression coefficients, relation between correlation and regression and example base on both regression lines.
13	**Demographic methods :** - Meaning and usages of Demographic methods - Methods of collecting demographic statistics (Registration Method, Census Method, Analytical Method) - Defect of demographic statistics - Different types of demographic Rates (like Crude Birth rate, Death rates, Fertility rates) including Meaning and Method of calculation and related examples (Death rates : Crude death rate and Standardized death rate, Infant mortality rate, Fertility rates : GFR, TFR, SFR)
14	**Operation Research :** Meaning and importance of Transportation - Methods of obtaining initial Solution: o North-West corner Methodo o Matrix minima Method(Least cost Method) o Vogel's Approximation method (V. A. M.)
15	**Replacement Problem** - Meaning and simple examples add Illustrations of Replacement Problem.
16	**Assignment problem** Meaning of Assignment problem, General Assignment problem and Method of solving Assignment problem (Hangarian Method), Note : examples of cost and time only.
17	**Game Theory :** Meaning of Game Theory, It's Rules(Properties), saddle point, zero – sum game - Principle of Dominance, Uses and simple examples

અનુક્રમણિકા

ક્રમ	વિગત	પૃષ્ઠ નં.
એકમ - 1	ક્રમચય, સંચય અને દ્વિપદી વિસ્તરણ (પ્રમેય)	1 – 36
એકમ - 2	સંભાવના	37 – 68
એકમ - 3	ગાણિતીય અપેક્ષા	69 – 90
એકમ - 4	સંભાવના વિતરણો	91 – 104
એકમ - 5	પોયસન વિતરણ	105 – 115
એકમ - 6	પ્રમાણ્ય વિતરણ (સતત સંભાવના વિતરણ)	116 – 135
એકમ - 7	સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ - 1	136 – 144
એકમ - 8	સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ - 2	145 – 180
એકમ - 9	સૂચક આંક - 1	181 – 202
એકમ - 10	સૂચક આંક - 2	203 – 242
એકમ - 11	સહસંબંધક	243 – 293
એકમ - 12	નિયત સંબંધ	294 – 332
એકમ - 13	વસ્તી વિસયક અભ્યાસની રીતો	333 – 359
એકમ - 14	કાર્યાત્મક સંશોધન	360 – 384
એકમ - 15	ફેરબદલીની સમસ્યા	385 – 397
એકમ - 16	નિયુક્તિની સમસ્યા	398 – 418
એકમ - 17	રમતનો સિદ્ધાંત	419 – 460

એકમ 1	ક્રમચય, સંચય અને દ્વિપદી વિસ્તરણ (પ્રમેય)

એકમ 1

ક્રમચય, સંચય અને દ્વિપદી વિસ્તરણ (પ્રમેય)

Permutation and Combination and Binomial Expanssion (Theorem)

1.0 ઉદ્દેશ

1.1 પ્રાસ્તાવિક

1.2 ક્રમચય

1.2.1 ક્રમચયનો અર્થ

1.2.2 ક્રમચયની વ્યાખ્યા અને સૂત્ર

1.2.3 ઉદાહરણો

1.3 સમસ્વરૂપ વસ્તુઓના ક્રમચયનો અર્થ અને ઉદાહરણો

1.4 પુનરાવર્તિત ક્રમચયનો અર્થ અને ઉદાહરણો

1.5 સ્વાધ્યાય

1.5.1 પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

1.5.2 MCQ's જવાબ સહિત

1.6 સંચય

1.6.1 સંચયનો અર્થ

1.6.2 સંચયની વ્યાખ્યા અને સૂત્ર

1.6.3 ઉદાહરણો

1.7 સ્વાધ્યાય અને MCQ's જવાબ સહિત

1.8 દ્વિપદી વિસ્તરણ

1.8.1 દ્વિપદી પદાવલી

1.8.2 દ્વિપદી વિસ્તરણ (દ્વિપદી પ્રમેય)

1.8.3 ઉદાહરણો

1.8.4 દ્વિપદી વિસ્તરણનું સામાન્ય પદ

1.8.5 દ્વિપદી વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ

1.8.6 સ્વાધ્યાય

1.9 ચાવીરૂપ શબ્દો

★ સંદર્ભગ્રંથ

1.0 ઉદ્દેશ :

ક્રમચય અને સંચય પ્રકરણનો મુખ્ય ઉદ્દેશ વિદ્યાર્થીઓને ક્રમચય-સંચય અંગેની જાણકારી પૂરી પાડવી અને તે અંગેની વ્યહારિક તેમજ ગાણિતિક સૂઝ પેદા કરવાનો છે.

1.1 પ્રાસ્તાવિક :

સામાન્ય રીત ક્રમચય - સંચય એ બંને શબ્દો વધુ પ્રચલિત નથી તે બંને શબ્દો જુદા-જુદા છે. તેમાં ક્રમચયનો અર્થ ગોઠવણી અને સંચયનો અર્થ પસંદગી કરવામાં આવે છે. તેને અંગ્રેજીમાં Permutations અને Combination તરીકે બોલવામાં આવે છે. સંભાવનાના અભ્યાસમાં ક્રમચય સંચય ખૂબ મહત્ત્વનો ભાગ ભજવે છે.

1.2 ક્રમચય :

1.2.1 ક્રમચયનો અર્થ :

ઉપર જોયા મુજબ "ક્રમચય એટલે ગોઠવણી". ક્રમચયની સમજૂતી નીચેના ઉદાહરણ ઉપરથી સમજીશું.

ધારો કે, બાબા સાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીમાં ત્રણ પ્રોફેસરો છે તે પૈકી એક પ્રોફેસરને કુલપતિ અને બીજા એક પ્રોફેસરને ઉપ-કુલપતિ તરીકે નીમવા હોય તો આ ગોઠવણી કેટલી રીતે થઈ શકે ? ધારો કે ત્રણ પ્રોફેસરોને A, B અને C વડે દર્શાવીએ તો તેઓની ગોઠવણી નીચે પ્રમાણે થઈ શકે.

(1) A ને કુલપતિ અને B ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

(2) A ને કુલપતિ અને C ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

(3) B ને કુલપતિ અને A ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

(4) B ને કુલપતિ અને C ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

(5) C ને કુલપતિ અને A ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

(6) C ને કુલપતિ અને B ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

આમ, 3 પ્રોફેસરોમાંથી 2 પ્રોફેસરોની ગોઠવણી 6 રીતે કરી શકાય. બીજી રીતે જોતાં કુલપતિની પસંદગી A, B અને C પૈકી ગમે તે એક એમ કુલ ત્રણ રીતે કરી શકાય. આ દરેક રીત સાથે ઊપ-કુલપતિની પસંદગી બાકીના બે પ્રોફેસરો પૈકી ગમે તે એક એમ કુલ બે પ્રકારે કરી શકાય. તેથી કુલપતિ અને ઊપ-કુલપતિની નિમણૂંકની કુલ રીતો $= 3 \times 2 = 6$.

તેવી જ રીતે એક વ્યક્તિને ઘરેથી નોકરી ઉપર જવા માટે ચાર જુદા જુદા રસ્તાઓ P_1, P_2, P_3 અને P_4 છે. તે કોઈપણ એક રસ્તે નોકરી ઉપર જશે અને તે સિવાયના બીજા કોઈ પણ રસ્તે પાછો ફરશે. તો તેના ઘરેથી નોકરી ઉપર જઈ પાછા ફરવાની જુદી જુદી કેટલી રીતો થતી હશે ?

અહીં ચાર જુદા જુદા રસ્તાઓ P_1, P_2, P_3 અને P_4 છે. જો તે વ્યક્તિ P_1 રસ્તે ઘરેથી નોકરી ઉપર જશે તો બાકીના ત્રણ રસ્તા P_2, P_3, P_4 રસ્તે પાછો ફરશે. તે P_2 રસ્તે ઘરેથી નોકરી પર જશે તો P_1, P_3, P_4 એમ કુલ ત્રણ

રસ્તે પાછો ફરી શકશે. તેવી જ રીતે જો તે P_3 રસ્તે જશે તો પણ બાકીના ત્રણ રસ્તે પાછો ફરશે અને P_4 રસ્તે જશે તો પણ બાકીના ત્રણ રસ્તે પાછો ફરશે. આમ ઘરેથી નોકરી ઉપર જવાના કુલ ચાર રસ્તા અને પરત ફરવાના કુલ ત્રણ રસ્તા. ફરવાની કુલ ક્રિયાના કુલ પ્રકારો = 4 × 3 = 12.

આમ ઘરેથી નોકરી ઉપર જવાના અને પરત ફરવાની ક્રિયા નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.

P_1P_2	P_2P_1	P_3P_1	P_4P_1
P_1P_3	P_2P_3	P_3P_2	P_4P_2
P_1P_4	P_2P_4	P_3P_4	P_4P_3

આ ગોઠવણીમાં પહેલો અક્ષર ઘરેથી નોકરી જવાનો અને બીજો અક્ષર પરત ફરવાની ક્રિયાનો છે. ઉપરના ઉદાહરણને આધારે નીચે પ્રમાણોનો સિદ્ધાંત તારવી શકાય.

“ધારો કે કોઈ એક ક્રિયા m રીતે થઈ શકે તેમ હોય અને તેમાંથી પ્રત્યેક માટે બીજી ક્રિયા n રીતે થતી હોય તો એક પછી એક એમ બંને ક્રિયાઓ સાથે થવાની કુલ રીતો = $m \times n$ થાય.”

ઉપરના સિદ્ધાંત ઉપરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે ક્રમચય એ ગોઠવણી છે. એટલે કે ક્રમવાર રચના છે. તેને વિન્યાસ તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

1.2.2 ક્રમચયની વ્યાખ્યા અને સૂત્ર :

“ધારો કે n જુદી જુદી વસ્તુઓ આપેલી હોય અને તેમાંથી r વસ્તુઓ ક્રમમાં ગોઠવવાની હોય તો ગોઠવણીની કુલ રીતોને ક્રમચય અથવા રૈખિક ક્રમચય કહે છે.” તેને સંકેતમાં np_r વડે દર્શાવવામાં આવે છે તે નીચેના સૂત્રની મદદથી શોધી શકાય.

$$nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

જ્યાં $n\,!$ = 1 થી n સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (ક્રમ ગુણિત n)

જેને અંગ્રેજીમાં (n factorial) કહેવાય.

$\therefore\ n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \text{.........} \times (n-1) \times n$

$\therefore\ n\,! = n(n-1)\,(n-2)\ \text{.........} \times 2 \times 1.$

$(n - \mathrm{r})\,! = (n - \mathrm{r})\,(n - \mathrm{r} - 1)\ \text{.........} \times 2 \times 1.$

હવે, ધારો કે $n = 5$ અને $r = 2$ હોય, તો

$n\,! = 5\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$(\mathrm{n} - \mathrm{r})! = (5 - 2)! = 3! = 3 \times 2 \times 1$

$\therefore\ 5P_2 = \frac{5\,!}{(5-2)\,!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 20$ થાય.

કેટલાંક પરિણામો

(1) $nP_n = \mathrm{n}\,!$

(2) $0\,! = 1$

(3) $nP_0 = 1$

ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 : કિંમત શોધો.

(1) $8P_6$ (2) $7P_2$ (3) $19P_4$

(4) $5P_5$ (5) $9P_0$

જવાબ :

(1) $8P_6 = nP_r$ $\therefore$ $n = 8$ અને $r = 6$ થાય.

$$nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8!}{2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

$$= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 20,160$$

અથવા (સીધી ગણતરી) બીજી રીત

$8P_6$ શોધવું છે.

એટલે કે

nP_r આપેલું હોય તો n થી શરૂ કરી r વખત ગુણાકાર કરો.

એટલે કે 8 થી શરૂ કરી 6 વખત ગુણાકાર કરો.

$\therefore$ $8P_6 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$

$= 20,160$ (છ વખત ઉલટેથી ગુણાકાર કરો.)

(2) $$7P_2 = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 42$$

અથવા (સીધી ગણતરી) બીજી રીત

$7P_2 = 7 \times 6 = 42$

(3) $$19P_4 = \frac{19!}{(19-4)!} = \frac{19!}{15!} = \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15!}{15!}$$

$= 19 \times 18 \times 17 \times 16 = 93,024$

અથવા (સીધી ગણતરી) બીજી રીત

$19P_4 = 19 \times 18 \times 17 \times 16$ (ચાર વખત)

$= 93,024$

(4) $$5P_5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1!}{1} = 120$$

અથવા (સીધી ગણતરી) બીજી રીત

$5P_5 = 5!$ $\quad\therefore (nP_n = n!)$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 120$

(5) $9P_0 = \dfrac{9!}{(9-0)!} = \dfrac{9!}{9!} = 1$

ઉદાહરણ-2 : નીચે આપેલા સમીકરણોમાંથી n ની કિંમત શોધો.

(1) $nP_2 = 42$

(2) $nP_3 = 120$

જવાબ :

(1) $nP_2 = 42$

$\dfrac{n!}{(n-2)!} = 42$ $\quad\therefore nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

$\therefore \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 42$

$\therefore n(n-1) = 42$

$\therefore n(n-1) = 7 \times 6$

$\therefore 7(7-1) = 7 \times 6$

$\therefore n = 7$

	2	42
6	3	21
7	7	7
	1	1

($\because$ અવયવ પાડતાં)

અથવા બીજી રીત

${}_nP_2 = 42$

$n(n-1) = 42$

$\therefore n^2 - n = 42$

$\therefore n^2 - n = 42 = 0$

$\therefore n^2 - 7n + 6n - 42 = 0$

$\therefore n(n-7) + 6(n-7) = 0$

$\therefore (n-7) = 0$ અથવા $(n+6) = 0$

$\therefore n = 7$ અથવા $n = -6$ (ઋણ અશક્ય)

$\therefore n = 7$

(2) $nP_3 = 120$

$\dfrac{n!}{(n-3)!} = 120$

$$\frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,!}{(n-3)\,!}=120$$

$\therefore\ n(n-1)\ (n-2) = 120$

$\therefore\ n(n-1)\ (n-2) = 6 \times 5 \times 4$

$\therefore\ 6(6-1)\ (6-2) = 6 \times 5 \times 4$

$\therefore\ n = 6$

4	2	120
	2	60
6	2	30
	2	15
5	5	5
	1	1

$\therefore\ 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$2 \times 2 = 4,\ 5, \qquad 2 \times 3 = 6$

$\therefore\ 6 \times 5 \times 4 = 120$

ઉદાહરણ-3 : $56n\,! = 8\,!$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$56 \times n\,! = 8\,!$

$\therefore\ 56 \times n\,! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$$\therefore\ n\,! = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{56}$$

$$\therefore\ n\,! = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{8 \times 7}$$

$\therefore\ n\,! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$\therefore\ n\,! = 6\,!$

$\therefore\ n = 6$

ઉદાહરણ-4 : નીચેના સમીકરણ ઉપરથી n ની કિંમત શોધો.

$\therefore\ (n+1)P_3 = 11\ .\ nP_2$

જવાબ :

$(n+1)P_3 = 11 \times nP_2$

$\therefore\ (n+1) = 11 \times n$

$\therefore\ (n+1) = 11$

$\therefore\ n = 11 - 1$

$\therefore\ n = 10$

ઉદાહરણ-5 : જો $\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}=\frac{n}{11!}$ હોય તો *n* ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}=\frac{n}{11!}$

$\therefore\ \frac{1}{9!}+\frac{1}{10\times 9!}=\frac{n}{11\times 10\times 9!}$ ($\therefore \frac{1}{9!}$ કોમન લેતાં)

$\therefore\ \frac{1}{9!}\left[1+\frac{1}{10}\right]=\frac{1}{9!}\left[\frac{n}{11\times 10}\right]$ ($\therefore \frac{1}{9!}$ દૂરકરી લ.સા.અ. લેતા)

$\therefore\ \frac{10+1}{10}=\frac{n}{11\times 10}$

$\therefore\ \frac{11}{10}\times\frac{11\times 10}{1}=n$

$\therefore\ n = 121$

ઉદાહરણ-6 : 3, 4, 6, 7, 9, 10 એમ કુલ છ આંકડામાંથી કોઈપણ પાંચ જુદા જુદા આંકડા પસંદ કરી પાંચ આંકડાની કુલ કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય ?

જવાબ :

$n = 6$ $\therefore$ કુલ છ આંકડા છે 3, 4, 6, 7, 9, 10

$r = 5$ $\therefore$ પાંચ આંકડાની સંખ્યા બનાવવાની છે.

$\therefore$ ગોઠવણીના પ્રકારો = nP_r

$= 6P_5 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$

ઉદાહરણ-7 : 80432 સંખ્યાના બધા જ અંકોનો ઉપયોગ કરી પાંચ આંકડાની કુલ કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય.

જવાબ :

અહીં પાંચ આંકડાની સંખ્યા બનાવવાની છે. તેથી દરેક સંખ્યાને પ્રથમ સ્થાને મુકીએ તો 8, 4, 3, 2 મુકીને પાંચ અંકની સંખ્યા બનાવી શકાય. પરંતુ 0 ને પ્રથમ સ્થાને મુકવાથી ચાર અંકની સંખ્યા જ મળશે. તેથી 0 સિવાયના ચાર અંકોને પ્રથમ સ્થાને ગોઠવતાં ગોઠવણીના પ્રકાર = 4

પ્રથમ સ્થાનની પસંદગી થયા બાદ બીજા સ્થાને બાકીના ચાર અંકો (શૂન્ય સહિત) ગોઠવતાં ગોઠવણીના પ્રકાર = 4

પ્રથમ અને બીજા સ્થાનની પસંદગી થયા બાદ ત્રીજા સ્થાને બાકીના ત્રણ અંકો ગોઠવતાં ગોઠવણીના પ્રકાર = 3

તેવી જ રીતે,

ચોથા સ્થાને બાકીના બે અંકોની ગોઠવણીના પ્રકાર = 2

પાંચમા સ્થાને બાકીના એક અંકની ગોઠવણીના પ્રકાર = 1

$\therefore$ પાંચ આંકડાની કુલ સંખ્યા = $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$ સંખ્યાઓ બને.

ઉદાહરણ-8 : "POEM" શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી કુલ કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ :

આપેલ શબ્દમાં કુલ ચાર અક્ષરો છે. બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી બનતા કુલ શબ્દોની સંખ્યા

$= {}_4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

અહીં એક શબ્દ POEM આપેલો છે. જે બાદ કરતાં બનાવી શકાતા નવા શબ્દોની સંખ્યા = 24 – 1 = 23

ઉદાહરણ-9 : 'VOLUME' શબ્દનો ઉપયોગ કરી વ્યંજનો એકી સ્થાને જ આવે તે શરતે કુલ કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય.

જવાબ :

અહીં VOLUME શબ્દમાં કુલ 6 અક્ષરો આવેલા છે. તેમાંથી કુલ 3 વ્યંજનો (V, L, M) આવેલા છે.

$\therefore$ વ્યંજનોની ગોઠવણી = $3P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

અને બાકીના ત્રણ શબ્દો બેકી સ્થાને ગોઠવતાં ગોઠવણીના પ્રકારો = $3P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$\therefore$ કુલ શબ્દોની સંખ્યા = $6 \times 6 = 36$

ઉદાહરણ-10 : 'LOGARITHM'ની મદદથી બધા અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને નવ અક્ષરના કુલ કેટલાં નવા શબ્દો બનાવી શકાય ? તેમાંથી L પ્રથમ સ્થાને અને M છેલ્લે સ્થાને આવે તેવા કુલ કેટલાં નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ :

LOGARITHM શબ્દમાં કુલ 9 અક્ષરો છે. તેનો ઉપયોગ કરી 9 અક્ષરના શબ્દોની કુલ ગોઠવણી

$= 9P_9 = 9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$

અહીં એક શબ્દ આપેલો છે તે બાદ કરતાં નવ અક્ષરના કુલ નવા શબ્દો = 362880 – 1 = 362879

L પ્રથમ સ્થાને અને M છેલ્લે સ્થાને રાખવામાં આવે તો પ્રથમ સ્થાન $1P_1 = 1! = 1$ રીતે અને છેલ્લું સ્થાન $1P_1 = 1! = 1$ રીતે અને બાકીના 7 સ્થાન $7P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ રીતે ગોઠવી શકાય.

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકાર = $1 \times 1 \times 5040 = 5040$

એક શબ્દ આપેલો છે તે બાદ કરતાં,

નવા શબ્દોની કુલ સંખ્યા = 5040 – 1 = 5039

ઉદાહરણ-11 : 'ENGLISH' શબ્દનો ઉપયોગ કરી E પ્રથમ સ્થાને આવે તે રીતે કુલ કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ :

'ENGLISH' શબ્દમાં કુલ 7 અક્ષરો આવેલા છે. તેમાંથી E પ્રથમ સ્થાને મુકવામાં આવે તો તેને $1P_1 = 1$ રીતે ગોઠવાય અને બાકીના 6 અક્ષરોને $6P_6 = 6!\ 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ રીતે ગોઠવાય.

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકાર = $1 \times 720 = 720$

એક શબ્દ આપેલો છે જે બાદ કરતાં E પ્રથમ સ્થાને આવે તેવા

કુલ નવા શબ્દોની સંખ્યા = 720 – 1 = 719

ઉદાહરણ-12 : પુસ્તક ગોઠવતી એક અભરાઈ ઉપર સમાજશાસ્ત્રના 5, અર્થશાસ્ત્રના 4 અને મનોવિજ્ઞાનના 2 પુસ્તકો એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી દરેક વિષયના પુસ્તકો એક સાથે આવે, તો ગોઠવણી કુલ કેટલી રીતે કરી શકાય ?

જવાબ :

સમાજશાસ્ત્રના 5 પુસ્તકોને $5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

અર્થશાસ્ત્રના 4 પુસ્તકોને $4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

અને મનોવિજ્ઞાનના 2 પુસ્તકોને $2P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$

ઉપરાંત ત્રણે વિષયોને સાથે $3P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ પ્રકારે ગોઠવી શકાય.

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો (ક્રમચયો) = $120 \times 24 \times 2 \times 6 = 34560$

ઉદાહરણ-13 : એક સ્પર્ધામાં ચાર સ્ત્રીઓ અને ચાર પુરૂષો એક હારમાં એવી રીતે ગોઠવવા છે કે જેથી કોઈપણ બે પુરૂષો કે બે સ્ત્રીઓ એક સાથે ન આવે તો ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો શોધો.

જવાબ :

ધારો કે, સ્ત્રીને પ્રથમ સ્થાને રાખીએ તો ગોઠવણી નીચે મુજબ થશે.

સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી, પુ.

$\therefore$ ચાર સ્ત્રીઓને પ્રથમ, ત્રીજા, પાંચમા અને સાતમા સ્થાને ગોઠવીએ તો ગોઠવણીના ક્રમચયો

$= 4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

અને

ચાર પુરૂષોને બીજા, ચોથા, છઠ્ઠા અને આઠમા સ્થાને ગોઠવીએ તો ગોઠવણીના ક્રમચયો

$= 4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$\therefore$ સ્ત્રી પ્રથમ સ્થાને આવે તેવા ગોઠવણીના પ્રકાર = $24 \times 24 = 576$

હવે તેવી જ રીતે,

પુરૂષને પ્રથમ સ્થાને રાખીએ તો ગોઠવણીની મુજબ થઈ શકે.

પુ., સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી

$\therefore$ ચાર પુરૂષોને $4P_4 = 4! = 24$ અને

ચાર સ્ત્રીઓને $4P_4 = 4! = 24$

$\therefore$ પુરૂષ પ્રથમ સ્થાને આવે તેવા ગોઠવણીના પ્રકાર = $24 \times 24 = 576$

કોઈપણ બે સ્ત્રી કે બે પુરૂષો એક સાથે ન આવે તેવી ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો

$= 576 + 576$

$= 1152$

ઉદાહરણ-14 : એક ગૃપ ફોટા માટે હારબંધ ગોઠવેલી ખુરશીઓમાં 1 કેપ્ટન, 4 બોલર, 4 બેસ્ટમેન અને 2 અમ્પાયર મળી કુલ અગિયાર વ્યક્તિને ગોઠવવાના છે. કેપ્ટનને વચ્ચેની ખુરશી પર બેસાડવાના છે, બોલરોને પ્રત્યેક

છેડાની બબ્બે ખુરશીઓમાં બેસાડવાના છે અને કોઈપણ અમ્પાયરની ખુરશી બોલરની બાજુમાં ન આવે તે રીતે ગોઠવણ કરવી હોય તો તે ગોઠવણી કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ?

જવાબ :

B	B	X			C			X	B	B
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

વચ્ચેની ખુરશીમાં 1 કેપ્ટનને 1! = 1 રીતે ગોઠવી શકાય.

4 બોલારોને બંને છેડા ઉપર $4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ રીતે બેસાડાય.

ખુરશી 3 અને 9માં અમ્પાયર બેસી ન શકે એટલે કે બાકીની 4, 5, 7, 8 નંબરની 4 ખુરશીમાં 2 અમ્પાયર $4P_2 = 4 \times 3 = 12$ રીતે બેસી શકશે અને બાકી રહેલ 4 ખુરશીમાં 4 બેટ્સમેનો $4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ રીતે બેસી શકશે.

$\therefore$ કુલ ક્રમચયો (ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો)

$= 1 \times 24 \times 12 \times 24$

$= 6912$

1.3 સમરૂપ વસ્તુઓના ક્રમચયોનો અર્થ અને ઉદાહરણો :

અર્થ :

ધારો કે, કુલ ક્રમચયો = x છે. આમાંના કોઈ એક ક્રમચયમાં પ્રથમ પ્રકારની p સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ તેમના p સ્થાનોમાં ફેરબદલી કરીને p ! રીતે ગોઠવી શકાય. તે જ પ્રમાણે કોઈ બીજા ક્રમચયમાં બીજા પ્રકારની q સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ તેમના q સ્થાનોમાં ફેરબદલી કરીને q! રીતે ગોઠવી શકાય તો તે વસ્તુઓના કુલ ક્રમચયો = $x\, p!\, q!$ થાય પરંતુ n વસ્તુઓ જો જુદા જુદા સ્વરૂપે હોય તો તેમના કુલ ક્રમચયો = n i થાય.

એટલે કે, $x\, p!\, q! - n!$ થાય.

$$\therefore \text{ કુલ ક્રમચયો } x = \frac{n!}{p!q!}$$

ઉદાહરણ-15 : 'ALLAHABAD' શબ્દના બધા અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને કુલ કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય.

જવાબ :

અહીં કુલ 9 અક્ષરો છે. જેમાંથી 'A' 4 વખત આવે છે અને 'L' 2 વખત આવે છે.

$\therefore n = 9 \quad p = 4, q = 2$

$$\text{કુલ ક્રમચયો (શબ્દો) } x = \frac{n!}{p!q!} = \frac{9!}{4!2!}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 9 \times 8 \times 7 \times 3 \times 5$$

$$x = 7560$$

ઉદાહરણ-16 : 'LITERATURE' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને કુલ કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ :

અહીં કુલ 10 અક્ષરો છે. જેમાંથી 'T' 2 વખત, 'E' 2 વખત અને 'R' 2 વખત છે.

$\therefore n = 10, \quad p = 2, \quad q = 2, \quad r = 2$

કુલ ક્રમચયો (શબ્દો) $x = \dfrac{n!}{p!\, q!\, r!}$ (ઉદા. 15 અને 16ના સૂત્રો ચેક કરીને સમજો)

$$= \frac{10!}{2!\ 2!\ 2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1\ .\ 2 \times 1\ .\ 2 \times 1} = 4{,}53{,}600$$

$\therefore$ કુલ નવા શબ્દો = 4,53,600 – 1 = 4,53,599

ઉદાહરણ-17 : 'BOOK' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય.

જવાબ :

અહીં કુલ ચાર શબ્દો છે. જેમાં 'O' 2 વખત છે.

$\therefore$ કુલ ક્રમચયો $= \dfrac{4}{2!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$

કુલ નવા ક્રમચયો = 12 – 1 = 11

1.4 પુનરાવર્તિત ક્રમચય અને ઉદાહરણો :

અર્થ :

ધારો કે n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓના ક્રમચયો (ગોઠવણી) એવી રીતે કરવાના હોય કે જેથી કોઈપણ વસ્તુ ગમે તેટલી વખત આવી શકે તો કુલ ક્રમચયોની સંખ્યા $= n^r$ થાય. દા.ત. કોઈપણ અંક ગમે તેટલી વખત આવે તે શરતે પાંચ આંકડાઓમાંથી ત્રણ આંકડાની કુલ સંખ્યા (ક્રમચયો) $= 5^3$ થાય.

ઉદાહરણ-18 : કોઈપણ એક વખત પહેરેલી બીજી વખત પહેરી શકાય તે શરતે 4 આંગળીઓમાં બે વીંટીઓ કેટલી વખત પહેરી શકાય ?

જવાબ : $n = 4$ અને $r = 2$

ચાર આંગળીમાં બે વીંટીઓના પુનરાવર્તનયુક્ત ક્રમચયો $= n^r = 4^2 = 16$

ઉદાહરણ-19 : કોઈપણ આંકડો ગમે તેટલી વખત આવે એ શરતે 1, 2, 3, 4, 5, 6 માંથી ત્રણ આંકડાની કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

જવાબ : $n = 6 \quad r = 3$

$\therefore$ પુનરાવર્તનયુક્ત ક્રમચયો $= n^r = 6^3 = 216$

1.5 સ્વાધ્યાય :

1.5.1 પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) ક્રમચયનો અર્થ સમજાવો.

(2) ક્રમચયની વ્યાખ્યા અને સૂત્ર લખો.

(3) સમસ્વરૂપ વસ્તુઓના ક્રમચય એટલે શું ?

(4) પુનરાવર્તિત ક્રમચય એટલે શું ?

(5) કિંમત શોધો.

(1) $8P_3$ (2) $8P_8$ (3) 5! (4) $10P_0$ (5) $6P_5 \times 6P_0$

જવાબ :

(1) 336 (2) 40320 (3) 120 (4) 1 (5) 720

(6) નીચે આપેલા સમીકરણોમાંથી 'n' ની કિંમત શોધો.

(1) $nP_2 = 72$ (2) $nP_3 = 504$

(3) $72 . n! = 9!$ (4) $12 . nP_3 = 5 . (n+2)P_3$

(5) $nP_3 : (n+1)P_3 = 3 : 4$

જવાબ : (1) 9, (2) 9, (3) 7, (4) 7, (5) 11

(7) 4, 5, 6, 7, 8, 9 એક કુલ છ આંકડામાંથી ચાર જુદા જુદા આંકડા પસંદ કરી ચાર આંકડાની કુલ કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય ?

જવાબ : 360

(8) 0 1 2 3 4 સંખ્યાના બધા જ અંકોનો ઉપયોગ કરી પાંચ આંકડાની કુલ કેટલી નવી સંખ્યા બનાવી શકાય ?

જવાબ : 97

(9) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 અંકોમાંથી ત્રણ અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

જવાબ : $6P_1 \times 6P_2 = 180$

(10) 'MONDAY' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ? તેમાંથી (i) M પ્રથમ સ્થાને હોય તેવા કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ? (ii) M પ્રથમ સ્થાને અને Y છેલ્લા સ્થાને હોય તેવા કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ : 720, (i) 120, (ii) 23

(11) 'GASOLINE' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી આઠ અક્ષરવાળા કુલ કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય કે જેથી વ્યંજન એકી સ્થાને અને સ્વર બેકી સ્થાને આવે ?

જવાબ : 575

(12) એક અભરાઈ ઉપર અંગ્રેજીના 5, ગુજરાતીના 3, અર્થશાસ્ત્રના 4 પુસ્તકો એવી રીતે ગોઠવવાના છે કે જેથી દરેક વિષયના પુસ્તકો સાથે જ આવે તો પુસ્તકો કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?

જવાબ : 1,03,680

(13) વીસ વિદ્યાર્થીઓમાં બે વિદ્યાર્થીઓને ઇનામ આપવાના છે. (i) જો બન્ને ઇનામ એક વ્યક્તિને ન આપી શકાય. (ii) બંને ઇનામ એક વ્યક્તિને આપી શકાય એમ હોય તો તે ઇનામ કેટલી રીતે વહેંચી શકાય ?

જવાબ : (i) $20P_2 = 380$ (ii) $20^2 = 400$

(14) એક અભરાઈ ઉપર છ પુસ્તકો કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી બે નિશ્ચિત પુસ્તકો (i) એક સાથે જ આવે (ii) એક સાથે ન આવે ?

જવાબ : (i) $2! \times 5! = 240$ (ii) $6! - 240 = 480$

(15) કોઈપણ આંકડો એકથી વધુ વખત ન વપરાય એ શરતે 0, 4, 7, 8, 9 માંથી ચાર અંકની કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ? તેમજ આમાંથી કેટલી સંખ્યાઓ 7000 કરતાં મોટી હશે ?

જવાબ : $5P_4 - 4P_3 = 96,\ 3 \times 4P_3 = 72$

(16) એક ફિલ્મના શુટિંગ સમયે એક ગૃપ ફોટા પાડવા માટે 13 ખુરશીઓને હારબંધ ગોઠવવામાં આવે છે. આ ખુરશીઓમાં 1 ડાયરેક્ટર, 4 હીરો, 2 હીરોઈન અને 6 વિલનો એમ કુલ 13 વ્યક્તિઓને બેસાડવાની છે. ડાયરેક્ટરને વચ્ચેની ખુરશીમાં બેસાડવા હોય તેમજ વિલનોને પ્રત્યેક છેડાની ત્રણ-ત્રણ ખુરશીઓમાં બેસાડવા હોય અને હીરોઈનોની ખુરશી કોઈપણ વિલનની બાજુમાં ન હોય તે રીતે ગોઠવણી કરવી હોય તો તે ગોઠવણી કુલ કેટલી રીતે કરી શકાય ?

જવાબ : $1! \times 6! \times 4P_2 \times 4! = 2{,}07{,}360$

(17) 'PERMUTATIONS' શબ્દનો ઉપયોગ કરી બાર અંકના કેટલા શબ્દો (ક્રમચયો) બનાવી શકાય ?

જવાબ : $\frac{12!}{2!} = 23{,}95{,}00{,}800$

(18) 'ARRANGE' શબ્દનો ઉપયોગ કરી સાત અંકના કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ : $\frac{7!}{2!\,2!} = 1260$

(19) 'INTRODUCTION' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી બાર અક્ષરના કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ : $\frac{12!}{2!\,2!\,2!\,2!} = 2{,}99{,}37{,}600$

(20) કોઈપણ આંકડો ગમે તેટલી વખત આવે તે શરતે 3, 4, 5, 8, 9 માંથી ત્રણ આંકડાની કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય ?

જવાબ : $5^3 = 125$

1.5.2 (MCQ's) જવાબ સહિત.

(i) n ! = ________ .

(a) nP_n (b) n (c) nxn (d) એકપણ નહીં

(ii) nP_n = ________ .

(a) $\frac{n}{n}$ (b) n! (c) n (d) એકપણ નહીં

(iii) nP_r = ________ .

(a) $\frac{r!}{(n-r)!}$ (b) $\frac{n!}{(r-n)!}$ (c) $\frac{n!}{(n-r)!}$ (d) એકપણ નહીં

(iv) 5! = ________ .

(a) 5 (b) 120 (c) 1 (d) એકપણ નહીં

(v) $5P_2 \times 3P_2$ = ________ .

(a) 20 (b) 15 (c) 120 (d) એકપણ નહીં

(vi) nP_0 = ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) n (d) એકપણ નહીં

(vii) $5P_0$ = ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) 5 (d) એકપણ નહીં

(viii) 0! = ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) (a) અને (b) બન્ને (d) એકપણ નહીં

(ix) $\frac{5!}{2!}$ = ________ .

(a) 120 (b) 60 (c) 10 (d) એકપણ નહીં

(x) પુનરાવર્તન યુક્ત ક્રમચયો = …………

(a) r^n (b) n^r (c) $\frac{n}{r}$ (d) એકપણ નહીં

જવાબ :

(i) a (ii) b (iii) c (iv) b (v) c (vi) b (vii) b

(viii) b (ix) b (x) b

1.6 સંચય (Combination) :

1.6.1 સંચયનો અર્થ :

વિદ્યાર્થી મિત્રો આપણે આગળ જોયું કે ક્રમચય એટલે ગોઠવણી કે જેમાં કોઈ ચાર વસ્તુઓ (P_1, P_2, P_3 અને P_4) માંથી ગમે તે વસ્તુઓની ગોઠવણી (કુલ ક્રમચર્યો) $4P_2 = 4 \times 3 = 12$ થાય. જેને નીચે મુજબ ગોઠવી શકાય.

P_1P_2	P_2P_1	P_3P_1	P_4P_1
P_1P_3	P_2P_3	P_3P_2	P_4P_2
P_1P_4	P_2P_4	P_3P_4	P_4P_3

અહીં P અને P_1P_2 અને P_2P_1, P_1P_3 અને P_3P_1, P_1P_4 અને P_4P_1, P_2P_3 તથા P_3P_2, P_2P_4 અને P_4P_2 તથા P_3P_4 અને P_4P_3 એ દરેકની ગોઠવણી જુદી જુદી રીતે કરવામાં આવે છે. જ્યારે સંચય એટલે પસંદગી તેમાં ઉપરની દરેક જોડ માટે સંચયનો એક જ પ્રકાર છે જે નીચે મુજબ છે.

P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, P_2P_3, P_2P_4, P_3P_4,

એટલે કે ચાર વસ્તુઓ (P_1, P_2, P_3, P_4) માંથી ગમે તે વસ્તુઓની પસંદગી કરવી હોય તો તેની પસંદગીના કુલ પ્રકારો = 6 થાય. સંચયને અંગ્રેજીમાં Combination કહેવાય છે અને 4 વસ્તુમાંથી 2 વસ્તુની પસંદગીને સંકેતમાં $^4C_2$ વડે દર્શાવી શકાય.

સંચયની સમજૂતી નીચેના ઉદાહરણ ઉપરથી પણ સમજી શકાય.

ધારો કે બાબાસાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીમાં એક સ્પર્ધામાં ત્રણ પ્રોફેસરોમાંથી બે પ્રોફેસરોની પસંદગી કુલ કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ? આ પ્રશ્નનો જવાબ નીચે મુજબ આપી શકાય.

ધારો કે, ત્રણ પ્રોફેસરોને A, B અને C વડે દર્શાવીએ તો તેમાંથી બે પ્રોફેસરોની પસંદગી (સંચય)ના કુલ પ્રકારો નીચે મુજબ

AB, BC, CA

જેને સંકેતમાં $^3C_2$ વડે દર્શાવી શકાય. એટલે કે 3 પ્રોફેસરોમાંથી બે પ્રોફેસરોની પસંદગીના કુલ પ્રકારો (કુલ સંચયો) = $^3C_2 = 3$

1.6.2 સંચયની વ્યાખ્યા અને સૂત્ર :

વ્યાખ્યા :

n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી *r* વસ્તુઓ પસંદ કરવાની કુલ રીતોને સંચય તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેને સંકેતમાં ^nC_r અથવા $\binom{n}{r}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જે નીચેના સૂત્રની મદદથી શોધવામાં આવે છે.

સૂત્ર :

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

યાદ રાખવા જેવા પરિણામો :

(1) $^nC_O = {}^nC_n = 1$

(2) $^nC_r = {}^nC_{(n-r)}$

(3) $^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

(4) $r\left[{}^nC_r\right] = n\left[{}^{n-1}C_{r-1}\right]$

1.6.3 નીચેનાની કિંમત શોધો.

(1) $^{10}C_4$ (2) $^{30}C_{28}$ (3) $^6C_2$

(4) $^3C_2 \times {}^5C_2$ (5) $^6C_0 + {}^4C_4$

જવાબ :

(1) $^{10}C_4 = {}^nC_r$ અને $\therefore$ $n = 10$ અને $r = 4$

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{10!}{4!(10-4)!}$$

$$= \frac{10!}{4!\,6!}$$

$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \ . \ 6!} = 210$

અથવા (સીધી રીતે) બીજી રીત

$10_{C_4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$

(2) $30_{C_{28}} = n_{C_r}$ ... $n = 30$ અને $r = 28$

$n_{C_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$= \frac{30!}{28!(30-28)!} = \frac{30!}{28!\,2!}$

$= \frac{30 \times 29 \times 28!}{28! \ . \ 2 \times 1} = 435$

(3) $6_{C_2} = \frac{6!}{2!(6-2)!}$

$= \frac{6!}{2! \ 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1 \ . \ 4!} = 15$

અથવા (સીધી રીતે) બીજી રીત

$6_{C_2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$

(4) $3_{C_2} \times 5_{C_2} = \left[\frac{3!}{2!(3-2)!} \times \frac{5!}{2!(5-2)!}\right]$

$= \left[\frac{3!}{2! \ 1!} \times \frac{5!}{2! \ 3!}\right]$

$= \left[\frac{3 \times 2!}{2!} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \ 2 \times 1}\right]$

$= [3 \times 10] = 30$

અથવા (સીધી રીતે) બીજી રીત

$3_{C_2} \times 5_{C_2} = \left[\frac{3 \times 2}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1}\right]$

$= [3 \times 10] = 30$

(5) $6_{C_0} + 4_{C_4} = \left[\frac{6!}{0!(6-0)1} + \frac{4!}{4!(4-4)1}\right]$

$= \left[\frac{6!}{0!\ 6!} + \frac{4!}{4!\ 0!}\right]$ અહીં 0! = 1 થાય.

= [1 + 1]

= 2

અથવા બીજી રીત

$6_{C_0} + 4_{C_4} = [1 + 1]$ ∴ $n_{C_0} = 1$ અને

= [1 + 1] $n_{C_n} = 1$ થાય.

= 2

ઉદાહરણ-2 : નીચેના સમીકરણો છોડો.

(1) $n_{C_2} = 21$ (2) $32_{C_{3x+2}} = 32_{C_{x+10}}$ (3) $26_{C_{x+2}} = 26_{C_{2x-3}}$

જવાબ :

(1) $n_{C_2} = 21$

$\therefore \frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 21$

$\therefore n(n-1) = 42$

$\therefore n^2 - n - 42 = 0$

$\therefore n^2 - 7n + 6n - 42 = 0$

$\therefore n(n-7) + 6(n-7) = 0$

$\therefore (n-7)(n+6) = 0$

n અને 6 કોમન લેતા

$\therefore n - 7 = 0$ અથવા $n = -6$ (અશક્ય)

$\therefore n = 7$

[સમજો :
$-7 \times 6 = -42$ | $\therefore -7n \times 6n$
$-7 + 6 = -1$ | $\therefore -7n + 6n$]

(2) $32_{C_{3x+2}} = 32_{C_{x+10}}$

$\therefore 3x + 2 = x + 10$

$\therefore 3x - x = 10 - 2$

$\therefore 2x = 8$

$\therefore x = 4$

અથવા બીજી રીત

$(3x + 2) + (x + 10) = 32$

$\therefore 3x + 2 + x + 10 = 32$

$\therefore 4x = 32 - 12$

$\therefore\ 4x = 20$

$\therefore\ x = {}^{20}\!/_{4} = 5$

$\therefore\ x = 4$ અથવા $x = 5$

$26_{C_{x+2}} = 26_{C_{2x-3}}$

$\therefore\ 26_{C_{x+2}} = 26_{C_{2x-3}}$

$\therefore\ x + 2 = 2x - 3$

$\therefore\ 3 + 2 = 2x - x$

$\therefore\ x = 5$

અથવા બીજી રીત

$26_{C_{x+2}} = 26_{C_{2x-3}} \qquad \therefore\ n_{C_r} = n_{C_{n-r}}$

$\therefore\ 26_{C_{x+2}} = 26_{C_{26-[2x-3]}}$

$\therefore\ x + 12 = 26 - 2x + 3, \quad \therefore\ x + 2x = 26 + 3 - 2$

$\therefore\ 3x = 27$

$\therefore\ x = 3$

ઉદાહરણ-3 :

$28_{C_{2r}} : 24_{C_{2r-4}} = 225 : 11$ હોય તો r શોધો.

જવાબ :

$28_{C_{2r}} : 24_{C_{2r-4}} = 225 : 11$

$$\therefore\ \frac{\dfrac{28!}{2r!\,(28-2r)!}}{\dfrac{24!}{(2r-4)!\,(24-2r+4)!}} = \frac{225}{11}$$

$$\therefore\ \frac{28!}{2r!\,(28-2r)!} \times \frac{(2r-4)!\,(28-2r)!}{24!} = \frac{225}{11}$$

$$\therefore\ \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24!}{2r\,(2r-1)\,(2r-2)\,(2r-3)\,(2r-4)!\,(28-2r)!} \times \frac{(2r-4)!\,(28-2r)!}{24!} = \frac{225}{11}$$

$$\therefore\ \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25}{2r\,(2r-1)\,(2r-2)\,(2r-3)} = \frac{225}{11}$$

$$\therefore\ \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 11}{3 \times 3 \times 25} = 2r\,(2r-1)\,(2r-2)\,(2r-3)$$

$$\therefore\ \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 11}{9} = 2r\,(2r-1)\,(2r-2)\,(2r-3)$$

$\therefore\ 28 \times 3 \times 26 \times 11 = 2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)$

$\therefore\ 14 \times 2 \times 3 \times 13 \times 2 \times 11 = 2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)$

$\therefore\ 14 \times 13 \times 12 \times 11 = 2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)$

$\therefore\ 14 \times (14-1)(14-2)(14-3) = 2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)$

$\therefore\ 14 = 2r$

$\therefore\ r = {}^{14}\!/_{2} = 7$

ઉદાહરણ-4 :

$\frac{2x_{C_3}}{x_{C_3}} = 11$ હોય તો x શોધો.

$$\therefore\ \frac{\frac{2x!}{3!(2x-3)!}}{\frac{x!}{3!(x-3)!}} = 11$$

$$\therefore\ = \frac{2x!}{3!(2x-3)!} \times \frac{3!(x-3)!}{x!}$$

$$\therefore\ \frac{2x(2x-1)(2x-2)(2x-3)!}{(2x-3)!} \times \frac{(x-3)!}{x(x-1)(x-2)(x-3)!} = 11$$

$$\therefore\ \frac{2x(2x-1)(2x-2)}{x(x-1)(x-2)} = 11$$

$\therefore\ \frac{2x(2x-1)\ 2(x-1)}{x(x-1)(x-2)} = 11$ x અને $(x-1)$ દૂર કરતા

$$\therefore\ \frac{4(2x-1)}{x-2} = 11$$

$\therefore\ 8x - 4 = 11(x-2)$

$\therefore\ 8x - 4 = 11x - 22$

$\therefore\ 22 - 4 = 11x - 8x$

$\therefore\ 18 = 3x$

$\therefore\ x = {}^{18}\!/_{3} = 6$

ઉદાહરણ-5 : એક હોસ્પિટલના 12 ડૉક્ટરોમાંથી 5 ડૉક્ટરની કમિટિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ?

જવાબ : 12 ડૉક્ટરોમાંથી 5 ડૉક્ટરની પસંદગીના કુલ પ્રકારો (કુલ સંચયો) = $12_{C_5} = \frac{12!}{5!(12-5)!}$

$$= \frac{12!}{5!\ 7!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad 7!}$$

$= 11 \times 9 \times 8 = 792$

ઉદાહરણ-6 : એક ડબ્બામાં 6 સફેદ, 5 કાળા અને 4 લીલા દડા છે. તેમાંથી 3 સફેદ, 2 કાળા અને 1 લીલો એમ કુલ પાંચ દડાની પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

જવાબ :

6 સફેદ દડામાંથી 3 દડાની પસંદગી $^6C_3$ પ્રકારે થાય અને

5 કાળા દડામાંથી 2 દડાની પસંદગી $^5C_2$ પ્રકારે થાય અને

4 લીલા દડામાંથી 1 દડાની પસંદગી $^4C_1$ પ્રકારે થાય.

$\therefore$ કુલ સંચયો $= {^6C_3} \times {^5C_2} \times {^4C_1}$

$$= \frac{6!}{3!\ 3!} \times \frac{5!}{2!\ 3!} \times \frac{4!}{1!\ 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1\ .\ 3!} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \quad 3!} \times \frac{4 \times 3!}{3!} = 20 \times 10 \times 4 = 800$$

ઉદાહરણ-7 : એક કૉલેજમાં 8 પ્રાધ્યાપકો છે, જેમાં 3 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપકો છે. એક કાર્યક્રમમાં 3 પ્રાધ્યાપકો આમંત્રણ આપવું છે. તેમાં ઓછામાં ઓછા એક સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક હોવા જોઈએ. તો કેટલી રીતે આમંત્રણ આપી શકાય ?

જવાબ :

કુલ પ્રાધ્યાપકો = 8 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક = 3 $\therefore$ પુ. પ્રાધ્યાપકો = 5

3 પ્રાધ્યાપકોને આમંત્રણ આપવું છે. જેમાં ઓછામાં ઓછા 1 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક હોય તો પસંદગી નીચે મુજબ થશે.

3	5
સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક	પુરૂષ પ્રાધ્યાપક
1	2
2	1
3	0

એટલે કે 1 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક અને 2 પુરૂષ પ્રાધ્યાપક અથવા
2 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક અને 1 પુરૂષ પ્રાધ્યાપક અથવા
3 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક અને 0 પુરૂષ પ્રાધ્યાપકની પસંદગી થાય.

$\therefore$ કુલ સંચયો $= \left({^3C_1} \times {^5C_2}\right) + \left({^3C_2} \times {^5C_1}\right) + \left({^3C_3} \times {^5C_0}\right)$

$= (3 \times 10) + (3 \times 5) + (1 \times 1)$

$= 30 + 15 + 1 = 46$

ઉદાહરણ-8 : એક બંડલમાં 4 લાલ, 3 વાદળી અને 5 સફેદ પતંગો છે તો તેમાંથી 3 પતંગો પસંદ કરવામાં આવે તો તેમાંથી;

(1) ત્રણેય પતંગ એક જ રંગના હોય.

(2) ત્રણેય પતંગ જુદા જુદા રંગના હોય.

(3) બે પતંગો એક સરખા રંગના અને એક પતંગ જુદા રંગનો હોય, તો તેની પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

પતંગો :

લાલ = 4 વાદળી = 3 સફેદ = 5 પસંદ કરેલ = 3

(1) ત્રણેય પતંગ એક જ રંગના હોય એટલે કે ત્રણેય લાલ હોય અથવા ત્રણેય વાદળી હોય અથવા ત્રણેય સફેદ હોય.

∴ કુલ ક્રમચયો (રીતો) = $4_{C_3} + 3_{C_3} + 5_{C_3}$ $\quad {}^n c_r = \frac{n!}{r!(n-r)1} = {}^4 c_3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \times 3!}{3!1!} = 4$

= 4 + 1 + 10

= 15 (તેવી જ રીતે $^3C_3$ અને $^SC_3$ શોધાશે.

(2) ત્રણેય પતંગ જુદા જુદા રંગના હોય એટલે કે એક લાલ અને એક વાદળી અને એક સફેદ હોય.

∴ કુલ ક્રમચયો (રીતો) = $4_{C_1} \times 3_{C_1} \times 5_{C_1}$ $\quad {}^n c_r = \frac{n!}{r!(n-r)}$ નો ઉપયોગ શોધો.

= 4 × 3 × 5 = 60

(3) બે પતંગો એક સરખા રંગના હોય અને એક પતંગ જુદા રંગનો હોય એટલે કે;

4 લાલમાંથી 2 લાલ હોય અને બાકીના (વાદળી + સફેદ) 8 માંથી 1 પસંદ થાય.

અથવા

3 વાદળી માંથી 2 વાદળી હોય અને બાકીના (લાલ + સફેદ) 9 માંથી 1 પસંદ થાય.

અથવા

5 સફેદમાંથી 2 સફેદ હોય અને બાકીના (લાલ + વાદળી) 7 માંથી 1 પસંદ થાય.

∴ કુલ ક્રમચયો = $\left(4_{C_2} \times 8_{C_1}\right) + \left(3_{C_2} \times 9_{C_1}\right) + \left(5_{C_2} \times 7_{C_1}\right)$

= (6 × 8) + (3 × 9) + (10 × 7)

= 48 + 27 + 70

= 145

ઉદાહરણ-9 : ત્રણ પ્રાધ્યાપકો અને 10 વિદ્યાર્થીઓમાંથી બે પ્રાધ્યાપકો અને 4 વિદ્યાર્થીઓની એક સમિતિ બનાવવી છે તો તે કેટલી રીતે બનાવી શકાય ? ઉપરાંત (1) અમુક ચોક્કસ પ્રાધ્યાપકને તે સમિતિમાં લેવાના જ હોય તો સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ? (2) જો અમુક ચોક્કસ વિદ્યાર્થીને તે સમિતિમાં ન લેવાનો હોય તો તે સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ?

જવાબ :

પ્રાધ્યાપકો = 3 વિદ્યાર્થીઓ = 10

3 પ્રાધ્યાપકોમાંથી 2 પ્રાધ્યાપક અને 10 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 4 વિદ્યાર્થીઓની પસંદગીના

કુલ ક્રમચયો = $3_{C_2} \times 10_{C_4}$

$= \frac{3!}{2!\ 1!} \times \frac{10!}{4!\ 6!}$

$= \frac{3 \times 2!}{2!} \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4 \times 3 \times 2 \times 1.6!} = 3 \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = = \frac{3 \times 2!}{2!}$

= 3 × 210 = 630

(1) અમુક ચોક્કસ પ્રાધ્યાપકને તે સમિતિમાં લેવાના જ હોય અને સમિતિ બનાવવી હોય તો;

3 પ્રાધ્યાપકોમાંથી 1 પ્રાધ્યાપક ચોક્કસ લેવાના અને બાકીના 2 પ્રાધ્યાપકોમાંથી 1 પ્રાધ્યાપકની પસંદગી થશે અને 10 વિદ્યાર્થીઓમાંથી

4 વિદ્યાર્થીઓની પસંદગીના કુલ ક્રમચયો = $1_{C_1} \times 2_{C_2} \times 10_{C_4}$

$= 1 \times 2 \times \frac{10!}{4!\ 6!}$

$= 2 \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

= 2 × 210

= 420

(2) જો અમુક ચોક્કસ વિદ્યાર્થીને તે સમિતિમાં ન લેવાનો હોય તો તે સમિતિ બનાવવાના કુલ ક્રમચયો = 3 પ્રાધ્યાપકોમાંથી 2 પ્રાધ્યાપકો 3_{C_2} પ્રકારે પસંદ થશે અને 10 વિદ્યાર્થીઓમાંથી કોઈ એક ચોક્કસ વિદ્યાર્થીને ન લેવામાં આવે 9 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 4 વિદ્યાર્થીઓની પસંદગી કરવાના કુલ ક્રમચયો

$= 3_{C_2} \times 9_{C_4}$

$= \frac{3!}{2!\,1!} \times \frac{9!}{4!5!}$

$= \frac{3 \times 2!}{2!} \times \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4 \times 3 \times 2 \times 1.5!}$

$= 3 \times \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

= 3 × 126 = 378

ઉદાહરણ-10 : આઠ જુદા જુદા વ્યંજનો અને ત્રણ જુદા જુદા સ્વરોમાંથી 3 વ્યંજન અને 2 સ્વર એમ કુલ પાંચ અક્ષરોવાળા કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ :

8 વ્યંજનોમાંથી 3 વ્યંજનોની પસંદગી = 8_{C_3}

3 સ્વરોમાંથી 2 સ્વરોની પસંદગી = 3_{C_2}

પસંદ થયેલા (3 વ્યંજનો અને + 2 સ્વરો) 5 અક્ષરોની ગોઠવણી $5P_5 = 5!$

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો = $8_{C_3} \times 3_{C_2} \times 5!$

$= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times 3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \qquad \because {}^3C_2 = 3$

= 56 × 3 × 120

= 20,160

ઉદાહરણ-11 : $\frac{8_{C_3}}{3P_3}$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $^{8}C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$

$$\frac{8_{C_3}}{3P_3} = \frac{\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}}{3 \times 2 \times 1} = \frac{56}{6} = 9.33 \qquad \because {}^{3}P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

1.7 સ્વાધ્યાય અને MCQ's જવાબ સહિત.

(1) નીચેનાની કિંમત શોધો.

(i) 7_{C_4} (ii) $40_{C_{38}}$ (iii) 5_{C_2} (iv) $5_{C_3} \times 4_{C_3}$ (v) $9_{C_0} + 3_{C_3}$

(vi) $6_{C_0} \times 4$

જવાબ : (i) 35 (ii) 780 (iii) 10 (iv) 40 (v) 2 (vi) 4

(2) નીચેના સમીકરણો છોડો.

(i) $x_{C_2} = 55$ (ii) $12_{C_{n-2}} = 12_{C_n}$ (iii) $52_{C_{4x+2}} = 52_{C_{2x+14}}$

(iv) $24_{C_{n+3}} = 24_{C_{2n-3}}$

જવાબ : (i) $x = 11$ (ii) $n = 7$ ... $n_{C_r} = n_{C_{n-r}}$

(iii) $x = 6$ (iv) $n = 6$ અથવા $n = 8$

(3) જો $n_{C_4} : n_{C_3} = 7 : 4$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $n = 10$

(4) જો $\frac{2n_{C_3}}{n_{C_2}} = \frac{44}{3}$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $n = 6$

(5) બાબાસાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીના 16 જેટલા વિદ્યાર્થીઓમાંથી 5 વિદ્યાર્થીઓની સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ?

જવાબ : 4368

(6) 7 ગુજરાતીઓ, 3 બંગાળીઓ અને 5 મરાઠીમાંથી 3 ગુજરાતી 2 બંગાળી અને 2 મરાઠી એમ મળીને કુલ 7 વ્યક્તિઓ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

જવાબ : $7_{C_3} \times 3_{C_2} \times 5_{C_2} = 1050$

(7) એક પેટીમાં 4 કાળા અને 3 સફેદ દડા છે. તો તેમાંથી ઓછામાં ઓછા એક સફેદ દડો લઈ ત્રણ દડાઓ કેટલી રીતે લઈ શકાય ?

જવાબ : 31

(8) એક ડબ્બામાં 4 સફેદ, 3 કાળા અને 2 વાદળી દડા છે. તો તેમાંથી

(1) ત્રણેય દડા એક જ રંગના હોય.

(2) ત્રણેય દડા જુદા જુદા રંગના હોય.

(3) બે દડા એક જ રંગના અને એક દડો જુદા રંગનો હોય તો તે રીતે તે ડબ્બામાંથી ત્રણ દડાઓ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

જવાબ : (1) 5 (2) 24 (3) 55

(9) એક સોસાયટીમાં કુલ 12 સભ્યો છે. તેમાંથી 7 સભ્યોની એક સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ? ઉપરાંત

(1) એક પ્રમુખ અને એક ઉપપ્રમુખનો સમિતિમાં સમાવેશ કરવાનો જ હોય.

(2) અમુક બે સભ્યોનો નિશ્ચિતપણે સમાવેશ ન કરવાનો હોય; તો તે સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ?

જવાબ : 792, (1) 252 (2) 56

(10) 8 સ્ત્રીઓ અને 7 પુરૂષોમાંથી 3 સ્ત્રીઓ અને 4 પુરૂષોની સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ? જો સમિતિમાં અમુક ચોક્કસ સ્ત્રી અને અમુક ચોક્કસ પુરૂષ સાથે રહેવા ન માંગતા હોય તો સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ?

જવાબ : 1960, 1540

(11) 10 જુદા જુદા વ્યંજન અને 5 જુદા જુદા સ્વરોમાંથી 3 વ્યંજન અને 2 સ્વરવાળા કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ : $10_{C_3} \times 5_{C_2} \times 5P_5 = 1,44,000$

(12) એક ડબ્બામાં 4 કાળા, 3 સફેદ અને 5 લાલ દડા છે. (1) બે દડા એક જ રંગના હોય. (2) બે દડા જુદા જુદા રંગના હોય તો તે કેટલી રીતે લઈ શકાય ?

જવાબ : (1) $4_{C_2} + 3_{C_2} + 5_{C_2} = 19$

(2) $4_{C_1} \times 3_{C_1} + 4_{C_1} \times 5_{C_1} + 3_{C_1} \times 5_{C_1} = 12 + 20 + 15 = 47$

(13) 15 પ્રધાનોમાંથી 5 પ્રધાનોની એક સમિતિ બનાવવી છે. તેમાં મુખ્ય પ્રધાન અને ગૃહપ્રધાન આવે જ એ શરતે સમિતિની રચના કેવી રીતે કરી શકાય ? જો સંરક્ષણખાતાના પ્રધાનને નહીં જ લેવાના હોય તો સમિતિની રચના કેટલી રીતે કરી શકાય ?

જવાબ : 286, 220

(14) જો $n_{C_4} = n_{C_3}$ હોય તો n ની કિંમત શોધો અને તે ઉપરથી $2n_{C_2}$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $n = 7$, 91

(15) $nP_2 = 12$ હોય તો n_{C_3} અને nP_3 ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $n(n-1) = 12$ ... $n = 4$, $n_{C_3} = 4$, $nP_3 = 24$

(16) સંચયનો અર્થ લખો.

(17) સંચયની વ્યાખ્યા અને સૂત્ર લખો.

(18) ટૂંકા પ્રશ્નો (MCQ's)

(i) $n_{C_0} =$ ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) n (d) એકપણ નહીં

(ii) $^{n}C_{n}$ = ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) n (d) એકપણ નહીં

(iii) $^{n}C_{r}$ = ________ .

(a) $\frac{n!}{(n-r)!}$ (b) $\frac{r!}{n!(n-r)!}$ (c) $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (d) એકપણ નહીં

(iv) $^{5}C_{3}$ = ________ .

(a) 5 (b) 3 (c) 10 (d) એકપણ નહીં

(v) $^{6}C_{2}$ = ________ .

(a) $^{6}C_{4}$ (b) $^{5}C_{4}$ (c) $^{6}C_{3}$ (d) એકપણ નહીં

(vi) $^{n}C_{r}$ = ________ .

(a) $^{n}C_{(n-r)}$ (b) np_{r} (c) (a) અને (b) બંને (d) એકપણ નહીં

(vii) $^{5}C_{0}$ = ________ .

(a) 0 (b) 5 (c) (a) અને (b) બંને (d) એકપણ નહીં

(viii) $^{5}C_{5}$ = ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) 5 (d) એકપણ નહીં

(ix) $^{3}C_{1} + 3P_{1}$ = ________ .

(a) 6 (b) 9 (c) 18 (d) એકપણ નહીં

(x) 10 વ્યક્તિઓમાંથી 7 વ્યક્તિઓની પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

(a) $10P_{7}$ (b) $^{10}C_{7}$ (c) (a) અને (b) બંને (d) એકપણ નહીં

(xi) $^{6}C_{3} \div 4P_{4}$ = ________ .

(a) 10 (b) 12 (c) 1.2 (d) એકપણ નહીં

(xii) $^{5}C_{3} \times 0!$ = ________ .

(a) 5 (b) 3 (c) 10 (d) એકપણ નહીં

જવાબ :

(i) b	(ii) b	(iii) c	(iv) c
(v) a	(vi) a	(vii) b	(viii) b
(ix) a	(x) b	(xi) d	(xii) c

1.8 દ્વિપદી વિસ્તરણ :

1.8.1 દ્વિપદી પદાવલી :

$(a + b), (3x - y), (x + \frac{1}{y}), (2x^2 - 5y^2)$ વગેરે જેવી પદાવલીઓને દ્વિપદી પદાવલી તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

1.8.2 દ્વિપદી વિસ્તરણ :

દ્વિપદી પદાવલીની જુદી જુદી ઘાત આપેલી હોય અને તેનું વિસ્તરણ કરવામાં આવે તો તે પ્રકારના વિસ્તરણને દ્વિપદી વિસ્તરણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

સામાન્ય રીતે નીચે આપેલા દ્વિપદી વિસ્તરણો આપણે જાણીએ છીએ.

$(x + a)^0 = 1$

$(x + a)^1 = x + a$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

અહીં આપણે $(x + a)$ દ્વિપદી પદાવલીની 0 ઘાત, 1 ઘાત, 2 ઘાત અને 3 ઘાત માટેના વિસ્તરણો જોયા. હવે જો આપણે $(x + a)$ ની 4, 5, 6 કે ગમે તે n ઘનપૂર્ણાંક ઘાત માટેના વિસ્તરણો મેળવવા માંગતા હોય તો તેનું વિસ્તરણ દ્વિપદી પ્રમેય તરીકે ઓળખાય છે.

આ પ્રકારના વિસ્તરણો મેળવવા માટે સંચય અને પાસ્કલના સહગુણાંકના નિયમનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે જે નીચે મુજબ છે.

દ્વિપદી સહગુણાકો માટે પાસ્કલનો ત્રિકોણ :

ઘાત	સહગુણાકો
0	**1**
1	**1 1**
2	**1 2 1**
3	**1 3 3 1**
4	**1 4 6 4 1**
5	**1 5 10 10 5 1**

તેવી જ રીતે " " " " " "

" " " " " " "

" " " " " " "

n સુધી " " " " " "

પાસ્કલના ત્રિકોણ સમજૂતી :

ઉપરના ત્રિકોણમાં જોઈ શકાય છે કે દરેક હારના બંને છેડે 1 છે. ત્યારબાદ ત્યાર પછીની ઘાત એ તેથી નાની ઘાતની છેડે આવેલ રકમ અને તેના પછીથી રકમનો સરવાળો કરી વચ્ચે મુકવામાં આવે છે અને સહગુણક શોધવામાં આવે છે જેમકે;

$(x + a)^0 = 1$

$(x + a)^1 = x + a$

અથવા

$(x + a)1 = {}^{1}C_{0}\, x^1 a^0 + {}^{1}C_{1}\, x^0 a^1$

$= 1.x.1 + 1.1.a \qquad \therefore\ {}^{1}C_{0} = {}^{1}C_{1} = 1$

$= x + a$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

અથવા

$(x + a)^2 = {}^{2}C_{0}\, x^2 a^0 + {}^{2}C_{1}\, x^1 a^1 + {}^{2}C_{2}\, x^0 a^2$

$= 1.x^2.1 + 2.x.a + 1.1.a^2 \qquad [\therefore\ {}^{2}C_{0} = 1\ ,\ {}^{2}C_{2} = 1\ ,\ {}^{2}C_{1} = 2]$

$= \underline{1}x^2 + \underline{2}ax + \underline{1}a^2$

સહગુણકો જુઓ

ઘાત **સહગુણક**

1   1   1

2   1   2   1 $\therefore$ આજુ બાજુ 1 વચ્ચે 1 + 1 = 2

$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2\mathrm{a} + 3xa^2 + a^3$

અથવા

$(x + a)^3 = {}^{3}C_{0}\, x^3 a^0 + {}^{3}C_{1}\, x^2 a^1 + {}^{3}C_{2}\, x^1 a^2 + {}^{3}C_{3}\, x^0 a^3$

$= 1.x^3.1 + 3x^2a + 3xa^2 + 1.1.a^3$

$= 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3$

સહગુણકો જુઓ

ઘાત **સહગુણક**

2   1   2   1

3   1   3   3   1

3 ઘન   બંને છેડે 1 પછી

1 + 2 = 3 અને 2 + 1 = 3

આમ દ્વિપદી વિસ્તરણના જુદા જુદા પદના સહગુણકો સંચયના સ્વરૂપમાં લખી શકાય. આ જ પ્રમાણે આપણે $(x + a)^n$ નું વિસ્તરણ નીચે મુજબ લખી શકીએ.

$$(x + a)^n = {}^{n}C_{0}\, x^n a^0 + {}^{n}C_{1}\, x^{n-1} . a^1 + {}^{n}C_{2}\, x^{n-2} . a^2 + \ldots\ldots + {}^{n}C_{n-1}\, x^1 . a^{n-1} + {}^{n}C_{n}\, x^0 . a^n$$

$\therefore\ (x + a)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1} \,.\, a + {}^nC_2\, x^{n-2} \,.\, a^2 + \ldots\ldots + {}^nC_n\, a^n$

આ વિસ્તરણને દ્વિપદી વિસ્તરણ અથવા દ્વિપદી પ્રમેય તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. જેને નીચે મુજબ પણ દર્શાવી શકાય.

$$(x + a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, x^{n-r} \,.\, a^r$$

1.8.3 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 : $(x + 2a)^5$ નું વિસ્તરણ કરો.

જવાબ :

$(x + a)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1} \,.\, a + \ldots\ldots + {}^nC_n\, a^n$

$n = 5,\ x = x$ અને $a = 2a$ મુકતા

$(x + 2a)^5 = {}^5C_0\, x^5 + {}^5C_1\, x^4 \,.\, (2a) + {}^5C_2\, x^3(2a)^2 + {}^5C_3\, x^2(2a)^3 + {}^5C_4\, x(2a)^4 + {}^5C_5\, (2a)^5$

$= (1)\, x^5 + (5)\, x^4\ (2a) + (10)\ x^3 \,.\, (4a^2) + (10) \,.\, x^2(8a^3) + 5 \,.\, x(16a^4) + (1) \,.\, (32)a^5$

$= x^5 + 10x^4 \,.\, a + 40x^3 \,.\, a^2 + 80x^2 \,.\, a^3 + 80x \,.\, a^4 + 32a^5$

ઉદાહરણ-2 : $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^4$ નું વિસ્તરણ કરો.

જવાબ :

$n = 4,\ x = \left(\frac{x}{3}\right),\ a = \left(-\frac{3}{x}\right)$

$$(x + a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, x^{n-r} \,.\, a^r$$

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^4 = 4_{C_0}\left(\frac{x}{3}\right)^4 + 4_{C_1}\left(\frac{x}{3}\right)^3\left(-\frac{3}{x}\right) + 4_{C_2}\left(\frac{x}{3}\right)^2\left(-\frac{3}{x}\right)^2 + 4_{C_2}\left(\frac{x}{3}\right)\left(-\frac{3}{x}\right)^3 + 4_{C_4}\left(-\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= \frac{x^4}{81} + 4.\left(\frac{x^3}{27}\right)\left(-\frac{3}{x}\right) + 6.\left(\frac{x^2}{9}\right)\left(\frac{9}{x^2}\right) + 4\left(\frac{x}{3}\right)\left(-\frac{27}{x^3}\right) + \left(\frac{81}{x^4}\right)$$

$$= \frac{x^4}{81} - \frac{4x^2}{9} + 6 + \frac{36}{x^2} + \frac{81}{x^4}$$

ઉદાહરણ-3 : $(99)^4$ ની કિંમત મેળવો.

જવાબ :

$(99)^4 = (100 - 1)^4$

$n = 4,\ x = 100,\ a = -1$

$$(x+a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_{r}\, x^{n-r} \,.\, a^{r}$$

$$(100-1)^4 = {}^{4}C_{0}(100)^4 + {}^{4}C_{1}(100)^3(-1) + {}^{4}C_{2}(100)^2(-1)^2$$

$$+ {}^{4}C_{3}(100)(-1)^3 + {}^{4}C_{4}(-1)^4$$

$= (10,00,00,000) + 4(10,00,000)(-1) + 6(10,000)(1) + 4(100)(-1) + (1)$

$= 10,00,00,000 - 40,00,000 + 60,000 - 400 + 1$

$= 9,60,59,601$

ઉદાહરણ-4 : $(10.1)^5$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$(10.1)^5 = (10 + 0.1)^5$

$n = 5,\ x = 10,\ a = 0.1$

$$(x+a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_{r}\, x^{n-r} \,.\, a^{r}$$

$$(10.1)^5 = {}^{5}C_{0}(10)^5 + {}^{5}C_{1}(10)^4(0.1) + {}^{5}C_{2}(10)^3(0.1)^2$$

$$+ {}^{5}C_{3}(10)^2(0.1)^3 + {}^{5}C_{4}(10)(0.1)^4 + {}^{5}C_{5}(0.1)^5$$

$= (1)(1,00,000) + 5(10,000)(0.1) + 10(1000)(0.01) + 10(100)(0.001)$

$+ 5(10)(0.0001) + (1)(0.00001)$

$= 1,00,000 + 5000 + 100 + 1 + 0.005 + 0.00001$

$= 105101.00501$

ઉદાહરણ-5 : $\left(\sqrt{4}+1\right)^4 - \left(\sqrt{4}-1\right)^4$ કિંમત શોધો.

જવાબ :

$$\left(\sqrt{4}+1\right)^4 - \left(\sqrt{4}-1\right)^4$$

$\left(\sqrt{4}+1\right)^4 \Rightarrow n = 4\ ,\ x = \sqrt{4}$ અને $a = 1$

$$\left(\sqrt{4}+1\right)^4 = {}^{4}C_{0}\left(\sqrt{4}\right)^4 + {}^{4}C_{1}\left(\sqrt{4}\right)^3(1) + {}^{4}C_{2}\left(\sqrt{4}\right)^2(1)^2 + {}^{4}C_{3}\sqrt{4}(1)^3 + {}^{4}C_{4}(1)^4 \quad \text{— (1)}$$

$\left(\sqrt{4}-1\right)^4 \Rightarrow n = 4,\ x = \sqrt{4}$, અને $a = -1$

$$\left(\sqrt{4}-1\right)^4 = 4_{C_0}\left(\sqrt{4}\right)^4 + 4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3(-1) + 4_{C_2}\left(\sqrt{4}\right)^2(-1)^2 + 4_{C_3}\sqrt{4}(-1)^3 + 4_{C_4}(-1)^4 \quad \text{— (2)}$$

$$\left(\sqrt{4}+1\right)^4 - \left(\sqrt{4}-1\right)^4$$

$$= \left[4_{C_0}\left(\sqrt{4}\right)^4 + 4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3 + 4_{C_2}\left(\sqrt{4}\right)^2 + 4_{C_3}\left(\sqrt{4}\right) + 3_{C_4}\right]$$

$$- \left[4_{C_0}\left(\sqrt{4}\right)^4 - 4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3 - 4_{C_2}\left(\sqrt{4}\right)^2 - 4_{C_3}\sqrt{4} + 4_{C_4}\right]$$ (∵સમીકરણ 1 માંથી 2 બાદ કરતાં)

$$= \left[4_{C_0}\left(\sqrt{4}\right)^4 + 4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3 + 4_{C_2}\left(\sqrt{4}\right)^2 + 4_{C_3}\sqrt{4} + 4_{C_4}\right.$$

$$\left. - 4_{C_0}\left(\sqrt{4}\right)^4 + 4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3 - 4_{C_2}\left(\sqrt{4}\right)^2 + 4_{C_3}\sqrt{4} - 4_{C_4}\right]$$

$$= 2\left[4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3 + 4_{C_1}\sqrt{4}\right]$$

$$= 2\left[4\left(\sqrt{4}\right)^3 + 4(2)\right]$$

$$= 8\left[\left(\sqrt{4}\right)^3 + 2\right]$$

ઉદાહરણ-6 : $\left(\sqrt{5}+1\right)^3 - \left(\sqrt{5}-1\right)^3$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^3 = 3_{C_0}\left(\sqrt{5}\right)^3 + 3_{C_1}\left(\sqrt{5}\right)^2(1) + 3_{C_2}\left(\sqrt{5}\right)(1)^2 + 3_{C_3}(1)^3 \quad \text{— (1)}$$

$$\left(\sqrt{5}-1\right)^3 = 3_{C_0}\left(\sqrt{5}\right)^3 + 3_{C_1}\left(\sqrt{5}\right)^2(-1) + 3_{C_2}\left(\sqrt{5}\right)(-1)^2 + 3_{C_3}(-1)^3 \quad \text{— (2)}$$

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^3 - \left(\sqrt{5}-1\right)^3$$

$$= 2\left[3_{C_1}\left(\sqrt{5}\right)^2 + 1\right]$$

$$= 2\ [3(5) + 1] = 32$$

1.8.4 દ્વિપદી વિસ્તરણનું સામાન્ય પદ :

આપણે જાણીએ છીએ કે દ્વિપદી પ્રમેય $(x+a)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}.\, a + {}^nC_2\, x^{n-2}a^2 + \ldots\ldots + {}^nc_n\, a^n$ છે.

જેનું

પ્રથમ પદ = $T_1 = {}^nC_0 x^n$

બીજુ પદ = $T_2 = {}^nC_1 x^{n-1} . a$

ત્રીજુ પદ = $T_3 = {}^nC_2 x^{n-2} a^2$

તેવી જ રીતે તેના સામાન્ય પદને $r + 1$ કહીએ તો $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} . a^r$ થાય.

નોંધ : ઉપરના સૂત્રની મદદથી કોઈપણ પદ શોધી શકાય.

ઉદાહરણ-7 : $\left(x + \frac{1}{y}\right)^7$ ના વિસ્તરણમાં ત્રીજુ પદ મેળવો.

જવાબ :

$\left(x + \frac{1}{y}\right)^7$ નું ત્રીજુ પદ મેળવવું છે.

$\because r + 1 = 3 \qquad \therefore r = 2, n = 7, x = x, a = \frac{1}{y}$

$T_{r+1} = {}^nC_r \; x^{n-r} . a^r$

$\therefore T_3 = {}^7C_2 \; x^{7-2} . \left(\frac{1}{y}\right)^2$

$= 21 . x^5 . \frac{1}{y^2}$

$= \frac{21x^5}{y^2}$

1.8.5 દ્વિપદી વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ :

દ્વિપદી વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ શોધવું હોય તો $\frac{n}{2}+1$ મુ પદ શોધાય. હવે ધારો કે $n = 10$ આપેલા હોય અને મધ્યમ પદ શોધવું હોય તો $\frac{10}{2}+1 = 6$ ઠું પદ શોધાય. પરંતુ ધારો કે $n = 9$ આપેલા હોય તો $\frac{9}{2}+1 = 5.5$ મળે તેથી પાંચમું અને છઠ્ઠું એમ બે મધ્ય પદો શોધવા પડે.

ઉદાહરણ-8 : $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ શોધો.

જવાબ :

$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં $\frac{n}{2}+1$ માં મૂકતા $\frac{10}{2}+1=6$ ઠું પદ મધ્યમ પદ બનશે.

$\therefore\ T_{r+1} = {}^{n}C_{r}\, x^{n-r} \,.\, a^{r}$ માં

$r = 5,\ n = 10,\ x = \frac{x}{y}$ અને $a = \left(-\frac{y}{x}\right)$

$\therefore\ T_6 = 10_{C_5}\left(\frac{x}{y}\right)^{10-5} . \left(\frac{-y}{x}\right)^{5}$

$= 252\ .\ \left(\frac{x}{y}\right)^{5} . \left(\frac{y}{x}\right)^{5}$

$= -\ 252\ .\ \left(\frac{x^5}{y^5}\times\frac{y^5}{x^5}\right)$

$= -252$

ઉદાહરણ-9 : $\left(3x-\frac{1}{x}\right)^{7}$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદો શોધો.

જવાબ :

$\left(3x-\frac{1}{x}\right)^{7}$ ના વિસ્તરણમાં $\frac{n}{2}+1$ મૂકતાં,

$\frac{7}{2}+1$ મું પદ એટલે કે ચોથુ અને પાંચમું પદ એ મધ્યમ પદો બનશે.

$T_{r+1} = {}^{n}C_{r}\, x^{n-r} \,.\, a^{r}$ માં $r = 3,\ n = 7,\ x = 3x$ અને $a = \frac{1}{x}$ મૂકતાં,

ચોથુ પદ $=\ T_4 = 7_{C_3}(3x)^{7-3} . \left(-\frac{1}{x}\right)^{3}$

$= 35\ .\ (3x)^4 \left(-\frac{1}{x^3}\right)$

$= 35.\ (81)\ .\ x^4\left(-\frac{1}{x^3}\right)$

$= -\ 2835x$

પાંચમું પદ $=\ T_5 = 7_{C_4}(3x)^{7-4} . \left(-\frac{1}{x}\right)^{4}$

$= 35 \ . \ (3x)^3 \ . \ \left(\frac{1}{x^4}\right)$

$= (35 \times 27) \ x^3 \left(\frac{1}{x^4}\right)$

$= \frac{945}{x}$

ઉદાહરણ-10 : $\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં (i) x^2 નો સહગુણક (ii) અચળ પદ મેળવો.

જવાબ : $\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)^{10}$

$$T_{r+1} = 10_{C_r}\left(\frac{x}{3}\right)^{10-r}\left(\frac{3}{x}\right)^{r}$$

$$= 10_{C_r}\left(\frac{x^{10-r}}{3^{10-r}}\right)\left(\frac{3^r}{x^r}\right)$$

$$= 10_{C_r}\left(\frac{x^{10-2r}}{3^{10-2r}}\right) \qquad \text{— (I)}$$

(i) x^2 નો સહગુણક મેળવવો છે એટલે કે x ની ઘાતમાં 2 મુકવાના છે. જે સમી-(I) માંથી

$\therefore \ x^{10-2r} = x^2$

$\therefore \ 10 - 2r = 2$

$\therefore \ 2r = 8$

$r = 4$

$\therefore \ T_{r+1}$ માં $r = 4$ મુકતાં

$$T_5 = 10_{C_4}\left(\frac{x^{10-2(4)}}{3^{10-2(4)}}\right)$$

$= \frac{210}{9} . x^2$

$= \frac{70}{3}x^2$

$\therefore \ x^2$ નો સહગુણક $= \frac{70}{3}$

(ii) અચલ પદ શોધવા x ની ઘાત 0 લેવી પડે.

$\therefore\ x^{10-2r} = x^0$

$\therefore\ 10 - 2r = 0$

$\therefore\ 10 = 2r$

$\therefore\ r = 5$

(જો r ની કિંમત ધનપૂર્ણાંક ન હોય તો અચળ પદ શોધી શકાતું નથી.)

જે T_{r+1} માં મુકતાં અચલ પદ મળશે.

$$T_6 = 10_{C_5}\ \frac{x^{10-2(5)}}{3^{10-2(5)}}$$

$$= 10_{C_5}\ \frac{x^0}{3^0}$$

$= 210(1)$

$= 210$ જે અચલ પદ છે.

નોંધ : આ દાખલામાં આપણે x ની 2 ઘાત, x ની 0 ઘાત મુકી x^2 નો સહગુણક અને અચલપદ શોધ્યા તેવી જ રીતે x ની 1 ઘાત મુકી x નો સહગુણક તેમજ બીજી ગમે તે ઘાત (પ્લસ, માઈનસ બંને જેમ કે x^{-6}, x^6, ...) લઈને તેના સહગુણકો શોધી શકાય.

ઉદાહરણ-11 : કોઈ એક દ્વિપદી વિસ્તરણમાં

મધ્યમ પદ = $60K^3 = 1620$ હોય તો (K) ની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$60K^3 = 1620$

$$\therefore\ K^3 = \frac{1620}{60}$$

$\therefore\ K^3 = 27$

$\therefore\ K = 3$

1.8.6 સ્વાધ્યાય :

(1) $(a + 2x)^5$ નું વિસ્તરણ કરો.

(**જવાબ :** $a^5 + 10a^4 . x + 40a^3 . x^2 + 80a^2x^3 + 80ax^4 + 32x^5$)

(2) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^4$ નું વિસ્તરણ કરો.

(**જવાબ :** $\frac{a^4}{b^4} - \frac{4a^2}{b^2} + 6 - \frac{4b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}$)

(3) $(101)^5$ ની કિંમત શોધો.

(**જવાબ :** 10510100501)

(4) $(9.9)^5$ ની કિંમત શોધો.

(જવાબ : 95099.00499)

(5) $(1.9)^4$ ની કિંમત શોધો.

(જવાબ : 13.0321)

(6) $\left(\sqrt{5}+1\right)^5-\left(\sqrt{5}-1\right)^5$ ની કિંમત શોધો.

(જવાબ : 352)

(7) $\left(\frac{5a}{3}+\frac{3}{5a}\right)^{12}$ ના વિસ્તરણમાં પાંચમું પદ શોધો.

(જવાબ : $\frac{309375(a^4)}{81}$)

(8) $\left(\frac{2a}{5}-\frac{5}{2b}\right)^9$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદો શોધો.

(જવાબ : $T_5=\frac{252a^5}{5b^4}$ અને $T_6=\frac{315a^4}{b^5}$)

(9) $\left(\frac{x}{5}-\frac{5}{x}\right)^8$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ શોધો.

(જવાબ : $T_5=\frac{70x^2}{25}$)

(10) $\left(\frac{4a}{3}-\frac{3}{a}\right)^9$ ના વિસ્તરણમાં અચલ પદ શોધો.

(જવાબ : T_{r+1} = 1,45,152, r = 6)

(11) $\left(\sqrt{a}-\frac{3}{a}\right)^{12}$ ના વિસ્તરણમાં અચલ પદ શોધો.

(જવાબ : 40095)

(12) $\left(\frac{x}{b}-\frac{b}{x}\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં x^4 ઘાત વાળુ પદ શોધો અને x^4 નો સહગુણક જણાવો.

(જવાબ : $T_4=\frac{-120x^4}{b^4}$ અને સહગુણક = $\frac{-120}{b^4}$)

(13) $(3x^2-x)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં x^{16} નો સહગુણક શોધો.

(જવાબ : r = 4, સહગુણક = 1,53,090)

(14) $\left(x^3+\frac{1}{x^8}\right)^{11}$ ના વિસ્તરણમાં અચલ પદ શોધો.

(જવાબ : r = 3, T_4 = 165)

(15) $\left(5x^2 - \frac{5}{x}\right)^9$ ના વિસ્તરણમાં r ની કિંમત શોધો.

(જવાબ : 6)

(16) $\left(4x^2 - \frac{4}{x}\right)^7$ ના વિસ્તરણમાં અચલ પદ મળે છે ?

(જવાબ : અચલ પદ નથી $\therefore$ r ની કિંમત ઘનપૂર્ણાંક મળતી નથી.)

(17) ટૂંકમાં જવાબ લખો.

(i) કોઈ એક દ્વિપદી વિસ્તરણમાં છઠ્ઠું પદ = $20K^4$ = 320 હોય તો K ની કિંમત શોધો.

(જવાબ : K = 2)

(ii) દ્વિપદી પ્રમેલ લખો.

(iii) દ્વિપદી પદાવલી એટલે શું ?

(iv) $(x + a)^3$ નું વિસ્તરણ લખો.

(v) અચલ પદ એટલે શું ? તેનું સૂત્ર લખો.

(vi) મધ્યમ પદ કેવી રીતે શોધાય.

(vii) દ્વિપદી સહગુણાકો માટેનો પાસ્કલ ત્રિકોણ લખો.

1.9 ચાવીરૂપ શબ્દો

ક્રમચય – ગોઠવણી

સંચય – પસંદગી

nP_r – n વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓની ગોઠવણી

$^{n}C_r$ – n વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓની પસંદગી

n ! (n ફેક્ટોરીયલ) – n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ક્રમિક ગુણાકાર એટલે કે $1 \times 2 \times 3 \ldots\ldots \times (n-1) \times n$

સમરૂપ વસ્તુઓ – એક સરખી વસ્તુઓ

દ્વિપદી પદાવલી – જે પદમાં બે પદો આપેલા હોય તે પદાવલી

T_n – n મું પદ

T_{r+1} – સામાન્ય પદ

$T_{\frac{n}{2}+1}$ – મધ્યમ પદ

x ની શૂન્ય ઘાત લેતાં મળતું પદ – અચલ પદ

x નો સહગુણક – x સાથે ગુણાયેલો અંક દા.ત. $2x$ માં 2 એ સહગુણક છે.

★ ★ ★

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) 'Basic Statistics' Das and Gupta, Calcutta.

(2) Sancheti & Kapoor, 'Business Statistics', S Chaw & sons, New Delhi.

(3) Mathematics, R. D. Sharma, Dhanpat Rai Publications Pvt. Ltd., New Delhi.

એકમ 2	સંભાવના (Probability)

2.0 ઉદ્દેશ

2.1 પ્રાસ્તાવિક

2.2 સંભાવનાના કેટલાંક જરૂરી પદો

2.3 સંભાવનાની વ્યાખ્યાઓ

2.4 સંભાવનાના પ્રમેયો

2.5 ઉદાહરણો

2.6 બેઈઝનું પ્રમેય

(A) પ્રતીપ સંભાવના

(B) બેઈઝનું પ્રમેય

2.7 સ્વાધ્યાય

2.8 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો (MCQ's) જવાબ સહિત

2.9 ચાવીરૂપ શબ્દો

❍ સંદર્ભગ્રંથ

2.0 ઉદ્દેશ :

(1) વિદ્યાર્થીઓને સંભાવનાનો અર્થ, વ્યાખ્યા અને નિયમોની જાણકારી આપવી.

(2) સંભાવનાની મદદથી અર્થશાસ્ત્રના નિયમોની ઉપયોગીતા સમજવામાં મદદરૂપ થવાનો.

2.1 પ્રાસ્તાવિક :

સામાન્ય રીતે સંભાવનાનો ઉદ્‌ભવ જુગારની રમતમાંથી થયેલ છે. આંકડાશાસ્ત્ર અને અર્થશાસ્ત્રમાં સંભાવનાનો વ્યાપક પ્રમાણમાં ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જેને સંભાવનાના સિદ્ધાંતોનું જ્ઞાન ન હોય તેને માટે અંકશાસ્ત્ર કે અર્થશાસ્ત્ર સમજવું ખૂબ જ અઘરી બાબત છે. સંભાવનાના વિવિધ સિદ્ધાંતો રજૂ કરનારાઓમાં જેમ્સ બર્નોલી, ડી. મોઈવ્ર, બેઈઝ વગેરે ગણિતશાસ્ત્રીઓનો સમાવેશ કરવામાં આવેલ છે. ગણિતશાસ્ત્રીઓએ સંભાવનાના વિવિધ નિયમો કે સિદ્ધાંતો રજૂ કરવામાં સિંહ ફાળો ધરાવે છે.

સંભાવના અંગેની સમજ મેળવતા પહેલાં નીચેની ઘટનાઓ સમજીશું.

(1) ''ગુલાબના ફુલની ટોપલીમાંથી ચમેલીનું ફૂલ લેવામાં આવે છે.''

આ ઘટના અશક્ય છે. તેમ થવાની સંભાવના શૂન્ય છે.

(2) ''જેનો જન્મ થયો છે તેનું મૃત્યુ નિશ્ચિત છે.''

આ બનાવ નિશ્ચિત છે. પરંતુ તેનો સમય અનિયમિત છે. એટલે કે તેની આગાહી કરવી અશક્ય છે.

(3) "એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળવામાં આવે તો છાપ પડે અથવા કાંટો પડે."

આ બનાવની આગાહી કરવી અનિશ્ચિત છે.

(4) "કોઈપણ એક પાસો ઉછાળવામાં આવે તો નંબર બે પડે."

આ બનાવ નિશ્ચિત છે. પરંતુ તેની આગાહી કરવી અનિશ્ચિત છે.

આમ અનિશ્ચિત બનાવોની શક્યતા સંખ્યાના સ્વરૂપમાં દર્શાવવામાં આવે ત્યારે સંભાવનાનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

2.2 સંભાવનાના કેટલાક જરૂરી પદો :

સંભાવનાનો અર્થ કે વ્યાખ્યા જણાતા પહેલાં કેટલાક જરૂરી પદો સમજવા જરૂરી છે જે નીચે મુજબ છે.

(1) યદચ્છ પ્રયોગ (Random Experiment) :

"જે પ્રયોગમાં શક્ય વિવિધ પરિણામો પૈકી ગમે તે એક પરિણામ ઉદ્ભવી શકે તેવા પ્રયોગને યદચ્છ પ્રયોગ તરીકે ઓળખી શકાય."

એટલે કે જે પ્રયોગના શક્ય તમામ પરિણામો વિશે માહિતી હોય છે. પરંતુ પ્રયોગને અંતે કયુ પરિણામ આવશે તે કહી શકાતું નથી અને સમાન સંજોગોમાં પ્રયોગોનું સ્વતંત્ર રીતે પુનરાવર્તન પણ કરી શકાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે સિક્કો ઉછાળવામાં આવે તો તેને યદચ્છ પ્રયોગ કહી શકાય કે જેમાં છાપ અને કાંટો બે પરિણામો મળે છે. પરંતુ છાપ પડશે કે કાંટો તે કહી શકાતું નથી તેનું પુનરાવર્તન પણ શક્ય છે.

(2) નિદર્શ અવકાશ (Sample Space) :

કોઈપણ પ્રયત્ન કે પ્રયોગના બધા જ શક્ય પરિણામોના ગણને નિદર્શ અવકાશ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. સંકેતમાં તેને S વડે દર્શાવવામાં આવે છે. દા.ત. કોઈ એક સિક્કો ઉછાળવામાં આવે તો છાપ પડે અથવા કાંટો પડે. છાપને H વડે અને કાંટાને T વડે દર્શાવીએ તો બે નિદર્શ બિંદુઓ મળે તેને ગણમા નીચે મુજબ લખીએ તો તે ગણને નિદર્શ અવકાશ કહે છે.

$$S = \{H, T\}$$

તેવી જ રીતે બે સિક્કાઓ ઉછાળીએ તો નિદર્શ અવકાશ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ થાય.

નિદર્શ અવકાશને $\cup$ વડે પણ દર્શાવી શકાય છે.

(3) ઘટના (Events) :

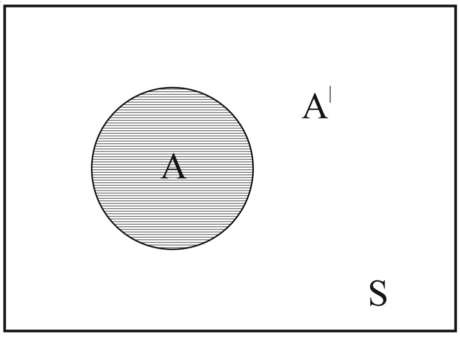
'નિદર્શ અવકાશનો ઉપગણ એટલે ઘટના.' દા.ત. ઉપર દર્શાવેલ નિદર્શ અવકાશ $S = \{H, T\}$ માં કુલ ચાર ઘટનાઓ છે. તેને ઉપગણ વડે નીચે મુજબ દર્શાવી છે.

$$\{\theta\}, \{H\}, \{T\}, \{H,T\} \text{ , જ્યાં } \{\theta\} = \text{ખાલીગણ}$$

તેને સંકેતમાં A, B, C, D .... Z જેવા અંગ્રેજી મૂળાક્ષરો વડે અથવા E_1, E_2, E_3 .... વડે દર્શાવી શકાય. અહીં ઉપગણ (ઘટના) $A = \theta$ હોય તો A અશક્ય ઘટના છે. અને જો ઉપગણ (ઘટના) $A = S$ અથવા $\cup$ હોય તો A ને ચોક્કસ ઘટના તરીકે ઓળખી શકાય.

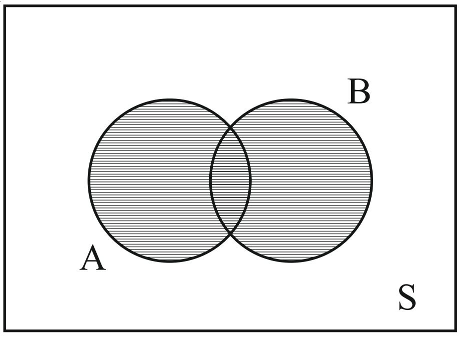
(4) **પૂરક ઘટના (Complementary Event) :**

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ નિદર્શ અવકાશ (S) માં ઘટના A બને તે માટે અનુકૂળ હોય તો A સિવાયના નિદર્શ અવકાશ S ના બધા જ ઘટકોથી બનતા ગણને ઘટના A ની પૂરક ઘટના કહે છે અને તે $A^{|}$ અથવા $\overline{A}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. દા.ત. એક સિક્કો ઉછાળીએ અને છાપ પડવાની ઘટનાને A વડે દર્શાવીએ તો કાંટો પડવાની ઘટનાને A ની પૂરક ઘટના $A^{|}$ કહે છે.



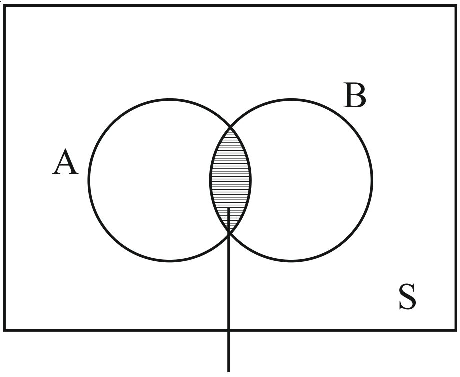
(5) **બે ઘટનાઓનો યોગ (Union of Two Events) :**

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ S એ નિદર્શ અવકાશ હોય અને A અને B એ તેના ઉપગણો હોય તો ઘટના A અને B ના યોગને $A \cup B$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. બે ઘટનાઓનો યોગ $(A \cup B)$ માં A અથવા B અથવા A અને B બંને નિદર્શ બિંદુઓને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. આમ $(A \cup B)$ માં A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના ઉદ્ભવે છે.



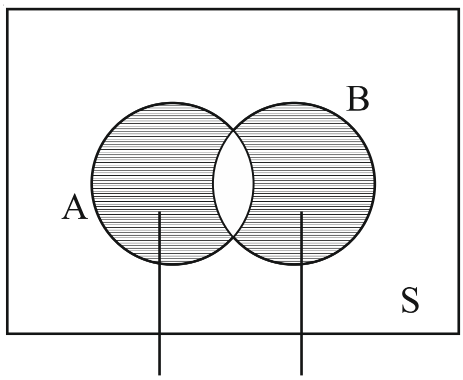
(6) **બે ઘટનાઓનો છેદ (Intersection of Two Events) :**

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ S એ નિદર્શ અવકાશ હોય અને A અને B એ તેના ઉપગણો હોય તો ઘટના A અને B ના છેદને $A \cap B$ વડે દર્શાવામાં આવે છે. $A \cap B$ માં A અને B બંનેમાં સામાન્ય હોય તેવા નિદર્શ બિંદુઓને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. આમ $A \cap B$ માં A અને B એક સાથે ઉદ્ભવે છે.



(7) **તફાવત ઘટના (Different Event) :**

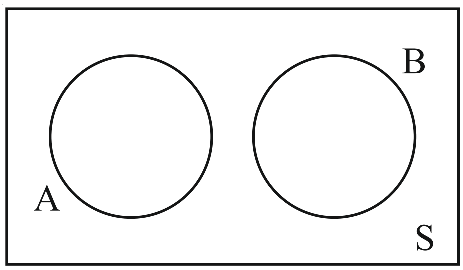
આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ S એ નિદર્શ અવકાશ હોય અને A અને B એ તેના ઉપગણો હોય તો ઘટનાઓ A અને B માંથી કોઈ એક ઘટના A બને અને B ન બને તો તેને A અને B ની તફાવત (A – B) ઘટના કહે છે. તેને સંકેતમાં $(A \cap B^{|})$ વડે દર્શાવી શકાય. એટલે કે $(A-B) = (A \cap B^{|})$. તેવી જ રીતે ઘટનાઓ A અને B માંથી કોઈ એક ઘટના B બને અને A ન બને તો તેને B અને A ની તફાવત (B – A) ઘટના કહે છે. તેને સંકેતમાં $(A^{|} \cap B)$ વડે દર્શાવી શકાય એટલે કે $(B-A) = (A^{|} \cap B)$.



(8) સમસંભાવી ઘટનાઓ (Equally, Likely Events) :

કોઈ એક યદચ્છ પ્રયત્ન કે પ્રયોગમાં જ્યારે બે ઘટનાઓમાંથી કોઈ એક ઘટના બનવાની શક્યતા બીજી ઘટના બનવાની શક્યતા કરતાં ઓછી કે વધુ હોવાનું કોઈ કારણ ન હોય ત્યારે તેવી બે ઘટનાઓને સમસંભાવી ઘટના કહે છે. દા.ત. 52 પત્તાની એક જોડને સારી રીતે ચીપી લેવામાં આવે અને ત્યાર બાદ તેમાંથી એક પત્તુ ખેંચવામાં આવે તો તેથી પ્રાપ્ત થતી 52 ઘટનાઓને સમસંભાવી ઘટનાઓ કહે છે.

(9) પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ (Mutually Exclusive Events) :



આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ S એ નિદર્શ અવકાશ હોય અને A અને B તેના ઉપગણો હોય અને ઘટના A બનવાથી બાકીની ઘટના B બની શકતી નથી એવું નિવારણ મળી જાય તો તે ઘટનાઓને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહે છે. જો A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો $P(A \cap B) = \phi$ (ખાલીગણ) અને $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ થાય.

(10) નિઃશેષ ઘટનાઓ (Exhaustive Events) :

નિદર્શ અવકાશ (S)માં સમાયેલા તમામ નિદર્શ બિંદુઓને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહે છે. એટલે કે કોઈ એક યાદચ્છિક પ્રયોગ કે પ્રયત્નમાં બધા જ શક્ય પરિણામોને નિઃશેષ ઘટના કહે છે. દા.ત. એક સિક્કો ઉછાળવામાં આવે તો બે પરિણામો મળે {H, T} તેને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહેવાય. તેવી જ રીતે કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે $A \cup B = S$ (નિદર્શ અવકાશ) થાય તો A અને B નિઃશેષ ઘટનાઓ કહેવાય.

(11) સાનુકૂળ બનાવો (Favourable Events) :

યાદચ્છિક પ્રયોગના શક્ય એટલા બધા જ પરિણામોમાંથી જે પરિણામો કોઈ એક ઘટનાની પ્રાપ્તિ માટે અનુકૂળ હોય તો તે પરિણામોને તે ઘટના માટેના સાનુકૂળ કે અનુકૂળ પરિણામો કહે છે. દા.ત. 52 પત્તાની એક જોડમાંથી એક પત્તુ ખેંચવામાં આવે તો તે પત્તુ ફલ્લીનું હોય તે માટેના સાનુકૂળ બનાવો 13 છે.

(12) નિરપેક્ષ ઘટનાઓ (Independent Events) :

જો કોઈ એક ઘટનાના પરિણામો બીજી ઘટનાના પરિણામો ઉપર આધારિત ન હોય એનો અર્થ એ થાય કે બંને ઘટનાઓ સ્વતંત્ર રીતે ઉદ્ભવતી હોય. તો તેવી ઘટનાઓને નિરપેક્ષ ઘટનાઓ કહે છે. નિરપેક્ષ ઘટનાઓને સ્વતંત્ર ઘટના તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. દા.ત. એક સિક્કો ઉછાળતા છાપ પડે તે અને પાસો ઉછાળતા મળતા પરિણામો પૈકી જે પરિણામ મળે તે બંને એકબીજાથી સ્વતંત્ર હોય છે.

(13) સંયુક્ત ઘટના (Compound Event) :

જ્યારે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ સાથે બને ત્યારે તે ઘટનાને સંયુક્ત ઘટના કહેવામાં આવે છે અને તેની સંભાવનાને સંયુક્ત સંભાવના કહે છે.

2.3 સંભાવનાની વ્યાખ્યાઓ [Definations of Probability] :

સંભાવનાની અલગ અલગ ત્રણ વ્યાખ્યાઓ નીચે મુજબ છે.

(A) ગાણિતિક વ્યાખ્યા (Mathematical Defination)

(B) સાંખ્યિકીય વ્યાખ્યા (Statistical Defination)

(C) આધુનિક વ્યાખ્યા (Modern Defination)

(A) ગાણિતિક વ્યાખ્યા :

સંભાવનાની ગણિતીય વ્યાખ્યાઓને પૂર્વસ્વીકૃત અથવા પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે જે નીચે મુજબ છે.

"જો કોઈપણ યાદચ્છિક પ્રયોગમાં સમસંભાવી, નિઃશેષ અને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓની કુલ સંખ્યા = n હોય અને તેમાંથી m બનાવો, કોઈ એક ઘટના $A^{|}$ ને સાનુકૂળ હોય તો તે ગુણોત્તર m/n ને ઘટના A બનવાની સંભાવના કહેવાય છે." તેને સંકેતમાં P(A) વડે દર્શાવાય.

એટલે કે,

P(A) = ઘટના A બનવાની સંભાવના

$$= \frac{m}{n}$$

જ્યાં m = સાનુકૂળ બનાવો

n = કુલ બનાવો

અને $0 \leq m \leq n$

તથા $0 \leq P(A) \leq 1$ થાય.

આમ કોઈપણ ઘટનાની સંભાવના હંમેશા 0 થી 1 સુધીની જ હોય છે.

જો P(A) = 0 હોય તો A અશક્ય ઘટના કહેવાય અને P(A) = 1 હોય તો A ચોક્કસ ઘટના છે. એમ કહેવાય. ઉપરાંત જો ઘટના A ની પ્રાપ્તિને સાનુકૂળ ઘટનાઓની સંખ્યા = m હોય તો તેને સાનુકૂળ ન હોય તેવી ઘટનાઓની સંખ્યા = $n - m$ થાય.

$\therefore$ ઘટના A ન બને તેની સંભાવના $= P(A^{|}) = \frac{n-m}{n}$

$$= \frac{n}{n} - \frac{m}{n}$$

$$= 1 - \frac{m}{n}$$

$P(A^{|}) = 1 - P(A)$ થાય.

$\therefore\ P(A) + P(A^{|}) = 1$

આમ ઘટના A બનવાની અને ઘટના A ન બનવાની સંભાવનાનો સરવાળો 1 થાય છે.

(B) સાંખ્યિકીય વ્યાખ્યા :

"જો કોઈ એક યદચ્છ પ્રયોગને n વખત પુનરાવર્તન કરવમાં આવે અને તેમાં કોઈ એક ઘટના m પ્રકારે બનતી હોય તો તેનો ગુણોત્તર m/n મળે. તેને આવૃત્તિ ગુણોત્તર કહેવાય. આ ગુણોત્તર કોઈ એક ચોક્કસ લક્ષ (Limit) ને અનુલક્ષી કોઈ એક અચલ સંખ્યા પ્રાપ્ત કરે તો આ અચલ સંખ્યાને ઘટનાની સાંખ્યિકીય સંભાવના કહે છે." તેને સંકેતમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.

ઘટના A બનવાની સંભાવના $P(A) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{m}{n}\right) = P$, જ્યાં $\frac{m}{n}$ = અચલ સંખ્યા

અહીં પણ ઘટનાની સફળતાની સંભાવના અને નિષ્ફળતાની સંભાવનાનો સરવાળો 1 થાય છે અને સંભાવનાની કિંમત 0 અને 1ની વચ્ચે જ હોય છે.

(C) આધુનિક વ્યાખ્યા :

સંભાવનાની આધુનિક વ્યાખ્યા કોલ્મોગોરોવ (Kolmogorov) નામના રશિયન અર્થશાસ્ત્રીએ નીચે મુજબ આપેલ છે.

"ધારો કે યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ = S હોય અને તેનો ઉપગણ ($A \subset S$) સાથે સંકળાયેલ તેની સંભાવના P(A) કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, અને જો તે નીચેની પૂર્વ ધારણાઓને સંતોષે તો તેને ઘટના Aની સંભાવના કહે છે."

પૂર્વધારણા - 1 $0 \le P(A) \le 1$

પૂર્વધારણા - 2 $P(S) = 1$

પૂર્વધારણા - 3 જો E_1, E_2, E_3, E_4 .... એ નિદર્શ અવકાશ S ની પરસ્પર નિવારક સાન્ત અથવા અનંત ઘટનાઓ હોય તો,

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \text{ ....}) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) \text{ ....}$

2.4 સંભાવનાના પ્રમેયો [Theroem of Probability] :

કેટલાક જરૂરી સંભાવનાના પ્રમેયો અને તેના પરિણામો નીચે મુજબ છે.

પ્રમેય-1 :

જો P(A) એ ઘટના A ની પ્રાપ્તિની સંભાવના હોય તો,

$$P(A^|) = 1 - P(A)$$

જ્યાં P(A) = ઘટના A બનવાની સંભાવના અને $P(A^|)$ = ઘટના A ન બનવાની સંભાવના.

પ્રમેય-2 :

(i) જો A અને B બે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

જ્યાં, P(A) = ઘટના A બનવાની સંભાવના

P(B) = ઘટના B બનવાની સંભાવના

$P(A \cup B)$ = ઘટના A અને B બે પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બનવાની સંભાવના એટલે કે ફક્ત ઘટના A બને અથવા ફક્ત ઘટના B બને અથવા A અને B બંને બને તેની સંભાવના.

(ii) જો A_1, A_2, A_3 .... A_n વગેરે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો,

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \text{ .... } \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \text{ .... } + P(A_n)$

(iii) જો A_1, A_2, A_3 .... A_n વગેરે પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ હોય તો,

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \text{ .... } \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \text{ .... } + P(A_n) = 1$

(iv) $P(A \cup B) = 1 - P(A^| \cap B^|)$

જ્યાં $P(A^| \cap B^|)$ = ઘટના A અને B બંને ન બને તેની સંભાવના.

પ્રમેય-3 (સંભાવનાના સરવાળાનું પ્રમેય) :

(i) જો A અને B એ બે ઘટનાઓ હોય તો,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

જ્યાં, $P(A)$ = ઘટના A બનવાની અને $P(B)$ ઘટના B બનવાની સંભાવના

$P(A \cap B)$ = ઘટના A અને B સાથે બને તેની સંભાવના

(ii) જો A, B, C એ કોઈ ઘટનાઓ હોય તો,

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$

$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

જ્યાં $P(A)$, $P(B)$ અને $P(C)$ એ અનુક્રમે ઘટના A, B અને C બનવાની સંભાવના છે. જ્યારે $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$ અને $P(A \cap B \cap C)$ એ અનુક્રમે ઘટના A અને B, ઘટના A અને C, ઘટના B અને C તથા ઘટના A અને B અને C સાથે બંને તેની સંભાવનાઓ છે.

પ્રેમય-4 (સંભાવનાના ગુણાકારના પ્રમેય) :

(i) જો A અને B બે ઘટનાઓ હોય તો,

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A)$$

જ્યાં, $P(A \cap B)$ = ઘટના A અને B સાથે બંને તેની સંભાવના.

$P(A)$ = ઘટના A બને તેની સંભાવના

$P(B/A)$ = ઘટના A પ્રાપ્ત થઈ છે. એ શરતે ઘટના B બનવાની સંભાવના

એટલે કે,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{જ્યાં } P(A) \neq 0$$

જેને શરતી સંભાવના તરીકે ઓળખી શકાય છે.

અથવા

$$P(A \cap B) = P(B) \,.\, P(A/B)$$

જ્યાં $P(B)$ = ઘટના B બને તેની સંભાવના

$P(A/B)$ = ઘટના B પ્રાપ્ત થઈ છે એ શરતે ઘટના A બનવાની સંભાવના

એટલે કે,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{જ્યાં } P(B) \neq 0$$

જેને શરતી સંભાવના તરીકે ઓળખી શકાય.

(ii) જો A અને B બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો,

$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$ થાય તેથી

(iii) જો A અને B બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો,

$P(A^{|} \cap B^{|}) = P(A^{|}) \, . \, P(B^{|})$

જ્યાં $P(A^{|} \cap B^{|})$ = ઘટના A અને B બંને ન બને તેવી સંભાવના

(iv) જો A અને B બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો,

$P(A \cup B) + P(A^{|} \cap B^{|}) = 1$ થાય.

(v) $P\left(\frac{A^{|}}{B}\right) = \frac{P(A^{|} \cap B)}{P(B)}$

જ્યાં $P(A^{|} \cap B)$ = ઘટના A ન બને અને ઘટના B બને તેની સંભાવના

(vi) $P\left(\frac{B^{|}}{A}\right) = \frac{P(A \cap B^{|})}{P(A)}$

જ્યાં $P(A \cap B^{|})$ = ઘટના A બને અને ઘટના B ન બને તેની સંભાવના

2.5 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 :

એક બંડલમાં 5 લાલ અને 4 લીલા પતંગો છે. તો તેમાથી એક લાલ પતંગ લેવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

કુલ નિઃશેષ બનાવો = $n = 5 + 4 = 9$

લાલ પતંગ માટે સાનુકૂળ બનાવો = 5

$\therefore$ લાલ પતંગ મળે તેની સંભાવના = $\frac{m}{n} = \frac{5}{9}$

ઉદાહરણ-2 :

એક સમઘન પાસાને ઉછાળતા 2, 4, 6 (બેકી) સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

પાસો ઉછાળીએ તો 1, 2, 3, 4, 5, 6 એમ કુલ 6 નિઃશેષ બનાવો મળે.

$\therefore n = 6$

બેકી સંખ્યા મેળવવા માટે સાનુકૂળ બનાવો 2, 4, 6

$\therefore m = 3$

$\therefore$ બેકી સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના = $\frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 1/2$

ઉદાહરણ-3 :

પત્તાની એક જોડમાંથી બે પત્તા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે તો તે બંને પત્તા એક્કાના હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

52 પત્તામાંથી બે પત્તા 52_{C_2} રીતે લેવાય

$\therefore$ કુલ બનાવો = $n = \frac{52 \times 51}{2} = 1326$

પત્તાની જોડમાં એક્કાની કુલ સંખ્યા 4 હોય તેમાંથી 2 એક્કા $^4C_2$ રીતે લેવાય.

$\therefore$ બે એક્કા માટે સાનુકૂળ બનાવો = $\frac{4 \times 3}{2} = 6$

$\therefore$ બંને પત્તા એક્કાના હોય તેની સંભાવના = $\frac{m}{n} = \frac{6}{1326} = 0.0045$

ઉદાહરણ-4 :

બે સમઘન પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો અંકોનો સરવાળો '7' મળવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

બે સમઘન પાસા ઉછાળવામાં આવે તો કુલ નિ:શેષ બનાવો = $6^2 = 36$

$\therefore n = 36$

પાસા ઉપર આવતા અંકનો સરવાળો '7' મળે તે માટેના સાનુકૂળ બનાવો

(1, 6) (2, 5) (3, 4) (4, 3) (5, 3) (6, 1) એમ કુલ 6

$\therefore m = 6$

$\therefore$ સંભાવના = $\frac{m}{n} = \frac{6}{36} = 1/6$

ઉદાહરણ-5 :

એક સિક્કો;

10 વખત ઉછાળતા 2 વખત છાપ મળે.

30 વખત ઉછાળતા 10 વખત છાપ મળે.

50 વખત ઉછાળતા 18 વખત છાપ મળે.

100 વખત ઉછાળતા 36 વખત છાપ મળે.

500 વખત ઉછાળતા 178 વખત છાપ મળે.

1000 વખત ઉછાળતા 359 વખત છાપ મળે.

તો તે ઉપરથી સાંખ્યિકીય સંભાવના શોધો.

જવાબ :

10 વખત ઉછાળતા 2 વખત છાપ મળે = $\frac{2}{10} = 0.2$

30 વખત ઉછાળતા 10 વખત છાપ મળે = $\frac{10}{30} = 0.33$

50 વખત ઉછાળતા 18 વખત છાપ મળે = $\frac{18}{50} = 0.36$

100 વખત ઉછાળતા 36 વખત છાપ મળે = $\frac{36}{100} = 0.36$

500 વખત ઉછાળતા 178 વખત છાપ મળે = $\frac{178}{500} = 0.36$

1000 વખત ઉછાળતા 359 વખત છાપ મળે = $\frac{359}{1000} = 0.36$

આમ છેલ્લી ચાર સંભાવના 0.36 છે એટલે કે અચલ છે. તેથી સાંખ્યિકીય સંભાવના = 0.36

ઉદાહરણ-6 :

સારી રીતે ચીપેલા 52 પત્તાની એક જોડમાંથી બે પત્તા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે તો;

(i) એક બાદશાહ અને એક ગુલામ હોવાની સંભાવના

(ii) એક પત્તુ કાળીનું અને એક પત્તુ ફલ્લીનું હોવાની સંભાવના

(iii) બંને પત્તા ફલ્લીના હોવાની સંભાવના

(iv) બંને પત્તા એક જ રંગના હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

52 પત્તાને ચીપી યદચ્છ રીતે બે પત્તા 52_{C_2} રીતે લેવાય.

$\therefore$ કુલ બનાવો = $n = \frac{52 \times 51}{2} = 1326$

(i) એક બાદશાહ અને એક ગુલામ હોવા માટેના સાનુકૂળ

બનાવો = $4_{C_1} \times 4_{C_1} = 4 \times 4 = 16$

$\therefore m = 16$

$\therefore$ સંભાવના = $\frac{169}{1326} = 0.1275$

(ii) એક પત્તુ કાળીનું અને એક પત્તુ ફલ્લીનું હોવા માટેના સાનુકૂળ

બનાવો = $13_{C_1} \times 13_{C_1} = 13 \times 13 = 169$

$\therefore m = 169$

$\therefore$ સંભાવના $\frac{169}{1326} = 0.1275$

(iii) બંને પત્તા ફલ્લીના હોવા માટેના સાનુકૂળ બનાવો = $13_{C_2} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$

$\therefore m = 78$

$\therefore$ સંભાવના = $\frac{78}{1326} = 0.0588$

(iv) બંને પત્તા એક જ રંગના હોવા માટેના સાનુકૂળ બનાવો એટલે કે બંને પત્તા કાળીના હોય અથવા બંને લાલના હોય અથવા બંને ફુલ્લીના હોય અથવા બંને ચરકટના હોય તે માટેના અનુક્રમ બનાવો

$= {}^{13}C_2 + {}^{13}C_2 + {}^{13}C_2 + {}^{13}C_2$

$= 78 + 78 + 78 + 789$

$m = 312$

$\therefore$ સંભાવના $= \frac{312}{1326} = 0.2353$

ઉદાહરણ-7 :

ત્રણ પાસાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો ત્રણે પર મળતા અંકોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો '17' આવે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

3 પાસા ઉછાળવામાં આવે તો કુલ બનાવો

$n = 6^3 = 216$

અંકોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો '17' આવવાના સાનુકૂળ બનાવો = સરવાળો '17' આવવાના સાનુકૂળ બનાવો + સરવાળો '18' આવવાના સાનુકૂળ બનાવો હવે સરવાળો '17' આવવાના સાનુકૂળ બનાવો નીચે મુજબ છે.

(5, 6, 6) (6, 5, 6) (6, 6, 5) = 3 બનાવો

સરવાળો '18' આવવાના સાનુકૂળ બનાવો નીચે મુજબ છે.

(6, 6, 6) = 1 બનાવ

$\therefore$ સાનુકૂળ બનાવો $(m) = 3 + 1 = 4$

$\therefore$ સંભાવના $= \frac{4}{216} = 0.0185$

ઉદાહરણ-8 :

બે પાસાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો બંને અંકો પર મળતા અંકોનો સરવાળો વધુમાં વધુ 5 આવે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

બે પાસા ઉછાળવામાં આવે તો કુલ બનાવો

$n = 6^2 = 36$

અંકોનો સરવાળો વધુમાં વધુ '5' મેળવવાના સાનુકૂળ બનાવો =

સરવાળો 2 મળે તેવા બનાવો = (1, 1) = 1

+ સરવાળો 3 મળે તેવા બનાવો = (1, 2) (2, 1) = 2

+ સરવાળો 4 મળે તેવા બનાવો = (1, 3) (3, 1) (2, 2) = 3

+ સરવાળો 5 મળે તેવા બનાવો = (1, 4) (4, 1) (2, 3) (3, 2) = 4

$\therefore m = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$\therefore$ સંભાવના = $\frac{10}{36} = \frac{5}{18} = 0.2778$

ઉદાહરણ-9 :

ત્રણ કોથળીઓ ઉપર A, B અને C લખેલ છે. A કોથળીમાં 2 સફેદ અને 3 લાલ દડા છે. B કોથળીમાં 4 સફેદ અને 1 લાલ દડો છે. C કોથળીમાં 4 સફેદ અને 6 લાલ દડા છે. દરેક કોથળીમાંથી એક દડો પસંદ કરવામાં આવે તો પસંદ કરેલ ત્રણ દડાના સમૂહમાં;

(1) બધા દડા સફેદ હોય.

(2) બધા દડા લાલ હોય.

(3) બે દડા સફેદ અને 1 દડો લાલ હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

કોથળી	**સફેદ દડા**	**લાલ દડા**	**કુલ**
A	$2 = W_1$	$3 = R_1$	5
B	$4 = W_2$	$1 = R_2$	5
C	$4 = W_3$	$6 = R_3$	10

કોથળી	**સફેદ દડો પસંદ થાય તેની સંભાવના** = $\frac{m}{n}$	**લાલ દડો પસંદ થાય તેની સંભાવના** = $\frac{m}{n}$
A	$P(W_1) = 2/5$	$P(R_1) = 3/5$
B	$P(W_2) = 4/5$	$P(R_2) = 1/5$
C	$P(W_3) = 2/5$	$P(R_3) = 3/5$

(i) બધા દડા સફેદ હોય તેની સંભાવના

$= P(W_1 \cap W_2 \cap W_3) = P(W_1).P(W_2).P(W_3)$

$= \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{16}{125}$

(ii) બધા દડા લાલ હોય તેની સંભાવના

$= P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1).P(R_2).P(R_3)$

$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{5}$

$= \frac{9}{125}$

(iii) બે સફેદ દડા અને એક લાલ દડો હોય તેની સંભાવના

$$= P(W_1 \cap W_2 \cap R_3) \cup P(W_1 \cap R_2 \cap W_3) \cup P(R_1 \cap W_2 \cap W_3)$$

$$= \left[P(W_1) \,.\, P(W_2) \,.\, P(R_3)\right] + \left[P(W_1) \,.\, P(R_2) \,.\, P(W_3)\right]$$

$$+ \left[P(R_1) \,.\, P(W_2) \,.\, P(W_3)\right]$$

$$= \left[\frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{5}\right] + \left[\frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5}\right] + \left[\frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{5}\right]$$

$$= \frac{24}{125} + \frac{4}{125} + \frac{24}{125}$$

$$= \frac{52}{125} = 0.416$$

ઉદાહરણ-10 :

એક કુટુંબમાં 2 છોકરા અને 3 છોકરીઓ છે. બીજા કુટુંબમાં 3 છોકરા અને 2 છોકરી છે. જો બેમાંથી એક કુટુંબ પસંદ કરી તેમાંથી બે બાળકો પસંદ કરવામાં આવે તો પસંદ કરેલ બંને બાળકો છોકરા હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

કુટુંબ	છોકરા	છોકરી	કુલ
I	2	3	5
II	3	2	5

બંને કુટુંબમાંથી કોઈ એક કુટુંબની પસંદગી થાય તેની સંભાવના = $1/2$

પ્રથમ કુટુંબ પસંદ થાય તેમાં બંને છોકરા હોય તેની સંભાવના = $\frac{{}^{2}C_2}{{}^{5}C_2} = \frac{1}{10}$

બીજું કુટુંબ પસંદ થાય તેમાં બંને છોકરા હોય તેની સંભાવના = $\frac{{}^{3}C_2}{{}^{5}C_2} = \frac{3}{10}$

$$\therefore \text{ સંભાવના } = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{10}\right)$$

$$= \frac{2}{10} = 1/5$$

બીજી રીત

બે કુટુંબોને અનુક્રમે A અને B અને બે છોકરાઓની ઘટનાને R ધારી લઈએ તો,

$P(A) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{1}{2}$

$\therefore\ PR = P(A \cap R) + P(B \cap R)$

$= P(A).\left(R/A\right) + P(B).\left(R/B\right)$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2_{C_2}}{5_{C_2}}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3_{C_2}}{5_{C_2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{3}{20}$$

$$= \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

ઉદાહરણ-11 :

5 પુસ્તકો એક હારમાં ગોઠવતા અમુક બે ચોક્કસ પુસ્તકો એક સાથે ન આવે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

5 પુસ્તકોને એક હારમાં $5P_5 = 5! = 120$ રીતે ગોઠવાય.

બે પુસ્તકોને અંદર અંદર $2! = 2$ રીતે ગોઠવાય. બે પુસ્તકને એક યુનીટ ગણતા બાકીના 4 પુસ્તકો $4P_4 = 4! = 24$ રીતે ગોઠવાય.

$\therefore$ કુલ રીતો $= 2 \times 24 = 48$

$\therefore$ બે પુસ્તકો સાથે ન આવે તે માટેના અનુકૂળ (સાનુકૂળ) બનાવો $= 120 - 48$

$= 72$

$\therefore$ બે ચોક્કસ પુસ્તકો સાથે ન આવે તેની સંભાવના $= \dfrac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \dfrac{72}{120} = 0.6$

ઉદાહરણ-12 :

ત્રણ વ્યક્તિ x, y અને z એક સાથે નિશાન તાકે છે. તેમની સફળતાની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ અને $\frac{1}{3}$ છે. તો નિશાન વીંધવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

ધારો કે, ત્રણ વ્યક્તિઓ x, y, z ને અનુક્રમે A, B અને C ધારી લઈએ તો,

A નિશાન વીંધવામાં સફળ થાય તેની સંભાવના $P(A) = \frac{1}{2}$

A નિશાન વીંધવામાં સફળ ન થાય તેની સંભાવના $P(A^{|}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

B નિશાન વીંધવામાં સફળ થાય તેની સંભાવના $P(B) = \frac{2}{3}$

B નિશાન વીંધવામાં સફળ ન થાય તેની સંભાવના $P(B^{|}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

C નિશાન વીંધવામાં સફળ થાય તેની સંભાવના $P(C) = \frac{1}{3}$

C નિશાન વીંધવામાં સફળ ન થાય તેની સંભાવના $P(C^{|}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

ત્રણેય નિશાન વીંધવામાં સફળ ન થાય તેની સંભાવના $= P(A^{|} \cap B^{|} \cap C^{|})$

$= P(A^{|}) \, . \, P(B^{|}) \, . \, P(C^{|})$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$

$= \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

ત્રણેય નિશાન વીંધવામાં સફળ થાય તેની સંભાવના $= P(A \cup B \cup C)$

$= 1 - P(A^{|} \cap B^{|} \cap C^{|})$

$= 1 - \frac{1}{9}$

$= \frac{8}{9}$

ઉદાહરણ-13 :

એક વિદ્યાર્થી તર્કશાસ્ત્ર અને અર્થશાસ્ત્ર એમ બે વિષયની પરીક્ષા આપે છે. તે બંને વિષયની પરીક્ષામાં પાસ થાય તેની સંભાવના $\frac{23}{45}$ છે. તે અર્થશાસ્ત્ર વિષયની પરીક્ષામાં પાસ થાય તેની સંભાવના $3/5$ છે અને તે બેમાંથી ઓછામાં ઓછા કોઈ એક વિષયમાં પાસ થાય તેની સંભાવના $1/3$ છે. તો તે વિદ્યાર્થી તર્કશાસ્ત્ર વિષયમાં પાસ થાય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

ધારો કે, તર્કશાસ્ત્ર = A અને અર્થશાસ્ત્ર = B

$\therefore$ તર્કશાસ્ત્રમાં પાસ થવાની સંભાવના = P(A) = ?

અર્થશાસ્ત્રની પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના = $P(B) = \frac{3}{5}$

બંને પરીક્ષામાં પાસ થાય તેની સંભાવના = $P(A \cup B) = \frac{23}{45}$

ઓછામાં ઓછી એક પરીક્ષામાં પાસ થાય તેની સંભાવના = $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{1}{3} = P(A) + \frac{3}{5} - \frac{23}{45}$

$\therefore P(A) = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{23}{45}$

$= \frac{15-27+23}{45}$

$= \frac{11}{45}$

ઉદાહરણ-14 :

A અને B વ્યક્તિઓ પૈકી A અમુક વર્ષ સુધી જીવી જાય તેની તરફેણમાં પ્રમાણ 3 : 2 જ્યારે B અમુક વર્ષ સુધી જીવી જાય તેની વિરૂદ્ધમાં પ્રમાણ 2 : 5નો બંનેમાંથી ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ જીવી જાય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

A $\rightarrow$ જીવે : મરે　　B $\rightarrow$ મરે : જીવે

3 : 2 = 5　　2 : 5 = 7

A વ્યક્તિ જીવી જાય તેની સંભાવના = $\frac{3}{5}$ = P(A)

B વ્યક્તિ જીવી જાય તેની સંભાવના = $\frac{5}{7}$ = P(B)

બંને વ્યક્તિમાંથી એક વ્યક્તિ જીવી જાય તેની

સંભાવના = $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{3}{5} + \frac{5}{7} - \left(\frac{3}{5} \times \frac{5}{7}\right)$ $\because$ A અને B સ્વતંત્ર ઘટનાઓ છે. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$= \frac{3}{5} + \frac{5}{7} - \frac{15}{35}$

$= \frac{21 + 25 - 15}{35}$

$= \frac{31}{35}$

ઉદાહરણ-15 :

એક કોથળીમાં 7 વાદળી અને કેટલાક કાળા દડા છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે વાદળી દડા લેવાની સંભાવના $\frac{1}{15}$ છે તો કાળા દડાની સંખ્યા શોધો.

જવાબ :

ધારો કે, કાળા દડા = x

$\therefore$ 7 વાદળી અને x કાળા દડાનો સરવાળો = $(7 + x)$ કુલ દડા

તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે દડા લેવામાં આવે તો તેની કુલ રીતો = $(7 + x)_{C_2}$ = કુલ બનાવો = n

x કાળા દડામાંથી 2 દડા લેવાની કુલ રીતો = x_{C_2} = m = સાનુકૂળ બનાવો

સંભાવના = $\frac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}}$

$$\frac{1}{15} = \frac{x_{C_2}}{(7 + x)_{C_2}}$$

$$\frac{1}{15} = \frac{\frac{x(x-1)}{2}}{\frac{(7 + x)\,(6 + x)}{2}} \quad , \quad \frac{1}{15} = \frac{x(x-1)}{(7+x)(6+x)}$$

$(7 + x)\ (6 + x) = 15x(x - 1)$

$x^2 + 7x + 6x + 42 = 15x^2 - 15x$

$\therefore\ 15x^2 - 15x - 13x - x^2 - 42 = 0$

$14x^2 - 28x - 42 = 0$ .... 14 વડે ભાગતા

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x^2 - 3x + x - 3 = 0$

$x(x - 3) + 1(x - 3) = 0$

$(x - 3)$ અથવા $(x + 1) = 0$

$\therefore\ x = 3$

ઉદાહરણ-16 :

જો A અને B બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય અને $P(A) = \frac{1}{3}$ અને $P(B) = \frac{1}{4}$ હોય તો $P(A \cup B)$ શોધો.

જવાબ :

$P(A) = \frac{1}{3},\ P(B) = \frac{1}{4},\ P(A \cup B) = ?$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - [P(A)\ .\ P(B)] \qquad \because\ \text{A, B એ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left[\tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{4 + 3 - 1}{12} = \frac{6}{12} = \tfrac{1}{2}$$

ઉદાહરણ-17 :

જો A, B અને C ત્રણ પરસ્પર અને નિઃશેષ ઘટનાઓ હોય અને $4P(A) = 3P(B) = 2P(C) = K$ હોય તો (i) $P(A \cup B)$ અને (ii) $P(B \cup C)$ હોય તો (iii) $P(A \cup C)$ શોધો.

જવાબ :

$4P(A) = 3P(B) = 2P(C) = K$

$\therefore\ 4P(A) = K,$	$3P(B) = K,$	$2P(C) = K$
$\therefore\ P(A) = \frac{K}{4},$	$P(B) = \frac{K}{3},$	$P(B) = \frac{K}{2}$

વ્યાખ્યા અનુસાર A, B અને C ત્રણ પરસ્પર અને નિઃશેષ ઘટનાઓ હોય ત્યારે

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1$ થાય.

$\therefore\ P(A) + P(B) + P(C) = 1$

$$\frac{K}{4} + \frac{K}{3} + \frac{K}{2} = 1$$

$$\therefore \frac{3K + 4K + 6K}{12} = 1$$

$$\frac{13K}{12} = 1$$

$$\therefore K = \frac{12}{13}$$

$$\therefore P(A) = \frac{K}{4} = \frac{12}{13 \times 4} = \frac{3}{13}$$

$$P(B) = \frac{K}{3} = \frac{12}{13 \times 3} = \frac{4}{13}$$

$$P(C) = \frac{K}{2} = \frac{12}{13 \times 2} = \frac{6}{13}$$

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$= \frac{3}{13} + \frac{4}{13} = \frac{7}{13}$$

(ii) $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$

$$= \frac{4}{13} + \frac{6}{13} = \frac{10}{13}$$

(iii) $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$

$$= \frac{3}{13} + \frac{6}{13} = \frac{9}{13}$$

ઉદાહરણ-17 : A

જો $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ અને $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ હોય તો,

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cap B')$ (iii) $P(A' \cap B)$ (iv) $P(A' \cap B')$

(v) $P\left(\frac{B}{A}\right)$ (vi) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ (vii) $P\left(\frac{A'}{B}\right)$ (viii) $P\left(\frac{B'}{A}\right)$ શોધો.

જવાબ :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(i) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3+4-6}{12} = \frac{2}{12} = 0.08$$

(ii) $P(A \cap B^{|}) = P(A) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$= 0.17$$

(iii) $P(A^{|} \cap B) = P(A) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$= 0.25$$

(iv) $P(A^{|} \cap B^{|}) = 1 - P(A \cup B)$

$$= 1 - \frac{1}{2} = 1/2$$

$$= 0.5$$

(v) $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{12} \times \frac{4}{1} = \frac{1}{3}$$

(vi) $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$= \frac{\frac{1}{12}}{1/3} = \frac{1}{12} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{4}$$

(vii) $P\left(\frac{A^{|}}{B}\right) = \frac{P(A^{|} \cap B)}{P(B)}$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{1/3} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{4}$$

(viii) $P\left(\frac{B^{|}}{A}\right) = \frac{P(A \cap B^{|})}{P(A)}$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{6} \times \frac{4}{1} = \frac{2}{3}$$

2.6 બેઈઝનું પ્રમેય :

(A) પ્રતીષ સંભાવના (Inverse Probability) :

પ્રતીષ સંભાવનાની પદ્ધતિનો વિકાસ બ્રિટીશ ગણિતશાસ્ત્રી બેઈઝે કરેલ છે. તેને 'બેઈઝનું પ્રેમય' તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. જે નીચે મુજબ સમજી શકાય છે.

જો કોઈ એક ઘટના D પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_n$ સાથે ઉદ્ભવતી હોય અને તેની સંભાવનાઓ અનુક્રમે $P(A_1), P(A_2), \ldots\ldots\ldots\ldots, P(A_n)$ જાણીતી હોઈ ઉપરાંત તેની શરતી સંભાવનાઓ અનુક્રમે $P\left(\frac{D}{A_1}\right), P\left(\frac{D}{A_2}\right) \ldots\ldots\ldots, P\left(\frac{D}{A_n}\right)$ મેળવી શકાય એમ હોય તો તેની મદદથી તેની પ્રતીપ (વ્યસ્ત) સંભાવના $P\left(\frac{A_1}{D}\right), P\left(\frac{A_2}{D}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots P\left(\frac{A_n}{D}\right)$ મેળવવામાં આવે છે.

(B) બેઈઝનું પ્રમેય :

બ્રિટિશ ગણિતશાસ્ત્રી બેઈઝએ વિકસાવેલ 'બેઈઝ પ્રમેય' નીચે મુજબ લખી શકાય.

જો કોઈ એક ઘટના D પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_n$ સાથે ઉદ્ભવતી હોય અને તેની સંભાવનાઓ અનુક્રમે $P(A_1), P(A_2), \ldots\ldots\ldots\ldots, P(A_n)$ ઉપરાંત તેની શરતી સંભાવનાઓ અનુક્રમે $P\left(\frac{D}{A_1}\right), P\left(\frac{D}{A_2}\right) \ldots\ldots\ldots, P\left(\frac{D}{A_n}\right)$ જાણતા હોઈએ તો ઘટના D બની ગઈ છે તે શરતે ઘટના Ai બનવાની સંભાવના નીચે પ્રમાણે થાય.

$$P\left(\frac{Ai}{D}\right) = \frac{P(Ai \cap D)}{P(D)}$$

$$= \frac{P(Ai \cap D)}{P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D) + \ldots\ldots\ldots + P(A_n \cap D)}$$

$$= \frac{P(Ai) \,.\, P\left(\frac{D}{Ai}\right)}{P(A_1) \,.\, P\left(\frac{D}{A_1}\right) + P(A_2) \,.\, P\left(\frac{D}{A_2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots P(A_n) \,.\, P\left(\frac{D}{A_n}\right)}$$

$$P\left(\frac{Ai}{D}\right) = \frac{P(Ai) \,.\, P\left(\frac{D}{Ai}\right)}{\sum P(Ai) \,.\, P\left(\frac{D}{Ai}\right)}$$

ઉદાહરણ-18 :

એક કારખાનામાં ત્રણ મશીનો (A, B, C) કુલ ઉત્પાદનના અનુક્રમ 50%, 30% અને 20% વસ્તુઓ દરરોજ બનાવે છે. તે મશીનો અનુક્રમે 5%, 3% અને 2% ખામીવાળી વસ્તુઓ બનાવે છે. ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાંથી યદચ્છ રીતે એક વસ્તુ લેવામાં આવે જે ખામીવાળી જણાય છે. તો તે વસ્તુ C મશીનમાંથી ઉત્પાદિત થઈ હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

ખામી પ્રમાણ

$$P(A) = 50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \qquad P\left(\frac{D}{A}\right) = 5\% = \frac{5}{100}$$

$$P(B) = 30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} \qquad P\left(\frac{D}{B}\right) = 3\% = \frac{3}{100}$$

$$P(C) = 20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \qquad P\left(\frac{D}{C}\right) = 2\% = \frac{2}{100}$$

ખામી વાળી વસ્તુ C મશીનમાંથી ઉત્પાદિત થઈ હોય તેની સંભાવના

$$P\left(\frac{Ai}{D}\right) = \frac{P(Ai) \,.\, P\left(\frac{D}{Ai}\right)}{\sum P(Ai) \,.\, P\left(\frac{D}{Ai}\right)}$$

$$= \frac{P(C) \,.\, P\left(\frac{D}{C}\right)}{P(A) \,.\, P\left(\frac{D}{A}\right) + P(B) \,.\, P\left(\frac{D}{B}\right) + P(C) \,.\, P\left(\frac{D}{C}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{100}\right)}{\left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{100}\right) + \left(\frac{3}{10} \times \frac{3}{100}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{100}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2}{500}}{\frac{5}{200} + \frac{9}{1000} + \frac{2}{500}}$$

$$= \frac{\frac{1}{250}}{\frac{25 + 9 + 4}{1000}}$$

$$= \frac{1}{250} \times \frac{1000}{38}$$

$$= \frac{4}{38}$$

ઉદાહરણ-19 :

બાબા સાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીમાં ત્રણ પ્રોફેસરો A_1, A_2 અને A_3 કુલપતિની જગ્યા માટે અરજી કરે છે. તો ત્રણ પૈકી ગમે તે એકને કુલપતિ તરીકે પસંદ કરવાના છે. જેમાં A_1 ની પસંદગી તક A_2 ની પસંદગીની તક કરતા બમણી છે. જ્યારે A_2 ની પસંદગીની તક A_3 કરતાં બમણી છે. જો આ પ્રોફેસરો કુલપતિ તરીકે પસંદ થાય તો સંશોધન ક્ષેત્રે વિકાસ થાય તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.3, 0.4 અને 0.5 છે. જો યુનિવર્સિટીમાં સંશોધન ક્ષેત્રનો વિકાસ થયો હોય તો A_1 ની કુલપતિ તરીકે પસંદગી થઈ હશે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

$P(A_1) = 2P(A_2)$ અને $P(A_2) = 2P(A_3)$

$\therefore\ P(A_1) = 4P(A_3)$ $\quad\quad$ $P(A_2) = 2P(A_3)$ મુકતાં

હવે, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$

$\therefore\ P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$

$4P(A_3) + 2P(A_3) + P(A_3) = 1$

$P(A_3)\ [4 + 2 + 1] = 1$

$P(A_3) = 1/7$

$P(A_2) = 2P(A_3)$

$= 2\left(\frac{1}{7}\right) = 2/7$

$= 2\left(2/7\right)$

$= 4/7$

સંશોધન ક્ષેત્રે વિકાસ થાય તેની સંભાવના (D) =

$$P\left(\frac{D}{A_1}\right) = \frac{3}{10},\ P\left(\frac{D}{A_2}\right) = 4/10,\ P\left(\frac{D}{A_3}\right) = \frac{5}{10}$$

A_1 ની કુલપતિ તરીકે પસંદગી થાય તેની સંભાવના

$$P\left(\frac{A_1}{D}\right) = \frac{P(A_1)\,.\,P\left(\frac{D}{A_1}\right)}{P(A_1)\,.\,P\left(\frac{D}{A_1}\right) + P(A_2)\,.\,P\left(\frac{D}{A_2}\right) + P(A_3)\,.\,P\left(\frac{D}{A_3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{4}{7} \times \frac{3}{10}}{\left(\frac{4}{7} \times \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{2}{10} \times \frac{4}{10}\right) + \left(\frac{1}{7} \times \frac{5}{10}\right)}$$

$$= \frac{\frac{12}{70}}{\frac{12}{70} + \frac{8}{70} + \frac{5}{70}}$$

$$= \frac{\frac{12}{70}}{\frac{25}{70}}$$

$$= \frac{12}{70} \times \frac{70}{25}$$

$$= \frac{12}{25}$$

ઉદાહરણ-20 :

એક કોથળીમાં 2 લાલ અને 2 લીલી લિપ્સ્ટીક છે. બીજી કોથળીમાં 1 લાલ અને 3 લીલી લિપ્સ્ટીક છે. જ્યારે ત્રીજી કોથળીમાં 2 લાલ અને 2 લીલી લિસ્ટીક છે. યદચ્છ રીતે એક કોથળી પસંદ કરી તેમાંથી એક લિપ્સ્ટીક લેવામાં આવે છે જે લાલ રંગની માલુમ પડે તો તે લિપ્સ્ટીક (i) પ્રથમ કોથળીમાંથી (ii) બીજી કોથળીમાંથી (iii) ત્રીજી કોથળીમાંથી લેવાયેલ હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

ધારો કે, ત્રણ કોથળીઓ પસંદ થાય તે ઘટના A, B અને C

લાલ લિપ્સ્ટીક મળે તે ઘટના = D

કોથળી	**સંભાવના**	**લાલ લિપ્સ્ટીક**	**લીલી લિપ્સ્ટીક**	**સંભાવના**
A	$P(A) = \frac{1}{3}$	2	2	$P\left(D/A\right) = \frac{2}{4}$
B	$P(B) = \frac{1}{3}$	1	3	$P\left(D/B\right) = \frac{1}{4}$
C	$P(C) = \frac{1}{3}$	2	2	$P\left(D/C\right) = \frac{2}{4}$

$P(A_i)$	$P\left(\frac{D}{A_i}\right)$	$P(A_i) \cdot P\left(\frac{D}{A_i}\right)$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{12}$
કુલ	$\frac{5}{12}$	

(i) $P\left(\frac{D}{A}\right) = \dfrac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}}$

$$= \frac{2}{12} \times \frac{12}{5} = \frac{2}{5}$$

(ii) $P\left(\frac{D}{B}\right) = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}}$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{12}{5} = \frac{1}{5}$$

(iii) $P\left(\frac{C}{D}\right) = \dfrac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}}$

$$= \frac{2}{12} \times \frac{12}{5} = \frac{2}{5}$$

2.7 સ્વાધ્યાય :

(1) સંભાવનાના નીચેના પદો સમજાવો.

(1) યદચ્છ પ્રયોગ (2) નિદર્શ અવકાશ

(2) પદોની સમજૂતી આપો.

(1) સમસંભાવી ઘટના (2) નિરપેક્ષ ઘટના

(3) પરસ્પર નિવારક ઘટના (4) નિઃશેષ ઘટના

(3) સંભાવનાની ગમે તે એક વ્યાખ્યા સમજાવો.

(1) ગાણિતીક વ્યાખ્યા

(2) સાંખ્યિકીય વ્યાખ્યા

(3) આધુનિક વ્યાખ્યા

(4) સંભાવનાનો સરવાળાનો પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞા લખો.

(5) શરતી સંભાવના એટલે શું ? તેના સૂત્રો જણાવો.

(6) બેઈઝનું પ્રમેય લખો.

(7) એક ડબ્બામાં 6 કાળા અને 5 સફેદ દડા છે. તેમાંથી એક સફેદ દડો લેવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{5}{11}$)

(8) એક પાસો ઉછાળતા તેની ઉપર અંક-'5' આવવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{1}{6}$)

(9) પત્તાની એક જોડમાંથી બે પત્તા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે તો તે બંને પત્તા ફલ્લીના હોવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{78}{1326}$)

(10) બે સમઘન પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો અંકોનો સરવાળો '10' મળે તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{1}{12}$)

(11) 52 પત્તાની જોડમાંથી યદચ્છ રીતે એક પત્તું લેવામાં આવે તો તે પત્તું (i) કાળીનું હોવાની (ii) સત્તુ (7) હોવાની (iii) કાળીનું સત્તુ(7) હોવાની (iv) સત્તુ અથવા કાળીનું હોવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{1}{13}$ (iii) $\frac{1}{52}$ (iv) $\frac{4}{13}$)

Hint : (iv) સત્તુ હોય + કાળીનું હોય – સત્તુ અને કાળીનું હોય = $\frac{1}{13}+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{13}\times\frac{1}{4}\right)$

(12) એક પેટીમાં 4 લાલ અને 6 લીલા દડા છે. તેમાંથી બે દડા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે છે તો (i) બંને દડા લાલ હોવાની (ii) બંને દડા લીલા હોવાની (iii) એક લાલ અને એક લીલો હોવાની (iv) બંને દડા એક જ રંગના હોવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{2}{15}$ (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{8}{15}$ (iv) $\frac{21}{45}$)

(13) ત્રણ પાસાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે તો ત્રણે ઉપર મળતા અંકોનો સરવાળો વધુમાં વધુ '5' આવે તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $n = 6^3 = 216$, $m = 1 + 3 + 6 = 10$, સંભાવના = $\frac{10}{216}=\frac{21}{45}$)

(14) બે પાસાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે તો બંને ઉપર મળતા અંકોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો '10' મળે તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $n = 6^2 = 36,\ m = 3 + 2 + 1 = 6$ સંભાવના $= \frac{1}{6}$)

(15) એક લીપ વર્ષમાં 53 રવિવાર હોવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : Hint : 366 દિવસમાંથી (52×7) 364 બાદ કરતાં બે દિવસો વધશે. તેને સોમ-મંગળ, મંગળ-બુધ, ... રવિ-સોમ ગોઠવતાં 7 સમસંભાવી ઘટના મળે અને બે સાનુકૂળ બનાવો. ... સંભાવના $= \frac{2}{7}$)

(16) એક કબાટમાં 4 આંકડાશાસ્ત્રના અને 7 અર્થશાસ્ત્રના પુસ્તકો છે. તેમાંથી એક પછી એક એમ બે પુસ્તકો વારાફરતી (i) પુરવણી રહિત (ii) પુરવણી સહિત લેવામાં આવે તો બંને પુસ્તકો આંકડાશાસ્ત્રના હોય તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{4}{11} \times \frac{4}{11} = \frac{16}{121}$ (ii) $\frac{4}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{12}{110} = \frac{6}{55}$)

(17) એક ડબ્બામાં 4 સફેદ અને 6 કાળા દડા છે. બીજા ડબ્બામાં 6 સફેદ અને 7 કાળા દડા છે. પહેલા ડબ્બામાંથી યદચ્છ રીતે એક દડો લેવામાં આવે છે અને રંગ જોયા વગર બીજા ડબ્બામાં મૂકવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ બીજા ડબ્બામાંથી એક દડો યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે તો તે દડો સફેદ હોવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{4}{10} \times \frac{8}{14} + \frac{6}{10} \times \frac{6}{14} = \frac{17}{35}$)

(18) ત્રણે થેલીમાં અનુક્રમે 2 સફેદ, 1 લાલ; 3 સફેદ, 2 લાલ; 2 સફેદ, 3 લાલ દડાઓ છે. દરેક થેલીમાંથી યદચ્છ રીતે એક થેલી પસંદ કરવામાં આવે તો પસંદ કરેલા ત્રણેય દડાઓમાં (i) ત્રણેય દડા લાલ હોવાની (ii) ત્રણેય દડા સફેદ હોવાની (iii) બે સફેદ અને એક લાલ હોવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{15}$ (ii) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

(iii) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{32}{75}$)

(19) 6 વિદ્યાર્થીઓ અને 4 (ચાર) પ્રાધ્યાપકોને એક હારમાં યદચ્છ રીતે ઊભા રાખવામાં આવે છે. ચારેય પ્રાધ્યાપકો એક સાથે આવે તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{7! \times 4!}{10!} = \frac{1}{30}$)

(20) 1 થી 100 અનુક્રમ નંબર લખેલી સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે છે તો તે સંખ્યા (i) '10' વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય. (ii) 15 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય. (iii) '10' અથવા '15' વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{3}{50}$ (iii) $\frac{13}{100}$)

Hint : (iii) (10 વડે ભાગી શકાય + 15 વડે ભાગી શકાય – 10 અને 15 વડે ભાગી શકાય તેની સંભાવના)

(21) 5 છોકરાઓ અને 3 પ્રાધ્યાપકોને યદચ્છ રીતે એક હારમાં ઊભા રાખવામાં આવે છે. કોઈપણ બે પ્રાધ્યાપક એક સાથે નહીં આવે તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{5! \times 6P_3}{8!} = \frac{5}{14}$)

(22) ત્રણ વિદ્યાર્થીઓને એક દાખલો ગણવા આપવામાં આવે છે તેઓને તે સાચો ગણવાની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ અને $\frac{2}{3}$ છે. દાખલો સાચો ગણવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{8}{9}$)

(23) બાબા સાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીના કુલ 1000 વિદ્યાર્થીઓમાં ત્રણ પુસ્તકો x, y અને z વંચાય છે. પુસ્તક x કુલ વિદ્યાર્થીઓના 18%, પુસ્તક y કુલ વિદ્યાર્થીઓના 17%, પુસ્તક z કુલ વિદ્યાર્થીઓના 15% વિદ્યાર્થીઓ વાંચે છે. જ્યારે x અને y 80 વિદ્યાર્થીઓ વાંચે છે. y અને z 50 વિદ્યાર્થીઓ વાંચે છે. y અને z 40 વિદ્યાર્થીઓ વાંચે છે. જ્યારે ત્રણેય પુસ્તકો 30 વિદ્યાર્થીઓ વાંચે છે. તો ઓછામાં ઓછું એક પુસ્તક વિદ્યાર્થીઓ વાંચતા હોય તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $A \cup B \cup C = 0.36$)

(24) એક સમુહમાં 10 પુરૂષો અને અમુક સ્ત્રીઓ છે. તેમાંથી બે પુરૂષો પસંદ કરવાની સંભાવના $\frac{5}{17}$ છે. તો તે સમુહમાં સ્ત્રીઓની સંખ્યા શોધો.

(જવાબ : Hint : $\frac{5}{17} = \frac{^{10}C_2}{^{(10+x)}C_2} \quad \therefore x = 8$)

(25) એક કૉલેજમાં 6 વિદ્યાર્થીઓ અને કેટલીક વિદ્યાર્થીનીઓ છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે વિદ્યાર્થીઓ પસંદ કરવાની સંભાવના $\frac{1}{3}$ છે. તો વિદ્યાર્થીનીઓની સંખ્યા શોધો.

(જવાબ : Hint : $\frac{1}{3} = \frac{^{6}C_2}{^{(6+x)}C_2} \quad \therefore x = 4$)

(26) $P(A) = 0.7$, $P(B') = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.7$ હોય તો (i) $P(A \cap B)$ અને (ii) $P(A' \cap B')$ શોધો.

(જવાબ : (i) 0.4, (ii) 0.3)

(27) A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. ઘટના A ન બને તેની સંભાવના $\frac{1}{2}$ અને ઘટના B બને તેની સંભાવના $\frac{1}{5}$ હોય તો A અને B માંથી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બનવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : Hint : $A \cup B = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = 0.6$)

(28) જો A, B, C ત્રણ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ હોય અને P(A) = 2P(B) તેમજ P(B) = 2P(C) હોય તો (i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(B \cup C)$ (iii) $P(A \cup C)$ શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{6}{7}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $\frac{5}{7}$)

Hint : $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1$ ઉપરથી $P(A) = \frac{4}{7}$, $P(B) = \frac{2}{7}$, અને

$P(C) = \frac{1}{7}$

(29) બે વ્યક્તિઓએ જીવનવીમો ઉતરાવેલ છે. જે પૈકી પ્રથમ વ્યક્તિ હાલની ઉંમરથી વધુ 30 વર્ષ સુધી જીવી જાય તેની તરફેણમાં પ્રમાણ 2 : 3 છે અને બીજી વ્યક્તિ હાલની ઉંમરથી વધુ 30 વર્ષ સુધી જીવી જાય તેને વિરૂદ્ધમાં પ્રમાણ 3 : 4 છે. તો હવે પછી 30 વર્ષ સુધી બેમાંથી ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ જીવતી હોવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $P(A)\ \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{4}{7}$, $P(A \cup B) = \frac{26}{35}$)

(30) જો $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B^{|}) = \frac{2}{5}$, અને $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ હોય તો ;

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cap B^{|})$ (iii) $P(A^{|} \cap B)$ (iv) $P(A^{|} \cap B^{|})$

(v) $P\left(B^{|}/A\right)$ (vi) $P\left(A/B\right)$ (vii) $P\left(A^{|}/B\right)$ (viii) $P\,P\left(B^{|}/A\right)$

શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{1}{5}$ (v) $\frac{1}{2}$ (vi) $\frac{1}{3}$ (vii) $\frac{2}{3}$ (viii) $\frac{1}{2}$)

(31) એક કૉલેજમાં ત્રણ ઉમેદવારો x, y અને z ફીઝીકલ ડાયરેક્ટરની જગ્યા માટે પસંદગી પામે તેનું પ્રમાણ અનુક્રમે 3 : 2 : 5 છે. તેઓ કૉલેજના રમત-ગમતનો વિકાસ કરે તેની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ અને $\frac{1}{5}$ છે. જો કૉલેજમાં રમત-ગમત ક્ષેત્રનો વિકાસ થયો હોય તો;

(i) x ની ફીઝીકલ ડાયરેક્ટર તરીકે

(ii) y ની ફીઝીકલ ડાયરેક્ટર તરીકે

(iii) z ની ફીઝીકલ ડાયરેક્ટર તરીકે પસંદગી થઈ હોય તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{1}{3}$)

Hint : બેઈઝ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરો.

(32) એક ઉદ્યોગમાં ત્રણ વ્યક્તિઓ x, y અને z પૈકી ગમે તે એકને ચાર્ટર્ડ એકાઉન્ટન્ટ તરીકે પસંદ કરવાની છે. x ની પસંદગીની તક y ની પસંદગીની તક કરતાં ત્રણ ગણી છે. જ્યારે y ની પસંદગીની તક z ની પસંદગીની તક કરતાં ત્રણ ગણી છે. જો આ વ્યક્તિઓ ચાર્ટર્ડ એકાઉન્ટન્ટ તરીકે પસંદ થાય તો ઉદ્યોગના વિવિધ ખર્ચાઓ ઓછા કરી નફામાં વધારો થાય તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.3, 0.4, 0.3 છે. જો તે ઉદ્યોગમાં નફામાં વધારો થયો હોય તો z ની ચાર્ટર્ડ એકાઉન્ટન્ટ તરીકે પસંદગી થઈ હશે તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $P(A) = 9/13$, $P(B) = 3/13$, $P(C) = 1/13$, સંભાવના (z) = $3/42$ બેઈઝ પ્રમેય)

2.8 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો (MCQ's) :

(i) સંભાવનાનો કુલ સરવાળો ....

(a) < 1 (b) $= 1$ (c) > 1 (d) એકપણ નહીં

(ii) સંભાવનામાં $P(A') = 1 -$ ....

(a) $P(A')$ (b) $P(A)$ (c) (a) અને (b) બંને (d) એકપણ નહીં

(iii) જો $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.4$ અને $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.5$ હોય તો $P(A \cap B) =$ ....

(a) 0.32 (b) 1.60 (c) 0.40 (d) એકપણ નહીં

(iv) જો $P(A') = 0.3$, $P(B) = 0.4$ અને $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.6$ હોય તો $P(A \cap B) =$ ....

(a) 0.42 (b) 0.24 (c) 1.20 (d) એકપણ નહીં

(v) જો $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.4$ અને $P\left(\frac{A}{B}\right) = 0.5$ હોય તો $P(A \cap B) =$ ....

(a) 0.8 (b) 0.1 (c) 0.2 (d) એકપણ નહીં

(vi) $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.4$ હોય તો $P(A \cup B) =$ ....

(a) 0.8 (b) 0.6 (c) 0.7 (d) એકપણ નહીં

(vii) જો $P(A) = 0.6$, $P(B') = 0.3$ અને $P\left(\frac{A}{B}\right) = 0.7$ હોય તો $P(A \cap B) =$ ....

(a) 0.42 (b) 0.21 (c) 0.49 (d) એકપણ નહીં

(viii) સંભાવના $P(A) + P(A') =$ ....

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) એકપણ નહીં

(ix) સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$ જ્યાં $m =$ ....

(a) કુલ બનાવો (b) નિઃશેષ ઘટના (c) સાનુકૂળ બનાવો (d) એકપણ નહીં

(x) એક થેલીમાં 4 સફેદ અને 2 કાળા દડા છે. તો તેમાંથી એક સફેદ દડો લેવાની સંભાવના શોધો. ....

(a) 0.67 (b) 0.33 (c) 0.5 (d) એકપણ નહીં

(xi) એક સમઘન પાસાને ઉછાળતાં બેકી સંખ્યા મળવાની સંભાવના = ...

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) એકપણ નહીં

(xii) 52 પત્તાની એક જોડમાંથી બે પત્તા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે તો બંને બાદશાહ હોવાની સંભાવના શોધો.

(a) $\frac{1}{1326}$ (b) $\frac{1}{221}$ (c) $\frac{52}{1326}$ (d) એકપણ નહીં

(xiii) બે સિક્કા ઉછાળવામાં આવે તો નિદર્શ અવકાશના બિંદુઓની સંખ્યા = ...

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) એકપણ નહીં

(xiv) ઘટના B પ્રાપ્ત થઈ છે. એમ આપેલ હોય ત્યારે ઘટના A બનવાની સંભાવનાને .... વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

(a) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ (b) $P\left(\frac{B}{A}\right)$ (c) $P\left(\frac{B'}{A}\right)$ (d) એકપણ નહીં

(xv) ત્રણ સિક્કા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો બે છાપ અને એક કાંટો મળવાની સંભાવના = ...

(a) $\frac{2}{8}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) એકપણ નહીં

(xvi) $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ = ...

(a) $P\left(A/B\right)$ (b) $P\left(B/A\right)$ (c) $P\left(B'/A\right)$ (d) એકપણ નહીં

(xvii) $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ = ...

(a) $P\left(A/B\right)$ (b) $P\left(B/A\right)$ (c) $P\left(A'/B\right)$ (d) એકપણ નહીં

(xviii) જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો $P(A \cap B)$ = ...

(a) P(A) + P(B) (b) P(A) . P(B) (c) $P(A')$. P(B) (d) એકપણ નહીં

(xix) જો A અને B બે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો $P(A \cup B)$ = ...

(a) P(A) + P(B) (b) P(A) . P(B) (c) $P(A')$. $P(B')$ (d) એકપણ નહીં

(xx) શક્ય પરિણામોમાંથી જે પરિણામો ઘટનાની પ્રાપ્તિ માટે અનુકૂળ હોય તેને .... ઘટના કહે છે.

(a) સમસંભાવી (b) સાનુકૂળ (c) કુલ (d) એકપણ નહીં

જવાબ :

(i) b (ii) b (iii) c (iv) a (v) c (vi) a (vii) c

(viii) b (ix) c (x) a (xi) c (xii) b (xiii) c (xiv) a

(xv) b (xvi) b (xvii) a (xviii) b (xix) a (xx) b

2.9 ચાવીરૂપ શબ્દો

સંભાવના : અનિશ્ચિત બનાવોની શક્યતાને સંખ્યામાં રજૂઆત

યદચ્છ : શક્ય પરિણામો પૈકી ગમે તે એકની પસંદગી

પ્રયોગ : પ્રયત્ન

નિદર્શ અવકાશ : શક્ય પરિણામોની ગણ

ઘટના : નિદર્શ અવકાશનો ઉપગણ

પૂરક ઘટના : એક બને તો બીજી ન બને

બે ઘટનાનો યોગ : બે ઘટનામાંથી ઓછામાં ઓછી એક બને તે

બે ઘટનાનો છેદ : બે ઘટનામાં સામાન્ય (બંનેમાં હોય) હોય તેવા નિદર્શ બિંદુઓ.

પરસ્પર નિવારક ઘટના : એક ઘટના બને તો બાકીની ઘટના બની ન શકે તે.

નિઃશેષ ઘટના : નિદર્શ અવકાશના તમામ નિદર્શબિંદુઓ.

સાનુકૂળ બનાવો : કુલ પરિણામોમાંથી અનુકૂળ હોય તેવા પરિણામોનો સમુહ

નિરપેક્ષ : સ્વતંત્ર, એકબીજા પર આધારિત ન હોય.

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) 'Basic Statistics' Das and Gupta, Culcutta., 2007

(2) Sancheti & Kapoor, 'Business Statistics', S Chaw & sons, New Delhi., 2009

(3) Mathematics, R. D. Sharma, Dhanpat Rai Publications Pvt. Ltd., New Delhi., 2009

એકમ 3	ગાણિતીય અપેક્ષા (Mathemetical Expectation)

3.0 ઉદ્દેશ
3.1 પ્રાસ્તાવિક
3.2 યદચ્છ ચલ
3.3 અસતત ચલ
3.4 સતત ચલ
3.5 સંભાવના વિતરણ
3.6 સંભાવના ઘટત્વ વિધેયની વ્યાખ્યા
3.7 અસતત ચલ (x)ની ગણિતીય અપેક્ષાની વ્યાખ્યા
3.8 અપેક્ષિત કિંમતોના ગુણધર્મો
3.9 મધ્યક, વિચરણ અને સહવિચરણ
3.10 ઉદાહરણો
3.11 સ્વાધ્યાય
3.12 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો (MCQ's) જવાબ સહિત
3.13 ચાવીરૂપ શબ્દો
● સંદર્ભગ્રંથ

3.0 ઉદ્દેશ :

આ પ્રકરણનો મુખ્ય ઉદ્દેશ વિદ્યાર્થીઓ સતત ચલ, અસતત ચલ અને યદચ્છ ચલ અંગેની જાણકારી મેળવે અને ગાણિતીય અપેક્ષાનો અર્થ તથા તેના ગુણધર્મો અને તે અંગેના વિવિધ ઉદાહરણો વિશે પરિચય કેળવવાનો છે.

3.1 પ્રસ્તાવના :

આજના વિકસતા જતા યુગમાં આંકડાશાસ્ત્ર એ ખૂબ જ અગત્યનું પરિબળ છે. તેને વિશ્લેષણાત્મક વિજ્ઞાન તરીકે પણ ઓળખાવી શકાય. કારણ કે તેની મદદથી આપણે વિવિધ પ્રકારની માહિતી ભેગી કરી શકીએ છીએ અને ભેગી કરેલી માહિતીનું વિશ્લેષણ કરી સમષ્ટિના ગુણધર્મોનું અનુમાન લગાવી શકાય છે. બીજું માહિતી મુખ્યત્વે બે પ્રકારની હોય છે. (1) ગુણાત્મક માહિતી અને (2) સંખ્યાત્મક માહિતી. આ માહિતીઓને વર્ગીકૃત કરી કોષ્ટકની મદદથી યોગ્ય ક્રમમાં ગોઠવી તેનું વિશ્લેષણ કરી શકાય છે. જો આ માહિતીનું આંકડાશાસ્ત્રીય વિશ્લેષણ કરવા આંકડાશાસ્ત્રના મુખ્ય ચાર માપો (સરેરાશ, પ્રસારમાન, વિષમતા, ઘંટાકારતા વગેરે)નો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ ચારેય માપો આવૃત્તિ વિતરણના ઉપયોગથી સરળતાથી મેળવી શકાય છે. પરંતુ સંભાવના વિતરણનો ઉપયોગ કરવો પડે તેમ હોય ત્યારે આ ચાર માપો મેળવવામાં મુશ્કેલી ઊભી થાય છે. આ મુશ્કેલી દૂર કરવા ગાણિતીય અપેક્ષાનો ઉપયોગ કરવો વધુ હિતાવહ છે. ગાણિતીય અપેક્ષા અંગે અભ્યાસ કરતા પહેલા યદચ્છ ચલ અને તેના સંભાવના વિતરણ અંગેની જાણકારી મેળવીશું.

3.2 યદચ્છ ચલ [Random Variable] :

ધારો કે, ''કોઈપણ ચલની કિંમત યદચ્છ પ્રયોગના પરિણામ ઉપરથી મળતી હોય અને તેને સંખ્યાત્મક સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય તેમ હોય તો તે ચલને યદચ્છ ચલ તરીકે ઓળખી શકાય.'' યદચ્છ ચલને 'x' વડે દર્શાવવામાં

આવે છે. તેને અસતત યદૃચ્છ ચલ અને સતત યદૃચ્છ ચલ એ બે પ્રકારે રજૂ કરી શકાય છે. આ ચલ એ કોઈ એક યદૃચ્છ પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ સાથે સંકળાયેલું વિધેય છે અને તેની જુદી જુદી કિંમતોને જુદી જુદી સંભાવનાઓ સાથે સાંકળી શકાય છે.

અહીં યદૃચ્છ પ્રયોગ એટલે જે પ્રયોગમાં અનેક શક્ય પરિણામો પૈકી ગમે તે એક પરિણામ ઉદ્ભવી શકે તેવો પ્રયોગ. જ્યારે આ પ્રયોગના શક્ય બધા જ પરિણામના ગણને નિદર્શ અવકાશ તરીકે ઓળખી શકાય છે. દા.ત. અનભિનત સિક્કો ઉછાળવામાં આવે તો તે યદૃચ્છ પ્રયોગ છે અને તેનો નિદર્શ અવકાશ = {H, T}

3.3 અસતત ચલ :

જો કોઈપણ યદૃચ્છ ચલ પરિમિત કિંમતો (ગણતરી કરી શકાય તેવી અનંત કિંમતો) ધારણ કરી શકે તેમ હોય તો તે ચલને અસતત ચલ કહે છે.

ઉદાહરણ : સિક્કો ઉછાળીએ તો છાપની સંખ્યા, કુટુંબમાં બાળકોની સંખ્યા, બાગમાં ફૂલોની સંખ્યા, વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા, રોડ ઉપર અકસ્માતની સંખ્યા વગેરે.

3.4 સતત ચલ :

જો કોઈપણ યદૃચ્છ ચલ કોઈ ગાળાની બધી જ કિંમતો ધારણ કરી શકે તેમ હોય તો તે ચલને સતત ચલ કહેવાય.

ઉદાહરણ : વ્યક્તિની ઉંમર દર્શાવતો ચલ, વ્યક્તિની આવક દર્શાવતો ચલ, વ્યક્તિનું વજન દર્શાવતો ચલ, વિદ્યાર્થીના ગુણો દર્શાવતો ચલ વગેરે.

3.5 સંભાવના વિતરણ :

આપણે ઉપર જોયું કે યદૃચ્છ ચલ એ કોઈ એક યદૃચ્છ પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ સાથે સંકળાયેલું વિધેય છે અને તેની જુદી જુદી કિંમતોને જુદી જુદી સંભાવનાઓ સાથે સાંકળી શકાય છે. આમ યદૃચ્છ ચલની જુદી જુદી કિંમતો અને તેની જુદી જુદી સંભાવનાઓ દર્શાવતા ગાણિતીય કોષ્ટકને સંભાવના વિતરણ કહે છે. અહીં સંભાવનાનો કુલ સરવાળો એક (1) જેટલો થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે બે સિક્કાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો તેનો નિદર્શ અવકાશ (S) = {TT, HT, TH, HH} મળે. હવે ધારો કે છાપની સંખ્યા = ચલ x તો xની જુદી જુદી કિંમતો 0, 1, 2 મળે અને તેની જુદી જુદી સંભાવનાઓ અનુક્રમે $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ અને $\frac{1}{4}$ મળે, તેને ગાણિતીય કોષ્ટક સ્વરૂપે રજૂ કરવામાં આવે તો તેને સંભાવના વિતરણ તરીકે ઓળખી શકાય. જે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

છાપ x_i	**સંભાવના** $P(x_i)$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

સમજૂતી :

છાપ 0 છાપ એટલે કે બંને કાંટા પડે (TT)

x 1 છાપ એટલે કે એક છાપ અને એક કાંટો (HT) (TH)

2 છાપ એટલે કે શૂન્ય કાંટા પડે (HH)

સંભાવના 0 છાપ પડે તેની સંભાવના = m/n = $1/4$

1 છાપ પડે તેની સંભાવના = m/n = $2/4 = 1/2$

2 છાપ પડે તેની સંભાવના = m/n = $1/4$

3.6 સંભાવના ઘટત્વ વિધેયની વ્યાખ્યા :

ધારો કે કોઈપણ યદચ્છ અસતત ચલ x_i ની જુદી જુદી કિંમતો $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots x_n$ ને તેની જુદી જુદી સંભાવના અનુક્રમે $P(x_1), P(x_2), P(x_3), P(x_4) \ldots\ldots P(x_n)$ સાથે સાંકળવામાં આવે અને જો તે નીચેના લક્ષણો (જેવા કે (1) $P(x_i) \geq 0$ એટલે કે દરેક સંભાવના ઋણ ન હોય (અનૃણ) અને $\Sigma P(x_i) = 1$ એટલે કે સંભાવનાનો સરવાળો 1 થાય) ધરાવતો હોય, તો વિધેય $P(x_i)$ ને યદચ્છ ચલ x_i નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય અને $P(x_i)$ ની કિંમતોને યદચ્છ ચલ x_i નું સંભાવના વિતરણ કહે છે.

3.7 અસતત ચલ (x_i) ની ગણિતીય અપેક્ષાની વ્યાખ્યા :

યદચ્છ ચલ x_i ની સરેરાશ કિંમત ને અસતત ચલ x_i ની ગણિતીય અપેક્ષા (અપેક્ષિત કિંમત) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેને $E(x_i)$ વડે દર્શાવી શકાય છે અને

$E(x_i) = \Sigma x_i \, P(x_i)$

જ્યાં, $x_i = x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ (x ની જુદી જુદી કિંમતો)

$P(x_i) = P(x_1), P(x_2), P(x_3) \ldots\ldots P(x_n)$ (સંભાવના)

$\Sigma xiP(xi) = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + x_3 P(x_3) + \ldots\ldots + x_n P(x_n)$ થાય.

એટલે કે, ધારો કે કોઈપણ યદચ્છ અસતત ચલ x_i ની જુદી જુદી કિંમતો $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ ને તેની સંભાવના અનુક્રમે $P(x_1), P(x_2), P(x_3) \ldots\ldots P(x_n)$ સાથે સાંકળી એટલે કે x_i અને $P(x_i)$ નો ગુણાકાર કરી તેનો સરવાળો કરવામાં આવે તો મળતી કિંમતને x_i ની અપેક્ષિત કિંમત કહે છે. (x ની અપેક્ષિત કિંમત એટલે x નો મધ્યક અને તેને μ વડે દર્શાવીએ તો $E(x) = \mu$ થાય.)

3.8 અપેક્ષિત કિંમતોના ગુણધર્મો :

(1) કોઈપણ અચળ સંખ્યાની અપેક્ષિત કિંમત તે જ અચળ સંખ્યા હોય છે. જેમ કે, $E(c) = c$

(2) $E(cx) = c\,E(x)$ થાય, જ્યાં c = અચળ સંખ્યા.

(3) $E(ax + b) = aE(x) + b$ થાય (જ્યાં ગણિતીય અપેક્ષા ઉગમબિંદુ અને સ્કેલ માપના પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર નથી.)

(4) જો x અને y બે યદચ્છ ચલો હોય તો તે ચલોના સરવાળાની અપેક્ષા તેના ગણિતીય અપેક્ષાના સરવાળા જેટલો જ થાય છે. એટલે કે, $E(x + y) = E(x) + E(y)$

(5) જો x અને y બે સ્વતંત્ર ચલો હોય તો તે ચલોના ગુણાકારની અપેક્ષા તેના ગણિતીય અપેક્ષાના ગુણાકાર બરાબર થાય છે એટલે કે, $E(x\,y) = E(x)\,.\,E(y)$

(6) મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોની અપેક્ષા શૂન્ય જેટલી થાય છે એટલે કે, $E(x - \mu) = 0$

$\therefore\ E(x - \mu) = E(x) - E(\mu)$

$= \mu - \mu$

$= 0$

(7) જો $f(x)$, x નું વિધેય હોય તો $E[f(x)] = \Sigma f(x).p(x)$ થાય.

3.9 મધ્યક, વિચરણ અને સહવિચરણ :

મધ્યક :

ગણિતીય અપેક્ષામાં યદચ્છ ચલ x નો મધ્યક એટલે $E(x) = \overline{x} = \mu$

વિચરણ :

ગણિતીય અપેક્ષામાં વિચરણની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી શકાય.

"વિચરણ એટલે કોઈપણ યદચ્છ ચલ x ના મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોના વર્ગોની સરેરાશ." તેને $v(x)$ વડે દર્શાવી શકાય.

$V(x) = E(x_i - \mu)^2$ અથવા $E(x_i - \overline{x})^2 = V(x)$

$\therefore V(x) = E(x_i^2) - [E(x)]^2$

જ્યાં, $E(x_i^2) = E x_i^2 \,.\, P(x_i)$

સહવિચરણ :

સામાન્ય રીતે x નું વિચરણ x ની કિંમતમાં થતી વધઘટ કે ચલનનું માપન કરે છે જ્યારે y નું વિચરણ y ની કિંમતમાં થતી વધઘટ કે ચલનનું માપન કરે છે. જો આ બંને ચલો x અને y ની કિંમતોમાં એક સાથે થતી વધઘટનું માપન તેના સહવિચરણ દ્વારા કરી શકાય છે. આમ બે ચલો x અને y ના મધ્યકો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ હોય અને તેના મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનો અનુક્રમે $(x - \overline{x})$ અને $(y - \overline{y})$ હોય તો તે બંનેના ગુણાકારની ગણિતીય અપેક્ષાને x અને y નું સહવિચરણ કહે છે. તેને $Cov(x, y)$ વડે દર્શાવાય છે.

$\therefore Cov(x, y) = E(x - \overline{x})(y - \overline{y})$

જ્યાં, $\overline{x} = x$ નો મધ્યક

$\overline{y} = y$ નો મધ્યક

અથવા

$$Cov = \frac{\sum (x - \overline{x})(x - \overline{y})}{n}$$

અથવા

$Cov(x, y) = E(x - y) - E(x) \,.\, E(y)$

- **બે ચલના વિચરણ અને સહવિચરણના ગુણધર્મો :**

(1) કોઈપણ અચળ કિંમતનું વિચરણ શૂન્ય થાય છે. એટલે કે, $V(c) = 0$

(2) $V(x + a) = V(x) + 0 = V(x)$

(3) $V(ax + b) = a^2 V(x) + 0 = a^2 V(x)$

(4) $V(ax - b) = a^2 V(x) + 0 = a^2 V(x)$

(5) x અને y બંને સ્વતંત્ર ચલો હોય ત્યારે $V(ax \pm by) = a^2 V(x) + b^2 V(y)$

(6) $Cov(ax, by) = ab \; Cov(x, y)$

(7) $Cov(x + a, y + b) = Cov(x, y)$

(8) જો x અને y નિરપેક્ષ ચલો હોય તો $Cov(x, y) = 0$

(9) જ્યારે x અને y સ્વતંત્ર (નિરપેક્ષ) ચલો હોય ત્યારે $V(x + y) = V(x) + V(y)$

(10) જ્યારે x અને y સ્વતંત્ર ચલો હોય ત્યારે $V(x - y) = V(x) - V(y)$

(11) જ્યારે x અને y આધારિત ચલો હોય ત્યારે $V(ax + by) = a^2V(x) + 2ab\ Cov(x, y) + b^2V(y)$

(12) જ્યારે x અને y આધારિત ચલો હોય ત્યારે $V(ax - by) = a^2V(x) - 2ab\ Cov(x, y) + b^2V(y)$

(13) જ્યારે x અને y આધારિત ચલો હોય ત્યારે $V(x + y) = V(x) + 2Cov(x\ y) + V(y)$

(14) જ્યારે x અને y આધારિત ચલો હોય ત્યારે $V(x - y) = V(x) - 2Cov(x\ y) + V(y)$

(15) $Cov(x\ y) = \Sigma(x\ y) - \Sigma(x)\ .\ \Sigma(y)$ (x અને y આધારિત ચલો હોય)

નોંધ : આ પ્રકરણના ઉદાહરણો ગણતા પહેલાં સંભાવના અને ક્રમચય સંચયનું પ્રકરણ શીખવું જરૂરી છે.

3.10 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 :

એક વ્યક્તિ એક અનભિનત પાસો ઉછાળે છે તો મળતા અંકોની ગણિતીય અપેક્ષા શોધો.

જવાબ :

પાસો ઉછાળવામાં આવે તો તેના ઉપર મળતા અંકો અનુક્રમે 1, 2, 3, 4, 5, 6 અને તે દરેક અંક મળવાની સંભાવના $\frac{1}{6}$ થાય અને ગણિતીય અપેક્ષા $= E(x_i) = \Sigma\, x_i\, P(x_i)$ નીચેના કોષ્ટકની મદદથી શોધી શકાય.

પાસ ઉપર મળતા અંકો x_i	**મળતા અંકોની સંભાવના** $P(x_i)$	$x_i \times P(x_i)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$

$$\therefore\ E(x) = \frac{21}{6} = 3.5$$

ઉદાહરણ-2 :

બે સિક્કાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે તો મળતી છાપની સંખ્યાની ગણિતીય અપેક્ષા શોધો.

જવાબ :

આગળ મુદ્દા નં. 3.5 માં સમજાવ્યા મુજબ બે સિક્કા ઉછાળવામાં આવે તો મળતી છાપની સંખ્યા = 0, 1, 2 અને તેની સંભાવના = $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

મળતી છાપની સંખ્યા	સંભાવના	$x_i \times P(x_i)$
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ગણિતીય અપેક્ષા $E(x) = \Sigma x_i \,.\, P(x_i)$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

ઉદાહરણ-3 :

બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. પ્રત્યેક છાપ માટે રૂ. 9 મળે છે. જ્યારે પ્રત્યેક કાંટા માટે 12 ગુમાવવા પડે છે તો મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

કાંટો રૂ. (–12)	છાપ રૂ. (9)	મળતી રકમ (x_i)	$P(x_i)$ સંભાવના	$x_i \times P(x_i)$
2	0	–24	$\frac{1}{4}$	$\frac{-24}{4}$
1	1	–3	$\frac{1}{2}$	$\frac{-3}{2}$
0	2	18	$\frac{1}{4}$	$\frac{18}{4}$
		કુલ		

મળતી રકમની સમજૂતી :

છાપ પડે તો રૂ. 9 મળે = + 9

કાંટો પડે તો રૂ. 12 ગુમાવે = –12

મળતી રકમ (x_i)

(2 કાંટા) × (–12 રૂ.) = –24 મળે

(1 કાંટો × –12) + (1 છાપ × 9) –12 + 9 = –3

(2 છાપ) × (9 રૂ.) = 18 મળે.

મળતી રકમ $x_i \times P(x_i)$ કરો.

∴ મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત = $E(x)$

$E(x) = \Sigma x_i \times P(x_i)$

$$= \frac{-24}{4} - \frac{3}{2} + \frac{18}{4}$$

$$= \frac{-24 - 6 + 18}{4}$$ લ.સા.અ.

$= \frac{-12}{4}$

$= -3$

ઉદાહરણ-4 :

એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે તો P ની કિંમત તથા તેની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	$1/14$	P	$3/7$	P

જવાબ :

x_i	$P(x_i)$	$x_i \times P(x_i)$
0	$1/14$	0
1	P	P
2	$3/7$	$6/7$
3	P	3P

સંભાવના વિતરણ માટે $\Sigma P(x_i) = 1$

એટલે કે સંભાવનાનો સરવાળો 1 થાય છે.

$\therefore \frac{1}{14} + \frac{P}{1} + \frac{3}{7} + \frac{P}{1} = 1$

$2P = \frac{1}{1} - \frac{1}{14} - \frac{3}{7}$ લ.સા.અ. લેતાં

$2P = \frac{14-1-6}{14}$

$28P = 7$

$P = \frac{7}{28}$

$P = \frac{1}{4}$

અપેક્ષિત કિંમત $E(x) = \Sigma x_i \times P(x_i)$

$= 0 + P + \frac{6}{7} + 3P$

$= \frac{4P}{1} + \frac{6}{7}$

$= 4\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{6}{7}$ $P = 1/4$ મુકતા

$= \frac{1}{1} + \frac{6}{7} = \frac{7+6}{7} = \frac{13}{7} = 1.86$

ઉદાહરણ-5 :

એક યદચ્છ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે. (i) k શોધો. (ii) x નું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0	k	$3k$	k^2	$2k^2$	$3k^2 + k$

જવાબ :

(1) સંભાવના વિતરણ માટે કુલ સંભાવના $\Sigma P(x_i) = 1$ થાય.

$\therefore\ 0 + k + 3k + k^2 + 2k^2 + 3k^2 + k = 1$

$5k + 6k^2 = 1$

$6k^2 + 5k - 1 = 0$

$\therefore\ 6k^2 + 6k - 1 = 0$ અવયવ શોધતાં

$6k^2 + 6k - k - 1 = 0$

$6k(k + 1) -1(k + 1) = 0$

$(k + 1)\ (6k - 1) = 0$

$k + 1 = 0$ અથવા $6k - 1 = 0$

$\therefore\ k = -1$ (ઋણ છે તેથી અશક્ય) અથવા $6k = 1$ $\therefore\ k = 1/6$

(ii) x નું સંભાવના વિતરણ : ($k = 1/6$ મુકતાં)

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0	$1/6$	$3/6$	$(1/6)^2$	$2(1/6)^2$	$3(1/6) + \frac{1}{6}$

$\therefore$ x નું સંભાવના નીચે મુજબ લખી શકાય.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0	$1/6$	$1/2$	$1/36$	$1/18$	$2/3$

ઉદાહરણ-6 :

એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે તે ઉપરથી x નો મધ્યક અને વિચરણ શોધો.

x_i	-1	0	1	2	3	4
$P(x_i)$	$1/10$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$

x_i	$P(x_i)$	$x_i \times P(x_i)$	$x_i^2 \times P(x_i)$
–1	$1/10$	$-1/10$	$1/10$
0	$1/4$	0	0
1	$1/10$	$1/10$	$1/10$
2	$2/10$	$4/10$	$8/10$
3	$1/4$	$3/4$	$9/4$
4	$1/10$	$4/10$	$16/10$

મધ્યક $= E(x) = \Sigma x_i \times P(x_i)$

$= \frac{-1}{10} + 0 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{3}{4} + \frac{4}{10} = \frac{4}{10} + \frac{3}{4} + \frac{4}{10}$

$= \frac{8 + 15 + 8}{20}$ લ.સા.અ. લેતાં

$= \frac{31}{20} = 1.55$

વિચરણ $= V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$E(x^2) = \Sigma x_i^2 \ . \ P(x)$

$= \frac{1}{10} + 0 + \frac{1}{10} + \frac{8}{10} + \frac{9}{4} + \frac{16}{10}$

$= \frac{2 + 2 + 16 + 45 + 32}{20}$ લ.સા.અ. લેતાં

$= \frac{97}{20} = 4.85$

$\therefore\ V(x) = 4.85 - [1.55]^2$

$E(x^2) = 4.85 - 2.40 = 2.45$

ઉદાહરણ-7 :

એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે ઉપરથી (1) $E(x + 1)$ (2) $V(2x + 1)$ શોધો.

x_i	–3	–2	–1	0	1	2
સંભાવના $P(x_i)$	$1/8$	$1/4$	$1/4$	$1/8$	$1/8$	$1/8$

જવાબ :

x_i	$P(x_i)$	$x_i \times P(x_i)$	$x_i^2 \times P(x_i)$
–3	$1/8$	$-3/8$	$9/8$
–2	$1/4$	$-2/4$	$4/4$
–1	$1/4$	$-1/4$	$1/4$
0	$1/8$	0	0
1	$1/8$	$1/8$	$1/5$
2	$1/8$	$2/8$	$4/8$

(1) $E(x + 1) = E(x) + E(1)$

$E(x) = \Sigma x_i \,.\, P(x_i)$

$$= -\frac{3}{8} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{0}{0} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8}$$

$$= \frac{-3-4-2+0+1+2}{8}$$ લ.સા.અ. લેતાં

$$= -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} = -0.75$$

$\therefore\ E(x + 1) = -0.75 + 1$

$= 0.25$

(2) $V(2x + 1) = (2)\ V(x) + 0$

$= 4\ V(x)$

$V(x) = \Sigma(x_i^2) - [\Sigma(x_i)]^2$

$E(x_i^2) = \Sigma x_i^2 \,.\, P(x_i)$

$$= \frac{9}{8} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{4}{8}$$

$$= \frac{45+40+10+8+20}{40}$$ લ.સા.અ. લેતાં

$$= \frac{123}{40} = 3.075$$

$\therefore\ V(x) = 3.075 - (-0.75)^2$

$= 3.075 - 0.5625$

$= 2.5125$

$\therefore\ V(2x + 1) = 4V(x)$

$= 4(2.5125)$

$V(2x + 1) = 10.05$

ઉદાહરણ-8 :

એક ડબ્બામાં 6 બલ્બ છે. તેમાંથી 3 બલ્બ ખામીવાળા છે અને તેમાંથી યદચ્છ રીતે 3 બલ્બ લેવામાં આવે છે તો ખામીવાળા બલ્બની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

જવાબ :

કુલ 6 બલ્બમાંથી 3 ખામીવાળા બલ્બ છે અને 3 ખામી વગરના બલ્બ છે અને યદચ્છ રીતે 3 બલ્બ લેવામાં આવે છે. તેથી તેની સંભાવના શોધવા સંચયનું સૂત્ર $^{n}c_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ અને સંભાવનાનું સૂત્ર $P(A) = \frac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \frac{m}{n}$ નો ઉપયોગ કરી નીચે દર્શાવ્યા મુજબ સંભાવના શોધીશું.

ખામી વગરના બલ્બ (3)	ખામીવાળા બલ્બ (3) x_i	સંભાવના $P(x_i)$	$x_i \cdot P(x_i)$
3	0	$\frac{1}{20}$	0
2	1	$9/20$	$9/20$
1	2	$9/20$	$18/20$
0	3	$1/20$	$3/20$

સંભાવનાની ગણતરી :

$$\frac{3c_3 \times 3c_0}{6c_3} = 1 \times 1/20 = 1/20$$

$$\frac{3c_2 \times 3c_1}{6c_3} = 3 \times 3/20 = \frac{9}{20}$$

$$\frac{3c_1 \times 3c_2}{6c_3} = 3 \times 3/20 = \frac{9}{20}$$

$$\frac{3c_0 \times 3c_3}{6c_3} = 1 \times 1/20 = \frac{1}{20}$$

જ્યાં, $6_{c_3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$

અથવા

$6_{c_3} = \frac{6!}{3!\,3!}$

$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1}$

$= 20$

ખામીવાળા બલ્બની અપેક્ષિત કિંમત

$\Sigma(x) = \Sigma x_i \,.\, P(x_i)$

$= \frac{9}{20} + \frac{18}{20} + \frac{3}{20}$

$= \frac{9 + 18 + 3}{20} = \frac{30}{20} = 1.5$

ઉદાહરણ-9 :

એક ડબ્બામાં 3 સફેદ અને 2 કાળા દડા છે. એક વ્યક્તિ તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે દડા લે છે. જો પ્રત્યેક દડા દીઠ તેને રૂ. 8 મળે છે જ્યારે પ્રત્યેક કાળા દડા દીઠ તેને રૂ. 4 ચૂકવવા પડે છે. તો તેને મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

જવાબ :

સફેદ દડા	કાળા દડા	કુલ	યદચ્છ રીતે લીધેલ
3 મળતી રકમ 8 (દરેક દડા દીઠ)	2 –4 (દરેક દડા દીઠ)	5	2

કાળા દડાની સંખ્યા	સફેદ દડાની સંખ્યા	મળતી રકમ x_i	સંભાવના $P(x_i)$	$x_i \times P(x_i)$
2	0	–8	$1/10$	$-8/10$
1	1	4	$6/10$	$24/10$
0	2	16	$3/10$	$48/10$

મળતી રકમની ગણતરી :

કાળા દડા દીઠ મળતી રકમ (–4)		સફેદ દડા દીઠ મળતી રકમ (8)	
(–4 × 2 = –8)	+	(8 × 0 = 0)	= –8 + 0 = –8
(–4 × 1 = –4)	+	(8 × 1 = 8)	= – 4 + 8 = 0
(–4 × 0 = 0)	+	(8 × 2 = 16)	= 0 + 16 = 16

સંભાવનાની ગણતરી :

$3_{c_0} \times 2_{c_2} / 5_{c_2} = \frac{1 \times 1}{10} = \frac{1}{10}$

$${}^{3}c_1 \times {}^{2}c_1 / {}^{5}c_2 = \frac{3 \times 2}{10} = \frac{6}{10}$$

$${}^{3}c_2 \times {}^{2}c_2 / {}^{5}c_2 = \frac{3 \times 1}{10} = \frac{3}{10} \quad {}^{5}c_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત :

$E(x) = \Sigma x_i \,.\, P(x_i)$

$$= \frac{-8}{10} + \frac{24}{10} + \frac{48}{10} = \frac{-8 + 24 + 48}{10} = \frac{64}{10} = 6.4$$

ઉદાહરણ-10 :

એક ડબ્બામાં 7 ટિકિટો છે. તેના ઉપર અનુક્રમે 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3 નંબરો લખેલા છે તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે ટિકિટો લેવામાં આવે છે. તો ટિકિટો ઉપર મળતા નંબરોના સરવાળાની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

જવાબ :

અહીં કુલ 7 ટિકિટો છે તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે ટિકિટોની પસંદગી ${}^{7}c_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$

1 નંબર લખેલ કુલ ટિકિટ = 2

2 નંબર લખેલ કુલ ટિકિટ = 2

3 નંબર લખેલ કુલ ટિકિટ = 3

ટિકિટ ઉપર લખેલ નંબર 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3 છે. તેથી ટિકિટ પર લખેલ રકમની બબ્બેની પેર બનશે.

ટિકિટ પર મળતી સંખ્યા	મળતી સંખ્યાનો સરવાળો x	સંભાવના $P(x_i)$	$x_i \times P(x_i)$
(1, 1)	2	$1/21$	$2/21$
(1, 2)	3	$4/21$	$12/21$
(1, 3)	4	$6/21$	$24/21$
(2, 2)	4	$1/21$	$4/21$
(2, 3)	5	$6/21$	$30/21$
(3, 3)	6	$3/21$	$18/21$

સંભાવનાની ગણતરી :

$(1, 1) - {}^{2}c_2 / {}^{7}c_2 = 1/21$

(1, 2) – ${}^{2}c_1 \times {}^{2}c_1 \big/ {}^{7}c_2 = 4/21$

(1, 3) – ${}^{2}c_1 \times {}^{3}c_1 \big/ {}^{7}c_2 = 6/21$

(2, 2) – ${}^{2}c_2 \big/ {}^{7}c_2 = 1/21$

(2, 3) – ${}^{2}c_1 \times {}^{3}c_1 \big/ {}^{7}c_2 = 6/21$

(3, 3) – ${}^{3}c_2 \big/ {}^{7}c_2 = 3/21$

મળતા નંબરોના સરવાળાની અપેક્ષિત કિંમત = $E(x) = \Sigma x_i \, . \, P(x_i)$

$= \frac{2}{21} + \frac{12}{21} + \frac{24}{21} + \frac{4}{21} + \frac{30}{21} + \frac{18}{21}$

$= \frac{92}{21} = 4.38$

ઉદાહરણ-11 :

એક વ્યક્તિ બે રૂપિયાની એક એવી એક ટિકિટ ખરીદે છે. લોટરી વેચનારે કુલ 15,000 જેટલી ટિકિટનું વેચાણ કરેલ છે અને તે લોટરીમાં ઈનામની રકમ રૂ. 10,000 છે. તો તે વ્યક્તિને મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

જવાબ :

લોટરીની કિંમત = 2 રૂ.

ઈનામની રકમ = 10,000

$\therefore$ જો તેને ઈનામ લાગે તો મળતી રકમ (10,000 – 2) = 9998

જો તેને ઈનામ ન લાગે તો મળતી રકમ = –2

વ્યક્તિ કુલ 1 લોટરી ખરીદે છે.

કુલ લોટરી = 15,000

$\therefore$ ઈનામ લાગવાની સંભાવના = $\frac{1}{15,000}$

ઈનામ ન લાગવાની સંભાવના = $1 - \frac{1}{15,000}$

$= \frac{14,999}{15,000}$

ઈનામ	મળતી રકમ (x_i)	સંભાવના $P(x_i)$	$x_i \times P(x_i)$
જીતે (લાગે)	9998	$\frac{1}{15,000}$	$\frac{9,998}{15,000}$
હારે (ન લાગે)	–2	$\frac{14,999}{15,000}$	$\frac{-29,998}{15,000}$

મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત $= E(x) = \Sigma x_i \times P(x_i)$

$$= \frac{9,998}{15,000} - \frac{29,998}{15,000}$$

$$= \frac{9,998 - 29,998}{15,000}$$

$$= \frac{20,000}{-15,000} = -4/3$$

$= -1.33$ રૂપિયા

ઉદાહરણ-12 :

એક અસતત યદચ્છ ચલનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે. તો તે ઉપરથી P ની કિંમત શોધો અને તેનો મધ્યક તથા વિચરણ શોધો.

$x = 0$ હોય ત્યારે $P(x) = 0.02$

અને $x = 1, 2, 3, 4$ હોય ત્યારે $P(x) = P(x + 1)$

જવાબ :

અહીં યદચ્છ ચલ 'x' ની જુદી જુદી કિંમતો 0, 1, 2, 3, 4 આપેલી છે તે મુજબ તેની જુદી જુદી સંભાવના આપેલા વિતરણની મદદથી નીચે મુજબ શોધી શકાશે.

જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $P(x = 0) = 0.02$ આપેલું છે.

જ્યારે $x = 1, 2, 3, 4$ ત્યારે $P(x) = P(x + 1)$

∴ જ્યારે $x = 1$ ત્યારે $P(x = 1) = P(1 + 1) = 2P$

જ્યારે $x = 2$ ત્યારે $P(x = 2) = P(2 + 1) = 3P$

જ્યારે $x = 3$ ત્યારે $P(x = 3) = P(3 + 1) = 4P$

જ્યારે $x = 4$ ત્યારે $P(x = 4) = P(4 + 1) = 5P$

x_i	$P(x_i)$
0	0.02
1	2P
2	3P
3	4P
4	5P
કુલ	14P + 0.02

હવે સંભાવના વિતરણમાં સંભાવનાનો કુલ સરવાળો = 1 થાય છે.

$\therefore\ \Sigma P(x_i) = 1$

$\therefore\ 0.02 + 2P + 3P + 4P + 5P = 1$

$14P + 0.02 = 1$

$14P = 1 - 0.02$

$14P = 0.98$

$\therefore\ P = \frac{0.98}{14} = 0.07$

x_i	$P(x_i)$	$x_i\ P(x_i)$	$x_i^2\ P(x_i)$
0	0.02	0	0
1	0.14	0.14	0.14
2	0.21	0.42	0.84
3	0.28	0.56	1.68
4	0.35	1.40	5.60

મધ્યક = $\bar{x} = E(x) = \Sigma x_i\ P(x_i)$

$= 0.14 + 0.42 + 0.56 + 1.40$

$= 2.52$

$E(x_i^2) = \Sigma x_i^2\ .\ P(x_i)$

$= 0.14 + 0.84 + 1.68 + 5.60$

$= 8.26$

$\therefore$ વિચરણ $= E(x_i^2) - [E(x)]^2$

$= 8.26 - [2.52]^2$

$= 8.26 - 6.3504$

$= 1.9096$

ઉદાહરણ-13 :

એક યદૃચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે.

x_i	–2	–1	0	1	2	3
$P(x_i)$	0.10	0.20	0.30	0.05	0.30	0.05

તો નીચેનાની કિંમત શોધો.

(1) $\Sigma(x)$ (2) $\Sigma(x + 2)$

(3) $\Sigma(x^2)$ (4) $\Sigma(x + 1)^2$

(5) $V(x)$ (6) $V(3x + 2)$

જવાબ :

x_i	$P(x_i)$	$x_i\ P(x_i)$	$x_i^2\ P(x_i)$
–2	0.10	–0.20	0.40
–1	0.20	–0.20	0.20
0	0.30	0.00	0.00
1	0.05	0.05	0.05
2	0.30	0.60	1.20
3	0.05	0.15	0.45
કુલ	1.00	–0.40 +0.80 0.40	2.30

(1) $E(x) = \Sigma x_i\ P(x_i)$

$= 0.40$

(2) $E(x + 2) = E(x) + 2$

$= 0.40 + 2$

$= 2.40$

(3) $E(x^2) = Ex_i^2\ ,\ P(x_i)$

$= 2.30$

(4) $E(x + 1)2 = E\ (x2 + 2x + 1)$

$= E(x2) + 2E(x) + 1$

$= 2.30 + 2(0.40) + 1$

$= 2.30 + 0.80 + 1$

$= 4.10$

(5) $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$= 2.30 - [0.4]^2$

$= 2.30 - 0.16$

$= 2.14$

(6) $V(3x + 2) = 3^2V(x) + 0$

$= 9(2.14)$

$= 19.26$

ઉદાહરણ-14 :

x અને y બે સ્વતંત્ર યદૃચ્છ ચલો હોય તેમજ $E(x) = 2$, $E(y) = 2$, $E(x, y) = 4$, $V(x) = 6$ અને $V(y) = 0.6$ હોય તો નીચેની કિંમત શોધો.

(1) $E(x + y)$ (2) $V(x + y)$ (3) $V(3x + 2y)$

(4) $Cov\ (x, y)$

જવાબ :

(1) $E(x + y) = E(x) + E(y)$

$= 2 + 2$

$= 4$

(2) $V(x + y) = V(x) + V(y)$

$= 6 + 0.6$

$= 6.6$

(3) $V(3x + 2y) = 3^2V(x) + 2^2V(y)$

$= 9(6) + 4(0.6)$

$= 54 + 2.4$

$= 56.4$

x અને y સ્વતંત્ર ચલો છે તેથી $Cov(x, y) = 0$

આધારિત ચલોનો દાખલો

ઉદાહરણ-15 :

જો x અને y બે આધારિત ચલો હોય તથા $E(x) = 1.6$, $E(y) = 3.3$, $E(x, y) = 10$, $V(x) = 3.5$, $V(y) = 9$ હોય તો,

(1) $E(3x + 2y)$ (2) $Cov(x, y)$ (3) $V(x - y)$

(4) $V(x + y)$ (5) $V(2x + y)$

જવાબ :

(1) $E(3x + 2y) = 3E(x) + 2E(y)$

$= 3(1.6) + 2(3.3)$

$= 4.8 + 6.6$

$= 11.4$

(2) $Cov(xy) = E(xy) - E(x) \quad E(y)$

$= 10 - (1.6)\ (3.3)$

$= 10 - 5.28$

$= 4.72$

(3) $V(x - y) = V(x) - 2Cov(xy) + V(y)$

$= 3.5 - 2(4.72) + 9$

$= 3.06$

(5) $V(x + y) = V(x) + 2Cov(x, y) + V(y)$

$= 3.5 + 2(4.72) + 9$

$= 21.94$

(6) $V(2x - y) = 2^2V(x) + 2 \times 2 \times 1 \times Cov(xy) + 1^2V(y)$ જ્યાં, a = 2, b = 1

$\therefore V(ax + by) = a^2V(x) + 2ab\ Cov(xy) + b^2V(y)$

$= 4(1.6) + 4(4.72) + 9$

$= 6.4 + 18.88 + 9$

$= 34.28$

સ્વાધ્યાય

(1) યદચ્છ ચલ એટલે શું ?

(2) સતત ચલ અને અસતત ચલની વ્યાખ્યા લખો.

(3) સતત ચલ અને અસતત ચલ ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

(4) સંભાવના વિતરણ કોને કહેવાય ?

(5) સંભાવના ઘટત્વ વિધેયની વ્યાખ્યા લખો.

(6) ગણિતીય અપેક્ષાની વ્યાખ્યા લખો.

(7) ગણિતીય અપેક્ષાનું સૂત્ર લખો.

(8) ગણિતીય અપેક્ષાના ગુણધર્મોની ચર્ચા કરો.

(9) ગણિતીય અપેક્ષાના મધ્યક અને વિચરણની વ્યાખ્યા અને સૂત્રો લખો.

(10) સહવિચરણ એટલે શું ?

(11) એક વ્યક્તિ બે અનભિનત પાસા એક સાથે ઉછાળે છે. તો મળતા અંકોના સરવાળાની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

(જવાબ : બે પાસા ઉછાળે તો નિદર્શ અવકાશ

(1, 1) (1, 2) (1, 3) .... (1, 6)

” ” ” ”

” ” ” ”

” ” ” ”

(6, 1) (6, 2) (6, 3) .... (6, 6)

$\therefore\ x_i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$

$P(x_i) = \frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}$

$\therefore\ \Sigma(x) = 7$)

(13) ત્રણ સિક્કાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો મળતી છાપની સંખ્યાની અપેક્ષિત કિંમત અને વિચરણ શોધો.

(જવાબ :

x	0	1	2	3	$E(x) = 1.5$
$P(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$V(x) = 0.75$

(14) ચાર સિક્કાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો છાપની અપેક્ષિત સંખ્યા શોધો.

જવાબ :

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$E(x) = 2$

(15) એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે. તો P ની કિંમત શોધી તેની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{4}$	P	P

(જવાબ : $P = \frac{1}{10}$, $E(x) = 2.3$)

(16) એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે. (1) k શોધો. (2) x નું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

x_i	–2	–1	0	1	2	3
$P(x_i)$	k	$\frac{1}{10}$	$5k + k$	$\frac{4}{10}$	$2k$	$\frac{5}{100}$

(જવાબ : $k = \frac{5}{100}$, સંભાવના વિતરણ માટે k ની કિંમત લખી ફરીથી લખો.)

(17) એક યદચ્છ ચલ x નું સભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે. તે ઉપરથી તેનો મધ્યક અને વિચરણ શોધો.

x_i	–2	–1	0	1	2	3
$P(x_i)$	$\frac{5}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{100}$

(જવાબ : $E(x) = 0.55$, $V(x) = 1.2475$)

(18) એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે તો તે ઉપરથી (i) $E(2x + 1)$ (ii) $V(3x + 3)$ શોધો.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	$1/20$	$1/5$	$1/10$	$1/20$	$1/20$	$1/20$

(જવાબ : (i) 4.5 (ii) 20.5875)

(19) એક ડબ્બામાં 8 બલ્બ છે. તેમાંથી 3 બલ્બ ખામીવાળા છે અને તેમાંથી યદચ્છ રીતે 3 બલ્બ લેવામાં આવે છે તો ખામીવાળા બલ્બની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

(જવાબ :

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	$10/56$	$30/56$	$15/56$	$1/56$

$E(x) = 1.125$)

(20) એક ડબ્બામાં 5 લાલ અને 2 લીલા દડા છે. એક વ્યક્તિ તેમાંથી બે દડા લે છે. જો પ્રત્યેક લાલ દડા દીઠ તેને રૂ. 20 અને પ્રત્યેક લીલા દડા દીઠ તેને રૂ. 5 મળતા હોય તો તેને મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

(જવાબ :

x_i	40	25	10
$P(x_i)$	$10/21$	$10/21$	$1/21$

$E(x) = 31$)

(21) જો બે સિક્કાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે અને સિક્કાની એક બાજુ છાપ અને બીજી બાજુ કાંટો પડે છે. જો છાપ બાજુ 2 અને કાંટા બાજુ 1 લખેલા હોય તો મળતી છાપની સંખ્યાના સરવાળાની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

(જવાબ :

x_i	2	3	4
$P(x_i)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

$E(x) = 3$)

(22) એક ડબ્બામાં 5 ટિકિટો છે. તેના ઉપર અનુક્રમે 2, 3, 3, 5, 5 નંબર લખેલા છે. તેમાંથી બે ટિકિટો લેવામાં આવે છે. તો ટિકિટ ઉપર મળતાં અંકોના સરવાળાની અપેક્ષિત કિંમત મેળવો.

(જવાબ :

x_i	5	6	7	8	10
$P(x_i)$	$2/10$	$1/10$	$2/10$	$4/10$	$1/10$

$E(x) = 7.2$)

(23) એક વસ્તુની જુદા જુદા દિવસો માટે માંગ નીચે પ્રમાણે છે તો તે ઉપરથી તેની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

માંગ	10	11	12	13	14	કુલ
દિવસો	10	20	20	40	10	100

(જવાબ : માંગ x_i અને $P(x_i) = \frac{10}{100} = 0.1, \frac{20}{100} = 0.2, \frac{20}{100} = 0.2, \frac{40}{100} = 0.4, \frac{10}{100} = 0.1$

અને $E(x) = 12.2$)

(24) એક લોટરીમાં 1 રૂ.ની એક એવી 100 ટિકિટો વેચાઈ છે અને એક ઈનામ રૂ. 60 નું છે. એક વ્યક્તિ એક ટિકિટ ખરીદે છે તો તેને મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

(જવાબ : –0.4)

(25) એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ $P(x)$ નીચે પ્રમાણે છે.

$P(x) = kx^2$ જ્યાં $x = 1, 2, 3$

અચળાંક k ની કિંમત શોધી $E(x)$ અને $V(x)$ શોધો.

(જવાબ : $k = \frac{1}{14}$, $E(x) = \frac{36}{14}$, $V(x) = \frac{98}{14}$)

(26) એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિધેય નીચે પ્રમાણે છે.

x_i	0	1	2	3	4
$P(x_i)$	0.1	0.25	0.3	0.25	0.1

તો નીચેનાની કિંમત શોધો.

(1) $E(x)$, (2) $E(x + 3)$ (3) $E(x)^2$ (4) $E(x + 2)^2$ (5) $V(x)$ (6) $V(5x + 3)$

(જવાબ : (1) 2 (2) 5 (3) 5.3 (4) 10.3 (5) 1.3 (6) 32.5)

(27) જો x અને y નિરપેક્ષ યાદચ્છિક ચલો હોય અને $E(x) = 8$, $E(y) = 3$, $E(xy) = 24$, $V(x) = 3$ અને $V(y) = 2$ હોય તો,

(1) $E(3x + y)$ (2) $V(2x - 3y)$ (3) $V(x + y)$ (4) $V(3x - 10)$ ની કિંમત શોધો.

(જવાબ : (1) 27 (2) 30 (3) 5 (4) 27)

(28) બે યદચ્છ ચલ x અને y સ્વતંત્ર હોય અને $E(x) = 3$, $E(y) = 5$, $V(x) = 6$, $V(y) = 4$ હોય તો,

(1) $E(x)^2$ (2) $E(y - 1)^2$ (3) $V(3 - x)$ (4) $V(2y - 3)$

(જવાબ : (1) 15 (2) 20 (3) 6 (4) 16)

3.12 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો (MCQ's) :

(i) યાદચ્છિક ચલ x ની અપેક્ષિત કિંમત = ...

(a) $E(x)$ (b) Ex (c) σx (d) એકપણ નહીં

(ii) યાદચ્છિક ચલ x નું વિચરણ = ...

(a) $E(x_i^2)$ (b) $[E(x)]^2$ (c) $E(x_i^2) - [E(x_i)]^2$ (d) એકપણ નહીં

(iii) યાદચ્છિક ચલ x ની ગણિતીય અપેક્ષા $E(x)$ = ...

(a) મધ્યક (b) વિચરણ (c) સહવિચરણ (d) એકપણ નહીં

(iv) યાદચ્છિક ચલ x ની ગણિતીય અપેક્ષાને .... વડે દર્શાવાય છે.

(a) μ (b) σ (c) δ (d) એકપણ નહીં

(v) એક યાદચ્છિક ચલ x ની કિંમત $x = 1$ હોય ત્યારે તેની સંભાવના 0.7 અને તેની કિંમત $x = 2$ હોય ત્યારે તેની સંભાવના 0.3 છે. તો તે ચલની અપેક્ષિત કિંમત = ...

(a) 2.1 (b) 1.3 (c) 1.7 (d) એકપણ નહીં

(vi) કોઈ એક યદચ્છ x ની ગણિતીય અપેક્ષા $E(x) = 9$ અને વિચરણ $V(x) = 17$ હોય તો $E(x^2) =$ ....

(a) 26 (b) 81 (c) 98 (d) એકપણ નહીં

(vii) જો ગણિતીય ચલની અપેક્ષા $E(x) = 4$ હોય તો $E(3x + 2) =$ ....

(a) 14 (b) 12 (c) 8 (d) એકપણ નહીં

(viii) જો ગણિતીય ચલની અપેક્ષા $E(x) = 4.5$ અને $E(y) = 4$ હોય તો $E(x + y) =$ ....

(a) 8.5 (b) 18 (c) 0.5 (d) એકપણ નહીં

(ix) એક માહિતી માટે $E(x) = 10$ અને $E(x^2) = 115$ તો $V(x) =$ ....

(a) 215 (b) 15 (c) 105 (d) એકપણ નહીં

(x) એક યાદચ્છિક ચલ x એ –2, –1, 0 કિંમત ધારણ કરે તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.3, 0.6 અને 0.1 હોય તો, $E(x_i^2) =$ ....

(a) –1.2 (b) 1.8 (c) 7.2 (d) એકપણ નહીં

(xi) એક માહિતી માટે $V(x) = 4$ હોય તો $V(2x - 3) =$ ....

(a) 8 (b) 16 (c) 13 (d) એકપણ નહીં

(xii) એક માહિતી માટે $V(x) = 4$ હોય તો $V(3 - 3x) =$ ....

(a) –33 (b) 12 (c) 36 (d) એકપણ નહીં

(xiii) એક માહિતીનું પ્રમાણિત વિચલન = 4 છે. તો તેનું $(4 + 2x)$ નું વિચરણ મેળવો.

(a) 16 (b) 64 (c) 20 (d) એકપણ નહીં

(xiv) એક માહિતી માટે $5x = 4$ તો $V(4 - 2x) =$ ....

(a) 16 (b) 64 (c) 20 (d) એકપણ નહીં

(xv) x અને y બે સ્વતંત્ર ચલો છે. તેમાં $V(x) = 3$ અને $V(y) = 5$ હોય તો $V(2x + 3y) =$ ....

(a) 45 (b) 14 (c) 57 (d) એકપણ નહીં

જવાબ :

(i) a (ii) c (iii) a (iv) a (v) b (vi) c (vii) a
(viii) a (ix) b (x) c (xi) b (xii) c (xiii) b (xiv) b
(xv) c

3.13 ચાવીરૂપ શબ્દો :

યદચ્છ ચલ : યદચ્છ પ્રયોગોની કિંમતોની સંખ્યાત્મક રજૂઆત.

અસતત ચલ : ગણતરી કરી શકાય તેવી કિંમતો.

સતત ચલ : વર્ગોમાં દર્શાવવામાં આવતી કિંમતો. દા.ત. 0-10, 10-20, ...

સંભાવના વિતરણ : યદચ્છ ચલની જુદી જુદી કિંમતો અને તેની જુદી જુદી સંભાવનાઓ દર્શાવતું કોષ્ટક.

ગાણિતીય અપેક્ષા : યદચ્છ ચલની સરેરાશ કિંત્મત.

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) Sancheti & Kapoor 'Business Statistics', S. Chand & Sons, New Delhi, 2009.

(2) Goon, Gupta, Das Gupta, An Outline of Statistical Theory Vol-I and Vol-II, World Press, Calcutta, 2011.

એકમ 4	સંભાવના વિતરણો (Probability Distribution)

એકમ 4

સંભાવના વિતરણો
(Probability Distribution)

4.0 ઉદ્દેશ

4.1 પ્રસ્તાવના

4.2 અસતત સંભાવના વિતરણનો ખ્યાલ

4.3 દ્વિપદી વિતરણ

4.3.1 દ્વિપદી વિતરણનો અર્થ

4.3.2 દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના વિધેય

4.3.3 દ્વિપદી વિતરણના ગુણધર્મો

4.3.4 દ્વિપદી વિતરણના દાખલાઓ

4.3.5 સ્વાધ્યાય

4.4 ચાવીરૂપ શબ્દ

– સંદર્ભ ગ્રંથ

4.0 ઉદ્દેશ :

આ પ્રકરણનો મુખ્ય ઉદ્દેશ વિદ્યાર્થીઓ અસતત સંભાવના વિતરણનો અર્થ સમજી દ્વિપદી વિતરણ અને સંભાવના વિધેય અંગે જાણકારી મેળવે અને દ્વિપદી વિતરણના ગુણધર્મોથી વાકેફ થાય.

4.1 પ્રસ્તાવના :

અસતત ચલના સંભાવના વિતરણમાં દ્વિપદી વિતરણ, પોયસન વિતરણ, અતિગુણોતર વિતરણ જેવાં જુદાં જુદાં સંભાવના વિતરણનો અભ્યાસ કરી શકાય.

આંકડાશાસ્ત્રના અન્ય અભ્યાસમાં આ સંભાવના વિતરણો ઉપયોગી તો છે જ પરંતુ વ્યવહારમાં પણ વિવિધ ક્ષેત્રે સંભાવના વિતરણોનો ઉપયોગ થાય છે જેમ કે કોઈ વસ્તુની માંગનું અનુમાન કરવા, ઉત્પાદનમાં ગુણવત્તાનો અભ્યાસ કરવા, દર્દી ઉપર દવાની અસરનો અભ્યાસ કરવા, કોઈ વિસ્તારમાં કુટુંબોની આવકના વિતરણનો અભ્યાસ કરવા તેમજ ડેટા વિતરણ જેવા આધુનિક ક્ષેત્રમાં સંભાવના વિતરણ ઉપયોગી છે.

મિત્રો, સૌપ્રથમ આપણે અસતત સંભાવના વિતરણનો અર્થ સમજીએ.

4.2 અસતત સંભાવના વિતરણનો ખ્યાલ :

યાદચ્છિક ચલ x ની જુદી જુદી શક્ય કિંમતો અને તેમને અનુરૂપ સંભાવનાની રજૂઆતને સંભાવના વિતરણ કહે છે.

અસતત યાદચ્છિક ચલ x ને અનુરૂપ સંભાવના દર્શાવતી ગોઠવણીને અસતત સંભાવના વિતરણ કહેવાય. જો અસતત યાદચ્છિક ચલ x ની કિંમતો $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ ને અનુરૂપ સંભાવનાઓ અનુક્રમે $P(x_1), P(x_2), P(x_3), \ldots\ldots, P(x_n)$ હોય તો અસતત સંભાવના વિતરણને કોષ્ટક સ્વરૂપમાં નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય.

x :	x_1 x_2 x_3 .... x_n
$P(x)$:	$P(x_1)$ $P(x_2)$ $P(x_3)$ .... $P(x_n)$

દા.ત. ત્રણ સિક્કાને યાદચ્છિક રીતે ઉછાળતાં નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ મળે.

U = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

કુલ બનાવો n = 8

હવે જો છાપની સંખ્યાને ચલ x ધારવામાં આવે તો અસતત યાદચ્છિક ચલ 'છાપની સંખ્યા'નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ મળે.

છાપની સંખ્યા (x)	સંભાવના P(x)
0	$1/8$
1	$3/8$
2	$3/8$
3	$1/8$
કુલ	$8/8 = 1$

અહીં એ નોંધવું જોઈએ કે સંભાવના વિતરણમાં

(i) $\Sigma P(x) = 1$ અને

(ii) $0 \leq P(x) \leq 1$

4.3.1 દ્વિપદી વિતરણ (Binomial distribution)

દ્વિપદી વિતરણ અસતત ચલરાશીનું સંભાવના વિતરણ છે. દ્વિપદી વિતરણની શરૂઆત 18 મી સદીની શરૂઆતમાં સ્વિસ ગણિતશાસ્ત્ર જેમ્સ (જેકોબ) બર્નોલીએ કરી હતી.

જ્યારે (i) યાદચ્છિક પ્રયોગમાં બે પ્રકારના પરિણામ - સફળતા અને નિષ્ફળતા જોવા મળતા હોય

(ii) પ્રયોગનું n વખત પુનરાવર્તન થતું હોય

(iii) દરેક પુનરાવર્તન એકબીજાથી નિરપેક્ષ હોય

(iv) દરેક પ્રયત્નમાં સફળતાની સંભાવના p અચલ હોય ત્યારે n પ્રયત્નોમાંથી કોઈપણ x પ્રયત્નમાં સફળતાની સંભાવના દ્વિપદી વિતરણની મદદથી શોધી શકાય.

નોંધ : જે પ્રયત્નો એકબીજાથી નિરપેક્ષ હોય અને દરેક પ્રયત્નમાં સફળતાની સંભાવના p અચળ હોય તો તે પ્રયત્નોને બર્નોલી પ્રયત્નો કહે છે.

4.3.2 દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના વિધેય :

$$P(x) = {}^{n}c_{x}\ p^{x}\ q^{n-x}$$

જ્યાં n = કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા

x = સફળતાની સંખ્યા (x = 0, 1, 2, ..., n)

p = કોઈ એક પ્રયત્નમાં સફળતાની સંભાવના

q = નિષ્ફળતાની સંભાવના

આપણે જાણીએ છીએ કે $p + q = 1$ થાય

$$\therefore\ q = 1 - p$$

4.3.3 દ્વિપદી વિતરણના ગુણધર્મો :

(1) દ્વિપદી વિતરણ અસતત ચલરાશીનું સંભાવના વિતરણ છે.

(2) n અને p આ વિતરણના પ્રાચલ છે.

(3) દ્વિપદી વિતરણમાં સફળતાની સરેરાશ સંખ્યા (મધ્યક) = np

(4) દ્વિપદી વિતરણમાં વિચરણ npq છે.

$\therefore$ પ્રમાણિત વિચલન = $\sqrt{npq}$

(5) દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યકની કિંમત હમેશા વિચરણ કરતાં વધુ હોય છે.

(6) જો $P = \frac{1}{2}$ હોય તો દ્વિપદી વિતરણ સંમિત હોય છે.

જો $P < \frac{1}{2}$ હોય તો દ્વિપદી વિતરણમાં ઘન વિષમતા અને $P > \frac{1}{9}$ હોય તો તેમાં ઋણ વિષમતા હોય છે.

(7) જ્યારે પ્રયત્નોની સંખ્યા (n) ઘણી મોટી સંખ્યા હોય અને સફળતાની સંભાવના (p) બહુ નાની સંખ્યા ન હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણ, પોયસન વિતરણને અનુલક્ષે છે.

(8) જ્યારે (n) બહુ મોટી સંખ્યા હોય અને (p) બહુ નાની સંખ્યા ન હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુલક્ષે છે.

4.3.4 ઉદાહરણ :

1. એક સિક્કાને યાદચ્છિક રીતે 7 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. તો કોઈપણ 3 વખત છાપ મળવાની સંભાવના શોધો.

જવાબઃ મિત્રો, અહીં સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયોગનું 7 વખત પુનરાવર્તન થાય છે.

n = 7

સિક્કા પર છાપ મળવાની સંભાવના $P = \frac{1}{2}$

$\therefore$ કાંટો મેળવવાની સંભાવના = $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

હવે, $P(x) = {}^{n}c_x \; p^x \; q^{n-x}$

$$P(x) = {}^{7}c_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{7-x}$$

3 વખત છાપ મળવાની સંભાવના શોધવા $x = 3$ મૂકતાં,

$$P(3) = {}^{7}c_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-3} \qquad {}^{7}c_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

$$35 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{16}$$

$$P(3) = \frac{35}{128}$$

2. એક સમઘન પાસાને 5 વખત ફેંકવામાં આવે છે. જો પાસા ઉપર 4 કે 5 નંબરનો અંક મળે તો તેને સફળતા ગણવામાં આવે, તો 5 પ્રયત્નોમાંથી (i) 4 વખત સફળતા મળે (ii) ઓછામાં ઓછી 4 વખત સફળતા મળે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

મિત્રો, અહીં પાસો ફેંકવાના પ્રયોગનું 5 વખત પુનરાવર્તન કરવામાં આવે છે.

$\therefore$ n = 5,

મિત્રો, પાસો ફેંકતા કુલ 6 શક્ય પરીણામો છે જેમાંથી 4 અને 5 અંક સફળતા માટે સાનુકુળ છે.

પાસા ઉપર 4 કે 5 અંક મળવાની સંભાવના $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

હવે $P(x) = {}^{n}c_{x} \quad p^{x} \quad q^{n-x}$

$P(x) = {}^{5}c_{x} \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x}$

(i) 4 વખત સફળતા મળવાની સંભાવના

$P(4) = {}^{5}c_{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{5-4}$ $\qquad \because \; {}^{5}c_{4} = 5$

$= 5 \times \frac{1}{81} \times \frac{2}{3}$

$P(4) = \frac{10}{243}$

(ii) ઓછામાં ઓછી 4 વખત એટલે કે 4 અથવા 5 વખત સફળતાની સંભાવના એટલે કે P(4) + P(5) શોધવાનુ છે, $P(4) = \frac{10}{243}$ છે.

$\therefore P(5) = {}^{5}c_{5} \left(\frac{1}{3}\right)^{5} \left(\frac{2}{3}\right)^{5-5}$ $\qquad \because \; {}^{5}c_{5} = 1, \left(\frac{2}{3}\right)^{0} = 1$

$= 1 \times \frac{1}{243} \times 1$

$P(5) = \frac{1}{243}$

$\therefore$ ઓછામાં ઓછી 4 વખત સફળતા મળવાની સંભાવના

$P(x \geq 4) = P(4) + P(5)$

$= \frac{10}{243} + \frac{1}{243}$

$= \frac{11}{243}$

3. એક વિસ્તારમાં સામાન્ય રીતે 25% લોકો ધુમ્રપાન કરતા જણાય છે. આ વિસ્તારમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરાયેલા 5 વ્યક્તિમાંથી

(i) એકેય વ્યક્તિ ધુમ્રપાન કરતી ન હોય

(ii) બધી જ વ્યક્તિ ધુમ્રપાન કરતી હોય

(iii) વધુમાં વધુ 2 વ્યક્તિ ધુમ્રપાન કરતી હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં 5 વ્યક્તિઓની નિદર્શ તપાસ કરવામાં આવતી હોવાથી,

$n = 5$,

કોઈ વ્યક્તિ ધુમ્રપાન કરતી હોવાની સંભાવના

$$P = 25\% = 25/100$$

$$P = 1/4$$

$$\therefore q = 1 - 1/4 = 3/4$$

હવે, $P(x) = {}^{n}c_x \quad p^x \quad q^{n-x}$

$$P(x) = {}^{5}c_x \left(1/4\right)^x \left(3/4\right)^{5-x}$$

(i) એકેય વ્યક્તિ ધુમ્રપાન કરતી ન હોય તેની સંભાવના એટલે કે $x = 0$

$$P(0) = {}^{5}c_0 \left(1/4\right)^0 \left(3/4\right)^{5-0} = 1 \times 1 \times \frac{(3)^5}{(4)^5} \quad \because \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1 \text{ અને } {}^{5}C_{O} = 1$$

$$= \frac{243}{1024}$$

$$P(0) = 243/1024$$

(ii) બધી જ એટલે કે પાંચેય વ્યક્તિઓ ધુમ્રપાન કરતી હોય તેની સંભાવના એટલે કે $x = 5$ મૂકતા

$$P(5) = {}^{5}c_5 \left(1/4\right)^5 \left(3/4\right)^{5-5} \quad \because {}^{5}C_{5} = 1,\ \left(3/4\right)^0 = 1$$

$$= 1 \times \frac{1}{1024} \times 1$$

$$P(5) = 1/1024$$

(iii) વધુમાં વધુ 2 વ્યક્તિ એટલે કે 0, 1 અથવા 2 વ્યક્તિ ધુમ્રપાન કરતી હોય. તેની સંભાવના P(0) + P(1) + P(2) અને P(2) શોધીએ.

$$P(1) = {}^{5}c_1 \times \left(1/4\right)^1 \left(3/4\right)^{5-1} = 5 \times \frac{1}{4} \times \frac{(3)^4}{(4)^4}$$

$$= 5 \times \frac{1}{4} \times \frac{81}{256}$$

$$P(1) = \frac{405}{1024}$$

$$P(2) = {}^5c_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{5-2} = 10 \times \frac{(1)^2}{(4)^2} \times \frac{(3)^3}{(4)^3}$$

$$= 10 \times \frac{1}{16} \times \frac{27}{64}$$

$$= \frac{270}{1024}$$

હવે વધુમાં વધુ 2 વ્યક્તિ ધુમ્રપાન કરતી હોવાની સંભાવના

$$P(x \le 2) = P(o) + P(1) + P(2)$$

$$= \frac{243}{1024} + \frac{405}{1024} + \frac{270}{1024}$$

$$= \frac{918}{1024}$$

આમ, $P(x \le 2) = \frac{459}{512}$

4. એક વિમાનમાંથી એક પુલ ઉપર 4 બોમ્બ ફેંકવામાં આવે છે. કોઈપણ બોમ્બ પુલ ઉપર પડવાની સંભાવના $\frac{2}{5}$ છે. પુલનો નાશ કરવા બે બોમ્બ પૂરતા છે. તો (i) પુલનો સંપૂર્ણ નાશ થાય (ii) પુલનો અંશતઃ નાશ થાય અને (iii) પુલ બચી જાય તેની સંભાવના શોધો.

મિત્રો, વિમાનમાંથી પુલ ઉપર 4 બોમ્બ ફેંકવામાં આવે છે.

$\therefore n = 4,$

બોમ્બ પુલ ઉપર પડવાની સંભાવના $P = \frac{2}{5}$

$\therefore q = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

હવે, $P(x) = {}^nc_x \, p^x \, q^{n-x}$

$$\therefore P(x) = {}^4c_x \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{3}{5}\right)^{4-x}$$

(i) જો પૂલ ઉપર 2 કે તેથી વધુ એટલે કે 2, 3 અથવા 4 બોમ્બ પડે તો પુલનો સંપૂર્ણ નાશ થાય.

$$P(2) = {}^4c_2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^{4-2} \qquad {}^4c_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

$$= 6 \times \frac{4}{25} \times \frac{9}{25}$$

$$P(2) = \frac{216}{625}$$

$P(3) = P(3) = {}^4c_3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^{4-3}$ $\because \; 4_{C_3} = 4$

$= 4 \times \frac{8}{125} \times \frac{3}{5}$

$P(3) = \frac{96}{625}$

$P(4) = {}^4c_4 \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right)^{4-4}$

$= 1 \times \frac{16}{625} \times 1$

$P(4) = \frac{16}{625}$

$\therefore \; P(x \geq 2) = P(2) + P(3) + P(4)$

$= \frac{216}{625} + \frac{96}{625} + \frac{16}{625}$

$P(x \geq 2) = \frac{328}{625}$

(ii) જો પુલ ઉપર 1 બોમ્બ પડે તો પૂલનો અંશતઃ નાશ થાય એટલે કે $x = 1$ મૂકતા

$\therefore \; P(1) = {}^4c_1 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^{4-1}$

$= 4 \times \frac{2}{5} \times \frac{27}{125}$

$P(1) = \frac{216}{625}$

(iii) જો પૂલ ઉપર એકેય બોમ્બ ન પડે તો પૂલ બચી જાય. એટલે કે $x = 0$ મૂકતા

$P(0) = {}^4c_0 \left(\frac{2}{5}\right)^0 \left(\frac{3}{5}\right)^{4-0}$

$= 1 \times 1 \times \frac{81}{625}$

$P(0) = \frac{81}{625}$

નોંધ : પૂલનો સંપૂર્ણ નાશ થવાની સંભાવના નીચે મુજબ પણ શોધી શકાય.
જો પુલ ઉપર 2 કે તેથી વધુ બોમ્બ પુલ ઉપર પડે તો પુલનો સંપૂર્ણ નાશ થાય.

$\mathbf{P}(x \geq 2) = P(2) + P(3) + P(4) = 1 - [P(o) + P(1)]$

$= 1 - \left[\frac{81}{625} + \frac{216}{625}\right] = 1 - \frac{297}{625}$

$P(2) + P(3) + P(4) = \frac{328}{625}$

5. પાંચ સમઘન પાસાને 96 વખત એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. જો પાસા ઉપર બેકી અંક મળે તેને સફળતા ગણવામાં આવે તો સફળતાની દરેક સંખ્યાની અપેક્ષિત આવૃતિ શોધો.

N = 96, 5 પાસા ઉછાળવામાં આવતા હોવાથી $n = 5$

પાસા પર બેકી અંક મળવાની સંભાવના $p = 3/6 = 1/2$

$$\therefore \; q = 1 - 1/2 = 1/2$$

હવે, $P(x) = {}^{n}c_x \; p^x \; q^{n-x}$

$$P(x) = {}^{5}c_x \left(1/2\right)^x \left(1/2\right)^{5-x}$$

આ સંભાવના વિધેયનું નીચે મુજબ સાદુ રૂપ આપી ગણતરી વધુ સરળ બનાવી શકાય.

$$P(x) = {}^{5}c_x \left(1/2\right)^{x+5-x}$$

$$= {}^{5}c_x \left(1/2\right)^5$$

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{32} \times {}^{5}c_x}$$

5 પાસા ઉછાળવામાં આવતા હોવાથી બેકી સંખ્યા 0, 1, 2, 3, 4 કે 5 પાસા ઉપર મળી શકે. સફળતાની આ દરેક સંખ્યાની સંભાવના અને અપેક્ષિત આવૃત્તિ નીચે મુજબ શોધી શકાય.

સફળતાની સંખ્યા (x)	$P(x) = \frac{1}{32} \times {}^{5}c_x$	અપેક્ષિત આવૃત્તિ $N \times P(x)$
0	$\frac{1}{32} \times {}^{5}c_0 = 1/32$	$96 \times \frac{1}{32} = 3$
1	$\frac{1}{32} \times {}^{5}c_1 = 5/32$	$96 \times 5/32 = 15$
2	$1/32 \times {}^{5}c_2 = 10/32$	$96 \times 10/32 = 30$
3	$1/32 \times {}^{5}c_3 = 10/32$	$96 \times 10/32 = 30$
4	$\frac{1}{32} \times {}^{5}c_4 = 5/32$	$96 \times \frac{5}{32} = 15$
5	$\frac{1}{32} \times {}^{5}c_5 = 1/32$	$96 \times \frac{1}{32} = 3$
	કુલ $= 32/32 = 1$	$N = 96$

નોંધ : આ ઉદાહરણમાં જોઈ શકાય છે કે $P = 1/2$ હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણ સંમિત વિતરણ હોય છે.

6. એક પરીક્ષામાં સામાન્ય રીતે 20% વિદ્યાર્થીઓ પરીક્ષામાં નાપાસ થાય છે. આ વર્ગમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા 5 વિદ્યાર્થીમાંથી 3 વિદ્યાર્થી પાસ થવાની સંભાવના શોધો.

$n = 5$ કોઈ વિદ્યાર્થી નાપાસ થવાની સંભાવના (નિષ્ફળતાની સંભાવના) $q = 20\% = \frac{20}{100} = 1/5$

$\therefore\ p = 1 - 1/5 = 4/5$

હવે $P(x) = {}^nc_x \ p^x \ q^{n-x}$

$$\boxed{p(x) = {}^5c_x \left(4/5\right)^x \left(1/5\right)^{5-x}}$$

3 વિદ્યાર્થી પાસ થવાની સંભાવના

$p(3) = {}^5c_3 \left(4/5\right)^3 \left(1/5\right)^{5-3}$ $\qquad {}^5c_3 = {}^5c_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

$= 10 \times \frac{64}{125} \times \frac{1}{25}$

$P(3) = \frac{128}{625}$

7. સામાન્ય રીતે મુસાફરીએ નીકળેલા 10 વહાણથી 9 વહાણ બંદર પર સહીસલામત પાછા ફરે છે. તો મુસાફરીએ નીકળેલા 400 વહાણમાંથી બંદર પર સહીસલામત પાછા ફરતા વહાણોની સરેરાશ સંખ્યા અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

$n = 400$, કોઈ વહાણ બંદર પર સહીસલામત પાછું ફરે તેની સંભાવના p = $9/10$

$\therefore\ q = 1 - \frac{9}{10} = 1/10$

સરેરાશ (મધ્યક) $= np$ $\qquad$ પ્ર.વિ. $= \sqrt{npq}$

$= 400 \times \frac{9}{10}$ $\qquad = \sqrt{400 \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10}}$

મધ્યક = 360 $\qquad = \sqrt{36}$

પ્ર. વિ. = 6

8. પ્રચલિત સંકેત અનુસાર એક દ્વિપદી ચલ માટે $n = 6$ અને $q.p(x = 4) = p(x = 2)$ હોય તો p ની કિંમત શોધો.

$P(x) = {}^nc_x \ p^x \ q^{n-x}$

$n = 6$ મૂકતાં

$$\boxed{P(x) = {}^6c_x \ p^x \ q^{6-x}}$$

હવે $q.p(x = 4) = p(x = 2)$

$\therefore\ q.\ {}^6c_4 \ p^4 \ q^{6-4} = {}^6c_2 \ p^2 \ q^{6-2}$

$\therefore\ 9 \times 15\ p^4\ q^2 = 15\ p^2\ q^4$

$\therefore\ 9\,p^4 q^2 = p^2\, q^4$

$\therefore\ \dfrac{9p^4}{p^2} = \dfrac{q^4}{q^2}$

$\therefore\ 9p^2 = q^2$

બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં, $\sqrt{9p^2} = \sqrt{q^2}$

$3p = q$

$\therefore\ 3p = 1 - p$ ($q = 1 - p$ મૂકતાં)

$\therefore\ 3p + p = 1$

$\therefore\ 4p = 1$

$\therefore\ p = \frac{1}{4}$

9. એક દ્વિપદી વિતરણમાં $n = 6$ અને $P(3) : P(4) = 8 : 3$ હોય તો $P(x \geq 1)$ ની કિંમત શોધો.

$P(x) = {}^{n}c_{x}\ \ p^{x}\ \ q^{n-x}$

$n = 6$ મૂકતાં $\boxed{P(x) = {}^{6}c_{x}\ \ p^{x}\ q^{6-x}}$

હવે P(3) : P(4) = 8 : 3 આપેલ છે.

$\therefore\ \dfrac{P(3)}{P(4)} = \dfrac{8}{3}$

$P(x)$ માં અંશમાં $x = 3$ અને છેદમાં $x = 4$ મૂકતાં,

$\therefore\ \dfrac{{}^{6}c_{3}\,p^{3}\,q^{6-3}}{{}^{6}c_{4}\,p^{4}\,q^{6-4}} = \dfrac{8}{3}$

$\therefore\ \dfrac{20\,p^3\,q^3}{15\,p^4\,q^2} = \dfrac{8}{3}$

$\therefore\ \dfrac{4}{3} \times \dfrac{q}{p} = \dfrac{8}{3}$

$\therefore\ \dfrac{q}{p} = \dfrac{8}{3} \times \dfrac{3}{4}$

$\therefore\ \dfrac{q}{p} = 2$

$\therefore\ q = 2p$

$\therefore\ 1 - p = 2p$ .... $q = 1 - p$ મૂકતાં,

$\therefore\ 1 = 2p + p$

$\therefore\ 1 = 3p$

$\therefore \quad p = 1/3$

હવે $Q = 1 - 1/3$

$q = 2/3$

હવે, સંભાવના વિધેય $P(x) = {}^6c_x \left(1/3\right)^x \left(2/3\right)^{6-x}$ થાય

તો $P(x \geq 1) = 1 - p(o)$

$= 1 - \left[{}^6c_o \left(1/3\right)^0 \left(2/3\right)^{6-0}\right]$

$= 1 - \left[1 \times 1 \times \frac{64}{729}\right]$

$= 1 - 64/729$

$\therefore P(x \geq 1) = \frac{665}{729}$

10. એક દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક 4 અને વિચરણ 2.4 છે. તો તેના પ્રાચલ શોધો.

મધ્યક = 4 વિચરણ = 2.4

$np = 4$ $npq = 2.4$

$4 \times q = 2.4$ .... $np = 4$ મૂકતાં

$q = \frac{2.4}{4}$

$\boxed{q = 0.6}$

હવે $P = 1 - 0.6$

$\boxed{P = 0.4}$

હવે, $np = 4$

$n \times 0.4 = 4$

$n = \frac{4}{0.4}$ $\therefore$ પ્રાચલ $(n, p) = (10, 0.4)$

$n = 10$

11. એક દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક 6 અને પ્રમાણિત વિચલન $\frac{3}{2}$ છે. તો તેની વિષમતા વિશે શું કહી શકાય ?

મિત્રો દ્વિપદી વિતરણમાં વિષમતાનો અભ્યાસ કરવા p ની કિંમત શોધાય.

મધ્યક = $np = 6$ પ્ર.વિ. = $3/2$

$\therefore$ વિચરણ $= \frac{9}{4}$

$npq = \frac{9}{4}$

$6 \times q = \frac{9}{4}$

$q = \frac{9}{6 \times 4}$

$q = \frac{3}{8}$

$p = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

$p = 0.625$

આમ, $p > \frac{1}{2}$ હોવાથી આ વિતરણમાં ઋણ વિષમતા છે એમ કહી શકાય.

12. ''એક દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક = 20 અને પ્રમાણિત વિચલન = 5 છે'' આ વિધાનની સત્યાર્થતા તપાસો.

મધ્યક = 20 પ્ર. વિ. = 5

$\therefore$ વિચરણ = 25 થાય

પરંતુ દ્વિપદી વિચરણમાં હંમેશા મધ્યકની કિંમત વિચરણ કરતાં વધુ હોય છે. તેથી આપેલું વિધાન ખોટું છે.

4.3.5 સ્વાધ્યાય :

(A) યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી જવાબ લખો.

(1) દ્વિપદી વિતરણ કઈ ચલરાશીનું સંભાવના વિતરણ છે ?

(a) અસતત ચલ (b) સતત ચલ (c) બંને ચલ

(2) દ્વિપદી વિતરણની શોધ કોણે કરી હતી ?

(a) કાર્લ પિયર્સન (b) સ્પિયરમેન (c) જેકોબ બર્નોલી

(3) દ્વિપદી વિતરણના પ્રાચલ કયા છે ?

(a) p અને q (b) n અને p (c) np અને npq

(4) એક દ્વિપદી વિતરણમાં $q = \frac{1}{3}$ છે, તેમાં કેવી વિષમતા હોય ?

(a) ધન (b) ઋણ (c) શૂન્ય

(5) એક દ્વિપદી વિતરણમાં $n = 6$ અને $q = \frac{2}{3}$ હોય તો મધ્યકની કિંમત શું થાય ?

(a) 2 (b) 3 (c) 6

(B) નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો.

(1) કઈ શરતો હેઠળ અસતત ચલની સંભાવના શોધવા દ્વિપદી વિતરણ ઉપયોગી છે ?

(2) બર્નોલી પ્રયત્નો એટલે શું ?

(3) દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના વિધેય લખો.

(4) દ્વિપદી વિતરણ માટે સંમિતતા અને વિષમતાની શરતો જણાવો.

(5) દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક અને વિચરણની કિંમત વચ્ચેનો સંબંધ જણાવો.

(6) દ્વિપદી વિતરણના બે ઉપયોગો જણાવો.

જવાબ (1) સાંખ્યકીય ગુણવત્તા નિયંત્રણના અભ્યાસમાં નિયંત્રણ સીમા શોધવા.

(2) ગુરુ નિદર્શન પરીક્ષણમાં પરીકલ્પના પરીક્ષણમાં દ્વિપદી વિતરણ ઉપયોગી છે.

(C) ગણતરી કરો.

(1) નોકીયા કંપનીએ બનાવેલ જથ્થામાં સામાન્ય રીતે 20% મોબાઈલ ખામીયુક્ત જણાય છે. તો કંપનીએ બનાવેલ જથ્થામાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ 6 મોબાઈલના નિદર્શમાં (i) બધા જ મોબાઈલ સારા હોય (ii) 2 મોબાઈલ ખામીયુક્ત હોવાની સંભાવના શોધો.

(2) છોકરા અને છોકરીની સંભાવના સરખી ગણતાં, દરેક કુટુંબમાં 5 બાળકો હોય તેવા 800 કુટુંબોમાંથી કેટલા કુટુંબમાં (i) 3 છોકરા (ii) 2 અથવા 3 છોકરા (iii) 5 છોકરી હશે ?

(3) એક હેતુલક્ષી કસોટીમાં દરેક પ્રશ્નના 3 વૈકલ્પિક ઉત્તરો છે, જેમાંથી કોઈ એક ઉત્તર સાચો હોય છે. એક વિદ્યાર્થીને એકેય પ્રશ્નનો સાચો ઉત્તર ખબર નથી, તેથી તે ગમે તે એક ઉત્તર સામે ખરાનું ચિહ્ન કરે છે. તો તેણે આપેલા 6 પ્રશ્નના ઉત્તરમાંથી (i) તેના બધા ઉત્તર સાચા હોય (ii) તેના બધા જ ઉત્તર ખોટા હોય અને (iii) તેના વધુમાં વધુ બે ઉત્તર સાચા હોવાની સંભાવના શોધો.

(4) ચોમાસાની ઋતુમાં સામાન્ય રીતે 30 દિવસમાંથી 10 દિવસ વરસાદ પડે છે. તો કોઈ અઠવાડીયામાં ઓછામાં 3 દિવસ વરસાદ પડવાની સંભાવના શોધો.

(5) 4 સિક્કાને યાદચ્છિક રીતે એકસાથે 64 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. સિક્કા પર છાપ મળે તેને સફળતા ગણવામાં આવે તો સફળતાની દરેક સંખ્યાની અપેક્ષિત આવૃત્તિ શોધો.

[Hint : N = 64, n = 4, p = $\frac{1}{2}$, q = $\frac{1}{2}$]

(6) (A) તીરંદાજ અર્જુન સામાન્ય રીતે 9 પ્રયત્નોમાંથી 8 પ્રયત્નોમાં નિશાન વીંધે છે. તો ત્રણ પ્રયત્નોમાંથી તે એક પ્રયત્નમાં નિશાન ચૂકી જાય તેની સંભાવના શોધો.

(B) ભારત અને પાકિસ્તાન 5 મેચની એક ક્રિકેટ શ્રેણી રમે છે, જેમાં ભારતની કોઈ મેચ જીતવાની સંભાવના $\frac{2}{3}$ છે. તો આ શ્રેણીમાં ભારત (i) 2 કે 3 મેચ જીતે (ii) 4 કે તેથી વધુ મેચ જીતે તેની સંભાવના શોધો.

(7) એક દ્વિપદી વિતરણમાં $n = 5$ તેમજ P(2) = 0.0512 અને P(3) = 0.2048 હોય તો P ની કિંમત શોધો.

(8) એક દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક 20 અને પ્રમાણિત વિચલન 2 છે. તો તેના પ્રાચલો શોધો અને સંભાવના વિધેય લખો.

(9) સામાન્ય રીતે દરેક કુટુંબમાં 25% બાળકો દૃષ્ટિની ખામીવાળા જણાય છે. તો 400 કુટુંબોની નિદર્શ તપાસમાં દૃષ્ટિની ખામીવાળા કુટુંબોની સરેરાશ સંખ્યા અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

(10) એક દ્વિપદી વિતરણનો મધ્યક 5 અને વિચરણ 2.5 છે. તો $P(x \geq 1)$ ની કિંમત શોધો.

(11) એક દ્વિપદી ચલ માટે $n = 4$ અને P = 0.3 છે. આ પરથી P(O) અને P(1) શોધો.

(12) એક દ્વિપદી વિતરણમાં $P = \frac{1}{3}$ અને પ્ર.વિ. = 2 છે. તો n ની કિંમત શોધો.

(13) એક દ્વિપદી ચલ માટે મધ્યક : વિચરણ = 5 : 4 હોય તો સફળતાની સંભાવના P ની કિંમત શોધો.

(14) એક દ્વિપદી ચલ માટે P = 39 હોય તો તેની વિષમતા વિશે જણાવો.

જવાબો :

(A) (1) a (2) c (3) b (4) b (5) a

(B) પ્રકરણમાંથી આ પ્રશ્નોના જવાબ મળી રહેશે.

(C) (1) (i) $4096/15625$ (ii) $768/3125$

(2) (i) 250 (ii) 500 (iii) 25

(3) (i) $1/729$ (ii) $64/729$ (iii) $496/729$

(4) $313/729$

(5)

x :	0	1	2	3	4
અપેક્ષિત આવૃતિ :	4	16	24	16	4

(6) (A) $16/243$ (B) $40/81$, $112/243$

(7) $4/5$

(8) $n = 25,\ p = 4/5,\ p(x) = {}^{25}c_x \left(4/5\right)^x \left(1/5\right)^{25-x}$

(9) મધ્યક = 100 ; પ્ર.વિ. = $\sqrt{75} = 8.66$

(10) $1023/1024$

(11) $P(0) = 0.2401,\ P(1) = 0.4116$

(12) $n = 18$

(13) $P = 1/5$

(14) $P = 3/4$ $\therefore$ ઋણ વિષમતા $\left(P > 1/2\right)$

4.4 ચાવીરૂપ શબ્દો :

સંભાવના : કોઈ ઘટના બને કે ન બને તેની શક્યતાને સંખ્યામાં દર્શાવવા માટેનું માપ

સંભાવના વિતરણ : સંભાવનાની વહેંચણી

પ્રાચલ : સમષ્ટિના બધા અવલોકનો પરથી શોધવામાં આવતું કોઈપણ આંકડાકીય માપ

અસતત સંભાવના વિતરણ : અસતત ચલ x ની શક્ય કિંમતો અને તેમને અનુરૂપ સંભાવનાની ગોઠવણી.

યાદચ્છિક : ભેદભાવ વિના, પૂર્વગ્રહ વિના

સંમિત આવૃત્તિ વિતરણ : જે આવૃત્તિ વિતરણમાં મહત્તમ આવૃત્તિની બંને બાજુ આવૃત્તિઓ સમાન રીતે વહેંચાયેલી હોય.

અસતત ચલ : જે ચલ તેના અંતરાલમાંથી નિશ્ચિત (પરિમિત) કિંમત ધારણ કરી શકે તેમ હોય તેને અસતત ચલ કહે છે.

– **સંદર્ભ ગ્રંથ :**

1. ગાણિતિક આંકડાશાસ્ત્ર - એચ. ડી. શાહ (યુનિ. ગ્રંથ નિર્માણ બોર્ડ), 2007
2. આંકડાશાસ્ત્ર (ધોરણ-12) - ગુજરાત રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 2021
3. Mathematical Statistic - Gupta and Kapoor (Sultan chand Prakashan), 2011

* * *

એકમ 5 પોયસન વિતરણ (Poisson Distribution)

5.0 ઉદ્દેશ

5.1 પ્રસ્તાવના

5.2 પોયસન વિતરણ

5.2.1 પોયસન વિતરણનો અર્થ

5.2.2 પોયસન વિતરણનું સંભાવના વિધેય

5.2.3 પોયસન વિતરણના ગુણધર્મો

5.2.4 પોયસન વિતરણના ઉપયોગો

5.2.5 પોયસન વિતરણના દાખલાઓ

5.2.6 સ્વાધ્યાય

5.3 ચાવીરૂપ શબ્દો

– સંદર્ભ ગ્રંથ

5.0 ઉદ્દેશ :

આ પ્રકરણમાં આપણે અસતત યાદચ્છિક ચલ x ના સંભાવના વિતરણ તરીકે પોયસન વિતરણનો અભ્યાસ કરીશું. તેમાં પોયસન વિતરણનો અર્થ, ગુણધર્મ, ઉપયોગિતા અને તેના વ્યવહારૂ ઉપયોગોથી માહિતગાર થઈશું.

5.1 પ્રસ્તાવના :

પોયસન વિતરણ એ અસતત ચલરાશીનું સંભાવના વિતરણ છે. પોયસન વિતરણની શોધ ઈ.સ. 1837માં ફ્રેંચ ગણિતશાસ્ત્રી સાયમન ડી. પોયસને કરી હતી. વ્યવહારમાં ભાગ્યે જ બનતી ઘટનાની સંભાવના પોયસન વિતરણ પરથી શોધી શકાય. આજના આધુનિક યુગમાં વ્યવહારમાં અનેક ક્ષેત્રોમાં પોયસન વિતરણનો ઉપયોગ થાય છે. જેમ કે કોઈ કોલ સેન્ટર પર કલાક દીઠ આવતા ફોનની સંખ્યા, કોઈ રેસ્ટોરન્ટમાં દિવસ દરમિયાન આવતા ગ્રાહકોની સંખ્યા, કોઈ વેબસાઈટનો દર કલાકે ઉપયોગ કરતા ગ્રાહકોની સંખ્યા, બેંક દરમહિને નાદાર ગ્રાહકોની અપેક્ષિત સંખ્યાનું અનુમાન કરવા પોયસન વિતરણનો ઉપયોગ કરે છે.

5.2 પોયસન વિતરણ :

5.2.1 અર્થ :

જ્યારે (i) યાદચ્છિક પ્રયોગમાં બે પ્રકારના પરિણામો સફળતા અને નિષ્ફળતા જોવા મળતા હોય

(ii) પ્રયોગનું n વખત પુનરાવર્તન થતું હોય પરંતુ n એ મોટી સંખ્યા હોય

(iii) દરેક પુનરાવર્તન એકબીજાથી નિરપેક્ષ હોય

(iv) દરેક પ્રયત્નમાં સફળતાની સંભાવના p અચળ હોય પરંતુ p બહુ નાની સંખ્યા હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણ પોયસન વિતરણને અનુલક્ષે છે.

5.2.2 સંભાવના વિધેય :

પોયસન ચલ x નું સંભાવના વિધેય નીચે મુજબ છે.

$$P(x) = \frac{e^{-m}.m^x}{x!} \qquad \text{જ્યાં} \quad m = np = \text{મધ્યક}$$

x = સફળતાની સંખ્યા $[x = 0, 1, 2, ..., n]$

મિત્રો e એક અચળાંક છે. જેની કિંમત 2.7183 છે. e^{-m} ની કિંમતો કોષ્ટકમાં આપેલી હોય છે.

5.2.3 પોયસન વિતરણના ગુણધર્મો :

(1) પોયસન વિતરણ અસત ચલરાશીનું સંભાવના વિતરણ છે.

(2) m એ આ વિતરણનો પ્રાચલ છે.

(3) પોયસન વિતરણમાં મધ્યક = m

(4) પોયસન વિતરણમાં પ્રમાણિત વિચલન = $\sqrt{m}$ અને વિચરણ = m હોય છે.

(5) પોયસન વિતરણમાં મધ્યક અને વિચરણ સમાન હોય છે.

(6) પોયસન વિતરણમાં હમૈશા ઘન વિષમતા હોય છે. આ વિતરણમાં જેમ m ની કિંમત વધુ તેમ વિષમતા ઓછી હોય છે.

(7) બે નિરપેક્ષ પોયસન ચલનો સરવાળો પણ પોયસન ચલ જ હોય છે.

(8) જ્યારે n ખૂબ મોટી સંખ્યા હોય અને p એ બહુ નાની સંખ્યા હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણ પોયસન વિતરણને અનુલક્ષે છે.

5.2.4 પોયસન વિતરણના ઉપયોગો :

જ્યારે કોઈ ઘટના કેટલી વખત બને છે તે ગણ્ય હોય પરંતુ તે ઘટના કેટલી વખત બનતી નથી તે અગણ્ય હોય ત્યારે સંભાવના શોધવા પોયસન વિતરણ ઉપયોગી છે. વ્યવહારમાં ભાગ્યેજ બનતી ઘટનાની સંભાવના પોયસન વિતરણ દ્વારા શોધી શકાય છે. પોયસન વિતરણના વ્યવહારૂ ઉપયોગો નીચે મુજબ છે.

(1) અમુક શહેરમાં નોંધાયેલા આપઘાતોની સંખ્યા

(2) રસ્તા ઉપર અમુક સમયમાં થતા અકસ્માતની સંખ્યા

(3) પુસ્તકમાં પાનાદીઠ થતી છાપકામની ભૂલની સંખ્યા

(4) ફૂટબોલને કે હોકીની મેચમાં નોંધાયેલા ગોલની સંખ્યા

(5) ટેલીફોન લાઈનમાં બગડેલા જોડાણોની સંખ્યા

(6) ઔદ્યોગિક એકમમાં નુકસાનીવાળી વસ્તુઓનું પ્રમાણ શોધવા

(7) મોબાઈલમાં કોઈ વ્યક્તિ પર આવતા મેસેજની સંખ્યા

(8) સાંખ્યિકીય ગુણવત્તા નિયંત્રણમાં C આલેખની નિયંત્રણ શોધવા પોયસન વિતરણ ઉપયોગી છે.

(9) સ્વીકૃતિ નિદર્શનના અભ્યાસમાં જથ્થાની સ્વીકૃતિની સંભાવના પોયસન વિતરણની મદદથી શોધી શકાય છે.

5.2.5 ઉદાહરણ :

(1) મોબાઈલ બનાવતી એક કંપનીના ઉત્પાદનમાં કોઈપણ મોબાઈલ ખામીયુક્ત હોવાની સંભાવના $1/50$ છે. તો 200 મોબાઈલના એક બોક્સમાં (i) બધા જ મોબાઈલ સારા હોય (ii) બે મોબાઈલ ખામીયુક્ત હોવાની સંભાવના શોધો. [$e^{-4} = 0.0183$]

$n = 200$, મોબાઈલ ખામીયુક્ત હોવાની સંભાવના $p = 1/50$

હવે, આપણે m શોધીએ.

$$m = np = 200 \times \frac{1}{50}$$

$$m = 4$$

$$P(x) = \frac{e^{-m}\ m^x}{x!}$$

આ સંભાવના વિધેયમાં $m = 4$ મૂકતાં

$$\boxed{P(x) = \frac{e^{-4}\ (4)^x}{x!}}$$

(i) બધા જ મોબાઈલ સારા હોય એટલે કે 0 મોબાઈલ ખામીયુક્ત હોવાની સંભાવના એટલે કે $x = 0$ મૂકતાં

$$P(o) = \frac{e^{-4}\ (4)^x}{o!}$$

કોઈપણ અચળાંકનો O ઘાત હોય તો તેનું મૂલ્ય 1 થાય.

અને 0! = 1 થાય.

$$P(0) = \frac{0.0183\ \times\ 1}{1}$$

P(0) = 0.0183

(2) 2 મોબાઈલ ખામીવાળા હોવાની સંભાવના એટલે કે $x = 2$ મૂકતાં

$$P(2) = \frac{e^{-4}\ (4)^2}{2!}$$

$$= \frac{0.0183 \times 16}{2}$$

P(2) = 0.1464

(2) ઈલેક્ટ્રીક ફયુઝના ઉત્પાદનમાં 2% ફયુઝ નુકસાનીવાળા હોય તો 150 ફયુઝની એકપેટીમાં (i) 2 ફયુઝ (ii) વધુમાં વધુ 2 ફયુઝ નુકસાનીવાળા હોય તેવી પેટીઓની ટકાવારી શોધો. [$e^{-3} = 0.04979$]

$n = 150$ કોઈ ફયુઝ ખામીવાળો હોવાની સંભાવના P = 2% $= 2/100$

$\therefore \quad m = np$

$$= 150 \times \frac{2}{100}$$

$$\boxed{m = 3}$$

હવે, $P(x) = \dfrac{e^{-m}\ m^x}{x!}$

હવે, આ સંભાવના વિધેયમાં $m = 3$ મૂકતાં,

$$\boxed{P(x) = \frac{e^{-3}\ (3)^x}{x!}}$$

આ સંભાવના વિધેયમાં x ની કિંમત મૂકી સંભાવના શોધાય.

(1) 2 ફયુઝ ખામીવાળા હોવાની સંભાવના એટલે કે $x = 2$ મૂકતાં

$$P(2) = \frac{e^{-3}\ (3)^2}{2!}$$

$$= \frac{0.04979 \times 9}{2}$$

P(2) = 0.2241

2 ફ્યુઝ ખામીવાળા હોય તેવી પેટીઓની ટકવારી = 0.2241 × 100

= 22.41%

(2) વધુમાં વધુ 2 એટલે કે 0, અથવા 1 અથવા 2 ફ્યુઝ ખામીવાળા હોય તેની સંભાવના

$$P(0) = \frac{e^{-3}\ (3)^0}{0!} = \frac{0.04979 \times 1}{1} = 0.04979$$

$$P(1) = \frac{e^{-3} \times 3^1}{1!} = \frac{0.04979 \times 3}{1} = 0.14937$$

P(2) = 0.2241 શોધેલ છે.

હવે $P(x \le 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

$= 0.04979 + 0.14937 + 0.2241$

$= 0.42326$

વધુમાં વધુ 2 ફ્યુઝ ખામીવાળા હોય તેવી પેટીઓની ટકાવારી = 0.42326 × 100

= 42.33%

નોંધ : આ ગણતરી નીચે મુજબ પણ શકાય.

$$P(x) = \frac{e^{-3}\ (3)^x}{x!}$$

હવે $P(x \le 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

$$= e^{-3}\left[\frac{(3)^0}{0!} + \frac{(3)^1}{1!} + \frac{(3)^2}{2!}\right]$$

$= e^{-3}\ [1 + 3 + 4.5]$

$= 0.04979\ [8.5]$

$\therefore P(x \le 2) = 0.42322$

પેટીઓની ટકાવારી = 0.42322 × 100

= 42.32%

(3) એક હોસ્પિટલમાં સામાન્ય રીતે 5% દર્દીઓ સ્પેશિયલ રૂમની માંગણી કરે છે. કોઈ ચોક્કસ દિવસે 3 સ્પેશિયલ રૂમ ખાલી છે. જો તે દિવસે 50 દર્દીઓ હોસ્પિટલમાં દાખલ થયા હોય તો

(1) એકેય દર્દી સ્પેશિયલ રૂમની માંગણી કરશે નહીં.

(2) સ્પેશિયલ રૂમની માંગને પહોંચી વળાશે નહીં તેની સંભાવના શોધો.

$[e^{-2} = 0.13534,\ e^{-0.5} = 0.6065]$

$n = 50$ કોઈ દર્દી સ્પેશિયલ રૂમની માંગણી કરે તેની સંભાવના P = 5% = $\frac{5}{100}$

$m = np$

$$= 50 \times \frac{5}{100}$$

$m = 2.5$

$e^{-2.5}$ શોધવા

$e^{-2.5}, = e^{-2} \times e^{-0.5}$ $\because$ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$= 0.13534 \times 0.6065$

$e^{-2.5} = 0.0821$

$$P(x) = \frac{e^{-m}\, m^n}{x!}$$

$$\therefore\ P(x) = \frac{e^{-2.5}\ (2.5)^x}{x!}$$

હવે આ વિધેયમાં x ની કિંમતો મૂકી સંભાવના શોધાય.

(1) એકેય દર્દી સ્પેશિયલ રૂમની માંગણી કરશે નહી. એટલે કે $x = 0$

$$P(0) = \frac{e^{-2.5}\ (2.5)^0}{0!}$$

$$= \frac{0.0821 \times 1}{1}$$

$\therefore$ $P(0) = 0.0821$

(2) કોઈ ચોક્કસ દિવસે 3 સ્પેશિયલ રૂમ ખાલી છે. જો 3 થી વધુ દર્દીઓ સ્પેશિયલ રૂમની માંગણી કરે તો તે માંગને પહોંચી વળાય નહીં. એટલે કે $x > 3$

$\therefore$ $P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$

$$= e^{-2.5}\left[\frac{(2.5)^0}{0!} + \frac{(2.5)^1}{1!} + \frac{(2.5)^2}{2!} + \frac{(2.5)^3}{3!}\right]$$

$$= e^{-2.5}\left[\frac{1}{1} + \frac{2.5}{1} + \frac{6.25}{2} + \frac{15.625}{6}\right]$$

$= e^{-2.5}\ [1 + 2.5 + 3.125 + 2.6042]$

$= 0.0821\ [9.2292]$

$= 0.7577$

સ્પેશિયલ રૂમની માંગને પહોંચી ન વળાય તેની સંભાવના

$P(x > 3) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)]$

$= 1 - 0.7577 = 0.2423$

(4) એક પુસ્તકમાં 5 પાનાદીઠ સરેરાશ 4 ભૂલો માલૂમ પડે છે. 200 પાનાના તે પુસ્તકમાં 2 થી વધુ ભૂલો હોય તેવા પાનાની સંખ્યાનું અનુમાન કરો. [$e^{-0.8} = 0.4493$]

પોયસન વિતરણમાં સરેરાશ (મધ્યક) = m થાય.

પાનાદીઠ સરેરાશ (મધ્યક) ભૂલોની સંખ્યા $m = \frac{4}{5} = 0.8$

$$P(x) = \frac{e^{-m}\ m^x}{x!} = \boxed{\frac{e^{-0.8}\ (0.8)^x}{x!}}$$

$$P(0) + P(1) + P(2) = e^{-0.8}\left[\frac{(0.8)^0}{0!} + \frac{(0.8)^1}{1!} + \frac{(0.8)^2}{2!}\right]$$

$$= e^{-0.8}\left[\frac{1}{1} + \frac{0.8}{1} + \frac{0.64}{2}\right]$$

$$= e^{-0.8}\ [1 + 0.8 + 0.32]$$

$$= 0.44\ [2.12]$$

$$= 0.9328$$

હવે, 2 થી વધુ ભૂલ હોવાની સંભાવના

$$P(x > 2) = P(3) + P(4) + ...$$

$$= 1 - [P(0) + P(1) + P(2)]$$

$$= 1 - 0.9328$$

$$= 0.0672$$

2 થી વધુ ભૂલ હોય તેવા પાનાની સંખ્યા $= N \times P(x)$

$$= 200 \times 0.0672$$

$$= 13.44 \cong 13$$

નોંધ : મિત્રો ટકાવારી શોધવા સંભાવનાનો 100 વડે અને સંખ્યા શોધવા સંભાવનાનો N વડે ગુણાકાર કરાય.

(5) એક પોયસન ચલ x માટે $P(x = 0) = 0.05$ હોય તો સાબિત કરો કે $P(x > 2) = 0.575$

$[e^{-3} = 0.05,\ e^{-0.05} = 0.9512]$

$$P(x) = \frac{e^{-m}\ m^x}{x!}$$

હવે, $P(x = 0) = 0.05$ આપેલ છે.

તેથી સંભાવના વિધેયમાં $x = 0$ મૂકતાં,

$$\therefore \frac{e^{-m}\ m^0}{0!} = 0.05$$

$$\therefore \frac{e^{-m}\ (1)}{1} = 0.05$$

$$e^{-m} = 0.05$$

પરંતુ માહિતીમાં $e^{-3} = 0.05$ આપેલ છે.

$\therefore m = 3$

હવે, સંભાવના વિધેયમાં $m = 3$ મૂકતાં

$$P(x) = \frac{e^{-3}\ (3)^x}{x!}$$

$$\therefore P(0) + P(1) + P(2) = e^{-3}\left[\frac{(3)^0}{0!} + \frac{(3)^1}{1!} + \frac{(3)^2}{2!}\right]$$

$$= e^{-3}\ [1 + 3 + 4.5]$$

$$= 0.05\ [8.5]$$

$P(0) + P(1) + P(2) = 0.425$

હવે, $P(x > 2) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2)]$

$= 1 - 0.425$

$P(x > 2) = 0.575$

(6) એક પોયસન ચલ x માટે $P(x = 3) = P(x = 4)$ હોય તો $P(2)$ ની કિંમત શોધો. [$e^{-4} = 0.0183$]

$$P(x) = \frac{e^{-m}\, m^x}{x!}$$

હવે $P(x = 3) = P(x = 4)$ આપેલ છે. તેથી સંભાવના વિધેયમાં ડાબી બાજુ $x = 3$ અને જમણી બાજુ $x = 4$ મૂકતાં,

$$\therefore \quad \frac{e^{-m}\, m^3}{3!} = \frac{e^{-m}\, m^4}{4!}$$

$$\therefore \quad \frac{m^3}{6} = \frac{m^4}{24}$$

$$\therefore \quad \frac{24}{6} = \frac{m^4}{m^3}$$

$\therefore \quad m = 4$

હવે, સંભાવના વિધેયમાં $m = 4$ મૂકતાં,

$$P(x) = \frac{e^{-4}\, (4)^x}{x!}$$

હવે, $P(2) = \dfrac{e^{-4}\, (4)^2}{2!}$

$$= \frac{0.0183 \times 16}{2}$$

$P(2) = 0.1464$

(7) એક પોયસન ચલ x માટે $P(x = 0) = P(x = 1) = K$ હોય તો સાબિત કરો કે $K = 1/e$

$$P(x) = \frac{e^{-m}\, m^x}{x!}$$

હવે, $P(x = 0) = P(x = 1)$ આપેલ છે.

$$\frac{e^{-m}\, m^0}{0!} = \frac{e^{-m}\, m^1}{1!}$$

$$\frac{m^0}{0!} = \frac{m^1}{1}$$

$m = 1$

સંભાવના વિધેયમાં $m = 1$ મૂકતાં,

$$P(x) = \frac{e^{-1}\ (1)^x}{x!}$$

હવે, $P(x = 0) = K$ આપેલ છે.

$$\frac{e^{-1}\ (1)^0}{0!} = K$$

$$K = e^{-1}$$

$$\therefore \quad K = \frac{1}{e}$$

મિત્રો, $P(x = 1) = K$ સરખામણી કરીને પણ K ની કિંમત શોધી શકાય.

(8) એક શહેરમાં 100 દિવસ સુધી દિવસ વાર અકસ્માતોની સંખ્યાની માહિતી નીચે મુજબ છે.

અકસ્માતની સંખ્યા	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
દિવસની સંખ્યા	**42**	**36**	**14**	**6**	**2**

આ પરથી પોયસન વિતરણનું અન્વાયોજન કરી અપેક્ષિત આવૃત્તિઓ શોધો. [$e^{-0.9} = 0.4066$]

સૌપ્રથમ આપણે અસતત આવૃત્તિ વિતરણનો મધ્યક શોધીએ.

x	f	fx
0	42	0
1	36	36
2	14	28
3	6	18
4	2	8
	N = 100	90

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{90}{100}$$

$$\bar{x} = 0.9$$

પરંતુ પોયસન વિતરણમાં મધ્યક m છે.

$\therefore\ m = 0.9$ લેતાં,

$$P(x) = \frac{e^{-m}\ m^x}{x!}$$

આ સંભાવના વિધેયમાં $m = 0.9$ મૂકતાં,

$$\boxed{P(x) = \frac{e^{-0.9}\ (0.9)^x}{x!}}$$

$$P(x) = \frac{0.4066 \times (0.9)^x}{x!}$$

આ સંભાવના વિધેય પરથી x ની જુદી કિંમતોને અનુરૂપ સંભાવના અને અપેક્ષિત આવૃત્તિઓ નીચે મુજબ શોધી શકાય.

x	$P(x) = \frac{0.4066 \times (0.9)^x}{x!}$	અપેક્ષિત આવૃત્તિ $N \times P(x)$
0	$\frac{0.4066 \times (0.9)^0}{0!} = 0.4066$	$100 \times 0.4066 = 41$
1	$\frac{0.4066 \times (0.9)^1}{1!} = 0.3659$	$100 \times 0.3659 = 37$
2	$\frac{0.4066 \times (0.9)^2}{2!} = 0.1647$	$100 \times 0.1647 = 16$
3	$\frac{0.4066 \times (0.9)^3}{3!} = 0.0494$	$100 \times 0.0494 = 5$
4	$\frac{0.4066 \times (0.9)^4}{4!} = 0.0111$	$100 \times 0.0111 = 1$

અહીં અપેક્ષિત આવૃત્તિઓ નજીકના પૂર્ણાંકમાં લખેલ છે.

(9) એક પોયસન વિતરણનું પ્રમાણિત વિચલન 0.8 છે. તો $P(x \geq 1)$ શોધો.
[$e^{-0.8} = 0.4493$, $e^{-0.64} = 0.5273$]

પ્રમાણિત વિચલન = 0.8 છે.

$\therefore$ વિચરણ $(m) = (0.8)^2 = 0.64$

સંભાવના વિધેય $P(x) = \frac{e^{-m} \, m^x}{x!}$

આ વિધેયમાં $m = 0.64$ મૂકતાં,

$$P(x) = \frac{e^{-0.64} \, (0.64)^x}{x!}$$

$$P(0) = \frac{e^{-0.64} \, (0.64)^0}{0!}$$

$$= \frac{0.5273 \times 1}{1}$$

$P(0) = 0.5273$

$P(x \geq 1) = 1 - P(0)$

$= 1 - 0.5273$

$= 0.4727$

(10) "એક પોયસન વિતરણમાં મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન 8 છે." આ વિધાનની સત્યાર્થતા તપાસો.

મધ્યક = 8 પ્ર.વિ. = 8

$\therefore$ વિચરણ $= (8)^2 = 64$

પરંતુ પોયસન વિતરણમાં મધ્યક અને વિચરણ સમાન હોય છે. તેથી વિધાન ખોટું છે.

5.2.6 સ્વાધ્યાય :

A. યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી જવાબ લખો.

(1) પોયસન વિતરણ કઈ ચલરાશીનું સંભાવના વિતરણ છે ?

(a) અસતત ચલ (b) સતત ચલ (c) સાપેક્ષ ચલ

(2) પોયસન વિતરણની શોધ કોણે કરી હતી ?

(a) કાર્લ પિયર્સન (b) જેકોબ બર્નોલી (c) સાયમન ડી પોયસન

(3) પોયસન વિતરણનો પ્રાચલ કયો છે ?

(a) n (b) P (c) m

(4) પોયસન વિતરણમાં કેવી વિષમતા હોય છે ?

(a) ધન (b) ઋણ (c) શૂન્ય

(5) એક પોયસન વિતરણનો મધ્યક 4 છે. તો તેમાં પ્રમાણિત વિચલન કેટલું હોય ?

(a) 4 (b) 2 (c) $\sqrt{2}$

(6) પોયસન વિતરણમાં મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન વચ્ચે કેવો સંબંધ હોય છે ?

(a) મધ્યક > પ્ર.વિ. (b) મધ્યક < પ્ર.વિ. (c) મધ્યક = પ્ર.વિ.

(7) વ્યવહારમાં કેવી ઘટનાની સંભાવના શોધવા પોયસન વિતરણ ઉપયોગી છે ?

(a) વારંવાર બનતી (b) ભાગ્યે જ બનતી (c) ચોક્કસ

B. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) કઈ શરતો હેઠળ અસતત ચલની સંભાવના શોધવા પોયસન વિતરણ ઉપયોગી છે ?

(2) પોયસન વિતરણનું સંભાવના વિધેય લખો.

(3) પોયસન વિતરણનું ગુણધર્મો જણાવો.

(4) પોયસન વિતરણના પ્રાચલ જણાવી, આ વિતરણમાં મધ્યક અને વિચરણ જણાવો.

(5) પોયસન વિતરણના વ્યવહારૂ ઉપયોગો જણાવો.

(6) એક પોયસન ચલનું સંભાવના વિધેય $P(x) = \dfrac{e^{-3}\,(3)^x}{x!}$ છે. તો તેનું પ્રમાણિત વિચલન જણાવો.

(7) એક પોયસન વિતરણનો મધ્યક 4 છે. તો ચલનાંક શોધો. [ચલનાંક = (પ્ર.વિ. ÷ મધ્યક) × 100]

C. ગણતરી કરો.

(1) દિવાસળીના જથ્થામાં કોઈ દિવાસળી માથા વિનાની હોવાની સંભાવના $1/50$ છે. દિવાસળીની એક પેટીમાં 100 દિવાસળી હોય છે. તો કોઈ એક પેટીમાં માથા વિનાની દિવાસળી (1) 0, (2) 1, (3) 2 હોય તેની સંભાવના શોધો. [$e^{-2} = 0.1353$]

(2) રેઝર બ્લેડ બનાવતી એક કંપનીમાં 3% બ્લેડ ખામીવાળી જણાય છે. એક પેકેટમાં 50 બ્લેડ મૂકવામાં આવે છે. તો 2000 પેકેટના જથ્થામાં (i) બધી જ બ્લેક સારી હોય (ii) વધુમાં વધુ 2 બ્લેડ ખામીવાળી હોય (iii) ઓછામાં ઓછી 3 બ્લેડ ખામીવાળી હોય તેવા પેકેટોની સંખ્યા શોધો. [$e^{-1} = 0.3678$, $e^{-0.5} = 0.6065$]

(3) એક માણસ પાસે 2 ટેક્સીઓ છે. દરરોજ સરેરાશ 1.5 ટેક્સીની માંગ જોવા મળે છે. તો મહિનાના 30 દિવસમાં કેટલા દિવસ;

(i) એકેય ટેક્સી ભાડે જશે નહીં ?

(ii) તે માંગને પહોંચી વળશે નહીં ? [$e^{-1.5} = 0.2231$]

(4) એક કંપનીમાં સવારે 10:00 થી 11:00 દરમિયાન 120 ફોન આવે છે. તો અમુક ચોક્કસ એક મિનિટના ગાળામાં (i) એકેય ફોન ન આવે (ii) વધુમાં વધુ 2 ફોન આવે તેની સંભાવના શોધો. [$e^{-2} = 0.1353$]

(**Hint :** મિત્રો 1 કલાકમાં એટલે કે 60 મિનિટમાં 120 ફોન આવે છે. તેથી મિનિટ દીઠ સરેરાશ ફોનની સંખ્યા (મધ્યક) $m = 2$ લેવાય.)

(5) નીચે આપેલી માહિતી પરથી પોયસન વિતરણનું અન્વાયોજન કરી સૈદ્ધાંતિક આવૃત્તિઓ શોધો.

x	0	1	2	3	4
f	122	60	15	2	1

[$e^{-0.5} = 0.6065$]

(6) એક પોયસન ચલ માટે $P(x = 1) = P(x = 2)$ હોય તો સાબિત કરો કે $P(x = 4) = \frac{2}{3} \times e^{-4}$

(7) એક પોયસન ચલ x માટે $P(x = K) = P(x = K + 1)$ હોય તો તેનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

(8) એક પોયસન ચલનું પ્રમાણિત વિચલન 2 છે. તો P(0) અને P(2) ની કિંમત શોધો. [$e^{-4} = 0.0183$]

(9) મોબાઈલ બનાવતી એક કંપનીમાં દર 200 મોબાઈલ એ 1 મોબાઈલ ખામીવાળો જણાય છે. તો 600 મોબાઈલના એક નિદર્શમાં વધુમાં વધુ 2 મોબાઈલ ખામીવાળા હોવાની સંભાવના શોધો. [$e^{-3} = 0.04979$]

(10) નીચેના વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે કારણ સહિત જણાવો.

1. પોયસન વિતરણમાં મધ્યક અને પ્ર.વિ. 8 છે.
2. પોયસન વિતરણમાં ધન કે ઋણ વિષમતા હોઈ શકે.
3. એક પોયસન વિતરણમાં મધ્યક 4 છે તો તેનો ચલનાંક 400 થાય.
4. પોયસન વિતરણમાં P(0) ની કિંમત શૂન્ય હોય છે.
5. એક પોયસન ચલ માટે $3\, P(x = 2) = P(x = 4)$ હોય તો $m = 6$ થાય.

જવાબ :

A. (1) a (2) c (3) c (4) a (5) b (6) a (7) b

B. (6) પ્ર.વિ. = $\sqrt{3}$ (7) 50

C. (1) 0.1353, 0.2706, 0.2706 (2) 446, 1617, 383

(3) 7, 6 (4) 0.1353, 0.6765

(5) 122, 61, 15, 2, 0 (7) મધ્યક = K + 1, પ્ર.વિ. = $\sqrt{K+1}$

(8) 0.0183, 0.1464 (9) 0.4232

(10) (i) ખોટું – પ્ર.વિ. = $\sqrt{8}$ (ii) ખોટું – ધન વિષમતા (iii) ખોટું – ચલનાંક = 50

(iv) ખોટું – $P(0) = e^{-m}$ (v) ખરૂં

5.3 ચાવીરૂપ શબ્દો અને સંકેતો :

M : પોયસન વિતરણનો પ્રાચલ

$m = np$ = મધ્યક = સરેરાશ

e : એક અચળાંક [$e = 2.7183$]

ધન વિષમતા : આવૃત્તિ વિતરણમાં અસતત ચલ x ની નાની કિંમતોની આવૃત્તિઓ વધુ હોય.

- **સંદર્ભ ગ્રંથ :**

(1) ગાણિતિક આંકડાશાસ્ત્ર : એચ.ડી. શાહ, યુનિ. ગ્રંથનિર્માણ બોર્ડ

(2) Mathematical Statistics : Gupta and Kapoor, Sultanchand Prakashan

* * *

એકમ 6 પ્રમાણ્ય વિતરણ (સતત સંભાવના વિતરણ)

[Normal Distribution]

6.0 ઉદ્દેશ

6.1 પ્રસ્તાવના

6.2 પ્રામાણ્ય વિતરણનો ખ્યાલ

6.3 પ્રામાણ્ય વિતરણ

6.3.1 પ્રામાણ્ય વિતરણ અને તેનું સંભાવના વિધેય

6.3.2 પ્રામાણ્ય વિતરણનો સંભાવના વક્ર

6.3.3 પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ અને તેનું સંભાવના વિધેય

6.3.4 પ્રામાણ્ય વિતરણના ગુણધર્મો

6.3.5 પ્રામાણ્ય વિતરણના દાખલાઓ

6.3.6 સ્વાધ્યાય

6.4 ચાવીરૂપ શબ્દો અને સંકેતો

● સંદર્ભ ગ્રંથ :

6.0 ઉદ્દેશ :

આ પ્રકરણનો મૂળભૂત ઉદ્દેશ (1) વિદ્યાર્થીઓ સતત ચલના સંભાવના વિતરણ પ્રમાણ્ય વિતરણથી વાકેફ થાય. (2) તેના ઉપયોગો અને ગુણધર્મો અંગે જાણકારી મેળવી શકે.

6.1 પ્રસ્તાવના :

અગાઉ આપણે અસતત ચલના સંભાવના વિતરણ તરીકે દ્વિપદી વિતરણ અને પોયસન વિતરણનો અભ્યાસ કર્યો. સતત ચલરાશીના સંભાવના વિતરણ તરીકે જુદા જુદા વિતરણ છે. આ એકમમાં આપણે સતત ચલરાશીના સંભાવના વિતરણ તરીકે પ્રમાણ્ય વિતરણનો અભ્યાસ કરીશું. સતત ચલરાશીની સંભાવના અભ્યાસ માટે પ્રામાણ્ય વિતરણ સૌથી વધુ ઉપયોગી અને પ્રચલિત છે. દ્વિપદી વિતરણમાં જ્યારે n ની કિંમત ખૂબ જ મોટી હોય અને p અને qની કિંમત બહુ નાની ન હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુલક્ષે છે.

6.2 પ્રામાણ્ય વિતરણનો ખ્યાલ :

આંકડાશાસ્ત્રના અન્ય અનેક અભ્યાસોમાં પ્રામાણ્ય વિતરણ ઉપયોગી છે તેમજ આપણા વ્યવહારિક જીવનમાં પણ વિવિધ પ્રામાણ્ય વિતરણનો ઉપયોગ થતો જોવા મળે છે. જેમ કે, કોઈ વિસ્તારના કુટુંબોની આવકની વહેંચણીનો અભ્યાસ કરવા, અમુક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓના બુદ્ધિઆંક (IQ)ના વિતરણના અભ્યાસ માટે, શેરબજારમાં શેરના ભાવમાંથી થતી વધઘટના અંતરાલનું અનુમાન કરવા તેમજ શેરની લે-વેચમાં અપેક્ષિત વળતર અને જોખમનો અભ્યાસ કરવા, નવજાત જન્મેલા બાળકોના વજન વિશેના અભ્યાસમાં પ્રામાણ્ય વિતરણ મદદરૂપ થાય છે.

પ્રમાણ્ય વિતરણ સતત ચલરાશીનું સંભાવના વિતરણ છે. આ વિતરણની શરૂઆત 1773માં અબ્રાહમ ડી મોઈવ્રે કરી હતી.

જ્યારે,

(i) યાદચ્છિક પ્રયોગમાં બે પ્રકારના પરિણામ સફળતા અને નિષ્ફળતા જોવા મળતા હોય.

(ii) પ્રયત્નોની સંખ્યા n બહુ મોટી સંખ્યા હોય.

(iii) સફળતા અને નિષ્ફળતાની સંભાવના p અને q બહુ નાની સંખ્યા ન હોય.

ત્યારે દ્વિપદી વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુલક્ષે છે. યાદચ્છિક ચલ x ની કિંમત કોઈ નિશ્ચિત અંતરાલ a અને b ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધવા પ્રામાણ્ય વિતરણ ઉપયોગી છે. પ્રામાણ્ય વિતરણ સતત ચલનું સંભાવના વિતરણ હોવાથી યાદચ્છિક ચલ x ની નિશ્ચિત કિંમતની સંભાવના શૂન્ય થાય છે.

6.3 પ્રામાણ્ય વિતરણ :

6.3.1 પ્રામાણ્ય વિતરણ અને તેનું સંભાવના વિધેય :

જો યાદચ્છિક ચલ x નો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ હોય તેમજ તેનું સંભાવના વિધેય $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ હોય તો યાદચ્છિક ચલ x ને પ્રામાણ્ય ચલ અને $f(x)$ ને પ્રામાણ્ય ચલનું સંભાવના વિધેય કહે છે. પ્રામાણ્ય ચલ x ના વિતરણને પ્રામાણ્ય વિતરણ કહે છે. સંકેતમાં તેને $N(\mu, \sigma^2)$ વડે દર્શાવાય.

ઉપરોક્ત સંભાવના વિધેયમાં,

μ = મધ્યક $\quad e = 2.7183$

σ = પ્રમાણિત વિચલન $\quad \pi = 22/7 = 3.1416$

તેમજ $\quad -\infty < x < \infty$

$\quad -\infty < \mu < \infty$

અને $\quad -0 < \sigma < \infty$

$\quad -0 < \sigma < \infty$

6.3.2 પ્રામાણ્ય વિતરણનો સંભાવના વક્ર :

સંભાવના વિતરણનો આલેખપત્ર પર રજૂ કરવા x અક્ષ ઉપર ચલ x ની જુદી કિંમતો અને y અક્ષ ઉપર સંભાવના દર્શાવાય. x ની જુદી જુદી કિંમતોને અનુરૂપ તેની સંભાવના દર્શાવતા બિંદુઓને હળવા હાથે જોડતાં જે વક્ર મળે તેને સંભાવના વક્ર કહેવાય.

પ્રામાણ્ય વિતરણનો સંભાવના વક્ર ઘંટાકાર સ્વરૂપ હોય છે અને તેને પ્રામાણ્ય વક્ર કહે છે.

6.3.3 પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ અને તેનું સંભાવના વિધેય :

પ્રામાણ્ય ચલ x ની સંભાવના શોધવા તેનું પ્રમાણિત ચલ z માં રૂપાંતર કરવામાં આવે છે. જો પ્રામાણ્ય ચલ x નો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ હોય તો યાદચ્છિક $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ કહે છે.

આ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ z નો મધ્યક 0 અને પ્રમાણિત વિચલન 1 હોય છે.

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ z નું સંભાવના વિધેય નીચે મુજબ છે.

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2} z^z} \qquad \text{જ્યાં} -\infty < z < \infty$$

6.3.4 પ્રામાણ્ય વિતરણના ગુણધર્મો :

(1) પ્રામાણ્ય વિતરણ સતત ચલરાશીનું સંભાવના વિતરણ છે.

(2) μ અને σ પ્રામાણ્ય વિતરણના પ્રાચલ છે.

(3) પ્રામાણ્ય વિતરણનો સંભાવના વક્ર ઘંટાકાર સ્વરૂપનો હોય છે. એટલે કે પ્રામાણ્ય વિતરણ સંમિત વિતરણ છે અને તેમાં વિષમતા શૂન્ય હોય છે.

(4) પ્રામાણ્ય વિતરણમાં મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક સમાન હોય છે. ($\bar{x}$ = M = Z)

(5) આ વિતરણમાં બંને ચતુર્થકો મધ્યસ્થથી સમાન અંતરે આવેલા હોય છે.

(6) પ્રામાણ્ય વિતરણમાં મધ્યકની બંને બાજુએ સમાન અંતરે આવેલા પ્રાપ્તાંકોની સંભાવના સમાન હોય છે.

(7) પ્રામાણ્ય વક્ર હેઠળનું કુલ ક્ષેત્રફળ 1 હોય છે.

(8) પ્રામાણ્ય વક્ર x અક્ષને અનંતલક્ષી હોય છે એટલે કે તેના બે છેડા કદી x અક્ષને છેદતા નથી.

(9) જ્યારે n એ બહુ મોટી સંખ્યા હોય અને p એ બહુ નાની સંખ્યા ન હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુલક્ષે છે.

(10) પ્રામાણ્ય વિતરણમાં બંને ચતુર્થકોની અંદાજીત કિંમત નીચે મુજબ છે.

$Q_1 = \mu - 0.675\ \sigma$

$Q_3 = \mu + 0.675\ \sigma$

(11) પ્રામાણ્ય વિતરણમાં સરેરાશ વિચલન $= \frac{4}{5} \times \sigma$

ચતુર્થક વિચલન $= \frac{2}{3} \times \sigma$

(12) પ્રામાણ્ય વિતરણના અગત્યના ક્ષેત્રફળ નીચે મુજબ છે.

(i) $\mu \pm \sigma$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = 0.6826

(ii) $\mu \pm 2\sigma$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = 0.9545

(iii) $\mu \pm 3\sigma$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = 0.9973

(iv) $\mu \pm 1.96\sigma$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = 0.95

(v) $\mu \pm 2.575\sigma$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = 0.99

અહીં એ સ્વાભાવિક છે કે પ્રામાણ્ય વક્ર હેઠળનું ક્ષેત્રફળ 1 હોવાથી મધ્યકની બંને તરફનું ક્ષેત્રફળ 0.5 થાય.

યાદ રાખો : પ્રામાણ્ય ચલ x નો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ છે. જ્યારે પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ z નો મધ્યક 0 અને પ્ર.વિ. 1 છે.

પ્રામાણ્ય ચલ x ની સંભાવના શોધવા x ની કિંમત પરથી પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ z ની કિંમત મેળવવામાં આવે છે. ત્યારબાદ $z = 0$ થી $z = z_1$ સુધીનું ક્ષેત્રફળ (સંભાવના) પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ (z) ના કોષ્ટક પરથી મેળવી શકાય.

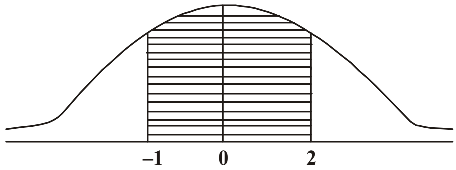
6.3.5 પ્રમાણ્ય વિતરણના દાખલાઓ :

(1) એક પ્રામાણ્ય ચલ x નો મધ્યક 55 અને પ્રમાણિત વિચલન 10 છે. આ પરથી x ની નીચેની કિંમતોની સંભાવના શોધો.

(i) $45 < x < 75$

(ii) $x \geq 47.5$

(iii) $x \leq 42.5$



$\mu = 55 \quad \sigma = 10 \quad \therefore \; z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-55}{10}$

(i) P(45 < x < 75)

$= \left(P\frac{(45-55)}{10} < \frac{x-55}{10} < \frac{75-55}{10} \right)$

= P(–1 < Z < 2)

= P(–1< Z < 0) + P(0 < Z < 2)

= 0.3413 + 0.4772

= 0.8185

આ જ ગણતરી સરળ રીતે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

● મિત્રો $z = 0$ થી z_1 સુધીનું ક્ષેત્રફળ પાછળ આપેલા કોષ્ટક પરથી શોધી શકાય.

(i) P(45 < x < 75)

= x ની કિંમત 45 અને 75 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના

= z ની કિંમત $\frac{45-55}{10}$ અને $\frac{75-55}{10}$ ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના

= z કિંમત –1 અને +2 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના

= 0 થી –1 સુધીનું ક્ષેત્રફળ + 0 થી 2 સુધીનું ક્ષેત્રફળ

= 0.3413 + 0.4772

= 0.8185

વિદ્યાર્થીઓની સરળતા માટે આ પ્રકારના દાખલાઓ આપણે બીજી રીત મુજબ ગણીશું.

(ii) P($x \geq$ 47.5)

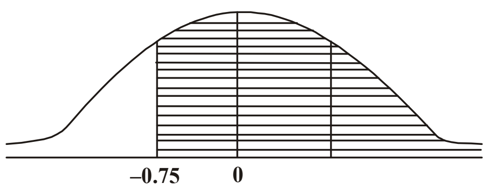
= x ની કિંમત 47.5 થી વધુ હોવાની સંભાવના

= z ની કિંમત $\frac{47.5-55}{10}$ થી વધુ હોવાની સંભાવના

= z ની કિંમત –0.75 થી વધુ હોવાની સંભાવના

= 0 થી –0.75 સુધીનું ક્ષેત્રફળ

+ 0.5



= 0.2734 + 0.5

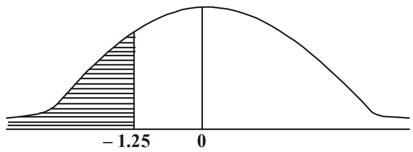
$= 0.7734$

x સતત ચલ હોવાથી $x > 47.5$ અને $x \geq 47.5$ બંનેનું મૂલ્ય સમાન ગણાય.

(iii) $P(x \leq 42.5)$

$=$ x ની કિંમત 42.5 કે તેથી ઓછી હોવાની સંભાવના

$=$ z ની કિંમત $\frac{42.5-55}{10}$ કે તેથી ઓછી હોવાની સંભાવના



$=$ z ની કિંમત -1.25 કે તેથી ઓછી હોવાની સંભાવના

$= 0.5 - 0$ થી -1.25 સુધીનું ક્ષેત્રફળ

$= 0.5 - 0.3944$

$= 0.1056$

વિદ્યાર્થી મિત્રો : આ પ્રકારના દાખલા ગણવા.

(1) સૌપ્રથમ સતત ચલ x નું પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ z માં રૂપાંતર કરો.

(2) આકૃતિમાં z ની ઋણ કિંમત ડાબી બાજુ અને ધન કિંમતને જમણી બાજુ દર્શાવો.

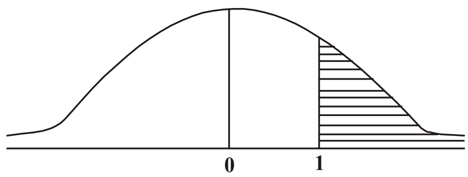
(3) જો ડાબી અને જમણી - બંને બાજુના ક્ષેત્રફળ ગણતરીમાં લેવા હોય તો સંભાવનાનો સરવાળો કરો. જો કોઈ એક બાજુના છેડા ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધવું હોય તો 0.5 માંથી 0 થી z_1 સુધીનું ક્ષેત્રફળ બાદ કરો. 0 થી z_1 સુધીનું ક્ષેત્રફળ z કોષ્ટક પરથી શોધી શકાય.

(2) SYBA ના એક વર્ગના વિદ્યાર્થીના માર્ક્સનું વિતરણ પ્રામાણ્ય છે. જો વર્ગના વિદ્યાર્થીઓના સરેરાશ માર્ક્સ 62 અને પ્રમાણિત વિચલન 8 હોય તો કોઈ વિદ્યાર્થીના માર્ક્સ (i) 70 થી વધુ (ii) 50 થી ઓછા હોવાની સંભાવના શોધો.

$\mu = 62$ $\qquad$ $\sigma = 8$ $\qquad$ $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-62}{8}$

(i) માર્ક્સ x ની કિંમત 70 થી વધુ હોવાની સંભાવના

$=$ z ની કિંમત $\frac{70-62}{8}$ થી વધુ હોવાની સંભાવના



$=$ z ની કિંમત 1 થી વધુ હોવાની સંભાવના

$= 0.5 - 0$ થી 1 સુધીનું ક્ષેત્રફળ

$= 0.5 - 0.3413$

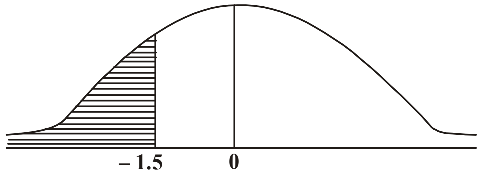
$= 0.1587$

આમ કોઈ વિદ્યાર્થીઓના માર્ક્સ 70 થી વધુ હોવાની સંભાવના 0.1587 છે.

(ii) માર્ક્સ x ની કિંમત 50 થી ઓછી હોવાની સંભાવના

$=$ z ની કિંમત $\frac{50-62}{8}$ થી ઓછી હોવાની સંભાવના

$=$ z ની કિંમત -1.5 થી ઓછી હોવાની સંભાવના



$= 0.5 - 0$ થી -1.5 સુધીનું ક્ષેત્રફળ

$= 0.5 - 0.4332$

$= 0.0668$

આમ કોઈ વિદ્યાર્થીના માર્ક્સ 50 થી ઓછા હોવાની સંભાવના 0.0668 છે.

(3) એક વિસ્તારના 5000 કુટુંબોની સરેરાશ આવક 7500 રૂ. અને વિચરણ 62,500 (રૂ.)^2 છે. જો આવકનું વિતરણ પ્રામાણ્ય હોય તો (i) કોઈ કુટુંબની આવક 7250 રૂ. અને 8000 રૂ. ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના શોધો. (ii) કેટલા ટકા કુટુંબોની આવક 8000 રૂ. થી ઓછી હશે ? (iii) કેટલા કુટુંબોની આવક 7625 રૂ. થી વધુ હશે ?

$N = 5000 \qquad \mu = 7500 \qquad \sigma^2 = 62500$

$z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{x-7500}{250} \qquad \therefore\ \sigma = 250$

(i) આવક x ની કિંમત 7250 અને 8000 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના

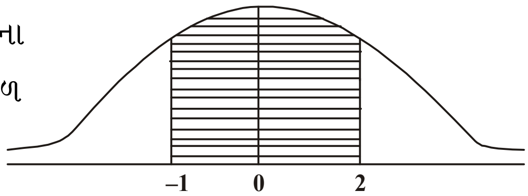
$= z$ ની કિંમત $\dfrac{7250-7500}{250}$ અને $\dfrac{8000-7500}{250}$ ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના

$= z$ ની કિંમત -1 અને 2 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના

$= 0$ થી -1 સુધીનું ક્ષેત્રફળ + 0 થી 2 સુધીનું ક્ષેત્રફળ

$= 0.3413 + 0.4772$

$= 0.8185$



આમ કોઈ કુટુંબની આવક 7250 રૂ. અને 8000 રૂ. ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.8185 છે.

(ii) આવક x ની કિંમત 8000 રૂ. થી ઓછી હોવાની સંભાવના

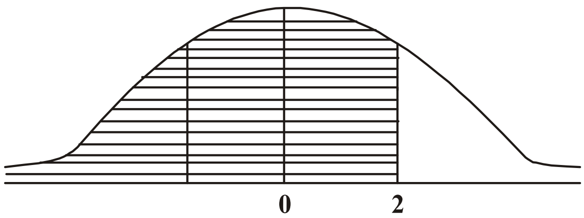
$= z$ ની કિંમત $\dfrac{8000-7500}{250}$ થી ઓછી હોવાથી સંભાવના

$= z$ ની કિંમત 2 થી ઓછી હોવાની સંભાવના

$= 0.5 + 0$ થી 2 સુધીનું ક્ષેત્રફળ

$= 0.5 + 0.4772$

$= 0.9772$



હવે ટકાવારી શોધવા સંભાવનાનો 100 વડે ગુણાકાર કરાય.

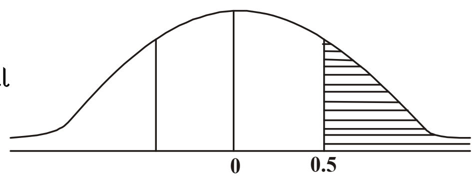
કુટુંબોની ટકાવારી $= 0.9772 \times 100$

$= 97.72\%$

આમ 97.72% કુટુંબોની આવક 8000 રૂ.થી ઓછી હશે.

(iii) આવક x ની કિંમત 7625 થી વધુ હોવાની સંભાવના

$= z$ ની કિંમત $\dfrac{7625-7500}{250}$ થી વધુ હોવાની સંભાવના



= z ની કિંમત 0.5 થી વધુ હોવાની સંભાવના

= 0.5 – 0 થી 0.5 સુધીનું ક્ષેત્રફળ

= 0.5 – 0.1915

= 0.3085

હવે કુટુંબોની સંખ્યા શોધવા સંભાવનાનો કુલ કુટુંબોની સંખ્યા વડે ગુણાકાર કરાય.

કુટુંબોની સંખ્યા $= N \times P(x)$

$= 5000 \times 0.3085$

$= 1542.5$

$= 1543$

આમ 1543 (લગભગ) કુટુંબોની આવક રૂ. 7625 થી વધુ હશે.

નોંધ : જો પ્રામાણ્ય વિતરણમાં મધ્યક, પ્ર.વિ., ચલ (x) નું મૂલ્ય, દશાંશક કે શતાંશક શોધવા હોય તો,

(i) સૌપ્રથમ આપેલી માહિતી પરથી 0 થી z_1 સુધીના અવલોકનોની (વચ્ચેના ભાગની) ટકાવારી શોધો.

(ii) આ ટકાવારીને સંભાવનામાં ફેરવો.

(iii) આ સંભાવનાને અનુરૂપ કોષ્ટક પરથી z ની કિંમત મેળવો.

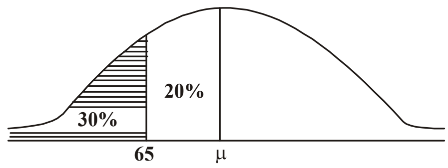
(iv) હવે z ના સુત્રમાં આપેલી કિંમત મૂકવાથી મધ્યક, પ્ર.વિ., ચલ (x) નું મૂલ્ય, દશાંશક કે શતાંશક શોધી શકાય.

(4) એક પ્રામાણ્ય વિતરણમાં 30% અવલોકનોનું મૂલ્ય 65 થી ઓછું છે. જો વિતરણનું પ્રમાણિત વિચલન 10 હોય તો મધ્યક શોધો.

30% અવલોકનોનું મૂલ્ય 65 થી ઓછું છે.

$\therefore$ μ અને 65 વચ્ચે 20% અવલોકનો છે.

$$\therefore \quad P = \frac{20}{100} = 0.2000$$



કોષ્ટક પરથી,

P = 0.2000 ને અનુરૂપ

$z = -0.525$

હવે, $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

$$-0.525 = z = \frac{65-\mu}{10}$$

$-0.525 \times 10 = 65 - \mu$

$-5.25 = 65 - \mu$

$\therefore \mu = 65 + 5.25$

$\mu = 70.25$

કોષ્ટકમાં

ક્ષેત્રફળ	z
0.1985	0.52
0.2019	0.53

બંનેની સરેરાશ લેતાં

0.2002	0.525

આ ત્રણમાં 0.2000 ની વધુ નજીક 0.2002 છે. તેને અનુરૂપ z ની કિંમત 0.525 છે.

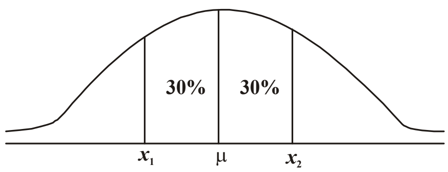
(5) એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 80 અને પ્રમાણિત વિચલન 15 છે. આ પરથી વચ્ચેના 60% અવલોકનોની સીમાઓ શોધો.

$\mu = 80$ $\sigma = 15$

ધારો કે વચ્ચેના 60% અવલોકનો x_1 અને x_2 વચ્ચે આવેલા છે.

અહીં μ અને x_1 વચ્ચે 30% અવલોકનો છે.

$$P = \frac{30}{100} = 0.3000$$



કોષ્ટક પરથી ક્ષેત્રફળ 0.3000 ને અનુરૂપ $z = -0.84$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$-0.84 = \frac{x_1 - 80}{15}$$

$-0.84 \times 15 = x_1 - 80$

$-12.6 + 80 = x_1$

$x_1 = 67.4$

આ જ રીતે જમણી બાજુ μ અને x_2 વચ્ચે 30% અવલોકનો છે.

કોષ્ટકમાં

ક્ષેત્રફળ	z
0.2996	0.84
0.3023	0.85

બંનેની સરેરાશ લેતાં

0.30095	0.845

$\therefore P = 0.3000$

કોષ્ટક પરથી $z = 0.84$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$0.84 = \frac{x_2 - 80}{15}$$

$0.84 \times 15 = x_2 - 80$

$12.6 + 80 = x_2$

$x_2 = 92.6$

આમ વચ્ચેના 60% અવલોકનો 67.4 અને 92.6 ની વચ્ચે આવેલાં છે.

(6) એક વિસ્તારના 2000 કુટુંબોની સરેરાશ આવક રૂ. 8200 અને પ્રમાણિત વિચલન 300 રૂ. છે. જો આવક પ્રામાણ્ય રીતે વિતરીત હોય તો (i) 8000 રૂ. અને 8500 રૂ. ની વચ્ચે આવક મેળવતા કુટુંબોની ટકાવારી શોધો. (ii) વચ્ચેના 68.26% કુટુંબોની આવકનો ગાળો શોધો. (iii) સૌથી વધુ આવક મેળવતા 10% કુટુંબોની ઓછામાં ઓછી આવક શોધો.

N = 2000, $\mu = 8200$ $\sigma = 300$ $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-8200}{300}$

(i) આવક x ની કિંમત 8000 અને 8500 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના

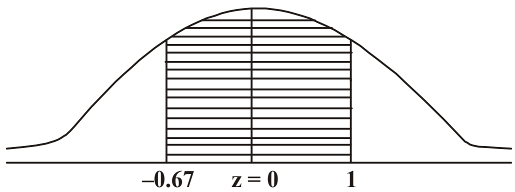
$= z$ ની કિંમત $\frac{8000-8200}{300}$ અને $\frac{8500-8200}{300}$ ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના

$= z$ ની કિંમત –0.67 અને +1 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના

= 0 થી –0.67 સુધીનું ક્ષેત્રફળ + 0 થી 1 સુધીનું ક્ષેત્રફળ

= 0.2488 + 0.3413

= 0.5901



હવે, કુટુંબોની ટકાવારી = 0.5901 × 100

= 59.01

આમ 59.01% કુટુંબોની આવક 8000 રૂ. અને 8500 રૂ.ની વચ્ચે આવેલ હશે.

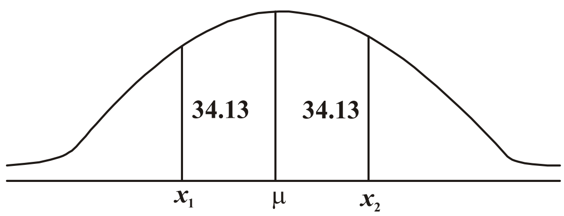
(ii) ધારો કે વચ્ચેના 68.26% કુટુંબોની આવક રૂ. x_1 અને રૂ. x_2 વચ્ચે આવેલ છે.

હવે, μ અને x_1 વચ્ચે 34.53% અવલોકનો છે.

$$\therefore \; P = \frac{34.13}{100} = 0.3413$$

સંભાવના 0.3413 ને અનુરૂપ

$z = -1$ (કોષ્ટક પરથી)



$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$-1 = \frac{x_1 - 8200}{300}$$

$-300 = x_1 - 8200$

$-300 + 8200 = x_1$

$x_1 = 7900$

આજ રીતે, જમણી બાજુ μ અને x_2 વચ્ચે 34.13% અવલોકનો છે.

$P = 0.3413$

$\therefore z = +1$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$+1 = \frac{x_2 - 8200}{300}$$

$300 = x_2 - 8200$

$300 + 8200 = x_2$

$x_2 = 8500$

આમ, વચ્ચેના 68.26% કુટુંબોની આવક 7900 રૂ. અને 8500 રૂ.ની વચ્ચે આવેલ હશે.

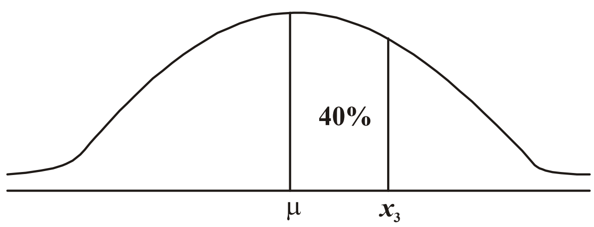
(iii) ધારો કે સૌથી વધુ આવક મેળવતા 10% કુટુંબોની ન્યૂનતમ આવક x_3 રૂ. છે.

$\therefore$ μ અને x_3 વચ્ચે 40% અવલોકનો છે.

$$\therefore P = \frac{40}{100} = 0.40$$

કોષ્ટક પરથી

$z = 1.28$



હવે, $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

$$1.28 = \frac{x_3 - 8200}{300}$$

$1.28 \times 300 = x_3 - 8200$

$384 + 8200 = x_3$

$x_3 = 8584$

આમ, સૌથી વધુ આવક ધરાવતા 10% કુટુંબોની ઓછામાં ઓછી આવક 8584 રૂ. હશે.

કોષ્ટકમાં

ક્ષેત્રફળ	z
0.3997	1.28
0.4015	1.29

બંનેની સરેરાશ લેતાં

0.4006	1.285

(7) એક પ્રામાણ્ય વિતરણમાં મધ્યક 66 અને વિચરણ 144 છે. આ પરથી D_3 અને P_{85} શોધો.

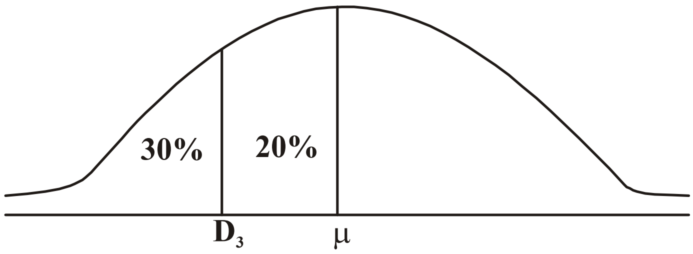
$\mu = 66$ $\qquad\qquad$ $\sigma^2 = 144$

$\therefore \ \sigma = 12$

(i) 30% અવલોકનોનું મૂલ્ય D_3 કરતાં ઓછું છે.

$\therefore$ 20% અવલોકનો μ અને D_3 વચ્ચે આવેલા છે.

$$P = \frac{20}{100} = 0.2000$$



કોષ્ટક પરથી

$z = -0.525$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$-0.525 = \frac{D_3 - 66}{12}$$

$-0.525 \times 12 = D_3 - 66$

$-6.3 + 66 = D_3$

$D_3 = 59.7$

કોષ્ટકમાં

ક્ષેત્રફળ	z
0.1985	0.52
0.2019	0.53

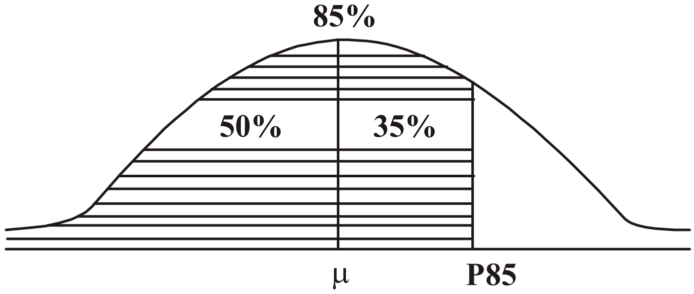
બંનેની સરેરાશ લેતાં

0.2002	0.525

(ii) 85% અવલોકનોનું મૂલ્ય P_{85} કરતાં ઓછું છે.

$\therefore$ μ અને P_{85} વચ્ચે 35% અવલોકનો છે.

$$P = \frac{35}{100} = 0.3500$$



કોષ્ટક પરથી

$z = 1.035$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$1.035 = \frac{P_{85} - 66}{12}$$

$1.035 \times 12 = P_{85} - 66$

$12.42 + 66 = P_{85}$

$P_{85} = 78.42$

કોષ્ટકમાં

ક્ષેત્રફળ	z
0.3485	1.03
0.3508	1.04

બંનેની સરેરાશ લેતાં

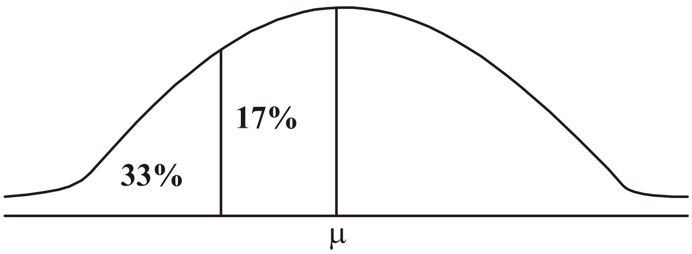
0.34965	1.035

(8) એક શહેરમાં ટી.વી. જોવાની ટેવ વિશે નિદર્શ તપાસ કરતાં જોવા મળ્યું કે 33% લોકો દરરોજ 90 મિનિટથી ઓછું ટી.વી. જુએ છે જ્યારે 90.32% લોકો 177 મિનિટથી ઓછું ટી.વી. જુએ છે. જો ટી.વી. જોવાની સમયગાળો પ્રામાણ્ય રીતે વિતરિત હોય તો વિતરણનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

33% લોકો 90 મિનિટથી ઓછું ટી.વી. જુએ છે.

$\therefore$ μ અને 90 વચ્ચે 17% અવલોકનો છે.

$$\therefore \ P = \frac{17}{100} = 0.1700$$



કોષ્ટક પરથી

$z = -0.44$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

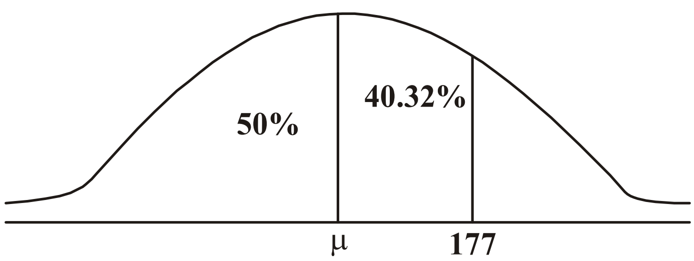
$$-0.44 = \frac{90 - \mu}{\sigma}$$

$-0.44\sigma = 90 - \mu$ .... (i)

હવે, 90.32% લોકો 177 મિનિટથી ઓછું ટી.વી. જુએ છે.

$\therefore$ μ અને 177 વચ્ચે 40.32% અવલોકનો છે.

$$\therefore \ P = \frac{40.32}{100} = 0.4032$$



કોષ્ટક પરથી

$z = 1.3$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$1.3 = \dfrac{177 - \mu}{\sigma}$

$1.3\sigma = 177 - \mu$ .... (ii)

પરિણામ (ii) માંથી પરિણામ (i) બાદ કરતાં

$$\begin{array}{rcl} 1.3\sigma &=& 177 - \mu \\ -\ 0.44\sigma &=& 90 - \mu \\ + & - & + \\ \hline 1.74\sigma &=& 87 \end{array}$$

$\sigma = \dfrac{87}{1.74}$

પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 50$ મિનિટ

હવે, પરિણામ (i) માં $\sigma = 50$ મૂકતાં,

$-0.44\sigma = 90 - \mu$

$-0.44\ (50) = 90 - \mu$

$-22 = 90 - \mu$

$\mu = 90 + 22$

મધ્યક $\mu = 112$ મિનિટ

(9) એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓના માર્કસનું વિતરણ પ્રામાણ્ય છે. તેમના સરેરાશ માર્કસ 58 અને પ્રમાણિત વિચલન 12 છે. 20 વિદ્યાર્થીઓના માર્કસ 46 થી ઓછા છે. તો વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

$\mu = 58$ $\sigma = 12$ $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma} = \dfrac{x - 58}{12}$

માર્ક્સ x ની કિંમત 46 થી ઓછી હોવાની સંભાવના

$=$ z ની કિંમત $\dfrac{46 - 58}{12}$ થી ઓછી હોવાની સંભાવના

$=$ z ની કિંમત -1 થી ઓછી હોવાની સંભાવના

$= 0.5 - 0.3414$

$= 0.1587$

હવે, 20 વિદ્યાર્થીઓના માર્કસ 46 થી ઓછા છે.

સંભાવના (P)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
0.1587	20
1	?

$\therefore$ કુલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા $= \dfrac{20 \times 1}{0.1587} = 126.02$

આમ વર્ગમાં લગભગ 126 વિદ્યાર્થીઓ હશે.

(10) એક પ્રામાણ્ય વિતરણમાં મધ્યક $\mu = 120$ અને $\sigma = 25$ છે. જો (i) $P(x \geq K_1) = 0.05$ અને (ii) $P(x \leq K_2) = 0.9332$ હોય તો K_1 અને K_2 ની કિંમત શોધો.

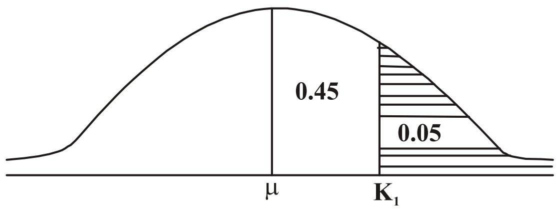
$\mu = 120$ $\sigma = 25$

(i) $P(x \geq K_1) = 0.05$

x ની કિંમત K_1 થી વધુ હોવાની સંભાવના = 0.05

$\therefore$ μ અને K_1 વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ = 0.5 − 0.05

= 0.45



ક્ષેત્રફળ 0.45 ને અનુરૂપ (કોષ્ટક પરથી)

$z = 1.645$

હવે, $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

$1.645 = \dfrac{K_1 - 120}{25}$

$1.645 \times 25 = K_1 - 120$

$41.13 + 120 = K_1$

$\therefore K_1 = 161.13$

(ii) $P(x \leq K_2) = 0.9332$

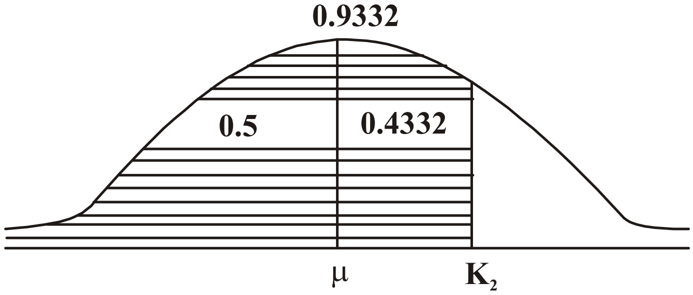
x ની કિંમત K_2 થી ઓછી હોવાની સંભાવના = 0.9332

$\therefore$ μ અને K_2 વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ = 0.9332 − 0.5

= 0.4332

ક્ષેત્રફળ 0.4332 ને અનુરૂપ (કોષ્ટક પરથી)

$z = 1.5$



હવે, $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

$1.5 = \dfrac{K_2 - 120}{25}$

$1.5 \times 25 = K_2 - 120$

$37.5 + 120 = K_2$

$\therefore K_2 = 157.5$

(11) પ્રમાણિત ચલ x નું સંભાવના વિધેય નીચે મુજબ છે. તે પરથી વિતરણના પ્રાચલો શોધો.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{288\pi}} e^{\frac{-1}{288}(x^2 - 50x + 625)}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{288\pi}}e^{\frac{-1}{288}(x^2-50x+625)}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{144\times 2\pi}}\,e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-25}{144}\right)^2}$$

$$f(x)=\frac{1}{12\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-25}{12}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

સંભાવના વિધેય

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

બંને વિધેય સરખાવતાં $\mu = 25$ અને $\sigma = 12$

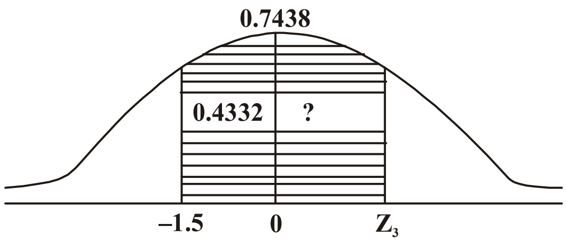
$\therefore$ પ્રાચલ $(\mu, \sigma) = (25, 12)$

(12) જો z એ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ હોય અને z_1 અને z પ્રાપ્તાંક દર્શાવતો હોય તો નીચેની માહિતીને અનુરૂપ z_1 ની કિંમત શોધો.

(i) $P(-1.5 \le z \le z_1) = 0.7438$

(ii) $P(z > z_2) = 0.0606$

(i) $P(-1.5 \le z \le z_1) = 0.7438$



–1.5 થી z_1 સુધીનું ક્ષેત્રફળ = 0.7438

કોષ્ટકર પરથી

0 થી –1.5 સુધીનું ક્ષેત્રફળ = 0.4332

$\therefore$ 0 થી z_1 સુધીનું ક્ષેત્રફળ = 0.7438 − 0.4332

= 0.3106

કોષ્ટકમાં ક્ષેત્રફળ 0.3106 ને અનુરૂપ

$z = z_1 = 0.88$

(ii) $P(z > z_2) = 0.0606$

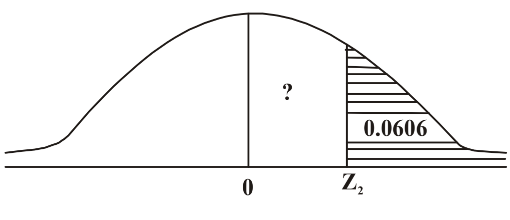
z ની કિંમત z_2 થી વધુ હોવાની સંભાવના = 0.0606

$\therefore$ 0 થી z_2 સુધીનું ક્ષેત્રફળ = 0.5 − 0.0606

= 0.4394

કોષ્ટક પરથી ક્ષેત્રફળ 0.4394 ને અનુરૂપ

$z = z_2 = 1.55$



(13) એક પ્રામાણ્ય વિતરણમાં મધ્યક 150 અને પ્રમાણિત વિચલન 20 છે. આ પરથી સરેરાશ વિચલન અને ચતુર્થક વિચલન શોધો.

$\mu = 150$ $\sigma = 20$

પ્રામાણ્ય વિતરણમાં

સરેરાશ વિચલન $= \frac{4}{5} \times \sigma$

$= \frac{4}{5} \times 20$

સરેરાશ વિચલન $= 16$

ચતુર્થક વિચલન $= \frac{2}{3} \times \sigma$

$= \frac{2}{3} \times 20$

$= 13.33$

(14) એક પ્રામાણ્ય વિતરણમાં મધ્યક 42 અને પ્રમાણિત વિચલન 8 છે. આ પરથી બંને અંતિમ ચતુર્થાંકોની લગભગ કિંમત મેળવો.

$\mu = 42$ $\sigma = 8$

પ્રામાણ્ય વિતરણમાં

$Q_1 = \mu - 0.675\sigma$ $Q_3 = \mu + 0.675\sigma$

$= 42 - 0.675(8)$ $= 42 + 0.675\ (8)$

$= 42 - 5.4$ $= 42 + 5.4$

$Q_1 = 36.6$ $Q_3 = 47.4$

6.3.6 સ્વાધ્યાય :

(A) યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી જવાબ લખો. :

(1) પ્રામાણ્ય વિતરણ કઈ ચલરાશી માટેનું સંભાવના વિતરણ છે ?

(a) અસતત ચલ (b) સતત ચલ (c) સાપેક્ષ ચલ

(2) પ્રામાણ્ય વિતરણની શરૂઆત કોણે કરી હતી ?

(a) જેકોબ બર્નોલી (b) કાર્લ પિયર્સન (c) અબ્રાહમ મોઈવ્રે

(3) પ્રામાણ્ય વિતરણના પ્રાચલો કયા છે ?

(a) n અને P (b) μ અને σ (c) μ અને m

(4) પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણના સંભાવના વિધેયમાં અચળાંકો કયા છે ?

(a) μ અને σ (b) x અને μ (c) e અને π

(5) પ્રામાણ્ય વિતરણમાં યાદચ્છિક ચલ x નો વિસ્તાર શું હોય છે ?

(a) $(-\infty, \infty)$ (b) $(-1, 1)$ (c) $[0, 1]$

(6) પ્રામાણ્ય વક્રમાં મધ્યક μની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ કેટલું હોય ?

(a) 1 (b) 0.5 (c) –0.5

(7) પ્રામાણ્ય વિતરણમાં વચ્ચેના 99.73% અવલોકનો કયા વિસ્તારમાં સમાયેલા હોય છે ?

(a) $\mu \pm \sigma$ (b) $\mu \pm 2\sigma$ (c) $\mu \pm 3\sigma$

(8) પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલનું વિચરણ કેટલું હોય ?

(a) 0 (b) 1 (c) 2

(9) સતત યાદચ્છિક પ્રામાણ્ય ચલ x કોઈ નિશ્ચિત કિંમત ધારણ કરે તેની સંભાવના કેટલી ?

(a) 0 (b) 1 (c) 0.5

(B) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) કઈ શરતો હેઠળ દ્વિપદી વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુલક્ષે છે ?

(2) પ્રામાણ્ય વિતરણનું સંભાવના વિધેય લખી, તેમાં વપરાતા પદો સમજાવો.

(3) પ્રામાણ્ય વિતરણના ગુણધર્મો જણાવો.

(4) પ્રામાણ્ય વિતરણમાં સંભાવના વિધેયમાં e અને π ની કિંમત જણાવો.

(5) પ્રામાણ્ય ચલના મધ્યક અને વિચરણ શું હોય ?

(6) પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના મધ્યક અને વિચરણ જણાવો.

(7) પ્રામાણ્ય વિતરણમાં કેટલા ટકા અવલોકનો $\mu \pm 2\sigma$ માં સમાયેલા હોય છે ?

(8) પ્રામાણ્ય વિતરણની વિષમતા કેટલી હોય છે ?

(9) પ્રામાણ્ય વક્ર હેઠળના ચાર અગત્યના ક્ષેત્રફળ જણાવો.

(C) ગણતરી કરો.

(1) પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ z ની નીચેની કિંમતોની સંભાવના શોધો.

(i) $-1 \leq z \leq 1.5$ (ii) $z \geq 1.25$ (iii) $z \geq -1.5$

(2) બેટરી બનાવતી એક કંપનીની બેટરીઓનું સરેરાશ આયુષ્ય 750 કલાક અને પ્રમાણિત વિચલન 60 કલાક છે. જો બેટરીનું આયુષ્ય પ્રામાણ્ય રીતે વિતરીત હોય તો કેટલા ટકા બેટરીનું આયુષ્ય (i) 690 અને 840 કલાકની વચ્ચે (ii) 675 કલાકથી ઓછું (iii) 780 કલાકથી વધુ હશે ?

(3) સામાન્ય જ્ઞાનની 200 માર્કસની એક પરીક્ષામાં 2000 વિદ્યાર્થીઓએ આપી. પરીક્ષામાં તેમના સરેરાશ માર્કસ 90 અને પ્રમાણિત વિચલન 20 છે. પરીક્ષામાં પાસ થવા ઓછામાં ઓછા 36% અને દ્વિતિય વર્ગ માટે 50% થી 60% ગુણ જરૂરી છે. જો માર્કસનું વિતરણ પ્રામાણ્ય હોય તો પરીક્ષામાં નાપાસ થયેલા તેમજ પ્રથમ, દ્વિતિય અને તૃતીય વર્ગમાં પાસ થયેલા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

(4) એક શાળાના 500 વિદ્યાર્થીઓની પરીક્ષા લેવામાં આવી. આ પરીક્ષાનું પરિણામ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. વિદ્યાર્થીઓના સરેરાશ ગુણ 60 અને પ્રમાણિત વિચલન 12 છે. (i) જો 78 થી વધુ ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓને સ્કોલરશીપ આપવાની હોય તો સ્કોલરશીપ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો. (ii) જો સૌથી નબળા 10% વિદ્યાર્થીઓ માટે વિશેષ તાલીમવર્ગ ગોઠવવા હોય તો આ વિદ્યાર્થીઓના મહત્તમ માર્કસ શોધો.

(5) શહેરના એક વિસ્તારના લોકોનું સરેરાશ વજન 58 કિલોગ્રામ અને વિચરણ 81 (કિ.ગ્રા.)^2 છે. જો વજનનું વિતરણ પ્રામાણ્ય હોય તો વચ્ચેના 60% વ્યક્તિઓના વજનનો ગાળો શોધો.

(6) એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 45 અને પ્રમાણિત વિચલન 5 છે. આ પરથી 8મો દશાંશક અને 35મો શતાંશક મેળવો.

(7) 1000 વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહનું સરેરાશ વજન 52 કિ.ગ્રા. અને વિચરણ 100 (કિ.ગ્રા.)2 છે. જો વજનનું વિતરણ પ્રામાણ્ય હોય તો (i) સૌથી વધુ વજન ધરાવતા 100 વિદ્યાર્થીઓનું ન્યૂનતમ વજન (ii) સૌથી ઓછું વજન ધરાવતા 50 વિદ્યાર્થીઓનું મહત્તમ વજન શોધો.

(8) વીજળીના બલ્બ બનાવતી એક કંપની દ્વારા ઉત્પાદિત બલ્બનું આયુષ્ય પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. જો 15% બલ્બનું આયુષ્ય 850 કલાકથી ઓછું અને 90% બલ્બનું આયુષ્ય 2500 કલાકથી ઓછું હોય તો કંપની દ્વારા ઉત્પાદિત બલ્બનું સરેરાશ આયુષ્ય અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

(9) એક કૉલેજના એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓના પરિણામની માહિતી નીચે મુજબ છે.

વિશિષ્ટ ગુણવત્તા સાથે પાસ : 15% વિદ્યાર્થીઓ

વિશિષ્ટ ગુણવત્તા વિના પાસ : 75% વિદ્યાર્થીઓ

નાપાસ : 10% વિદ્યાર્થીઓ

પાસ થવા માટે ઓછામાં ઓછા 40 ગુણ અને વિશિષ્ટ ગુણવત્તા માટે 80 ગુણ જરૂરી હોય તેમજ માર્કસનું વિતરણ પ્રામાણ્ય હોય તો વિતરણના પ્રાચલો શોધો.

(10) એક રેસ્ટોરન્ટના ગ્રાહકોના બિલની રકમ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. ગ્રાહકોના બિલની સરેરાશ રકમ 1200 રૂ. છે. જો 6.68% ગ્રાહકોનું બિલ 1500 રૂ. થી વધુ હોય તો 800 રૂ. અને 1400 રૂ.ની વચ્ચે બિલ હોય તેવા ગ્રાહકોની ટકાવારી શોધો.

(11) એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓનું વજન પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. વિદ્યાર્થીઓનું સરેરાશ વજન 55 કિ.ગ્રા. અને પ્રમાણિત વિચલન 5 કિ.ગ્રા. છે. જો 10 વિદ્યાર્થીઓનું વજન 50 કિ.ગ્રા.થી ઓછું હોય તો વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

(12) યાદચ્છિક પ્રામાણ્ય ચલ x નો મધ્યક 150 અને પ્રમાણિત વિચલન 20 છે. જો (i) $P(x \le K_1) = 0.95$ અને (ii) $P(130 \le x \le K_2) = 0.7783$ હોય તો K_1 અને K_2 ની કિંમત શોધો.

(13) એક વિક્રેતા મોબાઈલનું વેચાણ કરે છે અને વેચાણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે, જેનું સંભાવના વિધેય નીચે મુજબ છે.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{288\pi}} e^{\frac{-1}{288}(x-55)^2}$$

તો જાન્યુઆરી મહિનાના કેટલા દિવસ દરમિયાન મોબાઈલનું વેચાણ (i) 40 મોબાઈલથી ઓછું અને (ii) 67 મોબાઈલથી વધુ હશે ?

(14) એક પ્રામાણ્ય વિતરણના બે અંતિમ ચતુર્થકોનો સરવાળો 45 અને તેમનો તફાવત 15 છે. તેમજ તેનું વિતરણ મધ્યક કરતાં 10 ગણું છે. તો $P(10 \le x \le 15)$ ની કિંમત શોધો.

(15) એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 60 છે. જો 88.49% અવલોકનોનું મૂલ્ય 72 થી ઓછું હોય તો પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

(16) એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક μ અને પ્ર.વિ. σ છે. તો આ વિતરણના કેટલા ટકા અવલોકનો (i) $\mu \pm 1.25\sigma$ (ii) $\mu - 1.2\sigma$ થી વધુ (iii) $\mu + 2\sigma$ થી વધુ હશે ?

(17) એક પ્રામાણ્ય વિતરણમાં પ્રામાણ્ય ચલ x ની કિંમતો 66 અને 87 ને અનુરૂપ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ z ની કિંમત અનુક્રમે –0.6 અને 1.5 છે. આ પરથી મધ્યક અને પ્ર.વિ. શોધો.

(18) જો $P(z \geq z_1)$ 0.1480 હોય તો $P(0 \leq z \leq z_1)$ ની કિંમત શોધો.

(19) જો પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ z માટે $P(z \leq 1 + a) = 0.9332$ હોય તો a ની કિંમત શોધો.

(20) એક પ્રામાણ્ય વિતરણમાં મધ્યક 80 અને પ્ર.વિ. 12 છે. તો સરેરાશ વિચલન અને ચતુર્થક વિચલન મેળવો.

(21) જો z એ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ હોય તો નીચેની માહિતી માટે z_1 ની કિંમત શોધો.

(i) $P(-1 \leq z \leq z_1) = 0.7357$

(ii) $P(z_1 \leq z \leq 1.5) = 0.1417$

(22) નીચેની માહિતીને અનુરૂપ z_1 ની કિંમત શોધો.

(i) $z = z_1$ ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.15 છે.

(ii) $z = z_1$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.75 છે.

જવાબો :

(A) (1) b, (2) c, (3) b, (4) c, (5) a, (6) b, (7) c, (8) b, (9) a

(C) (1) (i) 0.7745 (ii) 0.1056 (iii) 0.9332

(2) (i) 0.7745 (ii) 0.1056 (iii) 0.6915

(3) નાપાસ 368, તૃતીય વર્ગ 1015, દ્વિતીય વર્ગ 483, પ્રથમ વર્ગ 134

(4) (i) 33 વિદ્યાર્થી (ii) 44.64 માર્ક્સ

(5) 50.44 અને 65.56

(6) $D_8 = 49.2$, $P_{35} = 43.07$

(7) (i) 64.8 (ii) 35.55

(8) $\mu = 1587.69$, $\sigma = 712.74$

(9) $\mu = 62.12$, $\sigma = 17.28$

(10) $\sigma = 200$, 81.85%

(11) 63 વિદ્યાર્થીઓ

(12) $K_1 = 182.9$, $K_2 = 180.6$

(13) (i) 3.27, (ii) 4.92 દિવસ

(14) $\mu = 22.5$, $\sigma = 15$, $P = 0.1052$

(15) $\sigma = 10$

(16) (i) 78.88%, (ii) 88.49% (iii) 2.28%

(17) $\mu = 72$, $\sigma = 10$

(18) 0.3520

(19) $a = 0.5$

(20) સ.વિ. = 9.6, ચ.વિ. = 8

(21) (i) 1.25, (ii) 0.5

(22) (i) –1.0.35 (ii) –0.675

6.4 ચાવીરૂપ શબ્દો :

પ્રામાણ્ય વિતરણ : સતત ચલરાશી માટેનું સંભાવના વિધેય

***z* :** પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ

μ (મ્યુ) : પ્રામાણ્ય ચલ x નો મધ્યક

σ(સીગ્મા) : પ્રામાણ્ય ચલ x નું પ્રમાણિત વિચલન

સરેરાશ વિચલન : પ્રસારમાનનું માપ

ચતુર્થક વિલચન : પ્રસારમાનનું માપ

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) ગાણિતિક આંકડાશાસ્ત્ર : એચ.ડી. શાહ, યુનિ. ગ્રંથ નિર્માણ બોર્ડ. (1990)

(2) આંકડાશાસ્ત્ર (ભાગ-2) : ગુજરાત રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક મંડળ.

(3) Fundamentals of Mathematical Statistics : Gupta and Kapoor
Sultan Chand Prakashan (2011)

એકમ 7 સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ-૧

[Analysis of Time Series-1]

7.0	ઉદ્દેશ
7.1	પ્રસ્તાવના
7.2	સામાયિક શ્રેણીનો અર્થ
7.3	સામાયિક શ્રેણીની વ્યાખ્યા
7.4	સામાયિક શ્રેણીની જરૂરિયાત (ઉપયોગિતા)
7.5	સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ
7.6	સામાયિક શ્રેણીના ઘટકો
7.7	સામાયિક શ્રેણીની વલણ નક્કી કરવાની આલેખની રીત
7.8	વલણની રીત નક્કી કરવાના ફાયદા-મર્યાદા
7.9	ઉદાહરણ
7.10	સ્વાધ્યાય (જાતે કરો)
7.11	ખાલી જગ્યા અને જવાબો
7.12	ચાવીરૂપ શબ્દો
●	સંદર્ભગ્રંથ

7.0 ઉદ્દેશ :

આ પ્રકરણનો મુખ્ય ઉદ્દેશ નિશ્ચિત સમયના અંતરે મળતી માહિતીની જાણકારી મેળવવાનો અને મળેલ સામાયિક શ્રેણીની મદદથી ચોક્કસ વલણ નક્કી કરવું અને તેને આધારે ભવિષ્ય અંગે અનુમાન કરવાનો છે.

7.1 પ્રસ્તાવના :

સામાયિક શ્રેણી એટલે અમુક નિશ્ચિત સમયના અંતરે મેળવવામાં આવતી માહિતી. અહીં અલગ-અલગ માહિતી માટે સમયગાળો અલગ-અલગ હોય છે. તેમાં 'સમયગાળો' એ ખૂબ જ અગત્યનું પરિબળ છે. દા.ત. દર્દીના ઉષ્ણતામાન માપવાનો ગાળો દર કલાકનો હોઈ શકે. પરંતુ બે-ચાર અઠવાડિયાનો ન જ હોય તેવી જ રીતે ઉત્પાદન-વેચાણને લગતી સામાયિક શ્રેણીનો ગાળો 10 થી 20 વર્ષ સુધીનો હોઈ શકે. સામાયિક શ્રેણીમાં 'સમય' ને એક ચલ તરીકે લેવામાં આવે છે અને તેને 't_i' વડે દર્શાવાય છે. જ્યારે સમય પર આધારિત પરિબળોને બીજા ચલ તરીકે લેવામાં આવે છે અને તે 'y_i' વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

અહીં સમયગાળો એટલે દિવસ, અઠવાડિયુ, મહિનો, વર્ષ કે સેંકડો વર્ષો પણ લઈ શકાય છે. જ્યારે તેના પર અસર કરતાં પરિબળો એટલે કે ઉત્પાદન, વેચાણ, નફો, વસ્તી, સૂચકઆંક, નિકાસ વગેરે લઈ શકાય છે.

7.2 સામાયિક શ્રેણીનો અર્થ :

● **અર્થ :** 'સમય' એ મનુષ્યના જીવન માટે અત્યંત અગત્યનું સ્થાન ધરાવે છે. સમયના વહેણ સાથે વસ્તુની કિંમત, ઉત્પાદન તેમજ દેશની વસ્તી બદલાયા કરતી હોય છે અને આ વસ્તીના અભ્યાસ મુજબ માનવીએ પ્રાકૃતિક અને સામાજીક વિજ્ઞાનો વિકસાવેલા છે. તેમાં મુખ્યત્વે 'સમયગાળો' એ ખૂબ જ મહત્ત્વનું સાધન છે. આ સમયગાળાને

અનુલક્ષીને જુદા જુદા સમય માટે જુદા જુદા આંકડાઓ ભેગા કરવામાં આવે તો તે એક શ્રેણીની રચના કરે છે એમ કહેવાય. આ શ્રેણીની કિંમતો સમયના ફેરફાર સાથે બદલાયા કરે છે અને તેની મદદથી જે શ્રેણીની રચના કરવામાં આવે છે. તેને સામાયિક શ્રેણી તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

આંકડાશાસ્ત્રની પરિભાષામાં સમય અનુસાર બદલાતા ચલને 'સામાયિક ચલ' તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. આવા સામાયિક ચલોની દરરોજની, અઠવાડિયાની, મહિનાની, એકાદ વર્ષની કે વર્ષોની માહિતીઓના આંકડાઓ એકત્રિત કરવામાં આવે તો આ આંકડાઓથી બનતી શ્રેણીને 'સામાયિક શ્રેણી' તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. ટૂંકમાં સામાયિક શ્રેણી એટલે સમયના જુદા જુદા અંતરે ધારણ કરેલ કિંમતોની શ્રેણી.

● **વ્યાખ્યા :** સામાયિક શ્રેણીની વ્યાખ્યા જુદા જુદા લેખકોએ નીચે મુજબ આપેલ છે. શ્રી સંચેતી અને કપૂર સામાયિક શ્રેણીની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપે છે.

"A time series refers to chronologically ordered values of a variable over successive period of time."

શ્રી ડબલ્યૂ. ઝેડ. હેરેશના મતે સામાયિક શ્રેણીની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ છે.

"A time series may be defined as a sequence of value of some variable corrosponding to successive points in time."

એટલે કે "ચોક્કસ સમયગાળા માટેના સામાયિક ચલની માહિતી સતત ક્રમમાં વ્યવસ્થિત ધોરણે ગોઠવવાથી તૈયાર થતી શ્રેણીને સામાયિક શ્રેણી કહે છે."

આમ "સમયના અમુક ક્રમિક અંતરોએ એકત્ર કરેલી સંખ્યાત્મક માહિતી એટલે સામાયિક શ્રેણી." એટલે કે અહીં સમય અને જે તે સમયની પરિસ્થિતિ બંનેનું સંયોજન કરવામાં આવે છે અને તેને સામાયિક સ્વરૂપે દર્શાવવામાં આવે છે અને સમય પર આધારિત માહિતીની રજૂઆત કરવામાં આવે છે. સામાયિક શ્રેણીનું ઉદાહરણ સ્વરૂપ નીચે મુજબ લખી શકાય.

એક કંપનીનું છેલ્લા દશ વર્ષનું ઉત્પાદન દર્શાવતી શ્રેણી

વર્ષ	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ઉત્પાદન (લાખ ટનમાં)	101	108	112	114	118	121	128	130	139	140

7.3 સામાયિક શ્રેણીના અભ્યાસની જરૂરિયાત (ઉપયોગિતા) :

સામાયિક શ્રેણીના વૈજ્ઞાનિક અભ્યાસથી તેની જરૂરિયાત અનેક બાબતો (જેવી કે ઉદ્યોગો, વેપાર વાણિજ્ય, આર્થિક આયોજન, સામાજિક સુધારા અને ભવિષ્યના અનુમાનો વગેરે)માં આગવુ સ્થાન ધરાવે છે. તેથી જ તો દેશના અર્થતંત્રની પારાશીશી-સૂચકઆંક એ દેશની મુખ્ય સામાયિક શ્રેણી છે. તેની વિવિધ જરૂરિયાતો નીચે મુજબ છે.

(1) **ભૂતકાળની માહિતી સમજવા :** સામાયિક શ્રેણીની મદદથી ભૂતકાળની માહિતી સરળતાથી સમજી શકાય છે. દા.ત. કોઈ એક કંપનીના છેલ્લા દશ વર્ષનો નફો આપેલ હોય તેવી સામાયિક શ્રેણીની મદદથી છેલ્લા દશ વર્ષોમાં કંપનીના ઉત્પાદનમાં ક્યારે અને કેટલી વધઘટ થયેલ છે તે સરળતાથી સમજી શકાય છે.

(2) **ભૂતકાળની માહિતી ઉપરથી ભવિષ્યનું અનુમાન :** સામાયિક શ્રેણીની મદદથી ભૂતકાળની માહિતીને આધારે ભવિષ્ય અંગે ધારણા બાંધી શકાય છે. દા.ત. કોઈ એક કંપનીના છેલ્લા 10 થી 15 વર્ષના ઉત્પાદનના આંકડાની સામાયિક શ્રેણી તપાસી કંપનીએ ભવિષ્યમાં કેટલું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ તેવી ધારણા બાંધી શકાય છે.

(3) **વર્તમાનની માહિતી સમજવા :** સામાયિક શ્રેણીની મદદથી વર્તમાન પરિસ્થિતિનો તાગ મેળવી શકાય છે. દા.ત. કોઈ એક વેપારી વર્તમાન સમયનો તાગ મેળવવો હોય તો તેણે વસ્તુની પડતર કિંમત અને બજાર ભાવના વલણો વિશે જાણકારી મેળવવા સામાયિક શ્રેણીનો ઉપયોગ કરે છે.

(4) **ઉત્પાદન અને વેચાણના લક્ષ્યાંકો પાર પાડવા :** ધંધામાં કોઈપણ વેપારીનો મુખ્ય હેતુ નફો કમાવવાનો હોઈ શકે છે અને તેથી તે સામાયિક શ્રેણીની મદદથી ઉત્પાદન અને વેચાણના લક્ષ્યાંકો અંગેની ધારણા કરે છે અને તે ધારણાઓને આધારે નક્કી કરેલા લક્ષ્યાંકો પાર પાડે છે અને અન્ય વેપારી સાથે સરખામણી કરી ધંધામાં ટકી રહે છે. તે માટે તે એકથી વધુ વખત સામાયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ કે મદદ લે છે.

(5) **અર્થશાસ્ત્રીઓને ઉપયોગી :** અર્થશાસ્ત્રીઓ કોઈ દેશ કે ધંધા-ઉદ્યોગમાં આર્થિક વધઘટ કે વેપારચક્રના અભ્યાસ માટે સામાયિક શ્રેણીનો ઉપયોગ કરે છે.

(6) **અન્ય આર્થિક સેવાઓ માટે ઉપયોગી :** અન્ય આર્થિક સેવાઓ જેવી કે RBI ડિસ્કાઉન્ટ રેઈટ અને બેંક ધિરાણની રકમો વચ્ચેનો અભ્યાસ કરવા માટે અર્થશાસ્ત્રીઓ સામાયિક શ્રેણીનો જ આધાર લે છે.

(7) **ધંધાનું આયોજન કરવા :** ભૂતકાળના નફાને આધારે ઉત્પાદક વેપારી કે ધિરાણ કરનારાઓ ધંધામાં કેટલો નફો રાખવો. કેટલું ઉત્પાદન કરવું, કેટલું ધિરાણ લેવું કે આપવું જેવા નિર્ણયો લેવા માટે સામાયિક શ્રેણીનો ઉપયોગ કરે છે.

(8) **સમાજશાસ્ત્રીઓને ઉપયોગી :** દેશમાં થતા બાળલગ્નો, વિધવા વિવાહ, કેળવણી, છૂટાછેડાના કારણો, દિકરી ભણાવો જેવા વિવિધ સામાજીક સુધારાઓ સૂચવી તેનું અમલીકરણ કરી સામાજિક પરિવર્તન લાવવા માટે સમાજશાસ્ત્રીઓને ખૂબ ઉપયેાગી છે.

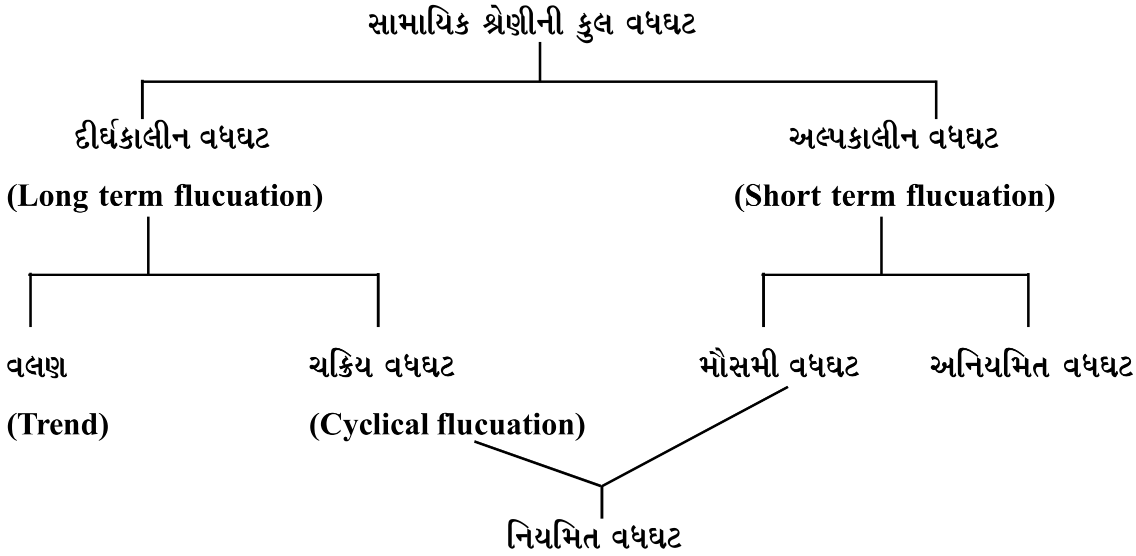
(9) **ખગોળશાસ્ત્રીઓને ઉપયોગી :** ખગાળશાસ્ત્રીઓ સેંકડો વર્ષોની સામાયિક શ્રેણીની મદદથી વિશ્લેષણાત્મક અભ્યાસની મદદથી અવકાશી સંશોધનોના લક્ષ્યાંકો નક્કી કરી તેને પાર પાડવાની કોશીશ કરતાં હોય છે. ઉપરાંત સામાયિક શ્રેણીની મદદથી અવકાશી પદાર્થની ગતિનો અભયાસ કરવા પણ ઉપયોગી છે.

આમ, સામાયિક શ્રેણી સરકારને, ખગોળશાસ્ત્રીઓને, સમાજશાસ્ત્રીઓને અને અર્થશાસ્ત્રીઓને યોગ્ય સુધારા કે સંશોધનો માટેનું માર્ગદર્શન પૂરું પાડે છે.

7.5 સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ (Analysis of Time Series) :

કોઈપણ સામાયિક શ્રેણીનું અવલોકન કરવામાં આવે તો એ પ્રશ્ન ચોક્કસ ઉપસ્થિત થાય છે કે દરેક સામાયિક શ્રેણીમાં તફાવત કેમ છે ? તે નિયમિત છે ? અનિયમિત છે કે સ્થિર છે ? એટલે કે શ્રેણીની કિંમતમાં થતા ફેરફાર કયા કારણોસર થાય છે. તેની અસર સામાયિક શ્રેણી ઉપર કેટલી થાય છે તે જાણવા માટે સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ કરવું જરૂરી છે. દા.ત. દેશના છૂટાછેડાના આંકની સામાયિક શ્રેણીનો આંક સતત વધતો જતો હોય તો છૂટાછેડામાં વધારો કયા કારણસર થાય છે ? તે જાણવું સમાજશાસ્ત્રીઓ માટે અત્યંત જરૂરી બને છે. તે જાણવા માટે કયા પગલાં લેવા જોઈએ કે જેથી આ આંક વધે નહીં. તેવી જ રીતે કોઈ વસ્તુના ઉત્પાદન, માંગ, ભાવ, પુરવઠો વગેરે ઉપર ઋતુની અસર થતી હોય છે અને ઋતુ પ્રમાણે તેમાં ફેરફાર થતો જોવા મળે છે. આ ઉપરાંત ખેડૂતોના વલણો, આર્થિક સ્થિતિ, રાજકીય પરિબળો વગેરે જેવા અનેક પરિબળોની અસર પડતી હોય છે. આ બધી અસરોથી પણ શ્રેણીની કિંમતમાં વધઘટ થતી જોવા મળે છે. આ દરેક પરિબળોની અસરને આપણે જુદી જુદી પાડીએ. એટલે કે તેનું યોગ્ય વિભાગમાં વિભાજન કરીએ તો તેને સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ કહેવાય. ટૂંકમાં સામાયિક ચલ પર અસર કરતાં અનેકવિધ પરિબળોની અસરોનું યોગ્ય વિભાજન એટલે સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ.

સામાન્ય રીતે સામાયિક ચલમાં થતી વધઘટને બે વિભાગમાં વહેંચી શકાય છે. (1) અલ્પકાલીન વધઘટ (2) દીર્ઘકાલીન વધઘટ. અલ્પકાલીન વધઘટને પણ બે વિભાગમાં વહેંચી શકાય. (i) મૌસમી વધઘટ (ii) અનિયમિત વધઘટ. જ્યારે દીર્ઘકાલીન વધઘટને (a) વલણ અને (b) ચક્રિય વધઘટ એ બે ભાગોમાં વહેંચી શકાય. આમ સામાયિક શ્રેણીની કુલ વધઘટને નીચેના ચાર્ટ દ્વારા સમજી શકાય છે.



આમ, ઉપરના ચાર્ટ ઉપરથી કહી શકાય કે ઉપર દર્શાવેલ ચારેય પ્રકારની વધઘટને એકબીજાથી અલગ કરી તે તમામની કુલ વધઘટ ઉપર કેવી અને કેટલી અસર થાય છે તે શોધી શકાય છે. આમ, ઉપરોક્ત માહિતીને મોડલ સ્વરૂપે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

O અથવા Y = T + S + C + I

જ્યાં O અથવા Y = મૂળ કિંમત

T = વલણ

S = મૌસમી વધઘટ

C = ચક્રિય વધઘટ

I = અનિયમિત વધઘટ

અને નિયમિત વધઘટ = C + S

(નિયમિત વધઘટો બે પ્રકારની હોય છે. (1) ચક્રીય વધઘટ (2) મૌસમી વધઘટ. એટલે કે કુલ વધઘટ = વલણ + મૌસમી વધઘટ + ચક્રિય વધઘટ + અનિયમિત વધઘટ)

અને,

નિયમિત વધઘટ = ચક્રિય વધઘટ + મોસમી વધઘટ

આમ, દરેક ઘટકને ચાર્ટ અને મોડેલ સ્વરૂપે રજૂ કરવાથી દરેક પરિબળની સંયુક્ત અસર જાણી શકાય છે. આ તમામ વધઘટ શોધવાના પગલાં નીચે મુજબ છે.

પગલું-I : સામાયિક ચલોની મદદથી દીર્ઘકાલીન વધઘટ (વલણ)ની કિંમત શોધો.

પગલું-II : અલ્પકાલીન વધઘટ = (સામાયિક + ચલની આપેલી કિંમત – દીર્ઘકાલીન વધઘટની કિંમત)

પગલું-III : (ચક્રિય વધઘટ + અનિયમિત વધઘટ) = (અલ્પકાલીન વધઘટ – મૌસમી વધઘટ)

પગલું-IV : ઉપરોક્ત કિંમતમાંથી ચક્રિય વધઘટ બાદ કરવાથી અનિયમિત વધઘટ મળે છે.

પગલું-V : નિયમિત વધઘટ = ચક્રિય વધઘટ + મૌસમી વધઘટ

આમ, દરેક ઘટકને અલગ કરી જુદા-જુદા આલેખો ઉપર દર્શાવી દરેક પરિબળની સંયુક્ત અસર જાણી શકાય છે અને તે ઉપરથી ભાવિ અનુમાનો કરવા માટે સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ એ ખૂબ જ ઉપયોગી સાધન ગણાય છે.

7.6 સામાયિક શ્રેણીના ઘટકો (Component of Time Series) :

સામાયિક શ્રેણીના પૃથક્કરણના અભ્યાસ દરમિયાન આપણે જોયું કે સામાયિક શ્રેણીના મુખ્ય બે ઘટકો છે. (1) દીર્ઘકાલીન વધઘટ (વલણ) (2) અલ્પકાલીન વધઘટ. તેના અલગ અલગ પેટા પ્રકારને ધ્યાનમાં લેતાં સામાયિક શ્રેણીના ઘટકોની વિસ્તૃત ચર્ચા નીચે મુજબ છે.

(1) દીર્ઘકાલીન વધઘટ અથવા વલણ :

સીમ્પોસ અને કોફડાના મતે દીર્ઘકાલીન વધઘટ કે વલણ એ લાંબાગાળાની વધઘટ છે. જો કોઈ એક સામાયિક શ્રેણીનું લાંબા સમય સુધી અવલોકન કરીએ તો તે શ્રેણીની કિંમતોમાં અવ્યવસ્થિત રીતે વધઘટ થતી જોવા મળે છે. જે લાંબે ગાળે નિયમિત કે સ્થિર રીતે વધતી કે ઘટતી કે સ્થિર રહેતી જોવા મળે છે. આમ, સામાયિક શ્રેણીની આ પ્રકારની વધઘટને સામાયિક શ્રેણીનું વલણ કહેવાય છે. આમ, દીર્ઘકાલીન અસરોના પરિણામ સ્વરૂપ વલણો મળે છે. આ પ્રકારના વલણને બે પ્રકારે વહેંચી શકાય.

(1) વધતું વલણ (2) ઘટતું વલણ. જે નીચેના ઉદાહરણો ઉપરથી સમજી શકાય.

- **વધતાં વલણના ઉદાહરણો :**

(1) વસ્તીમાં થતા વધારાને કારણે ભારતમાં અનાજ, કપડા અને જીવન જરૂરિયાતની વસ્તુના ભાવો દર વર્ષે સ્થિર રીતે જોવા મળે છે.

(2) ટોપ રેન્ક ધરાવતી કંપનીઓના ઉત્પાદન અને નફામાં વધતી જતી માંગને કારણે સ્થિર રીતે વધારો થતો જોવા મળે છે. એકાદ-બે વર્ષનું વલણ તપાસતા આ પ્રકારનું વલણ જાણી શકાય નહીં. પરંતુ દશ, વીસ કે તેથી વધુ વર્ષોના વલણ તપાસતાં આ પ્રકારનું વલણ જાણી શકાય છે.

- **ઘટતાં વલણના ઉદાહરણો :**

(1) નવી-નવી દવાઓ અને આરોગ્યને લગતી સુવિધાઓને કારણે રોગચાળાના પ્રમાણમાં ઘટાડો જોવા મળે છે.

(2) ખનીજ-ખાણનો જથ્થો સતત ઘટતો જતો હોવાથી ખાણમાં દરેક વર્ષે થતા ઉત્પાદનમાં ઘટાડો જોવા મળે છે.

આ ઉપરાંત સામાયિક શ્રેણીનું વલણ નક્કી કરવા માટે સમયગાળો એ ખૂબ જ અગત્યનું પરિબળ છે.

સમયગાળો : કોઈપણ સામાયિક શ્રેણીનું વલણ તપાસવા માટે અલગ-અલગ સમસ્યા માટે સમયગાળો પણ અલગ-અલગ હોય છે. દા.ત. દવાખાનામાં ડૉક્ટર દર્દીના ઉષ્ણતામાનને લગતી સામાયિક શ્રેણી તૈયાર કરે તો તે એકાદ દિવસ (એટલે કે દર કલાકે કે બે કલાકે ઉષ્ણતામાન માપવામાં આવે અને શ્રેણી તૈયાર કરવામાં આવે), ખગોળશાસ્ત્રીઓ તેમના સંશોધન માટે સેંકડો વર્ષના સમયગાળાની સામાયિક શ્રેણી ધ્યાનમાં લે છે. વેપારીઓ કે ઉત્પાદકો ઉત્પાદન, ભાવ કે વેચાણને લગતી સામાયિક શ્રેણી માટે દશથી વીસ વર્ષ કે તેથી વધુ વર્ષોનો સમયગાળો પસંદ કરે છે.

ટૂંકમાં સામાયિક શ્રેણીમાં જેમ સમયગાળો લાંબો તેમ વધુ સ્પષ્ટ વલણ મેળવી શકાય છે. પરંતુ આ સમયગાળો જે-તે પ્રશ્ન માટે યોગ્ય હોવો જોઈએ.

(2) મોસમી વધઘટ (Seasonal Variation) :

મોસમી વધઘટ એ નિયમિત રીતે થતી ટૂંકાગાળાની વધઘટ છે. તેનો સમયગાળો હંમેશા એક વર્ષથી ઓછો હોય છે. આ પ્રકારની વધઘટ સામાયિક ચલ પર અસર કરતાં મોસમી પરિબળોને કારણે ઉદ્ભવતી હોય છે. આર્થિક માહિતી સંબંધી શ્રેણીઓ આવી વધઘટો દર્શાવતી હોય છે. દા.ત. દર અઠવાડિયે વસ્તુના ભાવમાં ફેરફાર દર્શાવતી શ્રેણી.

ઉનાળાની ઋતુમાં એરકન્ડીશનના ભાવ, માંગ, વપરાશ અને ભાવ અન્ય ઋતુની સરખામણીમાં વધુ જોવા મળે છે. ચોમાસાની ઋતુમાં રેઈન સૂટ, છત્રી, પાણીમાં પહેરી શકાય એવા બૂટ વગેરેની માંગ, વપરાશ અને ભાવ અન્ય ઋતુની સરખામણીમાં વધુ જોવા મળે છે. શિયાળાની ઋતુમાં ગરમ કપડાં, સ્વેટર, મફલર, ગરમ ટોપી વગેરેના ભાવ અને માંગ અને વપરાશ અન્ય ઋતુની સરખામણીમાં વધુ હોય છે. આમ થવા પાછળનું કારણ સામાયિક ચલ પર થતી મોસમી ઘટકોની અસર છે. એટલે કે કોઈપણ વસ્તુ માંગ, કિંમત, વપરાશ વગેરેમાં મોસમ પ્રમાણે ફેરફાર થતા જોઈ શકાય છે અને તેનું અનુમાન કરી શકાય છે. આમ, આ પ્રકારના સામાયિક શ્રેણીના વલણની મદદથી વેપારી કે રોકાણકાર ટૂંકાગાળામાં નફો કમાવવા માટેની યોજના ઘડી શકે છે.

(3) ચક્રીય વધઘટ :

ચક્રીય વધઘટ એ નિયમિત રીતે થતી લાંબાગાળાની વધઘટ છે. તેનો સમયાગાળો એક વર્ષથી વધુ હોય છે. (મોસમી વધઘટની સરખામણીમાં તેનો સમયગાળો કે વધઘટ ચક્ર વધુ હોય છે.) આ પ્રકારની વધઘટો વેપાર ચક્રોને કારણે ઉદ્ભવતી હોય છે. દા.ત. શેર બજારમાં શેર-સ્ટૉકના ભાવમાં દર બે થી પાંચ વર્ષ કે તેથી વધુ વર્ષો બાદ તેની તે જ પરિસ્થિતિનું પુનરાવર્તન થાય છે. તેને ચક્રીય વધઘટ તરીકે ઓળખી શકાય. તેને વલણ નક્કી કરવાની ચલિત સરેરાશની રીતે શોધી શકાય છે.

(4) અનિયમિત વધઘટ :

ચક્રીય વધઘટની અસર દૂર કર્યા પછી અનિયમિત વધઘટ મેળવી શકાય છે. આ પ્રકારની વધઘટ આકસ્મિક ઘટના (જેવી કે દુકાળ, ભૂકંપ, હડતાળ, યુદ્ધ, પૂર વગેરે)ને કારણે ઉદ્ભવે છે. તે અનિયમિત પ્રકારની વધઘટ છે. કારણ કે આ પ્રકારની ઘટનાઓ કે બનાવો માટે સમયનો કોઈ ગાળો નિશ્ચિત હોતો નથી. તેથી તેનું અનુમાન કે ધારણા ન કરી શકાય આવી વિષમ પરિસ્થિતિની અસરને દૂર કરી અનુમાનને ચોક્કસ બનાવી શકાય. તેને આકસ્મિક વધઘટ તરીકે પણ ઓળખી શકાય છે.

આમ, સામાયિક શ્રેણીના અલગ-અલગ ઘટકોને આધારે દીર્ઘકાલીન વધઘટ, મોસમી વધઘટ, ચક્રીય વધઘટ અને અનિયમિત વધઘટને એકબીજાથી અલગ-અલગ કરી સામાયિક શ્રેણીનો વૈજ્ઞાનિક અભ્યાસ કરી વલણ નક્કી કરી શકાય છે.

7.7 સામાયિક શ્રેણીની વલણ નક્કી કરવાની આલેખની રીત :

સામાન્ય રીતે સામાયિક શ્રેણીની વલણ નક્કી કરવાની મુખ્ય ચાર રીતો છે. તે પૈકી (1) આલેખની રીત (2) ચલિત સરેરાશની રીત (3) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત (4) મોસમી વધઘટ શોધવાની રીત. આ પ્રકરણમાં આપણે આલેખની રીત અંગે ચર્ચા કરીશું. જે નીચે મુજબ સમજી શકાય છે.

આ રીત સમજવામાં ખૂબ જ સરળ છે. તેમાં આપેલ સામાયિક શ્રેણી ઉપરથી સમય દર્શાવતા ચલને 'x'

અક્ષ પર અને અન્ય માહિતી દર્શાવવાના ચલને 'y' અક્ષ પર લેવામાં આવે છે. ત્યારબાદ બિંદુઓ નોંધવામાં આવે છે અને નોંધાયેલા બિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી જે મળે છે તેને સામાયિક વક્ર કે સામાયિક આલેખ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. આ પ્રકારનો વક્ર વાંકો ચૂંકો કે આકસ્મિક વધઘટ ધરાવતો હોય છે. તેમાંથી સામાન્ય વલણ નક્કી કરવા માટે સામાયીક વક્રના મહત્તમ બિંદુઓની ખૂબ જ નજીકથી પસાર થતો અને શ્રેણીના મુખ્ય લક્ષણો ધરાવતો હાથ વડે એક સરળ વક્ર દોરવામાં આવે છે. આમ કરવાથી દોરેલ વક્ર શ્રેણીમાં રહેલ અનિયમિતતા દૂર કરે છે અને શ્રેણીમાં થતી નિયમિત અને લાંબાગાળાની વધઘટ વિશે માહિતી આપે છે.

7.8 આલેખની રીત નક્કી કરવાના ફાયદા-મર્યાદા :

ફાયદા : આલેખની રીતના મુખ્ય ફાયદાઓ નીચે મુજબ છે;

(1) આ રીત સમજવામાં સરળ છે.

(2) આ રીત દ્વારા ઝડપથી વલણ મેળવી શકાય છે.

(3) વલણ રૈખિક હોય કે ન હોય તો પણ આ રીત ઉપયોગી બને છે.

(4) આ રીત માટે ઊંડા ગાણિતીય જ્ઞાનની જરૂર હોતી નથી.

(5) અનુભવી આંકડાશાસ્ત્રી દ્વારા આ રીતે વલણ મેળવવામાં આવે તો ગાણિતિક પદ્ધતિ દ્વારા મેળવેલ વલણ જેવું જ ચોક્કસ વલણ મેળવી શકાય છે.

મર્યાદા : આલેખની રીતની મુખ્ય મર્યાદાઓ નીચે મુજબ છે.

(1) જુદી જુદી વ્યક્તિઓ વક્ર રેખા જુદી જુદી સ્થળેથી અને જુદા જુદા ઢાળથી દોરે છે. તેથી જુદા જુદા તારણો ઉદ્ભવે છે.

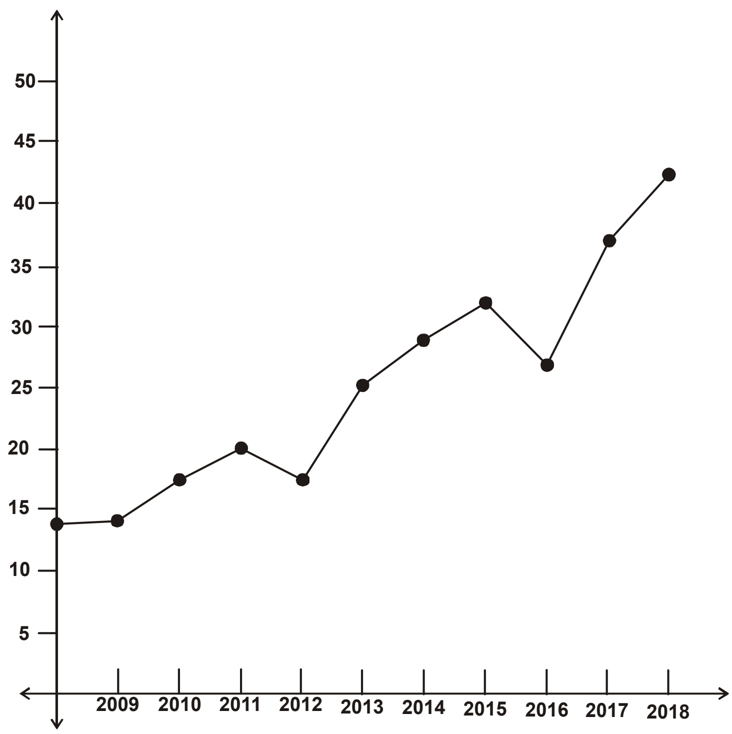
(2) આ રીત અવૈજ્ઞાનિક હોવાથી તેને આધારે યોગ્ય આગાહી કરી શકાતી નથી.

7.9 ઉદાહરણ :

નીચેની સામાયિક શ્રેણી માટે આલેખની રીતે વલણ શોધો.

વર્ષ	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
નફો (લાખ રૂ.માં)	14	17	20	17	25	29	32	27	37	42

જવાબ :



સમજૂતિ :

સૌપ્રથમ '' અક્ષ ઉપર યોગ્ય સ્કેલ લઈ વર્ષ લો અને '' અક્ષ ઉપર યોગ્ય સ્કેલ લઈ નફો લો. (નફા પૈકી સૌથી નાની રકમ 14 લાખ અને સૌથી મોટી રકમ 42 લાખ છે. જે ધ્યાનમાં લઈને સ્કેલ લો.) હવે વર્ષ અને નફાના બધા બિંદુઓ આલેખમાં દર્શાવ્યા મુજબ નોંધો. દા.ત. વર્ષ-2009 અને નફો 14 લાખ પ્રથમ બિંદુ નોંધો. તેવી જ રીતે બાકીના બિંદુઓ નોંધો.

હવે તમામ બિંદુઓ જોડો તેમ કરવાથી જે વક્ર મળશે તેને મૂળ માહિતીનો વક્ર કહેવાશે. હવે મૂળ માહિતીના વક્રની વચ્ચેથી હાથ વડે જે સરળ વક્ર (ત્રુટક રેખા દ્વારા) દોરવામાં આવેલો છે. તેને વલણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

7.10 સ્વાધ્યાય (જાતે કરો) :

(1) નીચેની સામાયિક શ્રેણી માટે આલેખની રીતે વલણ શોધો.

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
વેચાણ (હજાર રૂ.માં)	20	22	27	18	25	32	27	34	30	38	42

(2) નીચે આપેલી સામાયિક શ્રેણીની મદદથી આલેખની રીતે વલણ શોધો.

વર્ષ	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
નફો (લાખમાં)	113	116	119	116	124	128	131	126	136	143

(3) સામાયિક શ્રેણી એટલે શું ?

(4) સામાયિક શ્રેણીની જરૂરિયાતો સમજાવો.

(5) સમજાવો : સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ

(6) સામાયિક શ્રેણીના ઘટકો સવિસ્તાર સમજાવો.

(7) વલણ એટલે શું ?

(8) વલણોના કેટલા પ્રકારો છે ? કયા-કયા ?

(9) મોસમી વધઘટ કોને કહેવાય ?

(10) ચક્રિય વધઘટ સમજાવો.

(11) કઈ કઈ વધઘટને નિયમિત વધઘટ કહે છે ?

(12) અનિયમિત વધઘટ એટલે શું ?

(13) સામાયિક શ્રેણીની કુલ વધઘટ શોધવાનું સૂત્ર લખો.

(14) સામાયિક શ્રેણીની કુલ વધઘટ ચાર્ટ દ્વારા સમજાવો.

(15) સામાયિક શ્રેણીમાં સમયગાળો એટલે શું ?

(16) સામાયિક શ્રેણીની વલણ નક્કી કરવાની રીતો કેટલી છે ?

(17) સામાયિક શ્રેણીની વલણ નક્કી કરવાની આલેખની રીત સમજાવો.

(18) સામાયિક શ્રેણીની વલણ નક્કી કરવાની આલેખની રીતના ફાયદા-મર્યાદા જણાવો.

7.11 ખાલી જગ્યા અને જવાબો :

(1) સમયના અમુક ક્રમિક અંતરોએ એકત્ર કરેલ સંખ્યાત્મક માહિતી એટલે ....

(2) સામાયિક શ્રેણીના ઘટકોને મુખ્યત્વે .... પ્રકારે વહેંચી શકાય.

(3) સામાયિક ચલની સમયના લાંબાગાળા દરમ્યાન વધવાની, ઘટવાની કે સ્થિર રહેવાની લાક્ષણિકતાને .... કહેવાય.

(4) વલણના મુખ્ય .... રીતે વહેંચી શકાય.

(5) વલણને .... વધઘટ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

(6) એક વર્ષ કે તેથી ઓછા ગાળામાં નિયમિત રીતે પુનરાવર્તન પામતા ફેરફારને .... વધઘટ કહે છે.

(7) એક વર્ષથી વધુ સમયના અંતરે લગભગ નિયમિત રીતે પુનરાવર્તિત થતાં ફેરફારને .... વધઘટ કહે છે.

(8) મૂળ માહિતી – વલણ = ... વધઘટ

(9) વલણ નક્કી કરવાની રીતો પૈકી .... ની રીત એ ખૂબ સરળ રીત છે.

(10) સામાયિક શ્રેણીમાં જેમ જેમ સમયગાળો લાંબો તેમ તેમ તે .... વલણ આપે છે.

જવાબ :

(1) સામાયિક શ્રેણી (2) ચાર (3) વલણ (4) બે (5) દીર્ઘકાલીન (6) મોસમી (7) ચક્રિય (8) અલ્પકાલીન (9) આલેખ (10) વધુ સ્પષ્ટ

7.12 ચાવીરૂપ શબ્દો :

સામાયિક : સમય અનુસાર

સામાયિક શ્રેણી : નિશ્ચિત સમય અનુસાર મેળવાતી માહિતી

પૃથક્કરણ : વર્ગીકરણ

દીર્ઘકાલીન : લાંબોગાળો

અલ્પકાલીન : ટૂંકોગાળો

વલણ : લાંબાગાળાની વધઘટ

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) Maisuria M. H. and Patel D. M. (2012), Business Research Methods, Akshar Publication, Ahmedabad.

(2) Goon, Gupta and Das Gupta, 1987, Basic Statistics, The World Press Pvt. Ltd. Calcutta.

(3) A. L. Nagar and R. K. Das, 1989, Basic Statistics, Oxford University Press, Delhi.

એકમ 8 — સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ-૨

[Analysis of Time Series-2]

8.0 ઉદ્દેશ

8.1 પ્રસ્તાવના

8.2 ચલિત સરેરાશની રીત (એકી અને બેકી ચક્રિય ગાળા)

8.3 ચલિત સરેરાશની રીતની ધારણા

8.4 ચલિત સરેરાશની રીતના લાભા-લાભ

8.5 ઉદાહરણો

8.6 ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

8.7 ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતના ફાયદા અને મર્યાદા

8.8 ઉદાહરણો

8.9 મૌસમી વધઘટ શોધવાની રીત

8.10 ઉદાહરણો

8.11 મૌસમી સૂચકઆંકની શોધવાની રીત

8.12 ઉદાહરણો

8.13 સ્વાધ્યાય (તમારી પ્રગતિ ચકાસો)

8.14 ખાલી જગ્યા

8.15 ચાવીરૂપ શબ્દો

● સંદર્ભગ્રંથ

8.0 ઉદ્દેશ :

ચલિત સરેરાશની રીતનો ઉપયોગ કરી વલણ શોધવું. ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતનો ઉપયોગ કરી વલણ શોધવું, મૌસમી વધઘટની ગણતરી કરવી. મૌસમી સૂચકઆંકની ગણતરી કરવી.

8.1 પ્રસ્તાવના :

અગાઉના એકમમાં આપણે સામાયિક શ્રેણી કોને કહેવાય, તેનો અર્થ અને વ્યાખ્યાઓનો અભ્યાસ કર્યો. તેમજ તેનું પૃથક્કરણ કરી તેના વિવિધ ઘટકોનો પણ અભ્યાસ કર્યો અને આપેલી સામાયિક શ્રેણીનું આલેખમાં રૂપાંતર કરી તેનું વલણ કેવી રીતે મેળવવામાં આવે છે તે જોયું. હવે આ પ્રકરણમાં વલણ શોધવાની અન્ય રીતો જેવી કે ચલિત સરેરાશની રીત, ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત, મૌસમી વધઘટની ગણતરી અને મૌસમી સૂચકઆંકની ગણતરી કેવી રીતે થાય તે અંગેનો અભ્યાસ કરીશું.

8.2 ચલિત સરેરાશની રીત (Method of Moving Average) :

ચલિત સરેરાશની રીતને 'એકોત્તર સરેરાશની રીત' અથવા 'પરંપરિત સરેરાશની રીત' તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. આ રીત મુખ્ય બે ધારણાઓ પર આધારિત છે.

8.3 ચલિત સરેરાશની રીતની ધારણા :

(1) ચલિત સરેરાશનો ગાળો આવર્તન ચક્ર સાથે સુસંગત રહે છે.

(2) આપેલ સામાયિક શ્રેણી સુરેખ વલણ ધરાવતી હોય છે.

આ રીત સરેરાશના સિદ્ધાંત ઉપર આધારિત છે. ચલિત સરેરાશ એ સમાંતર મધ્યકનું જ એક સ્વરૂપ છે. સાદી સરાસરી (સરેરાશ કે મધ્યક)ને ચલની કિંમતોમાંથી મોટાભાગની અનિયમિતતા દૂર કરી એ સમધારણ કિંમત આપે છે. એટલે કે આ રીત એ સામાયિક શ્રેણીમાંના પ્રાપ્તાંકોમાંથી વધઘટો દૂર કરવા માટેની એક સરળ પદ્ધતિ છે.

સામાન્ય રીતે સામાયિક શ્રેણીમાં દર 3, 4, 5 કે 7 વર્ષે ચક્રિય વધઘટ થતી હોય છે. એવું ધારવામાં આવે તો આપેલી સામાયિક શ્રેણીના પ્રાપ્તાંકોની મદદથી 3 વર્ષે, 4 વર્ષે, 5 વર્ષ કે 7 વર્ષોની ચલિત સરેરાશ કે વલણ શોધવામાં આવે છે.

- **ચલિત સરેરાશની ગણતરી :**

ચલિત સરેરાશની ગણતરી વખતે બે પ્રકારના ચક્રિય ગાળા ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. (1) એકી ચક્રિયગાળા (3, 5 કે 7 વર્ષિય)ની ચલિત સરેરાશ (2) બેકી ચક્રિય ગાળા (ચાર વર્ષ)ની ચલિત સરેરાશ.

(1) એકી ચક્રિય ગાળાની ચલિત સરેરાશ :

એકી ચક્રિય સમયગાળો એટલે 3 વર્ષ, 5 વર્ષ કે 7 વર્ષનો સમયગાળો અને આ સમયગાળાને ધ્યાનમાં લઈને ચલિત સરેરાશ કે વલણ નીચે મુજબ શોધાય.

- **ત્રણ વર્ષિય ચલિત સરેરાશની ગણતરી :**

ત્રણ વર્ષની ચલિત સરેરાશ શોધવા પ્રથમ ત્રણ અવલોકનોનો સરવાળો કરો તેને બીજા વર્ષની સામે (મધ્યમાં) મુકો ત્યારબાદ મળેલ સરવાળાને ત્રણ વડે ભાગી સરેરાશ મેળવી તેને તેની સામેના ખાનામાં મૂકો ત્યારબાદ પ્રથમ અવલોકન છોડી તેની સામે ડેશ (–) લખો અને બીજા, ત્રીજા અને ચોથા અવલોકનોનો સરવાળો કરી તેને ત્રીજા વર્ષની સામે મૂકો, તેની સરેરાશ શોધો ત્યાર બાદ બીજુ અવલોકન છોડી ત્રીજા, ચોથા અને પાંચમા અવલોકનોનો સરવાળો કરી તેની સામે મૂકી તેની સરેરાશ શોધો. આમ દરેક વખતે ઉપરના એક એક અવલોકન છોડતાં જઈને નીચેના એક એક અવલોકનો ઉમેરતાં જાવ અને તેનો સરવાળો અને સરેરાશ મધ્યના વર્ષની સામે મૂકતા જાવ આ રીતે જે સરેરાશ મળશે તેને વલણ કે ચલિત સરેરાશ તરીકે ઓળખવામાં આવશે. ત્રણ વર્ષિય ચલિત સરેરાશની એક મર્યાદા એ છે કે પ્રથમ વર્ષ અને છેલ્લા વર્ષની ચલિત સરેરાશ (વલણ)ની કિંમતો મેળવી શકાતી નથી.

દા.ત. નીચે આપેલ સામાયિક શ્રેણીનું ત્રણ વર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ શોધો.

સમયગાળો	1	2	3	4	5
પ્રાપ્તાંકો (y_i)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

જવાબ :

સમયગાળો	y_i પ્રાપ્તાંકો	ત્રિવર્ષિય ચલિત સરવાળો	ત્રિ-વર્ષિય ચલિત સરેરાશ (વલણ) (T_i)	અલ્પકાલીન વધઘટ $= y_i - T$
1	y_1	–	–	–
2	y_2	$y_1 + y_2 + y_3$	$T_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$	$y_2 - T_1$
3	y_3	$y_2 + y_3 + y_4$	$T_2 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}$	$y_3 - T_2$
4	y_4	$y_3 + y_4 + y_5$	$T_3 = \frac{y_3 + y_4 + y_5}{3}$	$y_4 - T_3$
5	y_5	–	–	–

અહીં અલ્પકાલીન વધઘટો નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શોધવામાં આવે છે.

અલ્પકાલીન વધઘટ = મૂળ માહિતી (y_i) – વલણ (T_i)

- **પાંચ વર્ષિય ચલિત સરેરાશની ગણતરી :**

ઉપર દર્શાવ્યા પ્રમાણે ત્રણ વર્ષને બદલે પાંચ વર્ષના અવલોકનોનો સરવાળો લઈ તેનો મધ્યક શોધી તેને પાંચ વડે ભાગી મધ્યના વર્ષની સામે મૂકી પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરવાથી પંચવર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ શોધી શકાય છે. તેમજ તેની મદદથી અલ્પકાલીન વધઘટો પણ મેળવવામાં આવતી હોય છે. પરંતુ પાંચ વર્ષિય ચલિત સરેરાશની મુખ્ય મર્યાદા એ છે કે તેમાં પ્રથમ બે વર્ષ અને છેલ્લા બે વર્ષના વલણોની કિંમતો મેળવી શકાતી નથી.

- **સાત વર્ષિય ચલિત સરેરાશની ગણતરી :**

ઉપર દર્શાવ્યા પ્રમાણે ત્રણ કે પાંચ વર્ષને બદલે સાત વર્ષના અવલોકનોનો સરવાળો લઈ તેનો મધ્યક શોધી તેને સાત વડે ભાગી મધ્યના વર્ગની સામે મૂકી પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરવાથી સાત વર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ શોધી શકાય છે અને તેની મદદથી અલ્પકાલીન વધઘટો પણ શોધવામાં આવે છે. સાત વર્ષિય ચલિત સરેરાશની મુખ્ય મર્યાદા એ છે કે તેમાં પ્રથમ ત્રણ વર્ષ અને છેલ્લા ત્રણ વર્ષના વલણોની કિંમતો મેળવી શકાતી નથી.

(2) બેકી ચક્રીય ગાળાની ચલિત સરેરાશ :

સામાન્ય રીતે ચાર વર્ષિય ચલિત સરેરાશની બેકી ચક્રીય ગાળાની ચલિત સરેરાશ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

ચાર વર્ષિય ચલિત સરેરાશ શોધવા પ્રથમ ચાર અવલોકનોનો સરવાળો કરી તેને મધ્યમા એટલે કે બીજા અને ત્રીજા અવલોકનોની વચ્ચે મૂકો તેવી જ રીતે પ્રથમ અવલોકન છોડી બીજા, ત્રીજા, ચોથા અને પાંચમા અવલોકનોનો સરવાળો કરી તેને મધ્યમા એટલે કે ત્રીજા અને ચોથા અવલોકનોની વચ્ચે મૂકો. આમ ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ ઉપરથી એક પછી એક વઅલોકન છોડી નીચેથી એક પછી એક અવલોકન ઉમેરતા જઈ પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરો. પરંતુ અહીં મળતા ચલિત સરવાળા અલગ અલગ વર્ષોની સામે આવતા નથી. તેથી તેમને અલગ અલગ વર્ષોની સામે મુકવા માટે ચાર વર્ષિય સરવાળાનો બે-બે વર્ષિય સરવાળા કરી તે દરેકને આઠ વડે ભાગવાથી ચલિત સરેરાશ કે વલણ મેળવી શકાશે અને અલ્પકાલીન વધઘટો પણ મેળવી શકાય છે.

દા.ત. નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી ચાર વર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ શોધો.

વર્ષ	1	2	3	4	5	6
પ્રાપ્તાંકો y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

જવાબ :

સમયગાળો	y_i પ્રાપ્તાંકો	ચાર વર્ષિય ચલિત સરવાળો	ચાર વર્ષિય ચલિત સરવાળાનો બે	ચલિત સરેરાશ વલત વર્ષિય સરવાળો $(T_i) \div 8$
1	y_1	–	–	–
2	y_2	$S_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$		
3	y_3	$S_2 = y_2 + y_3 + y_4 + y_5$	$S_1 + S_2$	$T_1 = \frac{S_1 + S_2}{8}$
4	y_4	$S_3 = y_3 + y_4 + y_5$	$S_2 + S_3$	$T_2 = \frac{S_2 + S_3}{8}$
5	y_5	–	–	–
6	y_5	–	–	–

8.4 ચલિત સરેરાશની રીતના લાભા-લાભ :

- **લાભો :**

(1) આ રીતમાં મધ્યકના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ થતો હોવાથી ચલની કિંમતોમાં ઉદ્ભવતી મોટાભાગની અનિશ્ચિતતાઓ દૂર કરી શકાય છે.

(2) આ રીતે સમજવામાં સરળ છે અને અન્ય રીતો જેવી કે આલેખની રીત અને ન્યૂનતમ વર્ગની રીતોની સરખામણીમાં ગણતરીમાં સરળ છે.

(3) આ રીતમાં અમુક અવલોકનો પાછળથી ઉમેરવામાં આવે તો પણ ફરીથી ગણતરી કરવી પડતી નથી.

- **મર્યાદાઓ :**

(1) આ રીતમાં શરૂના અને છેલ્લા કેટલાંક વર્ષોનું વલણ મેળવી શકાતું નથી.

(2) ચલિત સરેરાશનો ગાળો પસંદ કરવામાં ભૂલ થાય તો તેનું વલણ અયોગ્ય ઠરે છે.

(3) જો આપેલી સામાયિક શ્રેણી રૈખિક વલણ ન ધરાવતી હોય તો મળેલું વલણ ભુલ ભરેલું સાબિત થાય છે.

8.5 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 :

નીચે આપેલ સામાયિક શ્રેણી માટે ત્રિવર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટો મેળવો. ઉપરાંત મૂળ શ્રેણી અને વલણને એક જ આલેખપત્ર ઉપર દર્શાવો.

વર્ષ	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
વેચાણ કરોડ રૂ.માં	6	9	11	8	12	13	11	15	19	16	20	22	19	25	23

જવાબ :

વર્ષ	વેચાણ y (કરોડ રૂ.માં)	ત્રણ વર્ષિય ચલિત સરવાળો	ચલિત સરેરાશ (વલણ) T	અલ્પકાલીન વધઘટ $= y - T$
2005	6	-	-	-
2006	9	26	8.67	0.33
2007	11	28	9.33	1.67
2008	8	31	10.33	-2.33
2009	12	33	11.00	1.00
2010	13	36	12.00	1.00
2011	11	39	13.00	-2.00
2012	15	45	15.00	0.00
2013	19	50	16.67	2.33
2014	16	55	18.33	-2.33
2015	20	58	19.33	0.67
2016	22	61	20.33	1.67
2017	19	66	22.00	-3.00
2018	25	67	22.33	2.67
2019	23	-	-	-

સમજૂતિ : (પરીક્ષામાં સમજૂતી લખવાની જરૂર નથી.)

ત્રણ વર્ષિય ચલિત સરવાળો :

પ્રથમ ત્રણ વર્ષ 2005, 2006, 2007 નું વેચાણનો સરવાળો કરી 2006 ના વર્ષની સામે લખો. એટલે કે 2005 ની સામે ડેશ (–) મુકો. જેમ કે 6 + 9 + 11 = 26 ને 2006 ની સામે લખાય. ત્યારબાદ 26 માંથી 6 બાદ કરો અને 2008 (વેચાણ રૂ.) 8 છે જે તેમાં ઉમેરો.

$\therefore$ 26 – 6 + 8 = 28 ને 2007 ની સામે લખાય. હવે 28 માંથી 2006ની સામે લખેલ 9 બાદ કરો અને 2009ની સામે લખેલ 12 ઉમેરો.

$\therefore$ 28 – 9 + 12 = 31 ને 2008ની સામે લખો. આમ ઉપરની રકમ બાદ કરી નીચેની રકમ ઉમેરતાં જાવ અને મધ્યના વર્ષની સામે લખતા જાવ. આમ પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરવાથી ત્રિવર્ષિય ચલિત સરવાળો શોધી શકાશે.

અથવા

2005	6	
2006	9	26
2007	11	સરવાળો

આ રીતે છેલ્લે સુધી ગણતરી કરો. (અહીં પ્રથમ અને છેલ્લા ખાનામાં સરવાળો આવશે નહીં)

2006	9	
2007	11	28
2008	8	સરવાળો

2007	11	
2008	8	31
2009	12	સરવાળો

ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ ઉપરનું વર્ષ અને વેચાણને દૂર કરી ત્યાર પછીના વર્ષ અને વેચાણને ધ્યાનમાં રાખી પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરો.

ચલિત સરેરાશ (વલણ) T :

ત્રણ વર્ષિય ચલિત સરવાળાની જે રકમ મળે છે તે દરેકને ત્રણ વડે ભાગવાથી ચલિત સરેરાશ કે વલણ (T) મળે છે. દા.ત. $26 \div 3 = 8.67$ .... તેવી જ રીતે અન્ય વધઘટ

અલ્પકાલીન વધઘટની ગણતરી :

અલ્પકાલીન વધઘટ = $y - \mathrm{T}$

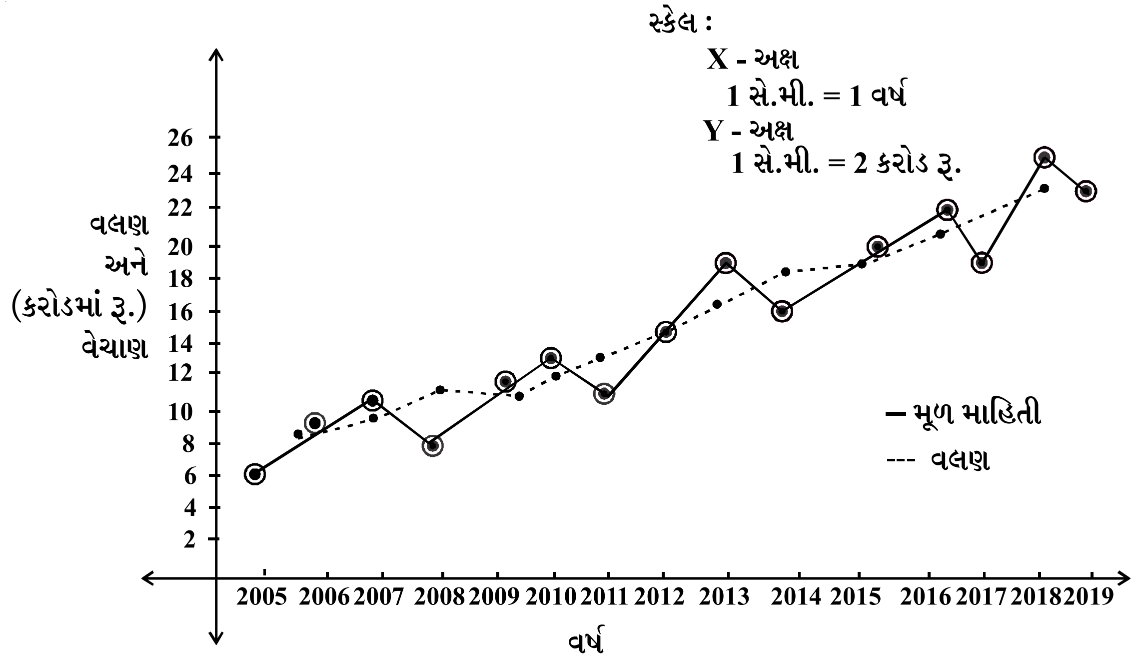
= મૂળ માહિતી – વલણ

મૂળ માહિતી એટલે દાખલામાં આપેલ ઉત્પાદન, વેચાણ .... વગેરેની રકમ.

વલણ એટલે ચલિત સરેરાશની રકમ

જેમ કે, અલ્પકાલીન વધઘટ = 9 – 8.67 = 0.33 તેવી જ રીતે બાકીની રકમ પણ શોધાય.

નોંધ : અહીં પ્રથમ અને છેલ્લા વર્ષનું વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટ મળશે નહીં.



ઉદાહરણ-2 :

નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી પાંચ વર્ષિય ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટો શોધો.

વર્ષ	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
નફો લાખ રૂ.માં	16	20	26	35	42	18	23	29	34
વર્ષ	2009 2018	2010 2019	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
નફો લાખ રૂ.માં	44 40	20 48	27	31	38	46	17	26	36

જવાબ :

વર્ષ	નફો (લાખ રૂ.માં)	પાંચ વર્ષિય ચલિત સરવાળો	ચલિત સરેરાશ (વલણ) T	અલ્પકાલીન વધઘટ $= y - T$
2000	16	-	-	-
2001	20	-	-	-
2002	26	139	27.80	-1.80
2003	35	141	28.20	6.80
2004	42	144	28.80	13.20
2005	18	147	29.40	-11.40
2006	23	146	29.20	-6.20
2007	29	148	29.60	-0.60
2008	34	150	30.00	4.00
2009	44	154	30.80	13.20
2010	20	156	31.20	-11.20
2011	27	160	32.00	-5.00
2012	31	162	32.40	-1.40
2013	38	159	31.80	6.20
2014	46	158	31.60	14.40
2015	17	163	32.60	-15.60
2016	26	165	33.00	-7.00
2017	36	167	33.40	2.60
2018	40	-	-	-
2019	48	-	-	-

સમજૂતિ : (પરીક્ષામાં લખવી જરૂરી નથી)

પંચવર્ષિય ચલિત સરવાળો :

2000	16	-		
2001	20	-		
2002	26	139	અથવા	16 + 20 + 26 + 35 + 42 = 139
2003	35	સરવાળો		
2004	42			

2001	20			139 − 2000 ના વર્ષની રકમ + 2005 ના વર્ષની રકમ
2002	26			
2003	35	141		139 − 16 + 18 = 141
2004	42	સરવાળો		
2005	18			

2002	26			
2003	35			
2004	42	144	અથવા	141 − 20 + 23 = 144
2005	18	સરવાળો		
2006	23			

ઉપર મુજબ પુનરાવર્તન કરતા રહો.

નોંધ : અહીં પ્રથમ બે વર્ષ અને છેલ્લા બે વર્ષનો ચલિત સરવાળો, ચલિત સરેરાશ (વલણ) અને અલ્પકાલીન વધઘટો મળશે નહીં તેથી ત્યાં ડેશ (–) કરો.

- **ચલિત સરેરાશ (વલણ) T :**

ચલિત સરવાળાની દરેક રકમને પાંચ વડે ભાગતા ચલિત સરેરાશ મળશે. દા.ત. 139 ÷ 5 = 27.80 તેવી જ રીતે બધી રકમને પાંચ વડે ભાગો.

- અલ્પકાલીન વધઘટ = મૂળ માહિતી – વલણ

$y - T$

દા.ત. 26 – 27.80 = –1.80 તેવી જ રીતે દરેક રકમ શોધો.

ઉદાહરણ-3 :

નીચે આપેલી મહિતી ઉપરથી યોગ્ય સમયગાળો લઈ ચલિત સરેરાશ અને અલ્પકાલીન વધઘટ શોધો.

વર્ષ	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
ઉત્પાદન (લાખ રૂ.માં)	19	23	29	38	39	21	45	32	37	25
	2006 2016	2007 2017	2008 2018	2009 2019	2010	2011	2012	2013	2014	2015
	23 48	30 25	34 24	47 28	22	20	29	39	26	29

જવાબ :

(નોંધ : આ પ્રકરણના દાખલામાં આપેલ સમજૂતિ પરીક્ષામાં લખવી જરૂરી નથી. ફક્ત વિદ્યાર્થીની સમજણ માટે જ છે.)

જ્યારે દાખલામાં યોગ્ય સમયગાળો એવું લખેલ હોય ત્યારે આપેલ સામાયિક શ્રેણીનું અવલોકન કરો અને મૂળ માહિતીની વધઘટો તપાસો. ઉપરોક્ત સામાયિક શ્રેણી તપાસતા જણાય છે કે પ્રથમ સાત વર્ષ સુધી ઉત્પાદન સતત વધતું રહે છે. ત્યાર પછી આઠમા વર્ષે ઘટી ફરીથી બીજા સાત વર્ષ પછી વધતું રહે છે. એટલે કે ઉત્પાદનના આંકડા તપાસતાં 2002 ના વર્ષમાં 45 લાખ ટન છે. ત્યારબાદ 2009 ના વર્ષમાં 47 લાખ ટન છે ત્યારબાદ 2016 ના વર્ષમાં 48 લાખ ટન છે. તેથી આ શ્રેણીમાં સાત વર્ષના ગાળાનું આવર્તચક્ર માલુમ પડે છે. તેથી વલણ શોધવા સાત વર્ષિય ચલિત સરેરાશનો ઉપયોગ કરીશું અને વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટ શોધીશું.

(**નોંધ :** આ રીત 3, 5, 7 કે 4 વર્ષે વધઘટ થતી હોય અને દાખલામાં યોગ્ય સમયગાળો લખેલ હોય તો તે મુજબના વર્ષની ચલિત સરેરાશ શોધવી.)

વર્ષ	ઉત્પાદન (લાખ ટનમાં)	સાત વર્ષિય ચલિત સરવાળો	ચલિત સરેરાશ (વલણ) T	અલ્પકાલીન વધઘટ $= y - T$
1996	19	-	-	-
1997	23	-	-	-
1998	29	-	-	-
1999	38	214	30.57	7.43
2000	39	227	32.43	6.57
2001	21	241	34.43	-13.43
2002	**45**	237	33.86	11.14
2003	32	222	31.71	0.29
2004	37	213	30.43	6.57
2005	25	226	32.29	-7.29
2006	23	228	32.57	-9.57
2007	30	218	31.14	-1.14
2008	34	201	28.71	5.29
2009	**47**	205	29.29	17.71
2010	22	221	31.57	-9.57
2011	20	217	31.00	-11.00
2012	29	212	30.29	-1.29
2013	39	213	30.43	8.57
2014	26	216	30.86	-4.86
2015	29	220	31.43	-2.43
2016	**48**	219	31.29	16.71
2017	25	-	-	-
2018	24	-	-	-
2019	28	-	-	-

સમજૂતી :

પ્રથમ સાત વર્ષનો સરવાળો કરી ચલિત સરવાળો સાત વડે ભાગી સરેરાશ મેળવી અલ્પકાલીન વધઘટો શોધો. ત્યારબાદ ઉપરની રકમ બાદ કરી (1996નું ઉત્પાદન-19) નીચે વર્ષની રકમ ઉમેરો (2003નું ઉત્પાદન 32) આ રીતે પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરો.

ઉદાહરણ-4 :

નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી ચાર વર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ શોધો.

વર્ષ	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
નફો (કરોડ રૂ.માં)	10	13	15	30	16	17	15	32	23	20
	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
	24	36	23	29	27	38	24	29	22	36

જવાબ :

વર્ષ	નફો કરોડમાં	સાત વર્ષિય ચલિત સરવાળો	ચાર વર્ષિય સરવાળાનો બે વર્ષિય સરવાળો	ચલિત સરેરાશ (વલણ) ÷ 8
2000	10	-	-	-
2001	13	-	-	-
2002	15	68	142	17.75
2003	30	74	152	19.00
2004	16	78	156	19.50
2005	17	78	158	19.75
2006	15	80	167	20.88
2007	32	87	177	22.13
2008	23	90	189	23.63
2009	20	99	202	25.25
2010	24	103	206	25.75
2011	36	103	215	26.88
2012	23	112	227	28.38
2013	29	115	232	29.00
2014	27	117	235	29.38
2015	38	118	226	28.25
2016	24	108	211	26.38
2017	19	103	204	25.50
2018	22	101	-	-
2019	36	-	-	-

સમજૂતિ :

		ચલિત સરવાળો	બે વર્ષિય સરવાળો	વલણ
2000	10		મળેલ દરેક રકમને ÷	8 કરો.
2001	13			
2002	15	68		
2003	30	(સરવાળો) મધ્યમાં મુકો		

			142	
2001	13			દર બે વર્ષનો સરવાળો ઉપરનો
2002	15	74		સરવાળો બાદ કરી નીચેની
2003	30	(સરવાળો		નીચેની સરવાળો ઉમેરતા જાઉ.
2004	16	મધ્યમાં મુકો)		
,,	,,			
,,	,,			

આ રીતે પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરો.

ઉદાહરણ-5 :

નીચે આપેલ માહિતી પરથી અલ્પકાલીન વધઘટ મેળવો.

વર્ષ	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ઉત્પાદન	10	13	15	30	16	17
વલણ	-	-	17.75	19	-	-

જવાબ :

અહીં પ્રથમ બે વર્ષ અને છેલ્લા બે વર્ષ 3 વલણ આપેલ નથી. તેની અલ્પકાલીન વધઘટ શોધી શકાય નહી. પરંતુ 2015 અને 2016ના વર્ષની અલ્પકાલીન વધઘટ નીચે મુજબ મળશે.

અલ્પકાલીન વધઘટન = ઉત્પાદન − વલણ

2015 ના વર્ષ માટે અલ્પકાલીન વધઘટ $= 15 - 17.75$

$= -2.75$

2016 ના વર્ષ માટે અલ્પકાલીન વધઘટ $= 30 - 19$

$= 11$

ઉદાહરણ-6 :

નીચે આપેલ માહિતી પરથી અલ્પકાલીન વધઘટ શોધી, તેને આલેખમાં દર્શાવો.

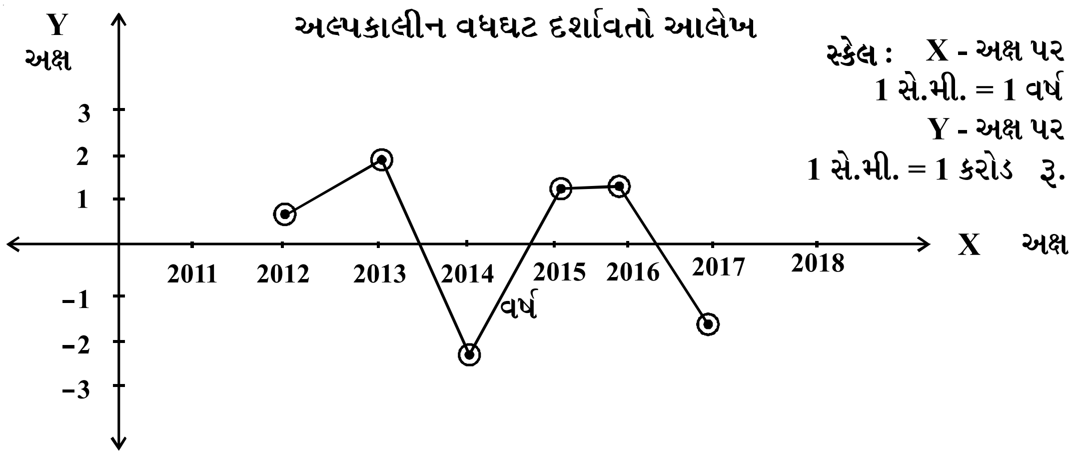
વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
વેચાણ કરોડ રૂ.માં	4	7	9	6	10	11	9	13
વલણ	−	6.67	7.33	8.33	9	10	11	−

જવાબ :

વર્ષ	y વેચાણ કરોડ રૂ.માં	T વલણ	અલ્પકાલીન વધઘટ $= y - T$
2011	4	-	-
2012	7	6.67	0.33
2013	9	7.33	1.67
2014	6	8.33	-2.33
2015	10	9	1.00
2016	11	10	1.00
2017	9	11	-2.00
2018	13	-	-

જવાબ :

અલ્પકાલીન વધઘટનો આલેખ દોરવા 'x' અક્ષ પર વર્ષ અને 'y' અક્ષ પર અલ્પકાલીન વધઘટની કિંમત લો. તેને અનુરૂપ બિંદુઓ નોંધો અને તે બિંદુઓ જોડો. અલ્પકાલીન વધઘટની કિંમત ધન અને ઋણ બંને મળતી હોવાથી X-અક્ષ મધ્યમાં દોરવો.



8.6 ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત (Method of Least Squares) :

વલણ નક્કી કરવાની આલેખની રીતમાં આપણે જોયું કે સામાયિક શ્રેણીનું સામાન્ય વલણ નક્કી કરવા માટે સામાયિક વક્રના મહત્તમ બિંદુઓની ખૂબ જ નજીકથી પસાર થતો અને શ્રેણીના મુખ્ય લક્ષણો દર્શાવતો હાથ વડે એક સરળ વક્ર દોરવામાં આવે છે. તેને વલણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. પરંતુ જુદી જુદી વ્યક્તિઓ દ્વારા આવા વક્રો દોરવામાં આવે તો તે વક્રમા અસમાનતા જોવા મળે છે. તેથી વલણના પૂર્વાનુમાન માટે એક સૂત્રતા જાળવી શકાતી નથી. તેથી સામાયિક શ્રેણીનું વલણ નક્કી કરીને સૌથી શ્રેષ્ઠ રેખા (વક્ર) મેળવવાની ચોક્કસ ગાણિતીક રીત તરીકે જેનો ઉપયોગ થાય છે. તે રીતને ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત તરીકે ઓળખી શકાય. આ રીતમાં મુખ્યત્વે બે ભાગમાં સમજી શકાય છે. (1) સુરેખાનું અન્વાયોજન (2) દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયોજન.

- **સુરેખાનું અન્વાયોજન :**

આપેલી માહિતી જે રૈખિક વલણ ધરાવતી હોય તો તે વલણને નીચેના સમીકરણ દ્વારા રજૂ કરી શકાય.

$y = a + bx$

જ્યાં a અને b અચળાંકો છે. અહીં ન્યૂનતમ રીતનો ઉપયોગ કરી અચળાંકો a અને b શોધવા માટે બે પ્રમાણ્ય સમીકરણોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જે નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

$\Sigma y = a\Sigma i + b\Sigma x$ (ઉપરના સમીકરણને બંને બાજુ Σ વડે ગુણતા)

$\Sigma y = an + b\Sigma x$ — સમી (1) (જ્યાં $\Sigma i = n$)

$\Sigma y = a\Sigma x + b\Sigma x^2$ — સમી (2) બંને બાજુ x વડે ગુણતા)

ઉપરોક્ત સમીકરણો ઉકેલવાથી a અને b ની કિંમતો મળે છે. તેને આધારે રૈખિક વલણનું અન્વાયોજન કરી શકાય છે. રૈખિક વલણ ઉપરથી x ની જુદી જુદી કિંમતોને અનુરૂપ y ની અનુમાનિત કે અંદાજીત કિંમત મેળવી શકાય છે. તેને સુરેખાનું અન્વાયોજન તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

- **દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયોજન :**

આપેલી માહિતી દ્વિઘાતી વલણ ધરાવતી હોય તો તે વલણને નીચેના સમીકરણ દ્વારા રજૂ કરી શકાય.

$$y = a + bx + cx^2$$

જ્યાં a, b અને c અચળાંકો છે. અહીં ન્યૂનતમ વર્ગોના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી અચળાંકો a, b અને c શોધાવા માટે ત્રણ પ્રમાણ્ય સમીકરણોનો ઉપયોગ થાય છે. જે નીચે મુજબ છે.

$\Sigma y = a\Sigma i + b\Sigma x + c\Sigma x^2$ (બંને બાજુ Σ લેતાં)

તે ઉપરથી

$\Sigma y = an + b\Sigma x + c\Sigma x^2$ — સમી. (1) (જ્યાં $\Sigma i = n$)

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3$ — સમી. (2) (બંને બાજુ x વડે ગુણતા)

$\Sigma x^2 y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4$ — સમી. (3) (બંને બાજુ x વડે ગુણતા)

ઉપરોક્ત સમીકરણો ઉકેલવાથી a, b અને c ની કિંમતો મળે છે. તેને આધારે દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયોજન કરી x ની જુદી જુદી કિંમતો ઉપરથી y ની અનુમાનિત કે અંદાજીત કિંમતો મેળવી શકાય છે. તેને દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયોજન તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

નોંધ : નિરીક્ષિત કિંમત અને અન્વાયોજીત કિંમતમાં ફેરફાર હોવાનું કારણ અન્વાયોજીત કિંમત સુરેખાના સમીકરણો દ્વારા પ્રાપ્ત થતી શ્રેષ્ઠ કિંમત છે.

8.7 ન્યૂનતમ વર્ગની રીતના ફાયદા અને મર્યાદા :

ન્યૂનતમ વર્ગની રીતના ફાયદા અને મર્યાદાઓ નીચે મુજબ સમજી શકાય છે.

- **ન્યૂનતમ વર્ગની રીતના ફાયદા :**

(1) વૈજ્ઞાનિક રીત : ન્યૂનતમ વર્ગની રીત એ વલણ શોધવાની વૈજ્ઞાનિક રીત છે. તેમાં ચોક્કસ અનુમાનો અને અંદાજો મેળવી શકાય છે.

(2) ભવિષ્યના પૂર્વાનુમાન માટે : ન્યૂનતમ વર્ગની રીતથી સામાયિક શ્રેણીમાં આપેલ દરેક વર્ષ માટે વલણ મેળવી શકાય છે અને તે અંગે ભવિષ્યનું પૂર્વાનુમાન મેળવી શકાય છે.

(3) વૃદ્ધિ દર જાણવા : ન્યૂનતમ વર્ગની રીતની મદદથી સામાયિક શ્રેણીનો વૃદ્ધિ દર અંગેની માહિતી મેળવી શકાય છે તે માટે સુરેખાનું અન્વાયોજન કરવામાં આવે છે.

- **ન્યૂનતમ વર્ગની રીતની મર્યાદાઓ :**

(1) વિધેયનું સ્વરૂપ નક્કી કરવુ મુશ્કેલ : ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતમાં બે રીતે વલણનું અન્વાયોજન કરવામાં આવે છે. પરંતુ તેમ કરતી વખતે વલણના વિધેયનું સ્વરૂપ સુરેખ રાખવું; દ્વિઘાતી પરવલય સ્વરૂપ રાખવું કે અન્ય સ્વરૂપ રાખવું તે નક્કી કરવામાં મુશ્કેલી ઉદ્‌ભવે છે.

(2) અઘરી ગણતરી : આ એક ગાણિતીક રીત છે તેથી અન્ય રીતની સરખામણીમાં તેની ગણતરી અઘરી બને છે.

(3) કંટાળાજનક : આ રીતમાં જો કોઈ વખત આપેલી સામાયિક શ્રેણીના અવલોકનોમાં ભુલ જણાય અને તેને દૂર કરવી પડે અથવા કોઈ નવા અવલોકનો ઉમેરવા પડે તેમ હોય તો બધી જ ગણતરી ફરીથી કરવી પડે છે તેથી તે કંટાળાજનક છે એમ કહેવાય.

8.8 ઉદાહરણો :

- **સુરેખાનું અન્વાયોજન (n = એકી સંખ્યા) :**

ઉદાહરણ-1 :

નીચેની માહિતી ઉપરથી સુરેખાનું અન્વાયોજન કરી 2021 વર્ષ માટે ઉત્પાદનનું પૂર્વાનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ઉત્પાદન (હજાર ટનમાં)	14	19	23	20	28	26	30

જવાબ :

સૌપ્રથમ વર્ષને t વડે અને ઉત્પાદનને y વડે દર્શાવો, $x = t - 2014$ લો, $x \times y = xy$ શોધો, $x \times x = x^2$ શોધો. હવે સુરેખાનું અન્વાયોજન કરવાનું હોવાથી સુરેખ સમીકરણ $y = a + bx$

અને પ્રમાણ્ય સમીકરણો

$\Sigma y = an + b\Sigma x$ — (1)

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$ — (2) ઉપરથી

$\Sigma y = y$ નો સરવાળો, $n = 7$ (એકી સંખ્યા) (વર્ષોની સંખ્યા = n)

$\Sigma x = x$ નો સરવાળો

$\Sigma xy = xy$ નો સરવાળો

$\Sigma x^2 = x^2$ નો સરવાળો

આ તમામ કિંમતો શોધવા નીચેનું કોષ્ટક બનાવો.

વર્ષ t	ઉત્પાદન હજાર ટનમાં y	$x = t - 2015$	xy	x^2
2012	14	-3	-42	9
2013	19	-2	-38	4
2014	23	-1	-23	1
2015	20	0	0	0
2016	28	1	28	1
2017	26	2	52	4
2018	30	3	90	9
કુલ	160	0	67	28

પ્રમાણ્ય સમીકરણોમાં ઉપરની કિંમતો મુકતાં,

$$160 = 7a + b(0) \quad — (1)$$

$$67 = a(0) + 28b — (2)$$

સમીકરણ (1) ઉપરથી

$$160 = 7a$$

$$\therefore\ a = \frac{160}{7} = 22.86$$

સમીકરણ (2) ઉપરથી

$$67 = 28b$$

$$\therefore\ b = {}^{67}\!/_{28} = 2.39$$

$a = 22.68$ અને $b = 2.39$ બંને કિંમતો સુરેખ વલણના સમીકરણમાં મુકતા.

$$y = a + bx$$

$y = 22.68 + 2.39\ x$ જે સુરેખાના અન્વાયોજન તરીકે ઓળખાય છે. હવે 2021ના વર્ષ માટે તેનું પૂર્વાનુમાન નીચે મુજબ કરી શકાય.

$x = (t - 2015)$ મૂકી સમીકરણ ફરીથી લખતા.

$y = 22.68 + 2.39\ (t - 2015)$

$t = 2021$ મુકતાં

$y = 22.68 + 2.39\ (2021 - 2015)$

$= 22.68 + 2.39(6)$

$= 22.68 + 14.36$

$= 37.22$ હજાર ટન

ઉદાહરણ-2 : (n = બેકી સંખ્યા)

નીચેની માહિતી ઉપરથી સુરેખાનું અન્વાયોજન કરો અને તે ઉપરથી 2020ના વર્ષ માટે નફાનું પુર્વાનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
નફો (લાખ રૂ.માં)	19	20	32	24	23	20	27	22

જવાબ :

વર્ષ t	નફો લાખ રૂ.માં y	$x = 2\ (t - 2014.5)$	xy	x^2
2011	19	-7	-133	49
2012	20	-5	-100	25
2013	32	-3	-96	9
2014	24	-1	-24	1
2015	23	1	23	1
2016	20	3	60	9
2017	27	5	135	25
2018	22	7	154	49
કુલ	187	0	19	168

સુરેખાનું સમીકરણ = $y = a + bx$

અને પ્રમાણ્ય સમીકરણો;

$$\Sigma y = an + b\Sigma x \text{ — } (1)$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \text{ — } (2)$$

ઉપરના કોષ્ટક મુજબ $\Sigma y = 187$, $\Sigma x = 0$, $\Sigma xy = 19$, $\Sigma x^2 = 168$ અને $n = 8$ ની કિંમતો પ્રમાણ્ય સમીકરણોમાં મૂકતાં,

$$187 = 8a + b(0) \text{ — } (1)$$

$$19 = a(0) + 168b \text{ — } (2)$$

સમીકરણ (1) ઉપરથી

$$187 = 8a$$

$$\therefore \quad a = 187/8 = 23.36$$

સમીકરણ (2) ઉપરથી

$$19 = 168b$$

$$\therefore \quad b = 19/168 = 0.11$$

$a = 23.38$ અને $b = 0.11$ સુરેખાના સમીકરણમાં મુકતા $y = 23.38 + 0.11\ (x)$

$x = 2(t - 2014.5)$ મુકાય.

$$y = 23.38 + 0.11\ \{2(t - 2014.5)\}$$

જે સુરેખાનું અન્વાયોજન છે.

2020 માટે નફાનું પૂર્વાનુમાન કરવા t = 2020 મુકતા

$$\begin{aligned} y &= 23.38 + 0.11\ \{2(2020 - 2014.5)\} \\ &= 23.38 + 0.11\ \{2 \times 5.5\} \\ &= 23.38 + 0.11\ \{11\} \\ &= 23.38 + 1.21 \\ &= 24.59 \text{ લાખ રૂ.} \end{aligned}$$

ઉદાહરણ-3 :

નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સુરેખાનું અન્વાયોજન કરો.

વર્ષ	2011	2013	2015	2017	2019
ઉત્પાદન (લાખ રૂ.માં)	30	45	54	70	85

જવાબ :

અહીં આપેલ વર્ષ વચ્ચે દર બે વર્ષનો ગાળો આપેલ છે.

$\therefore\ x = \left(\dfrac{t - 2015}{2}\right)$ લઈશું.

તેથી ગણતરી સરળ બનશે.

વર્ષ t	ઉત્પાદન (ટન રૂ.માં)	$x = \frac{t-2015}{2}$	xy	x^2
2011	30	-2	-60	4
2013	45	-1	-40	1
2015	54	0	0	0
2017	70	1	70	1
2019	85	2	170	4
કુલ	284	0	135	10

સુરેખાના અન્વાયોજનનું સમીકરણ $y = a + bx$

પ્રમાણ્ય સમીકરણો,

$$\Sigma y = an + b\Sigma x \text{ — (1)}$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \text{ — (2)}$$ ઉપરથી

અહીં, $\Sigma y = 284$, $\Sigma x = 0$, $\Sigma xy = 135$, $\Sigma x^2 = 10$ અને $n = 5$ લઈ પ્રમાણ્ય સમીકરણો મુકતાં

$$284 = 5a + b(0) \text{ — (1)}$$

$$135 = a(0) + 10b \text{ — (2)}$$

સમીકણ (1) ઉપરથી

$$284 = 5a$$

$$\therefore\ a = \frac{284}{5} = 56.8$$

સમીકરણ (2) ઉપરથી

$$135 = 10b$$

$$\therefore\ b = {}^{135}\!/_{10} = 13.5$$

a અને b ની કિંમતો સુરેખાના સમીકરણમાં મુકતા

$$y = 56.8 + 13.5x$$

$$x = \left(\frac{t-2015}{2}\right)$$ મૂકતા

$$y = 35.5 + 13.5\left(\frac{t-2015}{2}\right)$$

જેને સુરેખાનું અન્વાયોજન તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ-4 :

નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સુરેખાનું અન્વાયોજન કરો અને તે ઉપરથી વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટો શોધો.

વર્ષ	2008	2010	2012	2014	2016	2018
નફો (કરોડ રૂ.માં)	2	3	5	6	10	14

જવાબ :

વર્ષ t	નફો (કરોડ રૂ.માં) y	$x = t - 2013$	xy	x^2
2008	2	-5	-10	25
2010	3	-3	-9	9
2012	5	-1	-5	1
2014	6	1	6	1
2016	10	3	30	9
2018	14	5	70	25
કુલ	40	0	82	70

અહીં $\Sigma y = 40$, $\Sigma x = 0$, $\Sigma xy = 82$, $\Sigma x^2 = 70$ અને $n = 6$ મળે છે. જે પ્રમાણ્ય સમીકરણમાં મુકો.

સુરેખાનું વલણ $y = a + bx$

પ્રમાણ્ય સમીકરણો,

$$\Sigma y = an + b\Sigma x \text{ — } (1)$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \text{ — } (2)$$ ઉપરથી

કોષ્ટક મુજબ મળેલ કિંમતો સમીકરણમાં મુકતા

$$40 = 6a + b(0) \text{ — } (1)$$

$$82 = a(0) + 70b \text{ — } (2)$$

સમીકરણ (1) ઉપરથી

$$40 = 6a$$

$$\therefore \quad a = 40/6 = 6.67$$

સમીકરણ (2) ઉપરથી

$$82 = 70b$$

$$\therefore \quad b = \frac{82}{70} = 1.17$$

સુરેખાનું અન્વાયોજન $\quad y = 6.67 + 1.17x$

$$\therefore \quad y = 6.67 + 1.17(t - 2013)$$

હવે, t = 2008, 2009, ..., 2018 મુકી વલણ T શોધી તેના ઉપરથી અલ્પકાલીન વધઘટ નીચે મુજબ મળશે.

વર્ષ t	નફો કરોડ રૂ.માં y	વલણ (T) $= 6.67 + 1.17\ (t - 2013)$	અલ્પકાલીન વધઘટ $y - T$
2008	2	6.67 + 1.17 (2008 – 2013) = 0.82	1.18
2010	3	= 3.16	–0.16
2012	5	= 5.5	–0.50
2014	6	= 7.84	–1.84
2016	10	10.18	–0.18
2018	14	12.52	1.48

ગણતરી નીચે મુજબ કરીશું.

2008 માટે વલણ $T = 6.67 + 1.17\ (2008 - 2013)$
$= 6.67 + 1.17(-5)$
$= 0.82$

2010 માટે વલણ $T = 6.67 + 1.17\ (2010 - 2013)$
$= 6.67 + 1.17\ (-3)$
$= 3.16$

2012 માટે વલણ $T = 6.67 + 1.17\ (2012 - 2013)$
$= 6.67 + 1.17\ (-1)$
$= 5.50$

2014 માટે વલણ $T = 6.67 + 1.17\ (2014 - 2013)$
$= 6.67 + 1.17(1)$
$= 7.84$

2016 માટે વલણ $T = 6.67 + 1.17\ (2016 - 2013)$
$= 6.67 + 1.17\ (3)$
$= 10.18$

2018 માટે વલણ $T = 6.67 + 1.17\ (2018 - 2013)$
$= 6.67 + 1.17\ (5)$
$= 12.52$

અલ્પકાલીન વધઘટની ગણતરી

અલ્પકાલીન વધઘટ $= y - T$

2008 માટે અલ્પકાલીન વધઘટ $= 2 - 0.82$
$= 1.18$

2010 માટે અલ્પકાલીન વધઘટ $= 3 - 3.16$
$= -0.16$

તેવી જ રીતે

2012, 2014, 2016, 2018 નું અલ્પકાલીન વધઘટ શોધાશે.

- **દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયોજન**

ઉદાહરણ-5 : (n = એકી સંખ્યા)

નીચે આપેલ સામાયિક શ્રેણી માટે દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયોજન કરો અને તે ઉપરથી 2021ના વર્ષનું અંદાજિત ઉત્પાદન મેળવો.

વર્ષ	2015	2016	2017	2018	2019
ઉત્પાદન (હજાર ટનમાં)	3	5	6	7	9

જવાબ :

વર્ષ = t અને ઉત્પાદન = y ધારો અને નીચે મુજબ કોષ્ટક તૈયાર કરો ($x = t - 2017$) ધારો.

વર્ષ t	ઉત્પાદન (હજાર ટનમાં) y	x	xy	x^2	x^2y	x^3	x^4
2015	3	–2	– 6	4	12	–8	16
2016	5	–1	–5	1	5	–1	1
2017	6	0	0	0	0	0	0
2018	7	1	7	1	7	1	1
2019	9	2	18	4	36	8	16
કુલ	30	0	14	10	60	0	34

અહીં $\Sigma y = 30$, $\Sigma x = 0$, $\Sigma xy = 14$, $\Sigma x^2 = 10$, $\Sigma x^2y = 60$, $\Sigma x^3 = 0$, $\Sigma x^4 = 34$ અને $n = 5$

દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયેજન :

$$y = a + bx + cx^2$$

પ્રમાણ્ય સમીકરણો;

$$\Sigma y = an + b\Sigma x + c\Sigma x^2 \text{ — (1)}$$
$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3 \text{ — (2)}$$
$$\Sigma x^2y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4 \text{ — (3)}$$

કોષ્ટકમાં મળેલ કિંમતો સમીકરણોમાં મુકતા,

$$30 = 5a + b(0) + 10c \text{ — (1)}$$
$$14 = a(0) + 10b + c(0) \text{ — (2)}$$
$$60 = 10a + b(0) + 34c \text{ — (3)}$$

સમીકરણ (2) ઉપરથી

$$14 = 10b$$

$$\therefore \quad b = {}^{14}\!/_{10} = 1.4$$

સમીકરણ (1) અને (3) ઉપરથી

$$30 = 5a + 10c \text{ — (1)}$$
$$60 = 10a + 34c \text{ — (2)}$$

સમીકરણ (1)ને 2 વડે ગુણી તેમાંથી સમીકરણ (2) બાદ કરતાં

$$60 = 10a + 20c \quad — (1)$$
$$60 = 10a + 34c \quad — (2)$$
$$- \quad - \quad -$$
$$0 = -14c$$

$$\therefore \; c = -\frac{0}{14} = 6$$

c ની કિંમત સમીકરણ (1) મા મુકતાં

$$30 = 5a + 10\ 10(0) \quad — (1)$$
$$30 = 5a$$
$$\therefore \quad a = \frac{30}{5} = 6$$

a, b અને c ની કિંમતો દ્વિઘાત પરવલણના સમીકરણમાં મુકતા

$$y = a + bx + cx^2$$
$$y = 6 + 1.4x + (0)\, x^2$$
$$y = 6 + 1.4\,(t - 2017)$$

જે દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયેજન કહેવાય.

હવે, 2021 ના વર્ષનું અંદાજિત ઉત્પાદન શોધવા $t = 2021$ લેતા

$$y = 6 + 1.4\,(2021 - 2017)$$
$$= 6 + 1.4\,(4)$$
$$= 6 + 5.6$$
$$= 11.6 \text{ હજાર ટન}$$

ઉદાહરણ-6 : (n = બેકી સંખ્યા)

નીચે આપેલ માહિતી પરથી દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયોજન કરો અને તે ઉપરથી 2022 ના વર્ષનું પૂર્વાનુમાન કરો.

વર્ષ	2013	2014	2015	2016	2017	2018
નફો (રૂ. કરોડમાં)	10	11	12	14	15	16

જવાબ :

વર્ષ = t અને નફો (રૂ. કરોડમાં) = y તથા $x = 2(t - 2015.5)$ ધારી નીચે મુજબ કોષ્ટકની રચના કરો. (2015.5 એ 2015 અને 2016ના વર્ષની સરેરાશ છે. કારણ અહીં n = બેકી સંખ્યા આપેલી છે.)

વર્ષ t	નફો (રૂ. કરોડમાં) y	x	xy	x^2	x^2y	x^3	x^4
2013	10	–5	–50	25	250	–125	625
2014	11	–3	–33	9	99	–27	81
2015	12	–1	–12	1	12	–1	1
2016	14	1	42	1	14	1	1
2017	15	3	75	9	135	27	81
2018	16	5	80	25	400	125	625
કુલ	78	0	102	70	910	0	1414

અહીં $\Sigma y = 78, \Sigma x = 0, \Sigma xy = 102, \Sigma x^2 = 70, \Sigma x^2 y = 910, \Sigma x^3 = 0, \Sigma x^4 = 1414$ અને $n = 6$

દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયેજન :

$$y = a + bx + cx^2$$

પ્રમાણ્ય સમીકરણો

$$\Sigma y = an + b\Sigma x + c\Sigma x^2 \quad — \quad (1)$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3 \quad — \quad (2)$$

$$\Sigma x^2 y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4 \quad — \quad (3)$$

કોષ્ટકમાં મળેલ કિંમતો સમીકરણોમાં મુકતા,

$$78 = 6a + b(0) + 70c \quad — \quad (1)$$

$$102 = a(0) + 70b + c(0) \quad — \quad (2)$$

$$910 = 70a + b(0) + 1414c \quad — \quad (3)$$

સમીકરણ (2) ઉપરથી

$$102 = 70b$$

$$\therefore\ b = 102/70 = 1.46$$

સમીકરણ (1) અને સમીકરણ (3) ઉપરથી

$$78 = 6a + 70c \quad — (1)$$

$$910 = 70a + 1414c \quad — (3)$$

સમીકરણ (1) ને 70 વડે અને સમીકરણ (2) ને 6 વડે ગુણતા

$$5460 = 420a + 4900c \quad — (1)$$

$$5460 = 420a + 8484c \quad — (3)$$

$$- \quad - \quad -$$

$$0 = -3584c$$

$$\therefore\ c = -\frac{0}{3584} = 0$$

c ની કિંમત સમીકરણ (1) મા મુકતાં

$$78 = 6a + 70(0)$$

$$78 = 6a$$

$$\therefore\ a = 78/6 = 13$$

a, b અને c ની કિંમતો દ્વિઘાત પરવલણના સમીકરણમાં મુકતા

$$y = a + bx + cx^2$$

$$y = 13 + 1.46x + (0)\,x^2$$

$$y = 13 + 1.46\,(t - 2015.5)$$

જે દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયોજન છે.

2022 ના વર્ષનું પૂર્વાનુમાન શોધવા t – 2022 મુકતા

y = 13 + 1.46 {2022 – 2015.5}

= 13 + 1.46 (6.5)

= 22.49 કરોડ રૂ. નફો

નોંધ : જ્યારે 'y' ની કિંમત ત્રણ કે તેથી વધુ આંકડામાં આપેલી હોય (મોટી હોય) ત્યારે દાખલો નીચે મુજબ ગણવાથી ગણતરી સહેલી બને છે.

ઉદાહરણ-7 :

નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયોજન કરો.

વર્ષ	2010	2012	2014	2016	2018
વેચાણ (લાખ રૂ.માં)	250	310	330	390	320

જવાબ :

આપેલા ઉદાહરણમાં વર્ષને t અને વેચાણને S વડે દર્શાવો. અહીં $x = \left\{\frac{t-2014}{2}\right\}$ અને $y = \{S - 320\}$ લેવાથી ગણતરી સહેલી થશે.

વર્ષ t	વેચાણ S (લાખ રૂ.માં)	x	y	xy	x^2	x^2y	x^3	x^4
2010	250	–2	–70	140	4	–280	–8	16
2012	310	–1	–10	10	1	–10	–1	1
2014	330	0	10	10	0	0	0	0
2016	390	1	70	70	1	70	1	1
2018	320	2	0	0	4	0	8	16
કુલ	–	0	0	220	10	–220	0	34

અહીં $\Sigma x = 0$, $\Sigma y = 0$, $\Sigma xy = 220$, $\Sigma x^2 = 10$, $\Sigma x^2y = 220$, $\Sigma x^3 = 0$, $\Sigma x^4 = 34$ અને $n = 5$

દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયોજન :

$$y = a + bx + cx^2$$

પ્રમાણ્ય સમીકરણો

$$\Sigma y = an + b\Sigma x + c\Sigma x^2 \quad \text{— (1)}$$
$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3 \quad \text{— (2)}$$
$$\Sigma x^2y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4 \quad \text{— (3)}$$

કોષ્ટકમાં મળેલ કિંમતો સમીકરણોમાં મુકતા,

$$0 = 5a + b(0) + 10c \quad \text{— (1)}$$
$$220 = a(0) + 10b + c(0) \quad \text{— (2)}$$
$$-220 = 10a + b(0) + 34c \quad \text{— (3)}$$

સમીકરણ (2) ઉપરથી

$$220 = 10b$$

$$\therefore \quad b = \frac{220}{10} = 22$$

સમીકરણ (1) અને સમીકરણ (3) ઉપરથી

$$0 = 5a + 10c \quad \text{— (1)}$$

$$-220 = 10a + 34c \quad \text{— (3)}$$

સમીકરણ (1) ને 2 વડે અને ગુણી (3)માંથી બાદ કરતાં

$$0 = 10a + 20c \quad \text{— (1)}$$

$$-220 = 10a + 34c \quad \text{— (3)}$$

$$- \qquad - \quad -$$

$$220 = -14c$$

$$\therefore \; c = -\frac{220}{14}$$

$$= -15.71$$

c ની કિંમત સમીકરણ (1) મા મુકતાં

$$0 = 5a + 10(-15.71)$$

$$0 = 5a - 157.1$$

$$5a = 157.1$$

$$\therefore \; a = 157.1/5 = 31.42$$

a, b અને c ની કિંમતો દ્વિઘાત પરવલયના સમીકરણમાં મુકતા

$$y = 31.42 + 22x - 15.71x^2$$

હવે, $y = S - 320$ અને $x = \left\{\frac{t-2014}{2}\right\}$ મુકતા

$$S - 320 = 31.42 + 22\left\{\frac{t-2014}{2}\right\} - 15.71\left\{\frac{t-2014}{2}\right\}^2$$

દ્વિઘાત પરવાલયનું અન્વાયોજન

$$S = 351.42 + 22\left\{\frac{t-2014}{2}\right\} - 15.71\left\{\frac{t-2014}{2}\right\}^2$$

8.9 મૌસમી વધઘટ શોધવાની રીત :

મૌસમી વધઘટ અઠવાડિયે, મહિને કે ત્રણ-ચાર મહિને થતી જોવા મળે છે. જે નીચેની રીતે શોધી શકાય.

પગલું-1 : આપેલી માહિતીને જુદા જુદા વર્ષો માટે ઋતુ પ્રમાણે કે ચક્ર પ્રમાણે ઊભા ખાનામાં એક પછી એક લખો.

પગલું-2 : ઋતુ કે ચક્ર જેટલો સમયગાળો લઈ આપેલ માહિતીનો ચલિત સરવાળો શોધી તેની ચલિત સરેરાશ (વલણ) શોધો.

પગલું-3 : મૂળ માહિતીમાંથી વલણ બાદ કરી અલ્પકાલીન વધઘટ મેળવો.

પગલું-4 : મેળવેલી બધી જ ઋતુઓની પૈકી દરેક ઋતુની અલ્પકાલીન વધઘટોનો સરવાળો કરી તેની સરેરાશ મેળવી તેમાં સુધારો (જ્યાં સુધારો = ઓછાના ચિહ્ન સાથેની સરેરાશની સરેરાશ) ઉમેરતા જે કિંમત મળે છે તેને મૌસમી વધઘટ કહે છે.

નોંધ : અનિયમિત વધઘટ શોધવી હોય તો તે નીચેના સૂત્રની મદદથી શોધી શકાશે.

અનિયમિત વધઘટ = અલ્પકાલીન વધઘટ – મૌસમી વધઘટ

8.10 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 :

નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી ચલિત સરેરાશની રીતે મૌસમી વધઘટો શોધો.

વર્ષ	ભાવ શિયાળો	ઉનાળો	ચોમાસુ
2015	110	125	160
2016	120	150	165
2017	140	145	170
2018	145	130	175

જવાબ :

અહીં ત્રણ ઋતુઓ આપેલી છે. તેથી ત્રણ વર્ષની ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટ શોધીશું. (ધારો કે શિયાળો = Q_1, ઉનાળો = Q_2 અને ચોમાસુ = Q_3)

વર્ષ ઋતુ		ભાવ y	ત્રણ વર્ષિય ચલિત સરવાળો	વલણ (T) ÷ 3 = y – T	અલ્પકાલીન વધઘટ (S)	મૌસમી વધઘટ
2015 –	Q_1	110	-	-	-	-
	Q_2	125	395	131.67	–6.67	–6.76
	Q_3	160	405	135.00	25.00	18.65
2016 –	Q_1	120	430	143.33	–25.33	–11.90
	Q_2	150	435	145.00	5.00	–6.76
	Q_3	165	455	151.67	13.33	18.65
2017 –	Q_1	140	450	150.00	–10.00	–11.90
	Q_2	145	455	151.67	–6.67	–6.76
	Q_3	170	460	153.33	16.67	18.65
2018 –	Q_1	145	445	148.33	–3.33	–11.90
	Q_2	130	450	15.00	–20.00	–6.76
	Q_3	175	-	-	-	-

અલ્પકાલીન વધઘટોની કિંમતો નીચે કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા મુજબ લખો અને મૌસમી વધઘટની ગણતરી કરો.

વર્ષ	ભાવ		
	શિયાળો-Q_1	ઉનાળો-Q_2	ચોમાસુ-Q_3
2015	-	6.67	25.00
2016	–23.33	5.00	13.33
2017	–10.00	–6.67	16.67
2018	–3.33	–20.00	–
સરવાળો	–36.66	–28.34	55.00
સરેરાશ	–12.22	–7.08	18.33
સુધારો	+0.32	+0.32	+0.32
મૌસમી વધઘટ	–11.90	–6.67	18.65

સુધારો = વિરુદ્ધ ચિહ્ન સાથે સરેરાશની સંખ્યા

$$= -\left\{\frac{-12.22 - 7.08 + 18.33}{3}\right\}$$

$$= -\left\{\frac{-0.97}{3}\right\}$$

= 0.32

મૌસમી વધઘટ = સરેરાશ + સુધારો

Q_1 મૌસમી વધઘટ = –12.22 + (0.32) = –11.90

Q_2 મૌસમી વધઘટ = –7.08 + (0.32) = – 6.76

Q_3 મૌસમી વધઘટ = 18.33 + (0.32) = 18.65

જે મૌસમી વધઘટના ખાનામાં લખો.

ઉદાહરણ-2 :

નીચે આપેલી ઉપરથી ચલિત સરેરાશની રીતે મૌસમી વધઘટો શોધો. તે ઉપરથી અનિયમિત વધઘટ પણ મેળવો.

વર્ષ/	ભાવ			
ઋતુ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2015	4	5	7	9
2016	3	4	6	8
2017	7	6	8	9
2018	6	5	7	8

જવાબ :

અહીં ચાર ઋતુઓ આપેલી છે. તેથી ચાર વર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટ શોધીશું.

વર્ષ ઋતુ	ભાવ y	ચાર વર્ષિય ચલિત સરવાળો	ચાર વર્ષનો બે વર્ષિય સરવાળો	વલણ (T) ÷ 8	અલ્પકાલીન વધઘટ $S = y - T$	મૌસમી વધઘટ (C)	અનિયમિત વધઘટ $I = S - C$
2015 – Q_1	4						
		-					
Q_2	5						
		25					
Q_3	7		49	6.13	0.88	0.55	0.33
		24					
Q_4	9		47	5.88	3.13	2.14	0.99
		23					
2016 – Q_1	3		45	5.63	–2.63	–1.20	–1.43
		22					
Q_2	4		43	5.38	–1.38	–1.49	0.11
		21					
Q_3	6		46	5.75	0.25	0.55	–0.30
		25					
Q_4	8		52	6.50	1.50	2.14	–0.64
		27					
2017 – Q_1	7		56	7.00	0.00	–1.20	1.20
		29					
Q_2	6		59	7.38	–1.38	–1.49	0.11
		30					
Q_3	8		59	7.38	0.63	0.55	0.07
		29					
Q_4	9		57	7.13	1.88	2.14	–0.26
		28					
2018 – Q_1	6		55	6.88	–0.88	–1.20	0.32
		27					
Q_2	5		53	6.63	–1.63	–1.49	–0.14
		26					
Q_3	7		-	-	-	-	-
		-					
Q_4	8	-	-	-	-	-	-

હવે અલ્પકાલીન વધઘટોની કિંમતો નીચે દર્શાવ્યા મુજબ કોષ્ટકમાં લખો અને મૌસમી વધઘટની ગણતરી કરો.

ઋતુ ભાવ

વર્ષ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2015	–	–	0.88	3.13
2016	–2.63	–1.38	0.25	1.50
2017	0.00	–1.38	0.63	1.88
2018	–0.88	–1.63	-	-
સરવાળો	–3.51	–4.39	1.76	6.51
સરેરાશ	–1.17	–1.46	0.58	2.17
સુધારો	–0.03	–0.03	–0.03	–0.03
મૌસમી વધઘટ	–1.20	–1.49	0.55	2.14

સુધારો = ઋણ ચિહ્ન સાથે સરેરાશની સરેરાશ

$$= -\left\{\frac{-1.17-1.46+0.58+2.17}{4}\right\}$$

$$= -\left(\frac{0.13}{4}\right)$$

$$= -0.03$$

મોસમી વધઘટ = સરેરાશ + સુધારો

Q_1 મૌસમી વધઘટ = –1.17 – 0.03 = –1.20

Q_2 મૌસમી વધઘટ = –1.46 – 0.03 = –1.49

Q_3 મૌસમી વધઘટ = 0.58 – 0.0.3 = 0.55

Q_4 મૌસમી વધઘટ = 2.17 – 0.03 = 2.14

અનિયમિત વધઘટ = અલ્પ. વધઘટ – મોસમી વધઘટ

$$I = S - C$$

દા.ત. Q_3 ની I = 0.88 – 0.55 = 0.33

આમ સૌપ્રથમ મોસમી વધઘટ શોધી તેને આગળ દર્શાવ્યા મુજબ અલ્પકાલીન વધઘટની બાજુના ખાનામાં Q_3 ની મોસમી વધઘટ = 0.55, Q_4 ની મોસમી વધઘટ = 2.14, Q_1 ની મોસમી વધઘટ = –1.20 અને Q_2 ની મોસમી વધઘટ = –1.49, ……… આ રીતે છેલ્લે સુધી લખો.

હવે અનિયમિત વધઘટના સુત્રનો ઉપયોગ કરી મોસમી વધઘટની બાજુના ખાનામાં લખો.

8.11 મૌસમી સૂચકઆંક શોધવાની રીત :

પગલું-1 : જુદા જુદા વર્ષોની દરેક ઋતુની કિંમતનો સરવાળો કરો.

પગલું-2 : મળેલ સરવાળાને વર્ષની કુલ સંખ્યા વડે ભાગી સરેરાશ મેળવો જેને $\bar{x}_i$ વડે દર્શાવો.

પગલું-3 : દરેક સરેરાશનો સરવાળો કરી તેને કુલ સંખ્યા વડે ભાગી સરેરાશની સરેરાશ $\bar{\bar{x}}$ શોધો.

તેનું સૂત્ર $\bar{\bar{x}} = \dfrac{\sum \bar{x}_i}{n}$

પગલું-4 : દરેક માસ માટે મૌસમી સૂચકઆંક નીચેના સૂત્રથી શોધો.

મૌસમી સૂચકઆંક $= \dfrac{\bar{x}_i}{\bar{\bar{x}}} \times 100$

જ્યાં i = 1, 2, ...

8.12 ઉદાહરણ :

ઉદારણ-1 :

નીચેની માહિતી ઉપરથી મૌસમી સૂચકઆંક શોધો.

વર્ષ /	ભાવ			
ઋતુ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2016	60	50	52	65
2017	65	62	60	62
2018	65	60	63	50
2019	60	53	45	53

જવાબ :

વર્ષ /	ભાવ			
ઋતુ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2016	60	50	52	65
2017	65	62	60	62
2018	65	60	63	50
2019	60	53	45	53
સરવાળો	250	225	220	230
સરેરાશ $(\bar{x}_i)$	62.5 $\bar{x}_1$	56.25 $\bar{x}_2$	55 $\bar{x}_3$	57.5 $\bar{x}_4$

સરેરાશની સરેરાશ

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{n} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4}{4}$$

$$= \frac{62.5 + 56.25 + 55 + 57.5}{4}$$

$$= \frac{231.25}{4} = 57.81$$

Q_1 નો મૌસમી સૂચકઆંક $= \frac{\bar{x}_1}{\bar{\bar{x}}} \times 100$

$= \frac{62.5}{57.81} \times 100 \quad = 108.11$

Q_2 નો મૌસમી સૂચકઆંક $= \frac{\bar{x}_2}{\bar{\bar{x}}} \times 100$

$= \frac{56.25}{57.81} \times 100 \quad = 97.30$

Q_3 નો મૌસમી સૂચકઆંક $= \frac{\bar{x}_3}{\bar{\bar{x}}} \times 100$

$= \frac{55}{57.81} \times 100 \quad = 95.14$

Q_4 નો મૌસમી સૂચકઆંક $= \frac{\bar{x}_4}{\bar{\bar{x}}} \times 100$

$= \frac{57.5}{57.81} \times 100 \quad = 99.46$

8.13 સ્વાધ્યાય (તમારી પ્રગતિ ચકાસો) :

(1) સમજાવો : ચલિત સરેરાશની રીત
(2) ચલિત સરેરાશની રીતની ધારણાઓ લખો.
(3) ચલિત સરેરાશની રીત કયા સિદ્ધાંત ઉપર આધારિત છે. (જવાબ : સરેરાશના સિદ્ધાંત)
(4) ચલિત સરેરાશનું બીજું નામ જણાવો.
(જવાબ : એકોત્તર સરેરાશ અને પરંપરિત સરેરાશની રીત)
(5) ચલિત સરેરાશની રીતની ગણતરી કયા સમયના ગાળાઓને ધ્યાનમાં રાખીને કરવામાં આવે છે.
(જવાબ : એકી ચક્રિય ગાળો અને બેકી ચક્રિય ગાળો)
(6) ત્રણ વર્ષિય ચલિત સરેરાશની ગણતરીની રીત લખો.
(7) પાંચ વર્ષિય ચલિત સરેરાશની ગણતરીની રીત લખો.
(8) સાત વર્ષિય ચલિત સરેરાશની ગણતરીની રીત લખો.
(9) ચાર વર્ષિય ચલિત સરેરાશની ગણતરીની રીત લખો.
(10) ત્રણ વર્ષિય ચલિત સરેરાશની ગણતરીની રીતની મર્યાદા લખો.
(11) પાંચ વર્ષિય ચલિત સરેરાશની ગણતરીની રીતની મર્યાદા લખો.
(12) સાત વર્ષિય ચલિત સરેરાશની ગણતરીની રીતની મર્યાદા લખો.
(13) ચલિત સરેરાશની રીતના લાભાલાભ જણાવો.
(14) અલ્પકાલીન વધઘટ શોધવાનું સૂત્ર લખો.
(જવાબ : અલ્પકાલીન વધઘટ $= y - T$ (મૂ. માહિતી – વલણ))
(15) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત સવિસ્તાર સમજાવો.

(16) સુરેખાનું અન્વાયોજનનું સમીકરણ લખો.

(17) સુરેખાના અન્વાયોજનના પ્રમાણ્ય સમીકરણો લખો.

(18) દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયોજનનું સમીકરણ જણાવો.

(19) દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયોનના પ્રમાણ્ય સમીકરણો લખો.

(20) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતના લાભો સમજાવો.

(21) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતની મર્યાદા લખો.

(22) મૌસમી વધઘટ શોધવાની રીત લખો.

(23) મૌસમી સૂચકઆંક શોધવાની રીત લખો.

(24)નીચે આપેલા દાખલા ગણો. (જાતે કરો.)

1. નીચે આપેલ સામાયિક શ્રેણી માટે ત્રિવર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટ મેળવો. ઉપરાંત મૂળ માહિતી અને વલણને એક જ આલેખ પત્ર ઉપર દર્શાવતો આલેખ દોરો.

વર્ષ	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	
(કરોડ રૂ.માં)	4	7	10	6	7	11	9	8	
	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
	17	11	12	20	17	23	20	18	17

જવાબ : વલણ : –, 7, 7.67, 7.67, 8, 9, 9.33, 11.33, 12, 13.33, 14.33, 16.33, 20, 20.33, 18, 33, –.

અલ્પકાલીન વધઘટ : 0, 2.33, –1.67, –1, 2, –0.33, –3.33, 5, –2.33, –2.33, 3.67, –3, 3, –0.33, –0.33

2. નીચે આપેલી સામાયિક શ્રેણી માટે ત્રણ વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટ શોધો.

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
સૂચકઆંક	106	116	101	91	81	96	86	76	61	66	71	86

જવાબ : વલણ : 107.67, 102.67, 91, 89.33, 87.67, 86, 74, 33, 67.67, 66, 74.33

અલ્પકાલીન વધઘટ : 8.33, –1.67, 0, –8.33, 8.33, 0, 1.67, –6.67, 0, –3.33

3.ત્રણ વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટ શોધો.

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
ઉત્પાદન (ટનમાં)	326	355	395	390	400	403	408	425	403	436	453	405

જવાબ : વલણ : 358.67, 380, 395, 397.67, 403.67, 412, 430.67, 431.33

અલ્પકાલીન વધઘટ : –3.67, 15, –5, 2.33, –0.67, –4, 13, –18.33, 5.33, 21.67

4.નીચે આપેલી માહિતી પરથી પાંચ વર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટ શોધો.

વર્ષ	2000 2012	2001 2013	2002 2014	2003 2015	2004 2016	2005 2017	2006 2018	2007 2019	2008	2009	2010	2011
ઉત્પાદન (ટનમાં)	11 26	15 33	21 41	30 12	37 21	13 31	18 35	24 43	29	39	15	22

જવાબ : વલણ : 22.80, 23.20, 23.80, 24.40, 24.20, 24.60, 25, 25.80, 26.20, 27, 27.40, 26.80, 26.60, 27.60, 28, 28.40

અલ્પકાલીન વધઘટ : –1.80, 6.80, 13.20, –11.40, –6.20, –0.60, 4, 13.20, –11.20, –5, –1.40, 6.20, 14.40, –15.60, –7, 2.60

5. નીચે આપેલી માહિતી પરથી પાંચ વર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટ શોધો.

વર્ષ	2005 2016	2006 2017	2007 2018	2008 2019	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
નફો (કરોડમાં)	14 30	17 24	20 26	18 42	32	26	24	27	30	38	28

જવાબ : વલણ : 20.20, 22.60, 24, 25.40, 27.80, 29, 29.40, 30.6, 30, 29.2, 30

અલ્પકાલીન વધઘટ : –0.20, –4.60, 8, 0.6, –3.8, –2, 0.60, 7.4, –2, –0.8, –6

6. નીચે આપેલી સામાયિક શ્રેણીની મદદથી ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટ શોધો.

વર્ષ	1992 2004 2016	1993 2005 2017	1994 2006	1995 2007	1996 2008	1997 2009	1998 2010	1999 2011	2000 2012	2001 2013	2002 2014	2003 2015
નફો (કરોડ રૂ.માં)	14 29 24	18 47 23	24 22	33 15	39 24	16 34	45 25	27 28	32 51	25 20	18 24	25 26

જવાબ : અહીં ચલિત સરેરાશનો ગાળો આપેલ નથી. તેથી તેની વધઘટ તપાસતા તે દર સાત વર્ષે વધતી દેખાય છે. તેથી સાત વર્ષિય ચલિત સરેરાશ શોધાશે.

વલણ : 27, 28.86, 30.86, 31, 28.86, 26.86, 25.71, 28, 28, 27.86, 28.43, 28.14, 29.43, 29.71, 28.29, 28

અલ્પકાલીન વધઘટ : 6, 10.14, –14.86, 14, –1.86, 5.14, –3.71, –11, –3.29, 3.14, 21.29, –6, –13, –3.86, 5.57, –3.14, –1.43, 21.29, –8.29, –4.

7. નીચેની સામાયિક શ્રેણીની મદદથી સાત વર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ શોધો.

વર્ષ	2000 2011	2001 2012	2002 2013	2003 2014	2004 2015	2005 2016	2006 2017	2007 2018	2008 2019	2009	2010
ઉત્પાદન (લાખ ટનમાં)	41 49	43 47	41 53	45 59	50 57	47 52	43 58	45 55	45 64	51	43

જવાબ : વલણ : 44.29, 44.86, 45.14, 46.57, 46.29, 46.14, 46.14, 47.57, 49.57, 51.29, 51.43, 53.57, 54.43, 56.85

8. નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી યોગ્ય ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટ શોધો.

વર્ષ	2000 2013	2001 2014	2002 2015	2003 2016	2004 2017	2005 2018	2006 2019	2007	2008	2009	2010	2011	2012
નફો (કરોડ રૂ.માં)	8 27	11 24	14 38	30 24	11 18	15 20	13 35	32	21	15	16	36	21

જવાબ : અહીં દર ચાર વર્ષે નફામાં વધારો થતો દેખાય છે. તેથી ચાર વર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ શોધો.

વલણ : 16.13, 17, 17.38, 17.5, 19, 20.25, 20.63, 21.5, 22, 23.5, 26, 27.25, 27.88, 27.13, 25.5, 24.63

અલ્પકાલીન વધઘટ : –2.13, 13, –6.38, –2.5, –6, 11.75, 0.38, –6.5, –6, 12.5, –5, –0.25, –3.88, 10.88, –1.5, –6.63

9. નીચેની સામાયિક શ્રેણીની મદદથી ચાર વર્ષિય ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ શોધો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
વેચાણ (કરોડ રૂ.માં)	3	7	2	6	4	8	3	7	5	9	4

જવાબ : 4.625, 4.875, 5.125, 5.375, 5.625, 5.875, 6.125

10. નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સુરેખાનું અન્વાયોજન કરો અને તે ઉપરથી 2021 વર્ષ માટે નફાનું પૂર્વાનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2015	2016	2017	2018	2019
નફો (લાખ રૂ.માં)	45	55	67	63	65

જવાબ : $a = 59$, $b = 4.8$, $y = 59 + 4.8\ (t - 2017)$

$y = 78.2$ લાખ ટન

11. નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સુરેખાનું અન્વાયોજન કરો અને તે ઉપરથી 2022 ના વર્ષ માટે ઉત્પાદનનું અનુમાન કરો.

વર્ષ	2014	2015	2016	2017	2018	2019
ઉત્પાદન (લાખ ટનમાં)	12	15	18	12	20	12

જવાબ : $a = 14.83$, $b = 0.13$, $y = 14.83 + 0.13\ [2(t - 2016.5)]$

$y = 16.26$

12. નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સુરેખાનું અન્વાયોજન કરો.

વર્ષ	2011	2013	2015	2017	2019
નફો (કરોડમાં)	20	25	34	46	60

જવાબ : $a = 37$, $b = 10.1$, $y = 37 + 10.1\ (t - 2015)$

13. નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી દ્વિઘાતી પરવલયનું અન્વાયોજન કરો અને તે ઉપરથી 2021 માટે ઉત્પાદનનું પૂર્વાનુમાન કરો.

વર્ષ	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
ઉત્પાદન (લાખ ટનમાં)	7	8	9	11	12	13	10

જવાબ : $a = 11.04$, $b = 0.79$, $c = -0.26$

$y = 11.04 + 0.79\ (t - 2016) - 0.26\ (t - 2016)^2$

$y = 8.49$ લાખ ટન

14. નીચે આપેલી માહિતીને આધારે દ્વિઘાત પરવલયનું અન્વાયોજન કરો.

વર્ષ	2015	2016	2017	2018	2019	2020
ઉત્પાદન (હજાર ટનમાં)	100	105	126	130	180	190

જવાબ : $a = 145.03,\ b = 9.7,\ c = -0.56$

$y = 145.03 + 9.7\ [2(t - 2017.5)] - 0.56\ [2(t - 2017.5)^2]$

15. નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ શોધી તેની મૌસમી વધઘટો મેળવો.

વર્ષ/મોસમ	ભાવ		
	Q_1	Q_2	Q_3
2017	20	25	35
2018	22	21	40
2019	25	30	42
2020	23	22	44

જવાબ : વલણ : 26.67, 27.33, 26, 27.67, 28.67, 31.67, 32.33, 31.67, 29, 29.67

અલ્પકાલીન વધઘટ : –1.67, 7.67, –4, –6.67, 11.33, –6.67, –2.33, 10.33, –6, –7.67

મોસમી વધઘટ : $Q_1 = -5.44,\ Q_2 = -4.46,\ Q_3 = 9.90$

16. નીચેની આપેલી માહિતી ઉપરથી ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ શોધી તેની મોસમી વધઘટ અને અનિયમિત વધઘટો શોધો.

વર્ષ/મોસમ	ભાવ		
	Q_1	Q_2	Q_3
2016	15	20	25
2017	12	18	22
2018	12	13	24
2019	13	11	26

જવાબ : વલણ : 20, 19, 18.33, 17.33, 15.67, 16.33, 16.67, 16, 16.67

અલ્પકાલીન વધઘટ : 0, 6, –6.33, 0.67, 4.67, –3.67, –3.33, 7.33, –3, –5.67

મોસમી વધઘટ : $Q_1 = -4.47,\ Q_2 = -2.22,\ Q_3 = 5.86$

–2.22, 5.86, –4.47, –2.22, 5.86, –4.47, –2.22, 5.86, –4.47, –2.22

અનિયમિત વધઘટ : અલ્પકાલીન વધઘટ – મોસમી વધઘટ

2.22, 0.14, –1.86, 2.89, –1.19, 0.81, –1.11, 1.47, 1.47, –3.44

17. નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી મોસમી વધઘટો અને અનિયમિત વધઘટો શોધો.

વર્ષ/મોસમ	ભાવ			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2016	4	5	7	9
2017	3	4	6	8
2018	7	6	8	9
2019	6	5	7	8

જવાબ : અહીં ચાર મોસમ આપેલ છે. તેથી ચાર વર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ શોધાય.

વલણ : 6.13, 5.88, 5.63, 5.38, 5.75, 6.5, 7, 7.38, 7.38, 7.13 ,6.88, 6.63

અલ્પકાલીન વધઘટ : 0.88, 3.13, –2.63, –1.38, 0.25, 1.5, 0, –1.38, 0.63, 1.88, –0.88, –1.63

મોસમી વધઘટ : Q_1 = –1.2, Q_2 = –1.49, Q_3 = 2.14

0.55, 2.14, –1.2, –1.49, 0.55, 2.14, –1.2, –1.49, 0.55, 2.14, –1.2, –1.49

અનિયમિત વધઘટ : 0.32, 099, –1.43, 0.11, –0.3, –0.64, 1.2, 0.11, 0.07, –0.26, 0.32, –0.14

18. નીચેની માહિતી ઉપરથી મૌસમી સૂચકઆંક શોધો.

વર્ષ/મોસમ	ભાવ			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2016	50	40	40	40
2017	52	52	45	47
2018	55	45	52	50
2019	60	53	45	65

જવાબ : $\bar{\bar{x}}$ = 49.55, Q_1 = 109.73, Q_2 = 96.08, Q_3 = 92.04, Q_4 = 102.15

19. નીચેની માહિતી ઉપરથી મોસમી સૂચકઆંક શોધો.

વર્ષ/મોસમ	ભાવ			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2016	53	53	45	60
2017	62	62	60	62
2018	50	55	53	65
2019	60	50	52	60
2020	57	63	55	58

જવાબ : $\bar{\bar{x}}$ = 56.75, Q_1 = 99.38, Q_2 = 99.74, Q_3 = 93.39, Q_4 = 107.49

20. નીચેની માહિતી ઉપરથી મૌસમી સૂચકઆંક શોધો.

વર્ષ/મોસમ	ભાવ			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2015	40	30	32	40
2016	42	42	40	42
2017	45	35	33	30
2018	40	33	25	33
2019	38	34	38	45

જવાબ : $\bar{\bar{x}} = 36.85$, $Q_1 = 111.26$, $Q_2 = 94.44$, $Q_3 = 91.18$, $Q_4 = 103.12$

8.14 ખાલી જગ્યા પુરો :

(1) ચલિત સરેરાશની રીતને .... અથવા .... રીત તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.
(જવાબ : એકોત્તર સરેરાશ, પરંપરિત સરેરાશ)

(2) ચલિત સરેરાશની ગણતરી વખતે .... અને .... ચક્રિય ગાળાઓ ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે.
(જવાબ : એકી, બેકી)

(3) ત્રણ વર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતમાં .... અને .... વર્ષ વલણ મેળવી શકાતું નથી.
(જવાબ : પ્રથમ, છેલ્લા)

(4) પાંચ વર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતમાં .... અને .... વર્ષનું વલણ મેળવી શકાતું નથી.
(જવાબ : પ્રથમ બે, છેલ્લા બે)

(5) સાત વર્ષિય ચલિત સરેરાશની રીતમાં .... અને .... વર્ષનું વલણ મેળવી શકાતું નથી.
(જવાબ : પ્રથમ ત્રણ, છેલ્લા ત્રણ)

(6) સુરેખાના અન્વાયોજનમાં .... પ્રમાણ્ય સમીકરણોનો ઉપયોગ થાય છે.
(જવાબ : બે)

(7) દ્વિઘાત પરવલયના અન્વાયોજનમાં .... પ્રમાણ્ય સમીકરણોનો ઉપયોગ થાય છે.
(જવાબ : ત્રણ)

(8) અનિયમિત વધઘટ = અલ્પકાલિન વધઘટ – .... વધઘટ.
(જવાબ : મૌસમી)

(9) મોસમી સૂચકઆંક = $\frac{\bar{x}_i}{?} \times 100$

(જવાબ : $\bar{\bar{x}}$)

(10) વિકસતા દેશમાં બેકારીનું પ્રમાણ એ .... વલણ છે.
(જવાબ : ઘટતું)

(11) "મૂળ માહિતી અને અનુમાનિત કિંમત હંમેશા સરખી હોય છે." આ વિધાન .... છે.
(જવાબ : ખોટું)

(12) સુરેખાનું અન્વાયોજન $y = 60.75 + 2.58x$ છે. જ્યાં $x = \left(\frac{\text{વર્ષ} - 2019}{2}\right)$ છે. તો વર્ષ 2025 માટે y નું અનુમાન = ...

(જવાબ : 68.49)

(13) અલ્પકાલીન વધઘટ = મૂળ માહિતીમાંથી .... બાદ કરવામાં આવે છે.

(જવાબ : વલણ)

(14) સામાયિક શ્રેણીની વધઘટમાં (Y – T) – .... = I

(જવાબ : C)

(15) વેચાણ y માટે દ્વિઘાતી પરવલયનું અન્વાયોજન નીચે મુજબ છે. જો x એ વર્ષ દર્શાવે તો વર્ષ 2021 માટે વેચાણ y નું અનુમાન કરો.

$y = 25.19 + 5.15\ [2(x - 2017.5)] + 0.24\ [2(x - 2017.5)]^2$

(જવાબ : 73)

8.15 ચાવીરૂપ શબ્દો :

- **એકોત્તર સરેરાશ** : ચલિત સરેરાશ
- **એકી ચક્રિય ગાળો** : એકી સંખ્યા ધરાવતો સમયાગાળો (જેમ કે, 3, 5, 7 .... વર્ષનો ગાળો)
- **ત્રિવર્ષિય** : ત્રણ વર્ષનો ગાળો
- **અલ્પકાલીન વધઘટ** : ટૂંકાગાળામાં થતા ફેરફારો
- **બેકી ચક્રિયગાળો** : બેકી સંખ્યા ધરાવતો સમયગાળો (જેમ કે, 4, 6, ... વર્ષનો ગાળો)
- **પૂર્વાનુમાન** : ધારણા, અનુમાન
- **દ્વિઘાત** : બેઘાત (દા.ત. $y = a + bx + cx^2$ માં x ની ઘાત 2 છે.)

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) Maisuria M. H. and Patel D. M. (2012), Business Research Methods, Akshar Publication, Ahmedabad.

(2) Goon, Gupta and Das Gupta, 1987, Basic Statistics, The World Press Pvt. Ltd. Calcutta.

(3) A. L. Nagar and R. K. Das, 1989, Basic Statistics, Oxford University Press, Delhi.

એકમ 9	સૂચક આંક-૧ (Index Number : - 1)

એકમ 9

સૂચક આંક-૧
(Index Number : - 1)

9.0 ઉદ્દેશો

9.1 પ્રસ્તાવના

9.2 સૂચક આંકનો અર્થ

9.3 સૂચક આંકની વ્યાખ્યા

9.4 સૂચક આંકના લક્ષણો

9.5 સૂચક આંકની ઉપયોગિતા

9.6 સૂચક આંકની મર્યાદાઓ

9.7 સૂચક આંકની રચના

9.8 ઉદાહરણો

9.9 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

9.9.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.

9.9.2 યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.

9.10 ચાવીરૂપ શબ્દો

● **સંદર્ભગ્રંથ**

9.0 ઉદ્દેશો :-

સમયના ફેરફારની સાથે વસ્તુઓમાં કેટલાક ફેરફાર થતાં રહે છે. જેમ કે વસ્તુઓના ભાવો, ઉત્પાદન, મૃત્યુદર, જન્મદર, આયાત-નિકાસ, બેકારી, રાષ્ટ્રીય આવકમાં ફેરફાર વગેરે. આ ફેરફારોનું પ્રમાણ એક સરખું હોતું નથી. તેમજ કેટલાક ફેરફારો એક જ દિશામાં થતા હોય છે, જ્યારે કેટલાક ફેરફારો વિરુદ્ધ દિશામાં થયા હોય છે. ભવિષ્યનું આયોજન કરવા માટે આવા પ્રકારના ફેરફારોનો અભ્યાસ કરવો ખૂબ જ આવશ્યક હોય છે, જેથી ભવિષ્ય માટે લેવાનારા નિર્ણયો યોગ્ય લઈ શકાય. આ પ્રકરણના અભ્યાસ પરથી દેશની આર્થિક પરિસ્થિતિનો ખ્યાલ મેળવી શકશે તેમજ દેશમાં થતા ભાવ વધારો, ફુગાવો, મોઘવારી દર જેવા પરિબળોને સરળતાથી સમજી શકશે.

9.1 પ્રસ્તાવના :-

આપણે ઉદ્દેશોમાં જોઈ ગયા કે સમયની સાથે દરેક ચલોમાં ફેરફારો જોવા મળે છે. આવા ફેરફારોનો અભ્યાસ કરવા માટે બે રીતોનો ઉપયોગ કરી શકાય છે. (a) નિરપેક્ષ તફાવતની રીત (b) સાપેક્ષ તફાવતની રીત.

આપણે આ બાબતોનો ખ્યાલ એક ઉદાહરણ દ્વારા મેળવીએ. ધારોકે કોઈ બે વસ્તુઓ ઘઉં અને પેટ્રોલના જુદા જુદા સમયગાળા માટેના એકમદીઠ ભાવ નીચે પ્રમાણે છે.

વસ્તુ	વર્ષ 2021	વર્ષ 2022
ઘઉં (પ્રતિ કિલો	રૂ. 16	રૂ. 32
પેટ્રોલ (પ્રતિ લિટર)	રૂ. 70	રૂ. 100

વસ્તુઓ ઘઉં અને પેટ્રોલના ભાવમાં થયેલા ફેરફારોની સરખામણી નીચેની બે રીતે કરી શકાય છે.

(a) નિરપેક્ષ તફાવતની રીત :-

ઉપરના કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાય છે કે ઘઉંનો ભાવ પ્રતિ કિલો રૂ. 16 થી વધીને રૂ. 32 થયો છે. જ્યારે પેટ્રલનો ભાવ પ્રતિ લિટર રૂ. 70 થી વધીને રૂ. 100 થયો છે. અહીં તફાવતની રીતથી ઘઉંના ભાવમાં રૂ. 16નો વધારો થયો છે. જ્યારે પેટ્રોલનાં ભાવમાં રૂ. 30નો વધારો થયો છે. પરંતુ પેટ્રોલનો ભાવ ઘઉંના ભાવની સરખામણીમાં વાસ્તવિક રીતે ખૂબ જ મોટો વધારો થયો છે એમ ગણી શકાય નહિ, કારણ કે બંને વસ્તુઓનો પાયાનો ભાવ (વર્ષ 2021ના) જુદો જુદો છે. તેથી આ ફેરફારની સરખામણી કરવા માટેની આ નિરપેક્ષ તફાવતની રીત વાજબી ગણી શકાય નહિં.

(b) સાપેક્ષ તફાવતની રીત :- (ગુણોત્તરની રીત)

આ રીતમાં પાયાના ભાવને ધ્યાનમાં લઈ ગુણોત્તર શોધવામાં આવે છે. આપણે વર્ષ 2012ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ આ રીત મુજબ બંને વસ્તુઓ ઘઉં અને પેટ્રોલના ભાવમાં થયેલ ફેરફારની સરખામણી કરીએ.

અહીં વર્ષ 2022નો ભાવ અને વર્ષ 2012ના ભાવનો ગુણોત્તર મેળવીએ.

ઘઉંના ભાવનો ગુણોત્તર $= \frac{32}{16} = 2$

પેટ્રોલના ભાવનો ગુણોત્તર $= \frac{100}{70} = 1.43$

બંને વસ્તુઓના ભાવમાં થતા ફેરફારો ટકાવારીમાં દર્શાવવામાં આવે તો

ઘઉંનો સાપેક્ષ ટકાવારી ફેરફાર $= \frac{32}{16} \times 100 = 200$

પેટ્રોલનો સાપેક્ષ ટકાવારી ફેરફાર $= \frac{100}{70} \times 100 = 143$

આમ અહીં બન્ને વસ્તુના ભાવમાં અનુક્રમે 100 % અને 43 % નો વધારો થયો છે. આ રીતે મેળવેલ સાપેક્ષ ટકાવારી માપને સૂચક આંક તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

સાપેક્ષ કિંમત, માપના એકમ પર આધાર રાખતા નથી તેથી જે વસ્તુઓના માપના એકમો જુદા જુદા હોય તેની સરખામણી સાપેક્ષ કિંમતથી થઈ શકે છે. દા.ત. પેટ્રોલ લિટરમાં, અનાજ કિ.ગ્રા. માં, લોખંડ ટનમાં મપાય છે. આવા જુદા જુદા એકમોની સરખામણી સાપેક્ષ માપથી થઈ શકે છે.

9.2 સૂચક આંકનો અર્થ :-

કોઈ ચોક્કસ સમયની સમયની સરખામણીમાં સાંખ્યિકીય ચલમાં થતો ફેરફાર એટલે જ સૂચક આંક. સામાન્ય અર્થમાં કહીએ તો કોઈ ચલની કિંમતમાં કોઈ એક ચોક્કસ વર્ષની સરખામણી એ ચાલુ વર્ષમાં થયેલા ફેરફારને સાપેક્ષ ટકાવારીમાં દર્શાવવામાં આવે તો તેને સૂચક આંક કહે છે.

સૂચક આંકમાં જે સમયની સાથે સરખામણી કરવામાં આવે છે, તે સમયને આધાર વર્ષ તરીકે લેવામાં આવે છે. અને જે વર્ષનો સૂચક આંક શોધવાનો હોય તે વર્ષને ચાલુ વર્ષ તરીકે ગણવામાં આવે છે.

9.3 સૂચક આંકની વ્યાખ્યા :-

સૂચક આંકની વ્યાખ્યા જુદા જુદા આંકડાશાસ્ત્રીઓ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવાનો પ્રયત્ન થયેલ છે. જેમાંથી કેટલીક વ્યાખ્યા નીચે રજૂ કરે છે.

(i) Spiengal defines an index number "as a statistical measure designed to show changes in variable or a group of related variables with respect to time, geographical locations or other characteristics."

'સ્પાઈન્ગલ' સૂચક આંકની સ્પષ્ટ અને વિસ્તૃત વ્યાખ્યા આપતા જણાવે છે કે "સૂચક આંક એ એવું આંકડાશાસ્ત્રીય માપ છે કે જે સમય, સ્થળ, વિસ્તાર કે અન્ય ગુણધર્મો આધારિત થયેલ સાપેક્ષ ચલોના ફેરફારને દર્શાવે છે."

(ii) બેસલ્સ અને વિલેટના જણાવ્યા અનુસાર "સૂચક આંક એ વિશિષ્ટ પ્રકારનું એક સરાસરી માપ છે કે જે સમય અને સ્થળને અનુલક્ષીને થયેલા સાપેક્ષ ફેરફારનું માપન કરે છે."

(iii) શ્રી બ્લેરના મંતવ્ય અનુસાર "સૂચક આંક એ વિશિષ્ટ પ્રકારનું એક સરાસરી માપ છે.

ટૂંકમાં સૂચક આંક એટલે જુદા જુદા સમયે કોઈ પણ ચલની કિંમતમાં થતો સાપેક્ષ ટકાવારી ફેરફાર.

$$\text{સૂચક આંક} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષમાં ચલની કિંમત}}{\text{આધાર વર્ષના ચલની કિંમત}} \times 100$$

અહીં જો ચાલુ વર્ષની કિંમતનો P_1 આધાર વર્ષની કિંમતને P_0, અને સૂચક આંકને I વડે દર્શાવીએ તો.

$$I = \frac{P_1}{P_0} \times 100 \text{ થાય.}$$

દા.ત. વર્ષ 2012માં ઘઉંનો ભાવ રૂ. 16 હોય અને વર્ષ 2022માં એજ ઘઉંનો ભાવ રૂ. 32 થયો હોય તો ચાલુ વર્ષ (2022)માં ઘઉંના ભાવનો સૂચક આંક

$$I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

$$\therefore \quad I = \frac{32}{16} \times 100$$

$$\therefore \quad I = 200$$

જ્યાં 2012ને આધાર વર્ષ અને 2022ને ચાલુ વર્ષ તરીકે ગણેલ છે.

જો વસ્તુઓના ભાવને બદલે બે જુદા જુદા સમયે વસ્તુઓની વપરાશના જથ્થામાં થયેલ ફેરફાર ઉપરથી સૂચક આંક મેળવીએ તો તે સૂચક આંકને જથ્થાનો સૂચક આંક કરી શકાય તેને Q વડે દર્શાવતાં.

$$Q = \frac{q_1}{q_0} \times 100$$

9.4 સૂચક આંકના લક્ષણો :-

ઉપરોક્ત વ્યાખ્યાના આધારે સૂચક આંકના લક્ષણો નીચે મુજબ તારવી શકાય.

(1) સૂચક આંક એક એવું માપ છે કે જેના વડે અમુક સમયને અંતરે થતી વધઘટોનો અભ્યાસ થઈ શકે છે.

(2) સૂચક આંક ટકાવારી ફેરફાર દર્શાવે છે. વિવિધ ચલોની કિંમત જુદા જુદા એકમોમાં હોવા છતાં તેમનો સૂચક આંક એ ફક્ત સાપેક્ષ ટકાવારી માપથી જ દર્શાવવામાં આવે છે. તેથી સૂચક આંકથી સાપેક્ષ ટકાવારી ફેરફાર જાણી શકાય છે.

(3) સૂચક આંક એક એ વિશિષ્ટ સરેરાશ માપ છે. તેથી તે સરેરાશ ફેરફારો સરખાવે છે.

(4) સૂચક આંક ગુણોત્તર દ્વારા સરખામણી કરે છે.

(5) સૂચક આંક દ્વારા અચળ કિંમતોનો અભ્યાસ થઈ શકે નહિં.

(6) ફેરફારોનું ચોક્કસ માપ મેળવવા સૂચક આંક માટે કોઈ એક સમયની કિંમત ન લેતાં આખા વર્ષની સરેરાશ કિંમત લેવામાં આવે છે.

9.5 સૂચક આંકની ઉપયોગિતા :-

સૂચક આંક કોઈ પણ વસ્તુમાં થતાં ફેરફાર એટલે કે વધઘટ બતાવતો આંક છે, તેથી તેનો દરેક ક્ષેત્રમાં ઉપયોગ થઈ શઈ શકે છે. સામાન્ય રીતે સૂચક આંકને અર્થતંત્રની પારાશીશી કહેવામાં આવે છે. જે અર્થતંત્ર અને ધંધાકીય ક્ષેત્રે થયેલા ફેરફારોનું માપન કરે છે. સૂચક આંકમાં જ ચલનો અભ્યાસ કરવાનો હોય તે ચલની માપની સપાટીમાં થતા ફેરફાર જાણી શકાય છે. જેમ કે જીવન નિર્વાહ ખર્ચ, વેચાણ, ઉત્પાદન, રોજગારી, આયાત-નિકાસ, રોકાણ, વેતન, મૂડીરોકાણ, ખેતી દ્વારા ઉત્પાદન વગેરેમાં થતા ફેરફારોનો અભ્યાસ કરવા માટે સૂચક આંક એક ઉપયોગી માપ છે. આજના આધુનિક યુગમાં સામાજિક તેમજ રાજકીય ક્ષેત્રે થતાં ફેરફારનો અભ્યાસ પણ સૂચક આંકની મદદથી કરવામાં આવે છે. શ્રી બ્લેર સૂચક આંકનું મહત્વ સ્પષ્ટ કરતાં જણાવે છે કે, “સૂચક આંક એ ધંધાના ધોરી માર્ગ (હાઈવે) નો માર્ગદર્શક છે જે ધંધાદારીને ધંધો કેવી રીતે ચલાવવો તેને સંચાલિત કરવો તેનું માર્ગદર્શન પૂરું પાડે છે. સૂચક આંકના ઉપયોગો નીચે મુજબ વર્ણવી શકાય.

(1) જથ્થાબંધ ભાવમાં થતો ફેરફાર અનેક પરિબળોનું પરિણામ છે. આ પરિબળોનો અભ્યાસ ઉદ્યોગપતિઓ, વેપારીઓ, આયોજકો, રોકાણ કરનાર, સમાજશાસ્ત્રીઓ માટે જરૂરી માર્ગદર્શન મેળવી શકાય છે. આમ જથ્થાબંધ ભાવનો સૂચક આંક સામાન્ય ભાવ સપાટીમાં થતા ફેરફાર દર્શાવે છે.

(2) સૂચક આંકના ઉપયોગથી ઉદ્યોગપતિઓ, સરકાર, ધંધાદારીઓ, જુદી જુદી આંકડાશાસ્ત્રી નીતિઓનું નિર્માણ કરી શકે છે.

(3) ભાવના સામાન્ય સૂચક આંક ઉપરથી ભાવોની વધઘટનો અભ્યાસ કરી શકાય અને તે વધઘટ સ્થિર છે કે કેમ તે જાણી શકાય છે.

(4) જીવન નિર્વાહના સૂચક આંકની મદદથી કામદારો કે કર્મચારીઓ અંગેના પગાર, મોઘવારી ભથ્થા, બોનસ વગેરે ગણતરી કરવામાં ખૂબ જ ઉપયોગી છે.

(5) ઔદ્યોગિક સૂચક આંકની મદદથી ઔદ્યોગિક ઉત્પાદનમાં થતો સરેરાશ ફેરફાર જાણી શકાય છે. આ આંકથી દેશ ઉદ્યોગીકરણમાં કેટલો આગળ વધશે તેમજ સરાકરી પગલાથી ઔદ્યોગિક માળખામાં શો ફેરફાર કરવો તે નક્કી કરી શકાય છે.

(6) રાષ્ટ્રીય આવકના સૂચક આંકથી સરકારને યોજનાઓના લક્ષ્યાંકાંકો નક્કી કરવા માટે ઉપયોગી થાય છે. તેમજ જુદા જુદા દેશોની રાષ્ટ્રીય આવક સરખાવવા માટે પણ આવા સૂચક આંક ઉપયોગી નીવડે છે.

(7) આયાત-નિકાસના સૂચક આંક આયાત-નિકાસમાં નોંધાયેલા ફેરફારો અને વ્યાપારની સમતુલાની પરિસ્થિતિ દર્શાવે છે. તેથી સરકાર આયાત-નિકાસની યોગ્ય નીતિ નક્કી કરી શકે છે.

(8) ખેતી પેદાશ સૂચક આંકની મદદથી ખેતી વિષયક વિવિધ નીતિઓનું મૂલ્યાંકન કરી શકાય છે. તથા ખેત પેદાશમાં થયેલ સરેરાશ ફેરફાર જાણી શકાય છે. તેમજ ભવિષ્યમાં ખેત પેદાશ વધારવા માટે વિવિધ યોજનાઓ અમલમાં મૂકી શકાય છે.

(9) રોકાણના આંક શેર અને શેરબજારના ભાવોમાં થતા ફેરફારોનો અભ્યાસ કરવા માટે મદદરૂપ છે.

(10) વેપારી મહાજન કે ચેમ્બર ઓફ કોમર્સ જેવી કેટલીક સંસ્થાઓ સ્થાનિક આર્થિક પરિસ્થિતિના સૂચક આંક પરથી યોગ્ય માર્ગદર્શન મેળવી શકે છે.

(11) કાચા માલનો સૂચક આંક ઉત્પાદકો, વેપારીઓ વગેરેને તથા યોગ્ય નિતિ અંગે નિર્ણય લેવા માટે જરૂરી માહિતી પૂરી પાડે છે.

9.6 સૂચક આંકની મર્યાદાઓ :-

સૂચક આંક અનેક ક્ષેત્રમાં ઉપયોગી પુરવાર થાય છે, તેમ છતાં તેની પણ કેટલીક મર્યાદાઓ છે. જે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે.

(1) સૂચક આંકમાં સરેરાશના માપોનો ઉપયોગ થતો હોવાથી સરેરાશની મર્યાદાઓ સૂચક આંકમાં પણ લાગુ પડે છે.

(2) સૂચક આંકની ગણતરીમાં જથ્થાબંધ ભાવોના સૂચક આંકમાં કેટલીક પસંદગીની વસ્તુઓનો જ સમાવેશ કરવામાં આવે છે. બધી જ વસ્તુઓનો સમાવેશ શકય નથી. અને તેથી જ આ રીતે મેળવેલા સૂચક આંકમાં ચોકસાઈનું વાજબી પ્રમાણ જોવા મળે છે. પરંતુ સંપૂર્ણ ચોકસાઈનો અભાવ જોવા મળે છે.

(3) સૂચક આંકની ગણતરી માટે સાપેક્ષ ટકાવારી શોધવામાં આવે છે. આ માટે ચાલુ વર્ષના ભાવને અમુક ચોક્કસ કરેલ આધાર વર્ષના ભાવ સાથે સરખાવામાં આવે છે. આ આધાર વર્ષ યોગ્ય રીતે પસંદ કરવું જોઈએ. જો આધાર વર્ષ દુકાળગ્રસ્ત, પુરગ્રસ્ત, યુદ્ધગ્રસ્ત, સુનામી, ભૂકંપ વગેરે સંકટોનું વર્ષ હોય તો તે વર્ષના ભાવો ઊંચા જવાના તેથી સૂચક આંક ઘણો નીચો આવે છે. તેથી સરખામણી ભ્રામક બને છે.

(4) એક હેતુ માટે શોધવામાં આવેલ સૂચક આંક બીજા હેતુ માટે વાપરી શકાય નહિ. દા.ત. ગરીબ વર્ગનો સૂચક આંક તવંગર વર્ગના જીવન ધોરણ જાણવા ઉપયોગમાં લઈ શકાય નહિ.

(5) સમયના ફેરફાર સાથે પરિસ્થિતિમાં ફેરફાર થતા રહે છે. તેથી સમય પ્રમાણે પાયાના વર્ષમાં પસંદ કરેલ વસ્તુઓ અને તેનું પ્રમાણ બદલવામાં ન આવે તો સૂચક આંક નકામો બની જાય છે.

9.7 સૂચક આંકની રચના :-

સામાન્ય રીતે સૂચક આંકો જુદાજુદા શોધી શકાય છે. ઔદ્યોગિક એકમનો સૂચક આંક, જીવનનિર્વાહનો સૂચક આંક (છૂટકભાવનો સૂચક આંક), જથ્થાબંધ ભાવોને આધારે તૈયાર કરવામાં આવતો સૂચક આંક વગેરે સામાન્ય રીતે વસ્તુઓના જથ્થાબંધ ભાવ પરથી જ સૂચક આંક નક્કી કરવામાં આવે છે.

બજારમાં વેચાતી વસ્તુઓના જથ્થાબંધ ભાવ મેળવી તે ઉપરથી નક્કી કરવામાં આવતા સૂચક આંકને જથ્થાબંધ ભાવનો સૂચક આંક કહે છે. જથ્થાબંધ ભાવના સૂચક આંક પરથી વસ્તુઓના જથ્થાબંધ ભાવમાં થતા ફેરફાર, તેની બજાર પર થતી અસર વગેરે જાણી શકાય છે. આથી વિવિધ નીતિઓના ઘડતર માટે તથા બજારનું વલણ જાણવા માટે જથ્થાબંધ ભાવનો સૂચક આંક ખૂબ જ ઉપયોગી નીવડે છે. કોઈ પણ પ્રકારના સૂચક આંકની રચના કરવા માટે કેટલાક મહત્વના મુદ્દાઓ ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. આ જ મુદ્દાઓ જથ્થાબંધ ભાવના સૂચક આંકની રચના માટે પણ લાગુ પડે છે. તે નીચે મુજબ છે.

(1) હેતુ :-

કોઈ પણ પ્રકારના સૂચક આંકની રચના કરતાં પહેલા કયા હેતુ માટે સૂચક આંકની રચના કરવાની છે, તેનું સ્પષ્ટીકરણ કરવું ખૂબ જ જરૂરી છે. કારણ કે સૂચક આંકની રચના માટે વસ્તુની પસંદગી, વસ્તુની સંખ્યા, વસ્તુનો ભાવ, સરેરાશની પસંદગી વગેરો માપો નક્કી કરવાનો આધાર હેતુ પર રહેલો છે. તેથી સૂચક આંકની રચનાનો હેતુ સ્પષ્ટ હશે તો અન્ય બાબતોમાં સરળતા બની રહે છે. દા.ત. જો કામદાર વર્ગના જીવન નિર્વાહનો સૂચક આંક રચવો હોય તો તે પ્રમાણે વસ્તુની પસંદગી કરવી પડે છે. કૃષિ પેદાશનો સૂચક આંક મેળવવા માટે કૃષિ વિષયક બાબતો ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. આમ સૂચક આંકની રચના વખતે હેતુ સ્પષ્ટ હોય તે ખૂબ જ જરૂરી છે.

(2) વસ્તુઓની પસંદગી, વસ્તુઓની સંખ્યા તેમજ વસ્તુઓના ભાવ :-

જથ્થાબંધ ભાવના સૂચક આંકની રચનામાં બજારમાં મળતી કઈ કઈ વસ્તુઓ ધ્યાનમાં લેવી તે ખૂબ જ મહત્વનું પરિબળ છે. કારણ કે બધી જ વસ્તુઓનો સમાવેશ કરવો અશક્ય બને છે. તેથી કેટલીક પ્રતિનિધિ રૂપ

વસ્તુઓ પસંદ કરવી જોઈએ. સાથે સાથે લોકોની પસંદગી, શોખ, ટેવો, રીત-રિવાજો વગેરે બાબતો ધ્યાનમાં લઈ વસ્તુની પસંદગી કરવાથી આદર્શ માપ મળી શકે છે. દા.ત. મધ્યમ વર્ગના જીવન નિર્વાહના સૂચક આંકની રચના કરતી વખતે મધ્યમ વર્ગ માટે ઉપયોગી અને જરૂરી એવી ચીજવસ્તુઓનો સમાવેશ કરવો જોઈએ. જેમ કે ટૂ વ્હીલર વાહન, વોશીંગ મશીન, એરકંડિશન વગેરે.

સૂચક આંકની રચનામાં કેટલી વસ્તુઓ પસંદ કરવી તે માટેનો કોઈ ચોક્કસ નિયમ નથી. પરંતુ જેમ વસ્તુઓની સંખ્યા વધારે તેમ સૂચક આંકની કિંમત વધુ સચોટ મળે. પરંતુ આમ કરવાથી ખર્ચ અને સમય વધી જાય છે. ઉપરાંત ભૂલો થવાની શક્યતા પણ રહે છે. જ્યારે વસ્તુઓની સંખ્યા ખૂબ જ ઓછી આપવામાં આવે તો સૂચક આંક પ્રતિનિધિ રૂપ બની શકે નહિ, તેથી સૂચક આંકની રચનામાં સૂચક આંકનો હેતુ સમય, ખર્ચનું પ્રમાણ, લોકોની જરૂરીયાત વગેરે બાબતોને ધ્યાનમાં લઈ યોગ્ય સંખ્યામાં વસ્તુઓ પસંદ કરવી જોઈએ.

વસ્તુઓની પસંદગી થઈ ગયા બાદ આ વસ્તુઓના ગુણધર્મો અને જરૂરિયાતના આધારે જુદા જુદા વિભાગોમાં વહેંચવામાં આવે છે. દા.ત. ખોરાકની વસ્તુઓ, બળતણ અને વીજળી, ઔદ્યોગિક કાચો માલ, તંબાકુ કે માદક પીણા વગેરે ગોઠવણી કર્યા બાદ તેમના જથ્થાબંધ ભાવો મેળવવામાં આવે છે. વસ્તુઓના ભાવ જુદા જુદા સમયગાળા દરમ્યાન કે જુદા જુદા સ્થળે આવેલી દુકાનોમાં એક સરખા હોતા નથી. તેથી જથ્થાબંધ ભાવોના સૂચક આંકની રચનામાં છૂટક ભાવ ધ્યાનમાં લેવામાં આવતા નથી. પરંતુ વસ્તુઓના જથ્થાબંધ ભાવો મેળવવામાં આવે છે. આવા જથ્થાબંધ ભાવ સરકારી સંસ્થાઓ, વિભાગીય સ્ટોર, જથ્થાબંધ વેપારી મંડળો કે વિશ્વાસુ વેપારીઓ પાસેથી મેળવવામાં આવે છે. આ પ્રકારના ભાવો દરરોજ મેળવવામાં સમય, શક્તિ અને નાણાંનો વ્યય થાય છે. આ ઉપરાંત જો વર્ષમાં એક જ વખત ભાવ મેળવવામાં આવે તો યોગ્ય પ્રતિનિધિ રૂપ ભાવ ન મળે તેથી આવા જથ્થાબંધ ભાવ યોગ્ય અને નિયમિત સમયના અંતરે, પ્રમાણિત ધોરણે લેવામાં આવે છે. આવા ભાવોની સરેરાશના આધારે સૂચક આંકની રચના કરવામાં આવે છે.

(3) આધાર વર્ષની પસંદગી :-

વસ્તુઓની પસંદગી કર્યા બાદ દરેક વસ્તુઓની ચાલુ વર્ષની કિંમતને કોઈ ચોક્કસ સમયના આધાર વર્ષની કિંમત સાથે સરખાવમાં આવે છે. સૂચક આંકની રચનામાં પસંદ કરાયેલું આધાર વર્ષ પ્રમાણ્ય વર્ષ એટલે કે સામાન્ય વર્ષ હોવું જોઈએ. જે વર્ષમાં યુદ્ધ, ભૂકંપો, સુનામી, હડતાળ, અતિવૃષ્ટિ, દુકાળ, ફુગાવો, રોગચાળો, મંદી વગેરે રાજકીય ફેરફારો કે કુદરતી આફતોની અસરવાળું ન હોવું જોઈએ.

સૂચક આંકની રચનામાં આધાર વર્ષની પસંદગી કરવા બે રીતોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. (i) અચળ (સ્થિર) આધારની રીત (ii) પરંપરિત આધારની રીત.

(i) અચળ (સ્થિર) આધારની રીત [Fixed Base Method] :-

આ રીતમાં કોઈ એક વર્ષને અચળ ગણી તેને આધાર વર્ષ તરીકે લેવામાં આવે છે. કેટલીકવાર કોઈ એક વર્ષના ભાવોને આધાર વર્ષના ભાવો તરીકે ન લેતાં બે કે ત્રણ વર્ષના ભાવોની સરેરાશને અચળ ગણી તેમને જ અચળ આધાર વર્ષના ભાવો તરીકે લેવામાં આવે છે. અહી જે વર્ષને આધાર વર્ષ તરીકે લેવામાં આવે તે વર્ષ ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ સામાન્ય વર્ષ હોવું જોઈએ. આમ આ રીતમાં દરેક વર્ષના સૂચક આંકની ગણતરી કરતી વખતે આધાર વર્ષ અચળ રહે છે.

જો ચાલુ વર્ષની કોઈ એક વસ્તુના ભાવને P_1 વડે દર્શાવીએ, આધાર વર્ષના તેજ વસ્તુના ભાવને P_0 વડે દર્શાવીએ અને સૂચક આંકને I વડે દર્શાવવામાં આવે તો સૂચક આંકનું સૂત્ર નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય.

$$\text{અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષનો ભાવ}}{\text{અચળ આધાર વર્ષનો ભાવ}} \times 100$$

$$\therefore\ I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

આ અચળ આધારની રીતના ગુણદોષ નીચે મુજબ છે.

ગુણ (ફાયદા) :-

(1) આ રીતમાં આધાર વર્ષની કિંમત અચળ રહેતી હોવાથી બીજા વર્ષો સાથેની સરખામણીમી એક સૂત્રતા જળવાય રહે છે.

(2) આ રીત સમજવામાં તેમજ ગણતરીમાં સરળ છે.

(3) લાંબાગાળા માટે વસ્તુની કિંમતમાં થયેલા ફેરફારની સરખામણી કરવા માટે આ રીત ખૂબ જ ઉપયોગી પુરવાર થાય છે.

દોષ (ગેરફાયદા) :-

(1) ગ્રાહકોની ટેવો અને રૂચિમાં થતા ફેરફારને કારણે તેમની ઉપયોગમાં લેવાતી વસ્તુઓમાં ફેરફાર થાય છે. જુની વસ્તુઓની જગ્યાએ નવી વસ્તુઓ આવે છે. આમ વસ્તુઓ બદલાતી હોય ત્યાં અચળ આધારની રીત બિન ઉપયોગી નીવડે છે.

(2) આધાર વર્ષ તરીકે સામાન્ય વર્ષ પસંદ કરવું મુશ્કેલ છે. જો આધાર વર્ષ યોગ્ય રીતે પસંદ ન થાય તો મેળવેલ સૂચક આંક બિન ઉપયોગી બને છે.

(3) વસ્તુની ગુણવત્તા બદલાતી જતી હોવાથી તેના ભાવમાં પણ ફેરફાર થાય છે.

(4) જેમ જેમ આધાર વર્ષ જુનું થતું જાય છે, તેમ તેમ યોગ્ય અને વ્યાજબી સરખામણીનું પ્રમાણ પણ ઘટતું જાય છે.

(ii) પરંપરિત આધારની રીત [Chain Base Method] :-

આ રીતમાં આધાર વર્ષ સ્થિર કે અચળ રહેતું નથી. એટલે કે કોઈ એક જ વર્ષને આધાર વર્ષ તરીકે નહિં લેતા આધાર વર્ષ જેમ જેમ સમય બદલાય તેમ તેમ બદલાતું રહે છે. આમ આ રીત મુજબ જે વર્ષ માટે સૂચક આંક મેળવવો હોય તેના અગાઉના વર્ષને આધાર વર્ષ તરીકે ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. દા.ત. વર્ષ 2021નો સૂચક આંક શોધવો હોય તો વર્ષ 2020ને આધાર વર્ષ તરીકે ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. તેજ રીતે વર્ષ 2022નો સૂચક આંક શોધવાનો હોય તો વર્ષ 2021ને આધાર વર્ષ તરીકે લેવામાં આવે છે. આમ આ રીતમાં આધાર વર્ષની પસંદગી કરવાનો કોઈ પ્રશ્ન ઉપસ્થિત થતો નથી. ઉપરાંત નવી વસ્તુઓનો ઉમેરો કરી શકાય છે. જ્યારે બિન ઉપયોગી વસ્તુઓનો નિકાલ કરી શકાય છે.

આમ આ રીતમાં વારંવાર આધારની કિંમત બદલાતી હોવાથી આ રીતને ''પરંપરિત આધારની રીત'' કહે છે. આ રીત મુજબ સૂચક આંક શોધવા નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

$$\text{પરંપરિત આધારની રીતે સૂચક આંક} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષનો ભાવ}}{\text{તેના અગાઉના વર્ષનો ભાવ}} \times 100$$

$$\therefore\ I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

આ પરંપરિત આધારની રીતના ગુણદોષ નીચે મુજબ છે.

ગુણ (ફાયદા)

(1) સમયના ફેરફારની સાથે નવી વસ્તુઓ તેમના ઉપયોગ પ્રમાણે ઉમેરી શકાય છે. જ્યારે બિન ઉપયોગી વસ્તુઓનો નિકાલ કરી શકાય છે.

(2) આગળના વર્ષ સાથે સરખામણી થતી હોવાથી નજીકના ભૂતકાળની સરખામણીમાં થતા ફેરફાર જાણી શકાય છે. તેથી વેપાર અને વાણિજ્યના ક્ષેત્રમાં તે વધુ ઉપયોગી નીવડે છે.

(3) સમય પ્રમાણે જરૂર જણાય તેમ વસ્તુની જાતમાં પણ ફેરફાર કરી શકાય છે.

(4) પરંપરિત આધારની રીતમાં આધાર વર્ષની પસંદગી કરવા માટેનો કોઈ પ્રશ્નો ઉપસ્થિત થતો નથી. કારણ કે આ રીતમાં અગાઉના વર્ષને આધાર વર્ષ તરીકે ગણવામાં આવે છે.

(5) એક વર્ષ જેટલા ટૂંકાગાળામાં વસ્તુની ગુણવત્તામાં ભાગ્યે જ બહુ તફાવત પાયો હોય છે. તેથી આ રીત ખૂબ જ ઉપયોગી પુરવાર થાય છે.

દોષ (ગેરફાયદા) :-

(1) આ રીતમાં દૂરના વર્ષ સાથે સરખામણી થઈ શકે નહિં.

(2) આ રીતથી ગણતરીમાં જો કોઈ એક વર્ષ માટે ભૂલ થઈ હોય તઓ તે ભૂલ પછીનાં બધા વર્ષો માટે ચાલુ રહે છે.

(3) આ રીતમાં દર વર્ષે આધાર વર્ષ બદલાતો જતો હોવાથી સરખામણી માટેનું માપદંડ બદલાતું રહે છે. જેથી સરખામણી કરવી વાજબી ગણી શકાય નહિં.

(4) જે વર્ષ માટે સૂચક આંક મેળવવાનો હોય તેના અગાઉનું વર્ષ સામાન્ય વર્ષ ન હોય ત્યારે ચાલુ વર્ષ માટે શોધેલ સૂચક આંક સાચું માપ રજૂ કરી શકતો નથી.

(5) દર વર્ષે ભારની ગણતરી કરવી પડે છે. જે ખર્ચાળ અને અઘરી હોય છે.

(iii) આધાર પરિવર્તન :-

(a) અચળ આધારોના સૂચક આંકનું પરંપરિત આધારના સૂચક આંકમાં પરિવર્તન :-

કોઈ એક વસ્તુનો અચળ આધારને સૂચક આંક મેળવેલો હોય કે આપવામાં આવેલ હોય તેવા સૂચક આંકને પરંપરિત આધારના સૂચક આંકમાં પરિવર્તન કરી શકાય છે. તેથી નજીકના વર્ષોમાં થયેલ ફેરફારની સરખામણી કરી શકાય. આ માટે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

$$\text{પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષનો અચળ આધારનો સૂચકઆંક}}{\text{અગાઉના વર્ષનો અચળ આધારનો સૂચકઆંક}} \times 100$$

નોંધ :- અચળ આધારના સૂચક આંકને પરંપરિત આધારના આંકમાં પરિવર્તન કરવા માટે પ્રથમ વર્ષનો પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક 100 લેવામાં આવે છે.

(b) પરંપરિત આધારના સૂચક આંકનું અચળ આધારના સૂચક આંકમાં પરિવર્તન :-

જો કોઈ વસ્તુનો પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક મેળવેલ હોય કે આપવામાં આવેલ હોય તો તેને અચળ આધારના સૂચક આંકમાં પરિવર્તન કરી શકાય છે. ચાલુ વર્ષનો અચળ આધારનો સૂચક આંક મેળવવા માટે ચાલુ વર્ષના પરંપરિત આધારના સૂચક આંકને તેના અગાઉના વર્ષના અચળ આધારના સૂચક આંક વડે ગુણવામાં આવે છે. અને આ ગુણાકારને 100 વડે ભાગવામાં આવે છે. પરંપરિત આધારના સૂચક આંકને અચળ આધારના સૂચક આંકમાં પરિવર્તન કરવા પ્રથમ વર્ષનો અચળ આધારને સૂચક આંક, પ્રથમ વર્ષના પરંપરિત આધારના સૂચક આંક જેટલો જ હોય છે. આ માટે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શકાય.

ચાલુ વર્ષનો અચળ આધારનો સૂચક આંક =

$$\frac{\text{ચાલુ વર્ષનો પરંપરિત આધારનો સૂચકઆંક} \times \text{તેના અગાઉના વર્ષનો અચળ આધારનો સૂચકઆંક}}{100}$$

(4) સરેરાશની પસંદગી :-

અચળ આધારની રીતે તેમજ પરંપરિત આધારની રીતે જુદી જુદી વસ્તુઓના ભાવોની સાપેક્ષ ટકાવારી શોધ્યા બાદ તેમની યોગ્ય સરેરાશ શોધવાથી સૂચક આંક પ્રાપ્ત થાય છે. નીચે જણાવેલ સરેરાશોમાંથી કોઈ પણ એક સરેરાશની મદદથી સૂચક આંકનું માપ નક્કી કરવામાં આવે છે.

(a) મધ્યક :- સરેરાશના જુદાજુદા માપો પૈકી મધ્યક એ સરેરાશનું આદર્શ માપ છે. તેમાં દરેક પ્રાપ્તાંક ગણતરીમાં લેવામાં આવે છે. આમ છતાં મધ્યક પર છેવટના પ્રાપ્તાંક કિંમતોની વધુ પ્રમાણમાં અસર થાય છે. મધ્યક એ એક નિરપેક્ષ માપ છે અને કાર્લ વિપર્યાસ પરીક્ષણ માટે અનુકૂળ નથી તેથી સૂચક આંકની ગણતરીમાં મધ્યકનો ઉપયોગ કરવા વાજબી ગણી શકાય નહીં.

(b) મધ્યસ્થ :- મધ્યસ્થ સમજવામાં સરળ છે. તેના પર છેવટના પ્રાપ્તાંકોની અસર થતી નથી, પરંતુ મધ્યસ્થ એ પ્રાપ્તાંકોમાં આવેલું મધ્યમનું માપ છે. વળી જ્યારે બેકી સંખ્યામાં પ્રાપ્તાંકો હોય ત્યારે મધ્યમાં આવેલી બે કિંમતોની સરેરાશ મધ્યસ્થ તરીકે લેવામાં આવે છે. તેથી સૂચક આંકમાં મધ્યસ્થનો ઉપયોગ હિતાવહ નથી.

(c) બહુલક :- પ્રાપ્તાંકોમાં સૌથી વધુ વખત પુનરાવર્તન પામતો પ્રાપ્તાંક બહુલક બને છે. પરંતુ કેટલીક વખત આપેલ શ્રેણીમાં એક કરતાં વધુ બહુલક આવતા હોય છે. આમ બહુલક સરેરાશનું સાચું માપ રજૂ કરતો નથી માટે તેનો ઉપયોગ કરી શકાય નહીં.

(d) ગુણોત્તર મધ્યક :- ગુણોત્તર મધ્યકની ગણતરી સમજવામાં અઘરી તેમજ ગુંચવણ ભરી છે. આમ છતાં પણ સૂચક આંકની ગણતરીમાં તેનો વ્યાપક ઉપયોગ થાય છે. કારણ કે ગુણોત્તર મધ્યક એ એક સાપેક્ષ માપ છે. તેમજ મોટી કિંમતના પ્રાપ્તાંકોને ઓછું અને નાની કિંમતના પ્રાપ્તાંકોને વધુ મહત્વ આપે છે. તેમજ સૂચક આંકના બંને પરીક્ષણોનું સમાધાન કરે છે. તેથી ગુણોત્તર મધ્યકને સૂચક આંકની ગણતરી માટે શ્રેષ્ઠ માપ ગણાય છે. જો કે વ્યવહારમાં ભારિત મધ્યકનો ઉપયોગ વધુ થાય છે.

(5) ભારની પસંદગી :-

સૂચક આંકની રચનામાં વસ્તુઓની પસંદગી તેમજ સરેરાશની પસંદગી પછી અગત્યનું પગથિયું દરેક વસ્તુને તેના મહત્વ પ્રમાણે ભાર આપવાનું છે. દરેક વસ્તુઓ તેની ઉપયોગીતા અને જરૂરિયાત પ્રમાણે જુદું જુદું મહત્વ ધરાવતી હોય છે. આવી વસ્તુઓ જે પ્રમાણમાં અગત્યની હોય તે પ્રમાણે વસ્તુને ભાર આપવામાં આવે છે. આવા ભાર આપવાની બે રીતો છે.

(a) ગર્ભિત ભાર (b) સ્પષ્ટ ભાર

(a) ગર્ભિત ભાર :- ભાર આપવા માટેના આ પરોક્ષ રીત છે. આ રીત મુજબ વસ્તુઓની પસંદગી કરતી વખતે જે વસ્તુઓની અગત્યતા વધારે હોય તે વસ્તુઓની વધારે જાતો પસંદ કરવામાં આવે છે. દા.ત. કોઈ એક શહેરના સૂચક આંકની ગણતરી કરતી વખતે તે શહેરમાં ઘઉંનો ઉપયોગ બાજરીના ઉપયોગ કરતાં ત્રણ ગણો હોય તો ઘઉંની ત્રણ જાતોના ભાવ લેવામાં આવે છે અને બાજરીની એક જ જાતનો ભાવ લેવામાં આવે છે. આમ આપ મેળે દરેક વસ્તુનો ભાર (સાપેક્ષ મહત્વ) ધ્યાનમાં લેવાય જાય છે. આ રીતને ગર્ભિત ભારની રીત કહે છે. કેટલીક વખત વસ્તુઓની પસંદગી જ એવી રીતે કરવામાં આવે છે કે જેથી તેની પસંદગીમાં ભારનો સમાવેશ થઈ જાય છે. આ પ્રકારનો ભાર સંખ્યાત્મક, રીતે દર્શાવી શકાતો નથી.

(b) સ્પષ્ટ ભાર :- વસ્તુઓની જુદી જુદી જાતો ન લેતાં એક જ જાત લઈ તેના આંકને તેની જાતોની સંખ્યા વડે ગુણવાથી સ્પષ્ટ ભાર મળે છે. ભાર આપવાની આ એક પ્રત્યક્ષ રીત છે. આ રીતમાં ભારને સ્પષ્ટ પણે સંખ્યામાં દર્શાવવામાં આવે છે. દા.ત. કોઈ શહેરના લોકો ખાંડ કરતાં ઘઉંનો પાંચ ગણો, ચોખાનો ત્રણ ગણો અને બાજરીનો

બમણો ઉપયોગ કરતા હોય તો ખાંડના ભાર 1, ઘઉંનો ભાર 5, ચોખાનો ભાર 3 અને બાજરીનો ભાર 2 એમ સ્પષ્ટ રીતે દર્શાવવામાં આવે છે.

સામાન્ય રીતે વ્યવહારમાં ભારીત મધ્યકનો વધુ ઉપયોગ થાય છે. પરંતુ જુદી જુદી વસ્તુઓના ભાર નક્કી કરતી વખતે વિવેક દૃષ્ટિથી અને તર્કશીલ રીતે નિર્ણય લેવા જોઈએ. સ્પષ્ટ ભાર આપવા માટે ભારીત પદ્ધતિની બે રીતો વધુ પ્રચલિત છે. (i) કુલ ખર્ચની પદ્ધતિ અથવા ભારિત સમૂહ પદ્ધતિ (ii) કૌટુંબિક બજેટની પદ્ધતિ અથવા સાપેક્ષની ભારિત પદ્ધતિ.

(**નોંધ :-** આ બંને પદ્ધતિની ચર્ચા હવે પછીના પ્રકરણમાં વિસ્તારથી કરવામાં આવી છે.)

9.8 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ : - 1 કોઈ એક વસ્તુના છેલ્લા 9 વર્ષના ભાવ નીચે મુજબ આપેલા છે. 2014ના વર્ષને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

વર્ષ :-	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
ભાવ (રૂ. માં)	60	65	70	72	75	80	90	95	100

જવાબ : - અહીં અચળ આધારની રીતે વર્ષ 2014ના ભાવને આધાર વર્ષનો ભાવ [P_0 = 60] ગણી બાકીના વર્ષો માટે સૂચક આંક નીચે મુજબ શોધવામાં આવેલ છે.

સૂત્ર $\therefore I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$

અહીં P_1 દરેક વર્ષનો ભાવ જથ્થો $P_0 = 60$ અચળ રહેશે.

વર્ષ (રૂ. માં)	ભાવ	અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક
2014	60	$\frac{60}{60} \times 100 = 100$
2015	65	$\frac{65}{60} \times 100 = 108.33$
2016	70	$\frac{70}{60} \times 100 = 116.67$
2017	72	$\frac{72}{60} \times 100 = 120$
2018	75	$\frac{75}{60} \times 100 = 125$
2019	80	$\frac{80}{60} \times 100 = 133.33$
2020	90	$\frac{90}{60} \times 100 = 150$
2021	95	$\frac{95}{60} \times 100 = 158.33$
2022	100	$\frac{100}{60} \times 100 = 166.67$

સમજૂતી :-

અહી પ્રથમ વર્ષ 2014 આપેલ છે અને તેને જ આધાર વર્ષ તરીકે ગણવાનું હોવાથી 2014નો સૂચક આંક મેળવવા માટે P_0 અને P_1 ની કિંમત સરખી થશે તેથી સૂચક આંક 100 આવે છે.

2015નો સૂચક આંક મેળવવા માટે 2015નો ચાલુ વર્ષ ગણી 2015ના ભાવને $P_1 = 65$ લેતાં સૂચક આંક 108.33 આવે છે.

2016 માટે $P_1 = 70$ લેવી. તેજ પ્રમાણે બાકીના વર્ષની ગણતરી કરેલ છે.

ઉદાહરણ :- 2 નીચેની માહિતી પરથી વર્ષ 2012ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

વર્ષ :	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
ભાવ રૂ. માં	50	75	90	100	150	200	225	240	250

જવાબ :- અચળ આધારની રીતે તેમજ 2012ને અચળ ધારવાનું હોવાથી $P_0 = 50$ થશે.

$$\therefore\ I = \frac{P_1}{P_0}\times 100 \quad \therefore\ I = \frac{P_1}{50}\times 100$$

P_1 ની કિંમત જે તે વર્ષની લેતા જવી.

વર્ષ	ભાવ રૂ. માં	અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક
2012	50	$\frac{50}{50}\times 100 = 100$
2013	75	$\frac{75}{50}\times 100 = 150$
2014	90	$\frac{90}{50}\times 100 = 180$
2015	100	$\frac{100}{50}\times 100 = 200$
2016	150	$\frac{150}{50}\times 100 = 300$
2017	200	$\frac{200}{50}\times 100 = 400$
2018	225	$\frac{225}{50}\times 100 = 450$
2019	240	$\frac{240}{50}\times 100 = 480$
2020	250	$\frac{250}{50}\times 100 = 500$

ઉદાહરણ :-3 નીચેની માહિતી પરથી વર્ષ 2018ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક શોધો.

વર્ષ :	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
વેચાણ રૂ. માં.	80	85	90	110	120	135	150	170

જવાબ :- અહી વર્ષ 2018ને આધાર વર્ષ તરીકે લેવાનું હોવાથી $P_0 = 110$ થશે.

$$\therefore I = \frac{P_1}{P_0}\times 100 \quad \therefore I = \frac{P_1}{110}\times 100$$

જ્યાં P_1 = ની કિંમત જે તે વર્ષ સામેના વેચાણની કિંમત લેવી.

વર્ષ	વેચાણ રૂ. માં	અચળ આદારની રીતે સૂચક આંક
2015	80	$\frac{80}{110}\times 100 = 72.73$
2016	85	$\frac{85}{110}\times 100 = 77.27$
2017	90	$\frac{90}{110}\times 100 = 81.82$
2018	110	$\frac{110}{110}\times 100 = 100$
2019	120	$\frac{120}{110}\times 100 = 109.09$
2020	135	$\frac{135}{110}\times 100 = 122.73$
2021	150	$\frac{150}{110}\times 100 = 136.36$
2022	170	$\frac{170}{110}\times 100 = 154.55$

ઉદાહરણ :- 4 નીચે આપેલી માહિતી પરથી વર્ષ 2012 અને વર્ષ 2013ની કિંમતની સરેરાશને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

વર્ષ :	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
કિંમત રૂ. : માં	70	80	90	100	105	100	108	110	125

જવાબ :- અહીં વર્ષ 2012 અને વર્ષ 2013ની કિંમતની સરેરાશને આધાર વર્ષની કિંમત લેવાની હોવાથી સૌ પ્રથમ આપણે બંને વર્ષની કિંમતની સરેરાશ મેળવીશું.

$$\text{સરેરાશ} = \frac{70+80}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

$\therefore P_0 = 75$ થશે.

$\therefore\ I=\frac{P_1}{P_0}\times 100 \qquad \therefore\ I=\frac{P_1}{75}\times 100$

અહીં * ની કિંમત જે તે વર્ષ સામેની કિંમત લેવી.

વર્ષ	કિંમત	અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક
2012	70	$\frac{70}{75}\times 100 = 93.33$
2013	80	$\frac{80}{75}\times 100 = 106.67$
2014	90	$\frac{90}{75}\times 100 = 120$
2015	100	$\frac{100}{75}\times 100 = 133.33$
2016	105	$\frac{105}{75}\times 100 = 140$
2017	100	$\frac{100}{75}\times 100 = 133.33$
2018	108	$\frac{108}{75}\times 100 = 144$
2019	110	$\frac{110}{75}\times 100 = 146.67$
2020	125	$\frac{125}{75}\times 100 = 166.67$

ઉદાહરણ :- 5 નીચે આપેલ માહિતી પરથી પરંપરિત આધારની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

વર્ષ :	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
ઉત્પાદન (ટનમાં)	50	52	55	60	58	62	60	65

જવાબ :- અહી વર્ષ 2013ના ઉત્પાદનની કિંમત આપવામાં આવેલ નથી. તેથી વર્ષ 2014નો સૂચક આંક મેળવવા તેના આધાર વર્ષની કિંમત તેજ વર્ષનું ઉત્પાદન લેવામાં આવશે. તેથી પરંપરિત આધારની રીતે વર્ષ 2014નો સૂચક આંક 100 મળશે. બાકીના વર્ષ માટે તેના અગાઉના વર્ષનું ઉત્પાદન આધાર વર્ષ તરીકે ગણી સૂચક આંક શોધવામાં આવે છે.

$$\text{પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષનું ઉત્પાદન}}{\text{તેના અગાઉના વર્ષનું ઉત્પાદન}}\times 100$$

વર્ષ	ઉત્પાદન (ટનમાં)	પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક
2014	50	$\frac{50}{50}\times100 = 100$
2015	52	$\frac{52}{50}\times100 = 104$
2016	55	$\frac{55}{52}\times100 = 105.77$
2017	60	$\frac{60}{55}\times100 = 109.09$
2018	58	$\frac{58}{60}\times100 = 96.67$
2019	62	$\frac{62}{58}\times100 = 106.9૦$
2020	60	$\frac{60}{62}\times100 = 96.77$
2021	65	$\frac{65}{60}\times100 = 108.33$

ઉદાહરણ :- 6 નીચે આપેલ માહિતી પરથી પરંપરિત આધારની રીતે સૂચક આંક શોધો.

વર્ષ :	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
ભાર (રૂ.માં) :	5	7.5	8	10	12.5	14.5	15	14	12	15

જવાબ :- અહીં પણ વર્ષ 2012નો ભાવ આપેલ નથી તેથી વર્ષ 2012નો સૂચક આંક 100 થશે. બીજા વર્ષ માટે તેના અગાઉના વર્ષનો ભાવ લઈ સૂચક આંક મેળવીશું.

$$\text{પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષનો ભાવ}}{\text{તેના અગાઉના વર્ષનો ભાવ}}\times100$$

વર્ષ	ભાવ રૂ. માં	પરંપરિત આધારની રીતે સૂચક આંક
2012	5	$\frac{5}{5}\times100 = 100$
2013	7.5	$\frac{7.5}{5}\times100 = 150$
2014	8	$\frac{8}{7.5}\times100 = 106.67$
2015	10	$\frac{10}{8}\times100 = 125$
2016	12.5	$\frac{12.5}{10}\times100 = 125$

2017	14.5	$\frac{14.5}{12.5}\times100 = 116$
2018	15	$\frac{15}{14.5}\times100 = 103.45$
2019	14	$\frac{14}{15}\times100 = 93.33$
2020	12	$\frac{12}{14}\times100 = 85.71$
2021	15	$\frac{15}{12}\times100 = 125$

ઉદાહરણ :- 7 કોઈ એક વસ્તુના છેલ્લા 10 વર્ષના ભાવ નીચે મુજબ આપેલા છે. વર્ષ 2012ને અચળ ગણી અચળ આધારની સૂચક આંક શોધો. તેમજ પરંપરિત આધારની રીતે પણ સૂચક આંક મેળવો.

વર્ષ	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
ભાવ (રૂ. માં)	10	11	12	15	14	12	16	18	20	21

જવાબ :- અહીં બંને રીતે સૂચક આંક મેળવવાનું કહ્યું છે. તો આપણે એક જ કોષ્ટકમાં બંને રીતે સૂચક આંક મેળવીશું.

$\therefore I = \frac{P_1}{P_0}\times100$ અચળ આધારની રીતે $P_0 = 10$ થશે.

વર્ષ	ભાવ	અચળ આધારની	પરંપરિત આધાર રીતે સૂચક આંક
2012	10	$\frac{10}{10}\times100 = 100$	$\frac{10}{10}\times100 = 100$
2013	11	$\frac{11}{10}\times100 = 110$	$\frac{11}{10}\times100 = 110$
2014	12	$\frac{12}{10}\times100 = 120$	$\frac{12}{11}\times100 = 109.09$
2015	15	$\frac{15}{10}\times100 = 150$	$\frac{15}{12}\times100 = 125$
2016	14	$\frac{14}{10}\times100 = 140$	$\frac{14}{15}\times100 = 93.33$
2017	12	$\frac{12}{10}\times100 = 120$	$\frac{12}{14}\times100 = 85.71$
2018	16	$\frac{16}{10}\times100 = 160$	$\frac{16}{12}\times100 = 133.33$
2019	18	$\frac{18}{10}\times100 = 180$	$\frac{18}{16}\times100 = 112.5$
2020	20	$\frac{20}{10}\times100 = 200$	$\frac{20}{18}\times100 = 111.11$
2021	21	$\frac{21}{10}\times100 = 210$	$\frac{21}{20}\times100 = 105$

ઉદાહરણ :- 8 નીચે આપેલ સૂચક આંકને પરંપરિત આધારના સૂચક આંકમાં ફેરવો.

વર્ષ :	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
અચળ આધારનો સૂચક આંક :	125	130	150	170	160	180	200	220

જવાબ :- અહીં અચળ આધારનો સૂચક આંક આપવામાં આવેલ છે. આ સૂચક આંકને પરંપરિત આધારના સૂચક આંકમાં ફેરવવાનું કહ્યું છે. તેની નીચે મુજબના સૂત્રની મદદથી પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક મેળવીશું.

$$\text{પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષનો અચળ આધારનો સૂચકઆંક}}{\text{અગાઉના વર્ષનો અચળ આધારનો સૂચકઆંક}} \times 100$$

વર્ષ	અચળ આધારનો સૂચક આંક	પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક
2014	125	$\frac{125}{125} \times 100 = 100$
2015	130	$\frac{130}{125} \times 100 = 104$
2016	150	$\frac{150}{130} \times 100 = 115.38$
2017	170	$\frac{170}{150} \times 100 = 113.33$
2018	160	$\frac{160}{170} \times 100 = 94.12$
2019	180	$\frac{180}{160} \times 100 = 112.5$
2020	200	$\frac{200}{180} \times 100 = 111.11$
2021	220	$\frac{220}{200} \times 100 = 110$

નોંધ :- જ્યારે અચળ સાધનનો સૂચક આંક આપવામાં આવેલ હોય અને તેને પરંપરિત આધારમાં ફેરવવાનું કહ્યું હોય ત્યારે પરંપરિત આધારની રીતનું સૂત્ર છે તે જ મુજબ અહીં પણ ગણતરી થશે.

ઉદાહરણ :- 9 નીચે આપેલ અચળ આધારના સૂચક આંકને પરંપરિત આધારના સૂચક આંકમાં ફેરવો.

વર્ષ	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
સૂચક આંક	80	110	120	125	150	160	170

જવાબ :- અહીં અચળ આધારનો સૂચક આંક આપેલ છે. તેને પરંપરિત આધારના સૂચક આંકમાં ફેરવીશું.

વર્ષ	અચળ આધારનો સૂચક આંક	પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક
2015	80	$\frac{80}{80}\times100 = 100$
2016	110	$\frac{110}{80}\times100 = 137.5$
2017	120	$\frac{120}{110}\times100 = 109.09$
2018	125	$\frac{125}{120}\times100 = 104.17$
2019	150	$\frac{150}{125}\times100 = 120$
2020	160	$\frac{160}{150}\times100 = 106.67$
2021	170	$\frac{170}{160}\times100 = 106.25$

ઉદાહરણ :- 10 નીચે આપેલ પરંપરિત આધારના સૂચક આંકને અચળ આધારના સૂચક આંકમાં ફેરવો.

વર્ષ	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક	90	100	115	125	120	110	105	130

જવાબ :- અહીં પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક આપેલ છે. તેનું અચળ આધારના સૂચક આંકમાં પરિવર્તન કરવા છે. સૌ પ્રથમ પ્રથમ વર્ષ એટલે કે અહીં 2014માં અચળ આધારના સૂચક આંક જેટલો જ લેવો. તેથી 2014નો અચળ આધારનો સૂચક આંક = 90 થશે. ત્યારબાદ નીચેના સૂત્રની મદદથી બાકીના વર્ષો માટે અચળ આધારના સૂચક આંકની ગણતરી કરીશું.

અચળ આધારનો સૂચક આંક =

$$\frac{\text{ચાલુ વર્ષનો પરંપરિત આધારનો સૂચકઆંક} \times \text{તેના અગાઉના વર્ષનો અચળ આધારનો સૂચકઆંક}}{100}$$

વર્ષ	પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક	અચળ આધારનો સૂચક આંક
2014	90	= 90
2015	100	$= \frac{100\times90}{100} = 90$
2016	115	$= \frac{115\times90}{100} = 103.5$
2017	125	$= \frac{125\times103.5}{100} = 129.38$
2018	120	$= \frac{120\times129.38}{100} = 155.26$
2019	110	$= \frac{110\times155.26}{100} = 170.79$
2020	105	$= \frac{105\times170.79}{100} = 179.33$
2021	130	$= \frac{130\times179.33}{100} = 233.13$

ઉદાહરણ :- 11 નીચે આપેલ સૂચક આંકને અચળ આધારના સૂચક આંકમાં ફેરવો.

વર્ષ :	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક :	85	80	90	105	100	95	110	120	125

જવાબ :- અહીં પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક આપેલ છે. તેને અચળ આધારના સૂચક આંકમાં પરિવર્તન કરવું છે. તેથી વર્ષ 2012નો અચળ આધારનો સૂચક = 85 થશે. બાકીના વર્ષ માટે નચેના સૂત્રની મદદથી અચળ આધારનો સૂચક આંક મેળવીશું.

અચળ આધારનો સૂચક આંક =

$$\frac{\text{ચાલુ વર્ષનો પરંપરિત આધારનો સૂચકઆંક} \times \text{તેના અગાઉના વર્ષનો અચળ આધારનો સૂચકઆંક}}{100}$$

વર્ષ	પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક	અચળ આધારનો સૂચક આંક
2012	85	$= 85$
2013	80	$\frac{80\times85}{100} = 68$
2014	90	$\frac{90\times68}{100} = 61.2$
2015	105	$\frac{105\times61.2}{100} = 64.26$
2016	100	$\frac{100\times64.26}{100} = 64.26$
2017	95	$\frac{95\times64.26}{100} = 61.047$
2018	110	$\frac{110\times61.047}{100} = 67.15$
2019	120	$\frac{120\times67.15}{100} = 80.58$
2020	125	$\frac{125\times80.58}{100} = 100.73$

9.9 તમારી પ્રગતિ ચકાસો.

9.9.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.

(1) સૂચક આંક એટલે શું ? સૂચક આંકનાં લક્ષણો જણાવો.

(2) સૂચક આંકની વ્યાખ્યા આપી તેની ઉપયોગીતા ચર્ચો.

(3) "સૂચક આંક એ દેશના અર્થતંત્રની પરાશીશી છે." આ વિધાન સૂચક આંકના ઉપયોગોના અનુસંધાનમાં સમજાવો.

(4) સૂચક આંકનો અર્થ સમજાવી. સૂચક આંકની મર્યાદાઓ જણાવો.

(5) જથ્થાબંધ ભાવોના સૂચક આંકની રચના માટેના મુદ્દાઓ ટૂંકમાં ચર્ચો.

(6) આધાર વર્ષ એટલે શું ? સૂચક આંકની રચના માટેની આધાર વર્ષની રીતો સમજાવો.

(7) અચળ આધારની રીત અને પરંપરિત આધારની રીત સમજાવો.

(8) અચળ આધારની રીત અને પરંપરિત આધારની રીતનો તફાવત લખો.

(9) અચળ આધારની રીતમાં આધાર વર્ષની પસંદગી કરવામાં કઈ કઈ બાબતો ધ્યાનમાં લેવી જોઈએ તે જણાવો. ઉપરાંત અચળ આધારની રીતના ફાયદા અને ગેરફાયદા જણાવો.

(10) પરંપરિત આધારની રીત સવિસ્તાર સમજાવી તેના ગુણ-દોષ લખો.

(11) જથ્થા બંધ ભાવના સૂચક આંક પર ટૂંકનોંધ લખો.

(12) સૂચક આંકની રચનામાં નીચેનાનું મહત્વ સમજાવો.

(i) આધાર વર્ષની પસંદગી (ii) સરેરાશની પસંદગી (iii) ભારની પસંદગી

(13) ગર્ભિત ભાર અને સ્પષ્ટભાર પર ટૂંકનોંધ લખો.

(14) સૂચક આંકની રચનામાં નીચેનાનું મહત્વ સમજાવો : (i) હેતુ (ii) વસ્તુઓની પસંદગી વસ્તુઓની સંખ્યા તેમજ વસ્તુઓના ભાવ

(15) અચળ આધાર વર્ષના સૂચક આંકોને પરંપરિત આધાર વર્ષના સૂચક આંકોમાં કેવી રીતે ફેરવવામાં આવે છે ? ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

(16) પરંપરિત આધાર વર્ષના સૂચક આંકઓને અચળ આધાર વર્ષના સૂચક આંકોમાં કેવી રીતે ફેરવવામાં આવે છે ? ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

(17) કોઈ એક વસ્તુના છેલ્લા 10 વર્ષના ભાવ નીચે મુજબ આપેલા છે. 2012ના વર્ષને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક શોધો.

વર્ષ	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
ભાવ (રૂ. માં)	10	12	11	14	15	18	16	17	20	22

(18) એક કંપનીનું જુદા જુદા વર્ષ દરમ્યાન સ્ટીલનું વાર્ષિક ઉત્પાદન નીચે પ્રમાણે છે.

વર્ષ	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
ઉત્પાદન (ટનમાં)	500	600	650	700	720	780	800	900	1000

વર્ષ 2014ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક ગણો.

(19) નીચે આપેલ માહિતી પરથી વર્ષ 2017ને આધાર વર્ષ તરીકે ગણી અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક ગણો.

વર્ષ	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
કિંમત (રૂ. માં)	175	210	180	200	220	250	280	300

(20) નીચે આપેલ માહિતી પરથી વર્ષ 2016ને અચળ આધાર વર્ષ તરીકે ગણી અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક શોધો.

વર્ષ	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
વેચાણ (રૂ. કરોડમાં)	40	50	60	65	70	60	70	75	80

(21) નીચે આપેલી માહિતી પરથી વર્ષ 2015 અને વર્ષ 2016ના ભાવની સરેરાશ આધાર વર્ષ તરીકે લઈ અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

વર્ષ	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
ભાવ (રૂ. માં)	122	128	130	135	140	150	180	200

(22) નીચે આપેલી માહિતી પરથી વર્ષ 2016 અને વર્ષ 2017ના ઉત્પાદનની સરેરાશને આધારે વર્ષ તરીકે લઈ અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક શોધો.

વર્ષ	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
ઉત્પાદન (ટનમાં)	8	10	15	25	22	28	30	35	40

(23) નીચે આપેલ માહિતી પરથી પરંપરિત આધારની રીતે સૂચક આંકની ગણતરી કરો.

વર્ષ	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
કિંમત (રૂ. માં)	60	75	90	120	144	165	190	220	250

(24) નીચે આપેલ માહિતી પરથી પરંપરિત આધારની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

વર્ષ	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
વેચાણ (રૂ. લાખમાં)	150	160	200	220	240	260	300	300	400	480

(25) નીચે આપેલ કોઈ એક કંપનીના વાર્ષિક ઉત્પાદનની માહિતી પરથી (i) વર્ષ 2018ને આધાર વર્ષ ગણીને અચળ આધારની રીતે અને (ii) પરંપરિત આધારની રીતે સૂચક આંક તૈયાર કરો.

વર્ષ	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
ઉત્પાદન (ટનમાં)	120	160	180	160	200	240	250	320

(26) નીચે આપેલ માહિતી ક્રમિક છ વર્ષના અનાજના ભાવ અંગેની છે. ભાવ સાપેક્ષની ગણતરી કરો. (i) વર્ષ 2017ને આધાર વર્ષ ગણીને અચળ આધારની રીતે (ii) પરંપરિત આધારની રીતે.

વર્ષ	2017	2018	2019	2020	2021	2022
ક્વિન્ટલ દીઠ ભાવ(રૂ.માં)	40	50	45	55	65	105

(27) નીચેની માહિતી પરથી વર્ષ 2018 અને વર્ષ 2020ની કિંમતની સરેરાશને આધાર વર્ષ તરીકે ગણી અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક શોધો. તેમજ પરંપરિત આધારની રીતે પણ સૂચક આંક ગણો.

વર્ષ	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
કિંમત	50	70	80	100	110	120	150	180

(28) નીચે આપેલ સૂચક આંકને પરંપરિત આધાર સૂચક આંકમાં ફેરવો.

વર્ષ :	2017	2018	2019	2020	2021	2022
અચળ આધારનો સૂચક આંક :	180	195	210	200	220	230

(29) નીચે આપેલ અચળ આધારના સૂચક આંકને પરંપરિત આધારના સૂચક આંકમાં ફેરવો.

વર્ષ	2016	2017	2018	2019	2020	2021
સૂચક આંક	94	98	102	95	98	100

(30) નીચે આપેલ પરંપરિત આધારના સૂચક આંકને અચળ આધારના સૂચક આંકમાં ફેરવો.

વર્ષ :	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક :	80	110	120	105	130	140	150

(31) ઘઉંના ભાવોની માહિતી પરથી પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક નીચે દર્શાવેલ છે. તે પરથી અચળ આધારનો સૂચક આંક મેળવો.

વર્ષ :	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
સૂચક આંક :	100	120	140	125	160	150	130

જવાબો :

(17) અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક = 100, 120, 110, 140, 150, 180, 160, 170, 200, 220.

(18) અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક = 100, 120, 130, 140, 144, 156, 160, 180, 200.

(19) અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક = 87.5, 105, 90, 100, 110, 125, 140, 150.

(20) અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક = 66.67, 83.33, 100, 108.33, 116.67, 100, 116.67, 125, 133.33.

(21) અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક = 97.6, 102.4, 104, 108, 112, 120, 144, 160.

(22) અચળ આધારની રીતે સૂચક આંક = 20, 50, 75, 125, 110, 140, 150, 175, 200.

(23) પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક = 100, 125, 120, 133.33, 120, 144.58, 115.15, 115.70, 113.64.

(24) પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક = 100, 106.67, 125, 110, 109.09, 108.33, 115.38, 100, 133.33, 120.

(25) (i) અચળ આધારનો સૂચક આંક :- 75, 100, 112.5, 100, 125, 150, 156.25, 200

(ii) પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક :- 100, 133.33, 112.5, 88.89, 125, 120, 104.17, 128.

(26) (i) અચળ આધારનો સૂચક આંક :- 100, 125, 112.5, 137.5, 162.5, 262.5

(ii) પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક :- 100, 125, 90, 122.22, 118.18, 161.54

(27) અચળ આધારનો સૂચક આંક :- 45.45, 63.64, 72.73, 90.91, 100, 109.09, 136.36, 163.64

પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક :- 100, 140, 114.29, 125, 110, 109.09, 125, 120.

(28) પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક :- 100, 108.33, 107.69, 95.24, 110, 104.55

(29) પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક :- 100, 104.25, 104.08, 93.13, 103.15, 102.04

(30) અચળ આધારનો સૂચક આંક :- 80, 88, 105.60, 110.88, 144.14, 201.80, 302.70

(31) અચળ આધારનો સૂચક આંક :- 100, 120, 168, 210, 336, 504, 655.2

9.9.2 યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.

(1) સૂચક આંક એ કેવું માપ છે ?

(A) સામાન્ય માપ (B) સરેરાશ માપ (C) નિરપેશ માપ (D) સાપેક્ષ માપ

(2) આધાર વર્ષનો સૂચક આંક હંમેશાં કેટલો હોય છે ?

(A) 125 (B) 120 (C) 100 (D) 1

(3) એક વસ્તુનો ભાવ આધાર વર્ષ કરતાં 2.5 ગણો વધે છે. તો ભાવનો સૂચક આંક કેટલો થાય ?

(A) 150 (B) 250 (C) 350 (D) 100

(4) સૂચક આંકની રચનામાં આદર્શ અને યોગ્ય સરેરાશ કઈ છે ?

(A) ગુણોત્તર મધ્યક (B) ભારિત મધ્યક (C) સમાંતર મધ્યક (D) સરળ મધ્યક

(5) સૂચક આંકની ગણતરીની કઈ પદ્ધતિમાં આધાર વર્ષ બદલાતું રહે છે ?

(A) પરંપરિત આધારની રીત (B) અચળ આધારની રીત

(C) કૌટુંબિક બજેટની રીત (D) કુલ ખર્ચની રીત

(6) કોઈ એક વસ્તુનો પ્રથમ વર્ષનો અચળ આધારનો સૂચક આંક 180 આપેલ છે. તો આ સૂચક આંકોને પરંપરિત આધારના સૂચક આંકમાં ફેરવતાં પ્રથમ વર્ષનો પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક કેટલો થાય ?

(A) 180 (B) 100 (C) 55.56 (D) 90

(7) કોઈ એક વસ્તુનો પ્રથમ વર્ષનો પરંપરિત આધારનો સૂચક આંક 120 આપેલ છે. આ સૂચક આંકોને અચળ આધારના સૂચક આંકોમાં ફેરવતાં પ્રથમ વર્ષોનો અચળ આધારનો સૂચક આંક કેટલો થાય ?

(A) 83.83 (B) 100 (C) 120 (D) 60

(8) એક વસ્તુનો ભાવ આધાર વર્ષ કરતાં 4 ગણો વધે છે. તો ભાવનો સૂચક આંક કેટલો થાય ?

(A) 100 (B) 200 (C) 300 (D) 400

(9) આધાર વર્ષની સરખામણીમાં ચાલુ વર્ષે કોઈ વસ્તુનો ભાવ બમણો થાય તો તેનો સૂચક આંક કેટલો?

(A) 50 (B) 100 (C) 200 (D) 400

(10) સૂચક આંક – દ્વારા સરખામણી કરે છે.

(A) મધ્યસ્થ (B) ગુણોત્તર

(C) નિરપેક્ષ (D) આપેલમાંથી એક પણ નહિ

જવાબો :

1 (D) 2 (C) 3 (B) 4 (A) 5 (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (C) 10. (B)

9.10 ચાવીરૂપ શબ્દો :

- **સૂચક આંક** : સાપેક્ષ ફેરફાર
- **ગુણોત્તર** : પ્રમાણ
- **નિરપેક્ષ** : સ્વતંત્ર
- **જીવન નિર્વાહનો સૂચક આંક** : છુટક ભાવનો સૂ. આંક
- **અચળ આધાર** : સ્થિર આધાર
- **પરંપરિત આધાર** : અસ્થિર (સ્થિર ન રહે તેવું) આધાર
- **ભાર** : સાપેક્ષ મહત્વ

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) અર્થ વિષયક આંકડાશાસ્ત્ર, ડૉ. એમ. સી. જયસ્વાલ યુનિવર્સિટી ગ્રંથ નિર્માણ બૉર્ડ, ગુજરાત (1990)

(2) Fundamental of Statistics, S. C. & Sangya Srivastava, Amul Publication Pvt. Ltd. New Delhi (2009)

* * *

એકમ 10

સૂચક આંક-૨
(Index Number : - 2)

10.0 ઉદ્દેશો

10.1 પ્રસ્તાવના

10.2 કુલ ખર્ચની પદ્ધતિ

10.3 કૌટુંબિક બજેટની રીત

10.4 સૂચક આંકની ગણતરીની રીતો

10.4.1 લાસ્પેયરનો સૂચક આંક

10.4.2 પાશેનો સૂચક આંક

10.4.3 ફિશરનો સૂચક આંક

10.4.4 ડોર્બિશ અને બાઉલીનો સૂચક આંક

10.4.5 માર્શલ અને એજવર્થનો સૂચક આંક

10.5 સૂચક આંકનાં પરીક્ષણો

10.5.1 સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણ

10.5.2 પદ વિપર્યાસૂત્ર પરીક્ષણ

10.6 ઉદાહરણો

10.7 જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક

10.7.1 જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની રચના

10.7.2 જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકના ઉપયોગો

10.7.3 જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની મર્યાદાઓ

10.8 ઉદાહરણો

10.9 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

10.9.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.

10.9.2 યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

10.10 ચાવીરૂપ શબ્દો

★ સંદર્ભ ગ્રંથ

10.0 ઉદ્દેશો :-

આ પ્રકરણના અભ્યાસની મદદથી વિદ્યાર્થીઓ ભારિત પદ્ધતિની પસંદગી કરી સૂચક આંકનું સચોટ પરિણામ મેળવી શકે છે. ઉપરાંત જુદા જુદા વર્ગના જીવન ધોરણનો અભ્યાસ કરવા માટે જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની મદદથી ભવિષ્યમાં થનારા મોંઘવારી દરની માહિતી જાણી શકે છે, જે ભવિષ્ય માટે લેવાનારા નિર્ણયોમાં ખૂબ જ ઉપયોગી પુરવાર થશે.

10.1 પ્રસ્તાવના :-

આપણે અગાઉના પ્રકરણમાં જોઈ ગયા છીએ કે કોઈ એક વસ્તુના જુદા જુદા વર્ષો ભાવ આપવામાં આવેલ હોય ત્યારે અચળ આધારની રીત કે પરંપરિત આધારની રીતે સૂચક આંકો કેવી રીતે મેળવી શકાય છે. ઉપરાંત

અચળ કે પરંપરિત આધારના સૂચક આંક આપવામાં આવેલ હોય તેને અનુક્રમે પરંપરિત કે અચળ આધારમાં કેવી રીતે પરિવર્તન કરવામાં આવે છે તે પણ શીખી ગયા. હવે આ પ્રકરણમાં જુદા જુદા અર્થશાસ્ત્રીઓએ આપેલ સૂચક આંકના સૂત્રોની મદદથી જુદા જુદા સૂચક આંકો કેવી રીતે શોધી શકાય છે, તેમાંથી આદર્શ સૂત્ર કયું છે. આ ઉપરાંત જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકોનો અભ્યાસ કરીશું. ઉપરાંત આપણે અગાઉના પ્રકરણમાં અભ્યાસ કર્યો છે, તેમાં દરેક વસ્તુને સરખો જ ભાર અથવા મહત્વ આપવામાં આવ્યું છે. એટલે કે દરેક વસ્તુની સરખી જ ઉપયોગી છે અને સરખા જથ્થામાં વપરાય છે. એમ ધારવામાં આવ્યું છે. આ ધારણા ખરેખર દરેક વર્ગ માટે સાચી હોય શકે નહિ, ઉપરાંત દરેક વસ્તુના માપના એકમો જુદા જુદા હોય છે. તેથી દરેક વસ્તુની એક એકમની કિંમતનો સરવાળો કરવાથી ખાસ અર્થ સરતો નથી. દા.ત. કેટલીક વસ્તુઓ જેવી કે સોનું ઘણી કિંમતી છે, પણ તેની જીવનમાં બહુ ઉપયોગીતા નથી. જ્યારે મીઠું, શાકભાજી, બળતણ, અનાજ, કરીયાણું, કઠોળ વગેરે વસ્તુઓ પ્રમાણમાં સસ્તી છે. પણ તેની ઉપયોગીતા ઘણી જ છે. આ દરેક વસ્તુના એક કિલો ગ્રામની કિંમતોનો સરવાળો કરવો યોગ્ય નથી. આ કારણથી આ આંક વ્યવહારિક ગણી શકાય નહિ. તેથી સૂચક આંકની રચનામાં દરેક વસ્તુને યોગ્ય મહત્વ આપવું જોઈએ જેથી સૂચક આંક યોગ્ય પ્રતિનિધિત્વ કરી શકે જે નીચે મુજબની રીતોથી મેળવી શકાય.

10.2 કુલ ખર્ચની પદ્ધતિ (Method of Total Expenditure) : આ રીતમાં આધાર વર્ષ અને ચાલુ વર્ષમાં દરેક વસ્તુ માટેનો ખર્ચ મેળવી બધી જ વસ્તુઓ માટેના કુલ ખર્ચ મેળવવામાં આવે છે. ચાલુ વર્ષના કુલ ખર્ચ અને આધાર વર્ષના કુલ ખર્ચના ગુણોત્તરની ટકાવારીને કુલ ખર્ચની રીતથી મળતો સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે.

ધારોકે આધાર વર્ષનો ભાવ p_0, ચાલુ વર્ષનો ભાવ = p_1, આધાર વર્ષનો જથ્થો = q_0 અને ચાલુ વર્ષનો જથ્થો = q_1 વડે દર્શાવવામાં આવેતો, આધાર વર્ષથી જથ્થાને ધ્યાનમાં લઈ સૂચક આંક મેળવવાનો હોય ત્યારે $\sum p_0q_0$ એ આધાર વર્ષમાં કરેલું કુલ ખર્ચ દર્શાવે છે. તેવી જ રીતે $\sum p_1q_0$ એ ચાલુ વર્ષમાં કરેલું કુલ ખર્ચ દર્શાવે છે.

આ માટે કુલ ખર્ચની રીતે સૂચક આંક નીચે મુજબ મેળવી શકાય છે.

$$\text{કુલ ખર્ચની સૂચક આંક} = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$$

હવે ચાલુ વર્ષના જથ્થાને ધ્યાનમાં લઈ કુલ ખર્ચની રીત સૂચક આંક મેળવવાનો હોય ત્યારે $\sum p_1q_1$ એ આધાર વર્ષમાં કરેલું કુલ ખર્ચ દર્શાવે છે. જ્યારે $\sum p_1q_1$ એ ચાલુ વર્ષમાં કરેલું કુલ ખર્ચ દર્શાવે છે.

$$\therefore \text{ કુલ ખર્ચની રીતે સૂચક આંક} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0} \times 100$$

આમ કુલ ખર્ચની રીતમાં આધાર વર્ષ અને ચાલુ વર્ષના જથ્થાને ધ્યાનમાં લઈ સૂચક આંક મેળવવામાં આવે છે.

10.3 કૌટુંબિક બજેટની રીત (Method of Family Budget)

આ રીતમાં સૌ પ્રથમ આધાર વર્ષની સરખામણીમાં ચાલુ વર્ષના ભાવનો ગુણોત્તર લઈ દરેક વસ્તુનો ભાવ સાપેક્ષ શોધવામાં આવે છે. જો વસ્તુના ભાવ સાપેક્ષને I, વસ્તુના ચાલુ વર્ષનો ભાવને p_1 અને વસ્તુના આધાર વર્ષના ભાવને p_0 વડે દર્શાવવામાં આવે તો $I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$ સૂત્ર બને છે.

હવે દરેક વસ્તુને તેના મહત્વના પ્રમાણમાં આપવામાં આવતા ભારને W વડે દર્શાવીએ. જો કેટલીક વખત

આ ભાર દરેક વસ્તુના આધાર વર્ષનો ખર્ચ એટલે કે p_0q_0 હોય તો $W = p_0q_0$ થાય. તેથી કૌટુંબિક બજેટની રીતે મળતો સૂચક આંક નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

કૌટુંબિક બજેટની રીતે સૂચક આંક $I = \frac{\sum IW}{\sum W} \times 100$

જ્યાં ભાવ સાપેક્ષ $I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$ અને = W ભાર અથવા $W = p_0q_0$

આમ કૌટુંબિક બજેટ પદ્ધતિની રીતે સૂચક આંક મેળવવામાં આવે છે. જેને જીવન નિર્વાહના સૂચક આંક દ્વારા મેળવીશું. જેનો વિગતે અભ્યાસ આજ પ્રકરણમાં કરેલ છે.

10.4 સૂચક આંકની ગણતરીની રીતો (Methods of Calculating Index Number)

સૂચક આંકની ગણતરીમાં જે વસ્તુઓનો સમાવેશ કરવામાં આવે છે તે વસ્તુઓને તેના મહત્વના આધારે યોગ્ય ભાર આપવામાં આવે છે. આમ સૂચક આંકની રચનામાં ભારિત પદ્ધતિનો સામાન્ય રીતે ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ ભાર આપવાની જુદી જુદી રીતોને આધારીત ઘણા બધા અર્થશાસ્ત્રીઓએ જુદા જુદા સૂત્રો આપેલાં છે. જેમાંથી કેટલાંક સૂત્રોનો અભ્યાસ આપણે કરવાનો છે.

10.4.1 લાસ્પેયરનો સૂચક આંક (Laspeyre's Index Number)

લાસ્પેયરે આધાર વર્ષના જથ્થાને વધુ મહત્વ આપ્યું છે. આ રીતમાં દરેક વસ્તુના ચાલુ વર્ષના ભાવને આધાર વર્ષના જથ્થા વડે ગુણી ચાલુ વર્ષનો કુલ ખર્ચ શોધવામાં આવે છે. તેજ પ્રમાણે દરેક વસ્તુના આધાર વર્ષના ભાવને આધાર વર્ષના જથ્થા સાથે ગુણીને આધાર વર્ષનો કુલ ખર્ચ શોધવામાં આવે છે. આ બંને પ્રકારના કુલ ખર્ચની સરખામણી કરવામાં આવે છે. અને તેને આધારે સૂચક આંક શોધવામાં આવે છે.

જો લાસ્પેયરના સૂચક આંકને આપણે I_L વડે દર્શાવીએ તો સૂત્ર નીચે મુજબ બનશે.

$$I_L = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}$$

10.4.2 પાશેનો સૂચક આંક (Paseche's Index Numeber)

પાશે દ્વારા ચાલુ વર્ષના જથ્થાને વધુ મહત્વ આપવામાં આવ્યું છે. આ રીતમાં ચાલુ વર્ષના વપરાશ એટલે કે જથ્થાને દરેક વસ્તુના ચાલુ વર્ષના ભાવ સાથે ગુણી ચાલુ વર્ષનો કુલ ખર્ચ મેળવવામાં આવે છે. તેજ રીતે ચાલુ વર્ષના જથ્થાને દરેક વસ્તુના આધાર વર્ષના ભાવ સાથે ગુણી આધાર વર્ષનો કુલ ખર્ચ શોધવામાં આવે છે. આ બંને ખર્ચનો ગુણોત્તરને 100 વડે ગુણી સૂચક આંક શોધવામાં આવે છે.

જો પાશેના સૂચક આંકને આપણે I_P વડે દર્શાવીએ તો સૂત્ર નીચે મુજબ બનશે.

$$I_P = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$$

10.4.3 ફિશરનો સૂચક આંક (Fisher's Index Number)

પ્રો. ઈરવિંગ ફિશરે આધાર વર્ષના જથ્થાને અને ચાલુ વર્ષના જથ્થાને પણ ધ્યાનમાં લઈ સૂચક આંકની રચના કરી તેમણે લાસ્પેયરના સૂચક આંક અને પાશેના સૂચક આંકના ગુણોત્તર મધ્યક દ્વારા સૂચક આંકનું સૂત્ર તૈયાર કર્યું છે.

જો ફિશરના સૂચક આંકને I_F વડે દર્શાવીએ તો સૂત્ર નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$I_F = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$$

અથવા

$$I_F = \sqrt{I_L \times I_P}$$

પ્રો. ઈરવિંગ ફિશરે વિવિધ 134 જેટલા સૂત્રોની ચકાસણી કર્યા બાદ સાબિત કર્યું છે કે સૂચક આંકનાં અન્ય સૂત્રોની સરખામણીમાં તેંનું આ સૂત્ર શ્રેષ્ઠ અને આદર્શ સૂત્ર છે.

ફિશરના સૂચક આંક કેટલાક ગુણધર્મોને કારણે આદર્શ સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે.

ગુણધર્મો :-

(1) ફિશરના સૂચક આંકની રચનામાં આધાર વર્ષનો વપરાશ એટલે કે જથ્થો અને ચાલુ વર્ષનો વપરાશ એટલે કે જથ્થો એ બંનેને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે.

(2) સૂચક આંકની રચનામાં ગુણોત્તર મધ્યક એ શ્રેષ્ઠ સમય ગણાય છે. અને ફિશરનો સૂચક આંકમાં લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંકનો ગુણોત્તર મધ્યક લેવામાં આવે છે.

(3) સૂચક આંક માટે અગત્યના પરીક્ષણઓ સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણ અને પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણ આ બંને પરીક્ષણોમાં સમાધાન ફિશરનું સૂત્ર કરે છે. જ્યારે બાકીના સૂત્રો આ બંને પરીક્ષણોનું સમાધાન કરતા નથી.

(4) ફિશરનો સૂચક આંક લાસ્પેયરના સૂચક આંકની અને પાશેના સૂચક આંકની અસરોથી મુક્ત થઈ બિન પક્ષપાતી આંક આપે છે.

104.4 ડૉર્બિશ અને બાઉલીનો સૂચક આંક (Dorbish And Bowley's Index Number)

ડૉબિશ અને બાઉલીએ લાસ્પેયરના સૂચક આંક અને પાશેના સૂચક આંકની સાદી સરેરાશ લઈ સૂચક આંકની રચના કરી છે. આમ આ સૂત્રમાં આધાર વર્ષના જથ્થાને તેમજ ચાલુ વર્ષના જથ્થાને પણ ધ્યાનમાં લેવાયા છે.

જો ડૉબિશ અને બાઉલીના સૂચક આંકને $I_{D\text{-}B}$ વડે દર્શાવી એ તઓ સૂત્ર નીચે પ્રમાણે બનશે.

$$I_{D\text{-}B} = \frac{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_1} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}}{2} \times 100$$

અથવા

$$I_{D\text{-}B} = \frac{I_L + I_P}{2}$$

આમ આ સૂચક આંક લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંકનો સમાંતર મધ્યક છે.

10.4.5 માર્શલ અને એજવર્થનો સૂચક આંક (Marshal and Edgeworth's Index)

માર્શલ અને એજવર્થે સૂચક આંકની ગણતરીમાં ચાલુ વર્ષનો જથ્થો અને આધાર વર્ષનો જથ્થો એમ બંને વર્ષના જથ્થાને મહત્વ આપેલ છે. જેમાં આધાર વર્ષ અને ચાલુ વર્ષના જથ્થાના સમાંતર મધ્યકને ભાર તરીકે લેવામાં આવે છે.

જો માર્શલ અને એજન્વર્થના સૂચક આંકને I_{M-E} વડે દર્શાવીએ તો સૂત્ર નીચે મુજબ બનશે.

$$I_{ME} = \frac{\sum p_1(q_0+q_1)}{\sum p_0(q_0+q_1)} \times 100$$

અંશમાં કૌંસ છોડી p_1q_0 અને p_1q_1 તથા છેદમાં પણ કૌંસ છોડી p_0q_0 અને p_0q_1 સાથે ગુણાકારનો સરવાળો કરતાં

$$I_{M-E} = \frac{\sum p_1q_0 + \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 + \sum p_0q_1} \times 100$$

10.5 સૂચક આંકના પરીક્ષણો (Tests of Index Number)

પ્રો. ઈરવિંગ ફિશરે જુદા જુદા અર્થશાસ્ત્રીઓ દ્વારા આપવામાં આવેલા સૂત્રોમાંથી કયું સૂત્ર વધારે સારું છે તે નક્કી કરવા માટે નીચેના પરીક્ષણોનો ઉપયોગ કર્યો છે. જે સૂત્ર આ પરીક્ષણોને સંતોષે એટલે કે સમાધાન કરે તે સારું સૂત્ર ગણવામાં આવે છે. આ સૂત્રોના પરીક્ષણ કરતી વખતે સૂચક આંકના સૂત્રને 100 વડે ગુણવામાં આવતા નથી.

10.5.1 સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણ (Time Reversal Test)

આ પરીક્ષણ અનુસાર આધાર વર્ષ અને ચાલુ વર્ષની અદલાબદલી કરવામાં આવે છે. જેમાં આધાર વર્ષ અને ચાલુ વર્ષની અદલા બદલી કર્યા પહેલાનો મૂળ સૂચક આંક અને અદલા બદલી કર્યા પછીનો નવો સૂચક આંક બંને એકબીજાના વ્યસ્ત થવા જોઈએ. દા.ત. જો વર્ષ 2022માં તેલના ભાવ વર્ષ 2012ના આધાર વર્ષની સરખામણીમાં બમણા થયા હોય તો સાપેક્ષ મૂલ્ય $\frac{p_1}{p_0} = \frac{2}{1} = 2$ થાય પણ વર્ષ 2022ને આધાર વર્ષ લેતાં 2012ના વર્ષ માટે સાપેક્ષ મૂલ્ય $\frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{2} = 0.5$ થાય. તેથી આ બંને સાપેક્ષ મૂલ્યો એકબીજાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે તેથી બંનેનો ગુણાકાર 1 થાય છે. આ દરેક સાપેક્ષ મૂલ્ય માટે સાચું છે અને તેથી તે સૂચક આંક માટે પણ સાચું હોવું જોઈએ. આ પરીક્ષણ નીચે પ્રમાણે સંકેતમાં લખી શકાય.

ધારોકે p_{01} = આધાર વર્ષની સરખામણીમાં ચાલુ વર્ષનો સૂચક આંક હોય અને p_{10} = ચાલુ વર્ષની સરખામણીમાં આધાર વર્ષનો સૂચક આંક હોય તો સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણમાં સમયની અદલા બદલી કરતાં $p_{01} = \frac{1}{p_{10}}$ થાય.

$\therefore\ p_{01} \times p_{10} = 1$ થવું જોઈએ.

હવે આપણે બધા જ સૂત્ર માટે સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણની ચકાસણી કરીએ.

(1) લાસ્પેયરના સૂત્રનું પરીક્ષણ

મૂળ સૂત્ર $p_{01} = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}$ છે.

હવે આ પરીક્ષણ મુજબ સમયની અદલા બદલી કરતાં એટલે કે 0 અને 1 એ સમય દર્શાવે છે તેથી 0ને બદલે 1 અને 1ને બદલે 0 લેતાં.

$$P_{10} = \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1}$$

આ પરીક્ષણ અનુસાર

$p_{01} \times p_{10} = 1$ થવું જોઈએ.

$$\therefore\ p_{01} \times p_{10} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \neq 1$$

અહીં બંનેનો ગુણાકાર 1 થતો નથી તેથી લાસ્પેયરનું સૂત્ર સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરતું નથી.

(2) પાશેના સૂત્રનું પરીક્ષણ

મૂળ સૂત્ર $p_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}$ છે.

હવે આ પરીક્ષણ અનુસાર સમયની અદલા બદલી કરતાં.

$$p_{10} = \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}$$

આ પરીક્ષણ અનુસાર $p_{01} \times p_{10} = 1$ થવું જોઈએ.

$$\therefore\ p_{01} \times p_{10} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0} \neq 1$$

અહીં પણ બંનેનો ગુણાકાર 1 થતો નથી તેથી લાસ્પેયરનું સૂત્ર સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરતું નથી.

(3) ફિશરના સૂત્રનું પરીક્ષણ

મૂળ સૂત્ર $p_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$

હવે આ પરીક્ષણ અનુસાર સમયની અદલાબદલી કરતાં

$$p_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}}$$

આ પરીક્ષણ અનુસાર $p_{01} \times p_{10} = 1$ થવું જોઈએ.

$$\therefore\ p_{o1} \times p_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}}$$

આ બે સૂત્રોનો ગુણાકાર છે તેથી તેને એક જ વર્ગમૂળમાં દર્શાવતાં.

$$=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\times\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}\times\frac{\Sigma q_0q_0}{\Sigma p_1q_0}}$$

$= \sqrt{1} = 1$

સમજૂતી : અહીં અંશમાં Σp_1q_0 છે તો છેદમાં પણ Σp_1q_0 છે. અંશમાં Σp_1q_1 છે તો છેદમાં પણ Σp_1q_1 છે. અને અંશમાં Σp_0q_1 છે તો છેદમાં પણ Σp_0q_1 છે અને અંશમાં Σp_0q_0 છે તો છેદમાં પણ Σp_0q_0 છે તેથી બધા જ ઉડી જશે માટે વર્ગમૂળમાં ફક્ત 1 રહે છે. અને એકનું વર્ગમૂળ પણ 1 જ થાય છે.

તેથી ફિશરનું સૂત્ર આ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે.

(4) ડૉબિશ અને બાઉલીના સૂત્રનું પરીક્ષણ મૂળ સૂત્ર $p_{01} = \dfrac{\dfrac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}+\dfrac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}{2}$

આ પરીક્ષણ અનુસાર સમયની અદલા બદલી કરતાં

$$p10 = \frac{\dfrac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}+\dfrac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}}{2}$$

હવે $p_{01} \times p_{10} = 1$ થવું જોઈએ.

$$\therefore\ p_{01} \times p_{10} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}+\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\right]\times\frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}+\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}+\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_1q_0}\times\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}+\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\times\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}+\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\times\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}+\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\times\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}\right]$$

$\neq 1$

અહીં બંનેનો ગુણાકાર 1 થતો નથી. તેથી ડૉર્બિશ અને બાઉલીનું સૂત્ર સમય વિપર્યસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરતું નથી.

(5) માર્શલ અને એજવર્થના સૂત્રનું પરીક્ષણ

મૂળ સૂત્ર $p_{01} = \dfrac{\Sigma p_1(q_0+q_1)}{\Sigma p_0(q_0+q_1)}$

આ પરીક્ષણ અનુસાર સમયની અદલા-બદલી કરતાં

$$p10 = \frac{\sum p_0 (q_1 + q_0)}{\sum p_1 (q_1 + q_0)}$$

આ પરીક્ષણ અનુસાર $p_{01} \times p_{10} = 1$ થવું જોઈએ.

$$p_{01} \times p_{10} = \frac{\sum p_1 (q_0 + q_1)}{\sum p_0 (q_0 + q_1)} \times \frac{\sum p_0 (q_1 + q_0)}{\sum p_1 (q_1 + q_0)}$$

$= 1$

$\therefore$ માર્શલ અને એજવર્થનું સૂત્ર સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે.

સમજૂતી :- આ સૂત્રમાં અંશમાં $\sum p_1 (q_0 + q_1)$ અને છેદમાં પણ $\sum p_1 (q_1 + q_0)$ છે હવે $q_0 + q_1 = q_1 + q_0$ તેથી સરખી રકમ છે. દૂર થશે તેજ રીતે અંશમાં $\sum p_0 (q_1 + q_0)$ છે અને છેદમાં પણ $\sum p_0 (q_0 + q_1)$ છે તે દૂર થશે. અંશ અને છેદમાં $\frac{1}{1}$ વધશે. 01 થાય છે.

આમ ફિશરનું સૂત્ર તેમજ માર્શલ અને ઓજવર્થનું સૂત્ર સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે. એટલેકે આ પરીક્ષણમાંથી પસાર થાય છે. હવે બીજુ પરીક્ષણ જોઈએ.

10.5.2 પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણ (Factor Reversal Test)

આ પરીક્ષણ અનુસાર વસ્તુની કિંમત અને જથ્થાની અદલા બદલી કરવામાં આવે છે. જેમાં કિંમત અને જથ્થાની અદલા બદલી કર્યા પહેલાનો મૂળ સૂચક આંક અને અદલા બદલી કર્યા પછીના નવા સૂચક આંકનો ગુણાકાર ચાલુ વર્ષના કુલ ખર્ચ અને આધાર વર્ષના કુલ ખર્ચના ગુણોત્તર જેટલો થવો જોઈએ.

સંકેતમાં દર્શાવીએ તો ધારો કે P_{01} = ભાવ માટેનો સૂચક આંક અને Q_{01} = જથ્થા માટેનો સૂચક આંક હોય તો પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણમાં કિંમત અને જથ્થાની અદલા બદલી કરતાં એટલે કે જ્યાં p હોય ત્યાં q લખવું અને q હોય ત્યાં p લખવું.

$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$ થવું જોઈએ.

હવે આપણે બધા જ સૂત્ર માટે પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણની ચકાસણી કરીએ.

(1) લાસ્પેયરના સૂત્ર માટે

મૂળ સૂત્ર $P_{01} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$

હવે કિંમત અને જથ્થાની અદલા બદલી કરતાં એટલે કે p ને બદલે q અને q ને બદલે p લખતાં

$Q_{01} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_1 p_0}$ આ લાસ્પેયરનો જથ્થાનો સૂચક આંક બને છે.

આ પરીક્ષણ અનુસાર બંનેનો ગુણાકાર = $\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$ થવો જોઈએ.

$$\therefore\ P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0} \neq \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$$

આમ લાસ્પેયરનું સૂત્ર પદ વિપર્યાસનું પરીક્ષણનું સમાધાન કરતું નથી.

(2) પાશેના સૂત્રનું પરીક્ષણ

મૂળ સૂત્ર $p_{01} = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}$

હવે કિંમત અને જથ્થાની અદલાબદલી કરતાં $Q_{01} = \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}$ આ પાશેનો જથ્થાનો સૂચક આંક બને છે.

આ પરીક્ષણ અનુસાર બંનેનો ગુણાકાર $= \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$ થવો જોઈએ.

$$\therefore\ P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1} \neq \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$$

આમ પાશેનું સૂત્ર પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરતું નથી.

(3) ફિશરના સૂત્રનું પરીક્ષણ

મૂળ સૂત્ર $p_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}$

હવે કિંમત અને જથ્થાની અદલા બદલી કરતાં

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0} \times \frac{\Sigma q_1q_1}{\Sigma q_0p_1}}$$

આ ફિશરનો જથ્થાનો સૂચક આંક બને છે.

આ પરીક્ષણ મુજબ બંનેનો ગુણાકાર $= \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$ થવો જોઈએ.

$$\therefore\ P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times \sqrt{\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0} \times \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}}$$

આ બંને સૂત્રનો ગુણાકાર છે તેથી એક જ વર્ગમૂળમાં લખતાં

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times \frac{\Sigma q_0p_0}{\Sigma q_0p_0} \times \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}}$$

અહીં Σp_1q_0, Σq_1p_0 અંશમાં છે અને છેદ Σq_0p_1, Σp_0q_1 છે. તે બંને રદ થશે. નોંધ :- અહીં $q_1p_0 = p_0q_1$ થાય છે. તેજ રીતે $p_1q_0 = q_0p_1$ થાય છે.

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}}$$

અંશમાં બે કિંમતો સરખી છે જેનો ગુણાકાર કરતાં વર્ગ થાય છે તે જ રીતે છેદમાં પણ Σp_0q_0 સરખી છે જેનો ગુણાકાર કરતાં વર્ગ થશે.

$$= \sqrt{\left(\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}\right)^2}$$

આ વર્ગનું વર્ગમૂળ છે તેથી બંને દૂર થશે.

$$= \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$$

આમ ફિશરના સૂચક આંકનું સૂત્ર પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું પણ સમાધાન કરે છે.

(4) ડૉબિશ અને બાઉલીના સૂત્રનું પરીક્ષણ

મૂળ સૂત્ર $p_{01} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\right]$

હવે કિંમત અને જથ્થાની અદલા બદલી કરતા

$$Q_{01} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}\right]$$

આ પરીક્ષણ મુજબ બંનેનો ગુણાકાર $= \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$ થવો જોઈએ.

$$\therefore\ P_{01} \times Q_{01} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} + \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\right] \times \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0} + \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}\right] \neq \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$$

આમ ડૉબિશ અને બાઉલીનું સૂત્ર પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરતું નથી.

(5) માર્શલ અને એન્જર્થના સૂત્રનું પરીક્ષણ

મૂળ સૂત્ર $p_{01} = \frac{\Sigma p_1(q_0 + q_1)}{\Sigma p_0(q_0 + q_1)}$

હવે કિંમત અને જથ્થાની અદલા બદલી કરતાં

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1(p_0+p_1)}{\Sigma q_0(p_0+p_1)}$$

હવે બંનેનો ગુણાકાર કરતાં

$$\therefore\ P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1(q_0+q_1)}{\Sigma p_0(q_0+q_1)} \times \frac{\Sigma q_1(p_0+p_1)}{\Sigma q_0(p_0+p_1)} \neq \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

આમ માર્શલ અને એજવર્થનું સૂત્ર સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે પરંતુ પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરતું નથી.

10.6 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ :-1 નીચેની માહિતી પરથી લાસ્પેયર, પાશે અને ફિશરનો સૂચક આંક ગણો :

વસ્તુઓ	વર્ષ 2017 નો		વર્ષ 2022 નો	
	ભાવ	જથ્થો	ભાવ	જથ્થો
A	2	8	4	6
B	5	10	6	5
C	4	14	5	10
D	2	19	2	13

જવાબ :-

અહી આધારવર્ષનો ભાવને p_0 આધાર વર્ષના જથ્થાને q_0, ચાલુ વર્ષના ભાવને p_1 અને ચાલુ વર્ષના જથ્થાને q_1 વડે દર્શાવી નીચેના કોષ્ટકમાં ગણતરી કરીશું.

	વર્ષ 2017		વર્ષ 2022					
વસ્તુઓ	ભાવ	જથ્થો	ભાવ	જથ્થો				
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
A	40	12	65	14	480	560	780	910
B	72	14	78	20	1008	1440	1092	1560
C	36	10	36	15	360	540	60	540
D	20	6	42	4	120	80	252	188
E	46	8	52	6	68	276	416	312
					2236	2896	2900	3490

અહિં Σp_1q_0 = 2236, Σp_0q_1 = 2896, Σp_1q_0 = 2900 અને Σp_1q_0 = 3490 થશે.

(1) લાસ્પેયરનો સૂચક આંક

$$I_L = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$$

$$= \frac{2900}{2336} \times 100$$

$= 1.2414 \times 100$

$= 124.14$

(2) પાશેનો સૂચક આંક

$$I_P = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$$

$$= \frac{3490}{2896} \times 100$$

$= 1.2051 \times 100$

$= 120.51$

(3) ફિશરનો સૂચક આંક

$$I_F = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{2900}{2336} \times \frac{3490}{2896}} \times 100$$

અંશની કિંમતનો ગુણાકાર અને છેદની કિંમતનઓ ગુણાકાર કરતાં

$$= \sqrt{\frac{10121000}{6765056}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.4961} \times 100$$

$= 1.2232 \times 100$

$\therefore \ I_F = 122.32$

ઉદાહરણ : 2 નીચે આપેલી માહિતી પરથી લાસ્પેયર પાશે અને ફિશરનો સૂચક આંકની ગમણતરી કરો.

	વર્ષ 2017નો		વર્ષ 2022નો	
વસ્તુ	ભાવ	જથ્થો	ભાવ	જથ્થો
A	2	8	4	6
B	5	10	6	5
C	4	14	5	10
D	2	19	2	13

જવાબ : અહીં વર્ષ 2017ને આધાર વર્ષ તરીકે ગણી તેના ભાવને p_0 અને જથ્થાને q_0 વડે તેમજ 2022ના વર્ષને ચાલુ વર્ષ ગણી તેના ભાવને p_1 અને જથ્થાને q_1 વડે દર્શાવીશું.

	વર્ષ 2017		વર્ષ 2022					
વસ્તુ	ભાવ	જથ્થો	ભાવ	જથ્થો				
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
A	2	8	4	6	16	32	12	24
B	5	10	6	5	50	60	25	30
C	4	14	5	10	56	70	40	50
D	2	19	2	13	38	38	26	26
					160	200	103	130

અહીં $\sum p_0q_0 = 160$, $\sum p_1q_0 = 200$, $\sum p_0q_1 = 103$ અને $\sum p_1q_1 = 130$ છે.

(1) લાસ્પેયરનો સૂચક આંક

$$I_L = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$$

$$= \frac{200}{160} \times 100$$

$= 125$

(2) પાશેનો સૂચક આંક

$$I_P = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$$

$$= \frac{130}{103} \times 100$$

$= 126.21$

(3) ફિશરનો સૂચક આંક

$$I_F = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{200}{160} \times \frac{130}{103}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.25 \times 1.2621} \times 100$$

$$= \sqrt{1.5776} \times 100$$

$= 1.2560 \times 100$

$= 125.60$

અથવા

$$I_F = \sqrt{I_L \times I_P}$$

$=\sqrt{125 \times 126.21}$

$=\sqrt{15776.25}$

= 125.60

ઉદાહરણ : 3 નીચે આપેલ માહિતી પરથી ફિશર અને ડૉર્લિશ - બાઉલીનો સૂચક આંક શોધો.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ	
વસ્તુ (રૂ. માં)	કિંમત (કિ.ગ્રા.માં)	જથ્થો (રૂ. માં)	કિંમત (કિ. ગ્રામાં)	જથ્થો
I	4	20	6	18
II	5	15	6	12
III	2	30	3	30
IV	1	50	1	60
V	3	25	5	28

જવાબ : અહીં આધાર વર્ષની કિંમતને p_0,q_0 જથ્થાને q_0 અને ચાલુ વર્ષની કિંમતને p_1 જથ્થાને q_1 વડે દર્શાવતા.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ					
વસ્તુ	કિંમત	જથ્થો	કિંમત	જથ્થો	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
I	4	20	6	18	80	120	72	108
II	5	15	6	12	75	90	60	72
III	2	30	3	30	60	90	60	90
IV	1	50	1	60	60	50	60	60
V	3	25	5	28	75	125	84	140
					340	475	336	470

અહીં $\sum p_0q_0 = 340$, $\sum p_1q_0 = 475$, $\sum p_0q_1 = 336$ અને $\sum p_1q_1 = 470$ થાય છે.

(1) ફિશર સૂચક આંક

$$I_F = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{475}{340} \times \frac{470}{336}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.3971 \times 1.3988} \times 100$$

$$= \sqrt{1.9543} \times 100$$

= 1.398 × 100

= 139.8

(2) ડૉબિશ અને બાઉલીનો સૂચક આંક

$$I_{D\text{-}B} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} + \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}\right]\times 100$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{475}{340} + \frac{470}{336}\right]\times 100$$

$$= \frac{1}{2}[1.3971 + 1.3988]\times 100$$

$$= \frac{1}{2}[2.7959]\times 100$$

$$= 1.3980 \times 100$$

$$= 139.8$$

ઉદાહરણ : 4 નીચેની માહિતી પરથી લાસ્પેયર પાશે અને ડૉર્બિશ - બાઉલીનો સૂચક આંક ગણો.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ	
વસ્તુ	કિંમત	જથ્થો	કિંમત	જથ્થો
1	20	8	40	6
2	50	10	60	5
3	40	15	50	15
4	20	20	20	25

જવાબ : અહીં આધાર વર્ષની કિંમતને p_0, જથ્થાને q_0 અને ચાલુ વર્ષની કિંમતને p_1 જથ્થાને q_1 વડે દર્શાવતાં.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ					
વસ્તુ	કિંમત	જથ્થો	કિંમત	જથ્થો				
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
1	20	8	40	6	160	320	120	240
2	50	10	60	5	500	600	250	300
3	40	15	50	15	600	750	600	750
4	20	20	20	25	400	400	500	500
					1660	1070	1470	1790

અહીં $\sum p_0q_0 = 1660$, $\sum p_1q_0 = 2070$, $\sum p_0q_1 = 1470$ અને $\sum p_1q_1 = 1790$ છે.

(1) લાસ્પેયરનો સૂચક આંક

$$I_L = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}\times 100$$

$$= \frac{2070}{1660}\times 100 = 1.24699 \times 100$$

$$= 124.699$$

(2) પાશેનો સૂચક આંક

$$I_P = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$$

$$= \frac{1790}{1470} \times 100$$

$= 1.2177 \times 100 \quad = 121.77$

(3) ડૉર્બિશ અને બાલિનો સૂચક આંક

$$I_{D\text{-}B} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} + \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}\right] \times 100$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2070}{1660} + \frac{1790}{1470}\right] \times 100$$

$$= \frac{1}{2}[1.24699 + 1.2177] \times 100$$

$$= \frac{1}{2}[2.4647] \times 100$$

$= 123.235$

અથવા

$$I_{D\text{-}B} = \frac{I_L + I_P}{2}$$

$$= \frac{124.699 + 121.77}{2}$$

$$= \frac{246.47}{2}$$

$= 123.235$

ઉદાહરણ : 5 નીચેની માહિતી પરથી લાસ્પેયર પાશે અને માર્શલ-એજવર્થનો સૂચક આંક ગણો.

	વર્ષ 2018નો		વર્ષ 2022નો	
વસ્તુઓ	જથ્થો	કિંમત	જથ્થો	કિંમત
A	20	2	15	5
B	4	4	5	8
C	10	1	12	2
D	5	5	6	10

જવાબ : અહિં વર્ષ 2018ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ તેના જથ્થાનો q_0, કિંમતને p_0 વડે તેમજ 2022ને ચાલુ વર્ષ તરીકે લઈ તેના જથ્થાને q_1 અને કિંમતને p_1 વડે દર્શાવતાં.

	વર્ષ 2018		વર્ષ 2022					
વસ્તુ	જથ્થો	કિંમત	જથ્થો	કિંમત	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
A	20	2	15	5	40	100	30	75
B	4	4	5	8	16	32	20	40
C	10	1	12	2	10	20	12	24
D	5	5	6	10	25	50	30	60
					91	202	92	199

અહીં $\sum p_0q_0 = 91$, $\sum p_1q_0 = 202$, $\sum p_0q_1 = 92$ અને $\sum p_1q_1 = 199$ થાય.

(1) લાસ્પેયરનો સૂચક આંક

$$I_L = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$$

$$= \frac{202}{91} \times 100$$

$$= 2.2198 \times 100$$

$$= 221.98$$

(2) પાશેનો સૂચક આંક

$$I_P = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$$

$$= \frac{199}{92} \times 100$$

$$= 2.1630 \times 100$$

$$= 216.30$$

(3) માર્શલ અને એજવર્થનો સૂચક આંક

$$I_{M\text{-}E} = \frac{\sum p_1q_0 + \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 + \sum p_0q_1} \times 100$$

$$= \frac{202+199}{91+92} \times 100$$

$$= \frac{401}{183} \times 100$$

$$= 2.1913 \times 100$$

$$= 219.13$$

ઉદાહરણ : 6 નીચે આપેલ માહિતી પરથી લાસ્પેયર, પાશે, ફિશર, ડૉર્બિશ-બાઉલી અને માર્શલ એજવર્થનો સૂચકઆંક ગણો.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ	
વસ્તુ (રૂ. માં)	કિંમત (કિ. ગ્રા.માં)	જથ્થો (રૂ. માં)	કિંમત (કિ. ગ્રા.માં)	જથ્થો
A	12	12	10	15
B	4	10	5	10
C	4	120	5	100
D	8	50	10	70

જવાબ : અહિં આધાર વર્ષની કિંમતને p_0, જથ્થાને q_0 ચાલુ વર્ષની કિંમતનો p_1 અને જથ્થાને q_1 વડે દર્શાવતાં.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ					
વસ્તુ	કિંમત	જથ્થો	કિંમત	જથ્થો	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
	p_0	q_0	p_1	q_1				
A	12	12	10	15	144	120	180	150
B	4	10	5	10	40	50	40	50
C	4	120	5	100	480	600	480	500
D	8	50	10	70	400	500	560	700
					1064	1270	1260	1400

અહીં $p_0q_0 = 1064$, $p_1q_0 = 1270$ $p_0q_1 = 1260$ અને $p_1q_1 = 1400$ થાય છે.

(1) લાસ્પેયરનો સૂચક આંક

$$I_L = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$$

$$= \frac{1270}{1064} \times 100$$

$$= 1.1936 \times 100$$

$$= 119.36$$

(2) પાશેનો સૂચક આંક

$$I_P = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$$

$$= \frac{1400}{1260} \times 100$$

$$= 1.1111 \times 100 = 111.11$$

(3) ફિશરનો સૂચક આંક

$$I_F = \sqrt{I_L \times I_P}$$

$$= \sqrt{119.36 \times 111.11} = \sqrt{13262.0896}$$

$$= 115.165$$

(4) ડૉર્બિશ અને બાઉલીનો સૂચક આંક

$$I_{D\text{-}B} = \frac{I_L + I_P}{2}$$

$$= \frac{119.36 + 111.11}{2}$$

$$= \frac{230.47}{2}$$

$= 115.24$

(5) માર્શલ અને એજવર્થનો સૂચક આંક

$$I_{M\text{-}E} = \frac{\Sigma p_1 q_0 + \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 + \Sigma p_0 q_1} \times 100$$

$$= \frac{1270 + 1400}{1064 + 1260} \times 100$$

$$= \frac{2670}{2324} \times 100$$

$= 1.1489 \times 100$

$= 114.89$

ઉદાહરણ : ૭ નીચે આપેલી માહિતી પરથી લાસ્પેયર, પાશે, ફિશર અને ડોર્બિશ-બાઉલીની સૂચક આંક શોધો.

	વર્ષ 2020		વર્ષ 2022	
વસ્તુ	ભાવ	કુલ ખર્ચ	ભાવ	કુલ ખર્ચ
A	60	6000	70	7350
D	40	3400	50	4750
W	38	646	96	3264
I	10	150	10	150
T	118	14986	120	15600

જવાબ : અહીં વસ્તુનો ભાવ અને કુલ ખર્ચ આપેલો એટલે કે અનુક્રમે p_0, p_0q_0, p_1q_1 આપેલ છે. તેના પરથી જથ્થો શોધવો પડશે.

$$\text{જથ્થો} = \frac{\text{કુલ ખર્ચ}}{\text{ભાવ}}$$

દા.ત. વસ્તુ A નો આધાર વર્ષનો છે.

$$\text{જથ્થો } q_0 = \frac{6000}{60} = 100$$

$$\text{વસ્તુ A નો ચાલુ વર્ષનો જથ્થો} = \frac{7350}{70} = \; = 105$$

આજ રીતે દરેક વસ્તુઓ માટે આધાર વર્ષ અને ચાલુ વર્ષનો જથ્થો શોધવો.

	વર્ષ 2020		વર્ષ 2022					
વસ્તુ	ભાવ	જથ્થા	ભાવ	જથ્થા	p_0q_0	p_1q0	p_0q_1	p_1q_1
	p_0	q_0	p_1	q_1				
A	60	100	70	105	6000	7000	6300	7350
D	40	85	50	95	3400	4250	3800	4750
W	38	17	96	34	646	1632	1292	3264
I	10	15	10	15	150	150	150	150
T	118	127	120	130	14986	15240	15340	15600
					25182	28272	26882	31114

અહીં $\sum p_0q_0 = 25182$, $\sum p_1q_0 = 28272$, $\sum p_0q_1 = 26882$ અને $\sum p_1q_1 = 31114$ થાય છે.

(1) લાસ્પેયરનઓ સૂચક આંક

$$I_L = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$$

$$= \frac{28272}{25182} \times 100$$

$$= 112.27$$

(2) પાશેનો સૂચક આંક

$$I_P = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$$

$$= \frac{31114}{26882} \times 100$$

$$= 115.74$$

(3) ફિશરનો સૂચક આંક

$$I_F = \sqrt{I_L \times I_P}$$

$$= \sqrt{112.27 \times 115.74}$$

$$= \sqrt{12994.1298}$$

$$= 113.99$$

(4) ડોર્બિશ-બાઉલીનો સૂચક આંક

$$I_{D\text{-}B} = \frac{I_L + I_P}{2}$$

$$= \frac{112.27 + 115.74}{2} = \frac{228.01}{2} = 114.005$$

ઉદાહરણ : 8 નીચેની માહિતી પરથી ફિશર ડોર્બિશ-બાઉલી અને માર્શલ - એન્વર્થનો સૂચક આંક શોધો.

વસ્તુ	જથ્થો	ભાવ (રૂ. માં)		
	2019	2022	2019	2022
I	85	80	50	55
II	50	55	20	30
III	35	40	52	55
IV	25	22	75	80
V	60	65	10	15

જવાબ : અહિં આધાર વર્ષ (2019) અને ચાલુ વર્ષ (2022) નો જથ્થો આપેલ છે એટલે કે અનુક્રમે q_0 અને q_1 તેમજ 2019 ના વર્ષનો ભાવ p_0 અને 2022 ના વર્ષનો ભાવ p_1 આપેલ છે.

વસ્તુ	q0	q_1	p_0	p_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
I	85	80	50	55	4250	4675	4000	4400
II	50	55	20	30	1000	1500	1100	1650
III	35	40	52	55	1820	1925	2080	2200
IV	25	22	75	80	1875	2000	1650	1760
V	60	65	10	15	600	900	650	975
					9545	11000	9480	10985

અહીં $\Sigma p_0q_0 = 9545$, $\Sigma p_1q_0 = 11000$, $\Sigma p_0q_1 = 9480$ અને $\Sigma p_1q_1 = 10985$ મળે છે.

(1) ફિશરનો સૂચક આંક

$$I_F = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{11000}{9545} \times \frac{10985}{9480}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.1524 \times 1.1588} \times 100$$

$$= \sqrt{1.3354} \times 100$$

$$= 1.1550 \times 100$$

$$= 115.50$$

(2) ડોર્વિશ અને બાઉલનો સૂચક આંક

$$I_{D\text{-}B} = = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} + \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\right] \times 100$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{11000}{9545} + \frac{10985}{9480}\right] \times 100$$

$$= \frac{1}{2}[1.1524 + 1.1588] \times 100$$

$=\frac{1}{2}[2.3112]\times 100$

$= 1.1556 \times 100$

$= 115.56$

(3) માર્શલ અને એજવર્થનો સૂચક આંક

$$I_{M\text{-}E} = \frac{\Sigma p_1q_0 + \Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0 + \Sigma p_0q_1} \times 100$$

$$= \frac{11000 + 10985}{9545 + 9480} \times 100$$

$$= \frac{21985}{19025} \times 100$$

$= 1.1556 \times 100$

$= 115.56$

ઉદાહરણ : 9 નીચે આપેલી માહિતી પરથી ફિશરનો સૂચક આંક તૈયાર કરો અને સમય વિપર્યસ પરીક્ષણ અને પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણ દ્વારા તેની ચકાસણી કરો.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ	
વસ્તુ	ભાવ	જથ્થો	ભાવ	જથ્થો
A	9	3	10	3
B	9	4	8	5
C	4	3	5	4
D	2	8	3	11

જવાબ : અહિં અનુક્રમે p_0, q_0, p_1 અને q_1 આપેલ છે.

વસ્તુ	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
A	9	3	10	3	27	30	27	30
B	9	4	8	5	36	32	45	40
C	4	3	5	4	12	15	16	20
D	2	8	3	11	16	24	22	33
					91	101	110	123

અહીં $\Sigma p_0q_0 = 91$, $\Sigma p_1q_0 = 101$, $\Sigma p_0q_1 = 110$ અને $\Sigma p_1q_1 = 123$

ફિશરનો સૂચક આંક

$$= \left[\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\right] \times 100$$

$$= \left[\frac{101}{91} \times \frac{123}{110}\right] \times 100$$

$= \sqrt{1.1099 \times 1.1182} \times 100$

$= \sqrt{1.2411} \times 100 = 1.1140 \times 100 = 111.40$

ફિશરના સૂચક આંકનું પરીક્ષણ

(1) સમય વિપર્યસ પરીક્ષણ આ પરીક્ષણ અનુસાર $p_{o1} \times p_{10} = 1$ થવું જોઈએ.

$$p_{o1} \times p_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times \sqrt{\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1} \times \frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{101}{91} \times \frac{123}{110}} \times \sqrt{\frac{110}{123} \times \frac{91}{101}}$$

બંને સૂત્રો એક જ વર્ગ મૂળમાં લખતાં

$$= \sqrt{\frac{101}{91} \times \frac{123}{110} \times \frac{110}{123} \times \frac{91}{101}}$$

$$= \sqrt{1}$$

= 1 આમ $p_{01} \times p_{10} = 1$ થાય છે તેથી, ફિશરનો સૂચક આંક સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે.

(2) પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણ

આ પરીક્ષણ અનુસાર $P_{01} \times Q_{01} = \dfrac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$ થવું જોઈએ.

$$\therefore \quad p_{o1} \times Q_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times \sqrt{\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0} \times \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{101}{91} \times \frac{123}{110}} \times \sqrt{\frac{110}{91} \times \frac{123}{101}}$$

બંને સૂત્રો એક જ વર્ગ મૂળમાં લખતાં

$= \sqrt{\frac{101}{91} \times \frac{123}{110} \times \frac{110}{91} \times \frac{123}{101}} = \sqrt{\frac{123}{91} \times \frac{123}{91}}$ જ્યાં $p_1q_1 = 123$ છે.

અને $p_0q_0 = 91$ છે.

$= \dfrac{123}{91} = \dfrac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}$ થાય છે.

તેથી ફિશરનો સૂચક આંક પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું પણ સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ : 10 નીચેની માહિતી પરથી ફિશરનઓ સૂચક આંક મેળવો અને દર્શાવો કે આ સૂચક આંક સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણ અને પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણમાંથી પસાર થાય છે.

વસ્તુ	A	B	C	D
p_0	30	20	40	25
p_1	35	25	45	30
p_1q_1	420	300	900	960
p_1q_0	350	375	990	900

જવાબ : અહીં p_0, p_1, p_1q_1 અને p_1q_0 આપેલ છે. તે ઉપરથી $q_1=\frac{p_1q_1}{p_1}$ અને $q_0=\frac{p_1q_0}{p_1}$ કરવાથી q_0 અને q_1 મળશે.

વસ્તુ	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
A	30	10	35	12	300	350	360	420
B	20	15	25	12	300	375	240	300
C	40	22	45	20	880	990	800	900
D	25	30	30	32	750	900	800	960
					2230	2615	2200	2580

અહીં Σp_0q_0 = 2230, p_1q_0 = 2615, p_0q_1 = 2200 અને p_1q_1 = 2580 મળે છે.

$$I_F = \left[\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\right] \times 100$$

$$= \left[\frac{2615}{2230} \times \frac{2580}{2200}\right] \times 100$$

$$= \sqrt{1.1726 \times 1.1727} \times 100$$

$$= \sqrt{1.3751} \times 100$$

$= 1.1726 \times 100$

$= 117.26$

ફિશરના સૂચક આંકનું પરીક્ષણ

(1) સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણ

આ પરીક્ષણ મુજબ $p_{o1} \times p_{10} = 1$ થવું જોઈએ.

$$\therefore p_{o1} \times p_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times \sqrt{\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma q_1p_1} \times \frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{2615}{2230} \times \frac{2580}{2200}} \times \sqrt{\frac{2200}{2580} \times \frac{2230}{2615}}$$

બંને સૂત્રો એક જ વર્ગ મૂળમાં લેતાં

$$=\sqrt{\frac{2615}{2230}\times\frac{2580}{2200}\times\frac{2200}{2580}\times\frac{2230}{2615}}$$

$$=\sqrt{1}$$

= 1 આમ $p_{o1} \times p_{10} = 1$ થાય છે. તેથી ફિશરનો સૂચક આંક સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે.

(2) પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણ

આ પરીક્ષણ અનુસાર $P_{o1} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$ થવું જોઈએ.

$$\therefore\ P_{o1} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}\times\sqrt{\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0}\times\frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}}$$

$$=\sqrt{\frac{2615}{2230}\times\frac{2580}{2200}}\times\sqrt{\frac{2200}{2230}\times\frac{2580}{2615}}$$

બંને સૂત્રો એક જ વર્ગ મૂળમાં લખતાં

$$=\sqrt{\frac{2615}{2230}\times\frac{2580}{2200}\times\frac{2200}{2230}\times\frac{2580}{2615}}$$

$$=\sqrt{\frac{2580}{2230}\times\frac{2580}{2230}}$$

$$=\frac{2580}{2230}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$$ થાય છે.

તેથી ફિશરનો સૂચક આંક પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે.

10.7 જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક

(Cost of Living Index Number)

જથ્થાબંધ ભાવના સૂચક આંકની રચનાથી ભાવમાં થતી સામાન્ય વધઘટનો ખ્યાલ આવે છે. પરંતુ સમાજના વિવિધ વર્ગો જુદી જુદી વસ્તુઓનો વપરાશ કરતા હોવાથી જે તે વર્ગના લોકોના જીવન નિર્વાહ ખર્ચ પર કેવી અને કેટલી અસર થાય છે તે જથ્થાબંધ ભાવના સૂચક આંક ઉપરથી ચોક્કસ પણે માપી શકાતા નથી. તેમજ એક જ વર્ષના લોકો જુદાજુદા સમયે જુદા જુદા પ્રમાણમાં વસ્તુઓ વાપરે છે. તેથી ભાવ સપાટીમાં થતા ફેરફારો લોકોના જીવન નિર્વાહ ખર્ચમાં જુદી જુદી અસર કરે છે. આવી જુદી જુદી વસ્તુઓના ભાવોમાં થતા ફેરફારને કારણે ઉપભોક્તા તરીકે લોકો ઉપર થતી અસરનો અભ્યાસ કરવા માટે શોધવામાં આવતા આંકને જીવન નિર્વાહનો સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે. કોઈ એક સમયે કોઈ એક વર્ગના જીવન નિર્વાહના ખર્ચમાં આધાર વર્ષની સરખામણીમાં થતા સાપેક્ષ ટકાવારી ફેરફાર દર્શાવતા આંક એટલે જ જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક.

આમ સમાજના કોઈ એક ચોક્સ વર્ગના લોકોના કોઈ એક સમયના જીવન નિર્વાહ ખર્ચ માટે વપરાતી વસ્તુઓ જેવી કે ખોરાક, કપડાં, બળતણ, ભાડું વગેરે વસ્તુઓના ભાવમાં થતા ફેરફારને પરિણામે કેટલો ખર્ચ વધે છે,

કે ઘટે છે તે જીવન નિર્વાહના સૂચક આંક દર્શાવી શકે છે. દા.ત. કોઈ એક કુટુંબ વર્ષ 2015માં પોતાના જીવનવિર્વાહ પાછળ માસિક રૂ. 20,000 ખર્ચ કરતું હોય અને તેજ કુટુંબ વર્ષ 2022માં જીવન નિર્વાહ માટે માસિક રૂ. 40,000 ખર્ચ કરતું હોય તો જીવન નિર્વાહ ખર્ચનઓ સૂચકઆંક નીચે મુજબ મળે.

$$\text{જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક} = \frac{\text{વર્ષ 2022નો જીવન નિર્વાહ ખર્ચ}}{\text{વર્ષ 2015નો જીવન નિર્વાહ ખર્ચ}} \times 100$$

$$= \frac{40,000}{20,000} \times 100 = 200$$

જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકને છૂટક ભાવના છૂટક આંક તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. આવા સૂચક આંક ઓછા પગારદાર કે મધ્યમ વર્ગના કર્મચારીના મોંઘવારી ભથ્થાની ગણતરી કરવા માટે વિશેષ ઉપયોગી છે. જીવન નિર્વાહ ખર્ચને ધ્યાનમાં રાખીને મોંઘવારી ભથ્થું નક્કી કરવામાં આવતું હોવાથી વાસ્તવિક વેતન ઘટી જતું નથી.

10.7.1 જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની રચના :-

જથ્થાબંધ ભાવના સૂચક આંકની રચનામાં સમાયેલ મુદ્દાઓની જેમ જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની રચનામાં નીચેના મુદ્દાઓ ધ્યાનમાં રાખવા જોઈએ.

(1) હેતુ : સૌ પ્રથમ હેતુ અને વ્યાખ્યા સ્પષ્ટ હોવા જોઈએ એટલે કે કયા વર્ગના લોકો માટે જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની રચના કરવાની છે. તે સૌ પ્રથમ નક્કી કરવું જોઈએ. અને કયા ઉદ્દેશ માટે આ સૂચક આંકની રચના કરવી છે તે પણ સ્પષ્ટ હોવું જોઈએ. દા.ત. ધનિક વર્ગ અને મજૂર વર્ગના લોકોની જરૂરિયાતો જુદી જુદી હોય છે. જો અનાજ, કરીયાણાના ભાવમાં વધારો થાય તો ધનિક વર્ગના લોકોના જીવન નિર્વાહ ખર્ચ પર ઓછી અસર થાય છે. જ્યારે મજૂર વર્ગના લોકોના જીવન નિર્વાહ ખર્ચ પર વધારે અસર થાય છે. આ થી જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની રચના માટે હેતુ સ્પષ્ટ થવો જોઈએ.

(2) કૌટુંબિક બજેટ તપાસ અને યોગ્ય કદના નિદર્શની પસંદગી :-

હેતુ નક્કી થયા બાદ કુટુંબોની પસંદગી કઈ રીતે કરવી તે મહત્વનો પ્રશ્ન છે જે વર્ગના લોકો માટે જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો આંક શોધવો હોય તે વર્ગના દરેક કુટુંબઓની જીવન નિર્વાહ ખર્ચની માહિતી મેળવવાનું કાર્ય મુશ્કેલ હોય છે, તેથી કૌટુંબિક બજેટ તપાસ કરવામાં આવે છે. આ તપાસ યદચ્છ નિદર્શની રીતથી કરવી હિતાવહ છે. આવા પસંદ થયેલ કુટુંબોની તપાસ કરી તેમની જરૂરિયાતની વસ્તુઓ, તેનું પ્રમાણ, તેની પાછળ થતો ખર્ચ વગેરે માહિતી મેળવવામાં આવે છે. જેને ખોરાક, કપડાં, ભાડું, બળતણ અને પરચુરણ વસ્તુઓના વપરાશ જેવા વિભાગોમાં વહેંચવામાં આવે છે. આ વિભાગો પાછળ કેટલો ખર્ચ કર્યો છે તેની વિગતોનું વિશ્લેષણ કરવામાં આવે છે.

(3) દરેક વસ્તુઓના છૂટક ભાવો મેળવવા :-

જે વર્ગના લોકોના જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક શોધવાનો હોય તેવા લોકો જે વિસ્તારમાં રહેતા હોય તે વિસ્તારમાંથી પસંદ થયેલી વસ્તુઓના છૂટક ભાવ મેળવવામાં આવે છે. અને દરેક વસ્તુના ખર્ચનું તે જે સમૂહમાં આવેલી છે, તેના કુલ ખર્ચ સાથેનું પ્રમાણ નક્કી કરી તે ઉપરથી ભાર નક્કી કરવામાં આવે છે.

આમ સૂચક આંકની રચનામાં કઈ વસ્તુઓ લેવી અને તેમની કેટલી જાતો પસંદ કરવી ઉપરાંત તેમનો ભાવો મેળવવામાં આવે છે.

(4) આધાર વર્ષની પસંદગી :-

જથ્થા બંધ ભાવના સૂચક આંકની રચનામાં સમાયેલ મુદ્દાઓની જેમ જીવન નિર્વાહના સૂચક આંકની રચનામાં પણ આધાર વર્ષની પસંદગી કરવા માટે સામાન્ય વર્ષના છૂટક ભાવને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ દરેક વસ્તુ માટે ભાવ સાપેક્ષ ટકાવારી મેળવવામાં આવે છે.

(5) સરેરાશની પસંદગી અને ભારિત પદ્ધતિ :-

જુદી જુદી વસ્તુઓના ભાવ સાપેક્ષ પરથી એક સામાન્ય ભાવ સાપેક્ષ મેળવવાનું જરૂરી બને છે. અને તે માટે યોગ્ય સરેરાશની પસંદગી કરવી ખૂબ જ જરૂરી છે. સામાન્ય રીતે ગુણોત્તર મધ્યક એ સૂચક આંકની રચના માટે યોગ્ય સરેરાશ માનવામાં આવે છે. પરંતુપ કેટલી ગણતરીની મુશ્કેલી પડતી હોવાથી વ્યવહારમાં ભારિત સરેરાશનો જ સૂચક આંકની યોગ્ય સરેરાશ ગણવામાં આવે છે. સરેરાશની નક્કી થયા બાદ દરેક વસ્તુઓને યોગ્ય મહત્વના પ્રમાણમાં અગત્યના આંક (ભાર) નક્કી કરવામાં આવે છે. અને ત્યાર બાદ સૂચક આંક મેળવવામાં આવે છે.

જે તે સમૂહનો સૂચક આંક અને તેના ભારનો ગુણાકાર કરી ભારિત સરેરાશના નીચેના સૂત્રની મદદથી સમગ્ર વર્ગ માટે જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક મેળવવામાં આવે છે.

જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક $= \frac{\sum IW}{\sum W}$

જ્યાં I = જુદા જુદા સમૂહના સૂચક આંક

એટલે કે $I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$

W = ભાર

10.7.2 જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકના ઉપયોગો :-

(1) કર્મચારીઓ અને કારખાનામાં કામ કરતા વર્કરો માટે આ આંકની રચના નિયમિત ધોરણે કરવામાં આવે છે. કારણ કે ભાવની સપાટી વધવાને કારણે આ લોકોના જીવન નિર્વાહના ખર્ચ પર કેટલી અસર થાય છે અને તે પ્રમાણે કર્મચારીઓના મોંઘવારી ભથ્થામાં વધઘટ કરવામાં આવે છે. જેથી તેમનો મજૂરીનો દર રૂપિયાની ખરીદી શક્તિની દૃષ્ટિએ એક સરખો રહે.

(2) જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની મદદથી લોકો માટે નાણાકીય સાચી ખરીદ શક્તિનો અંદાજ મેળવી શકાય છે.

(3) જીવન નિર્વાહ સૂચક આંક છૂટક ભાવમાં થતા ફેરફાર બતાવે છે અને તેની મદદથી સરકારને કોઈ પણ વસ્તુ ઉપર અંકુશ મૂકવો કે તેને મુક્ત રાખવી તેનો ખ્યાલ આવે છે. ઉપરાંત કેટલીક વસ્તુઓ પર કર નાખવાથી જુદા જુદા વર્ગો ઉપર તેની શી અસર પડશે તે જાણી શકાય છે.

(4) દેશના જુદા જુદા ભાગોમાં રહેતા વિવિધ વર્ગના લોકોનું જીવન ધોરણ જાણી શકાય છે.

(5) જુદા જુદા વર્ગના કયા પ્રકારના વિશિષ્ટ સગવડો આપવી જરૂરી છે તે નક્કી કરવા માટે સરકારી સંસ્થાઓ તેમજ જાહેર ઉપયોગી સેવાઓ જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકનો આધાર લઈ શકે છે.

10.7.3 જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની મર્યાદાઓ :-

(1) જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક સમગ્ર વર્ષ કે સમય માટે જીવન નિર્વાહ ખર્ચમાં થતો સરેરાશ ફેરફાર દર્શાવે છે. તેથી તેનો ઉપયોગ ચોક્કસ વ્યક્તિ કે કુટુંબ માટે કરી શકાય નહીં.

(2) જો લોકોને જુદા જુદા વર્ગોમાં વહેંચવામાં ભૂલ થઈ જાય, કે લોકો માટેના સૂચક આંકની રચનામાં વસ્તુઓની પસંદગી કે વસ્તુઓનો ભાર આપવામાં ભૂલ થઈ જાય તો સૂચક આંક સંપૂર્ણ પણે ચોક્કસ ન મળે.

(3) કોઈ એક પ્રદેશ માટેનો સૂચક આંક બીજા પ્રદેશના તે જ વર્ગના લોકો માટે વાપરી શકાય નહીં.

(4) સૂચક આંકની રચનામાં એવી ધારણા કરવામાં આવે છે કે આધાર વર્ષમાં વસ્તુઓનો જ વપરાશ થતો હોય તે જ પ્રમાણે ચાલુ વર્ષમાં પણ વપરાશ થાય છે પરંતુ હકીકતમાં હંમેશાં આમ બનતું નથી. સમયાનુસાર ફેશન, લોકોની રૂચિ, પસંદગી વગેરેમાં ફેરફાર થતો રહે છે.

(5) એક જ વર્ગના લોકો જુદી જુદી વસ્તુઓ જુદા જુદા પ્રમાણમાં વાપરતા હોય છે. આથી જુદી જુદી વસ્તુઓને ભાર આપવામાં મુશ્કેલી નડે છે.

(6) કેટલીક વખત વસ્તુઓના ભાવ વિશ્વાસપાત્ર મળી શકતા નથી.

10.8 ઉદાહરણો :-

ઉદાહરણ :- 11 નીચે આપેલ માહિતીને આધારે જીવન નિર્વાહ ખર્ચનઓ સૂચક આંક શોધો.

સમૂહ	સૂચક આંક	ભાક
A	250	40
B	320	20
C	150	30
D	200	15
E	250	10

જવાબ :- અહીં દરેક વસ્તુઓ એટલે કે સમૂહનો સૂચક આંક I અને ભાર W આપેલ છે. તેથી IW શોધી સૂચક આંક ગણીશું.

સમૂહ	સૂચક આંક	ભાર	
	I	W	IW
A	250	40	10,000
B	320	20	6400
C	150	30	4500
D	200	15	3000
E	250	10	2500
		115	26400

$$\text{જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક} = \frac{\sum IW}{\sum W}$$

$$= \frac{26400}{115} = 229.57$$

ઉદાહરણ :- 12 નીચેની માહિતી ઉપરથી સૂચક આંકની રચના કરો.

વસ્તુ	ભાર	ભાવ	
		2015	2022
A	25	5	15
B	18	10	30
C	12	5	12.5
D	15	20	30

જવાબ : અહીં દરેક વસ્તુને ભાર (W) આપેલો છે. તેમજ આધાર વર્ષના ભાવ (P_0) અને ચાલુ વર્ષના ભાવ (P_1) આપ્યા છે. તેથી પ્રથમ દરેક વસ્તુ માટેને સૂચક આંક $I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$ સૂત્ર વડે શોધવો પડશે. ત્યારબાદ કૌટુંબિક બજેટની રીતે સૂચક આંક મેળવીશું.

વસ્તુ	ભાર	ભાવ			
–	W	2015	2022	$I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	IW
		P_0	P_1		
A	25	5	15	300	7500
B	18	10	30	300	5400
C	12	5	12.5	250	3000
D	15	20	30	150	2250
	70				18,150

કૌટુંબિક બજેટની રીતે સૂચક આંક $= \frac{\sum IW}{\sum W}$

$$= \frac{18150}{70}$$

$$= 259.29$$

ઉદાહરણ :- 13 નીચેની માહિતીના આધારે 2022ના વર્ષ માટે કૌટિંબિક બજેટની રીતે સૂચક આંક તૈયાર કરો.

બજેટ	2012માં	વર્ષ 2012માં	વર્ષ 2022માં
વસ્તુ	વપરાશ	ભાવ	ભાવ
ઘઉં	20	15	30
ચોખા	10	20	45
બાજરી	5	18	27
તુવેદાળ	2	100	150

જવાબ :- અહીં દરેક વસ્તુ માટે (q_0) ભાવ (p_0) અને આધાર વર્ષ (2022) માં વપરાશ ભાવ (p_1) આપેલ છે. તે ઉપરથી $W = p_0q_0$ અને $I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$ સૂત્ર વડે બને છે કોલમ મેળવીશું ત્યારબાદ સૂચક આંક શોધીશું.

	વર્ષ 2012માં વપરાશ	વર્ષ 2012માં ભાવ	વર્ષ 2022માં ભાવ	$W = p_0q_0$	$I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	IW
વસ્તુ	q_0	p_0	p_1			
ઘઉં	20	15	30	300	200	60,000
ચોખા	10	20	45	200	225	45,000
બાજરી	5	18	27	90	150	13,500
તુવેરદાળ	2	100	150	200	150	30,000
				790		1,48.500

કૌટુંબિક બજેટની સૂચક આંક = $\frac{\sum IW}{\sum W}$

$$= \frac{1,48,500}{790} = 187.80$$

ઉદાહરણ :- 14 નીચેની માહિતી પરથી કુલ ખર્ચની રીતે અને કૌટુંબિક બજેટની રીતે વર્ષ 2022 માટે સૂચક આંકની રચના કરો.

			ભાવ (રૂ. માં)	
વસ્તુઓ	જથ્થો	એકમ	આધાર વર્ષ	ચાલુ વર્ષ
A	150 કિ.ગ્રા.	1 ક્વિન્ટલ	1200	1500
B	100 કિ.ગ્રા.	1 ક્વિન્ટલ	800	1200
C	10 કિ.ગ્રા.	1 કિ.ગ્રા.	500	750
D	50 કિ.ગ્રા.	1 ટન	1000	2000
E	25 કિ.ગ્રા.	1 કિ.ગ્રા.	45	54

જવાબ :- અહીં વપરાશ (જથ્થો) કિ.ગ્રા.માં આપેલ છે જ્યારે ભાવના એકમ ક્વિન્ટલ, ટન અને કિ.ગ્રા.માં આપેલ છે. તો સૌ પ્રથમ આધાર વર્ષના ભાવ (p_0) અને ચાલુ વર્ષના ભાવ (p_1) દરેક વસ્તુ માટે કિ.ગ્રામાં ફેરવીશું.

નોંધ :- 1 ક્વિન્ટલ = 100 કિ.ગ્રા. થાય છે તે જ રીતે 1 ટન = 1000 કિ.ગ્રા. થાય છે. તેથી જે વસ્તુના ભાવ ક્વિન્ટલમાં આપેલ છે તેને 100 વડે ભાગવાથી કિ.ગ્રા.માં થશે અને જે વસ્તુના ભાવ ટનમાં આપેલ છે તેને 1000 વડે ભાગવાથી કિ.ગ્રા.માં થશે.

વસ્તુઓ	જથ્થાઓ	એકમ	ભાવ (રૂ. માં)					
	q_0 (કિ. ગ્રામમાં)		P_0	P_1	$I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	$W = p_0q_0$	IW	p_1q_0
A	150	કિ.ગ્રા.	12	15	125	1800	2,25000	2250
B	100	કિ.ગ્રા.	8	12	150	800	1,20,000	1200
C	10	કિ.ગ્રા.	500	750	150	5000	7,50,000	7500
D	50	કિ.ગ્રા.	1	2	200	50	10,000	100
E	25	કિ.ગ્રા.	45	54	120	1125	1,35,000	1350
					8775	12,40,000		12,400

(i) કુલ ખર્ચની રીતે સૂચક આંક

સૂચક આંક = $\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$

$$= \frac{12400}{8775} \times 100 = 1.4131 \times 100 = 141.31$$

(ii) કૌટુંબિક બજેટની રીતે સૂચક આંક

$$\text{સૂચક આંક} = \frac{\sum IW}{\sum W}$$

$$= \frac{12,40,000}{8775}$$

$$= 141.31$$

ઉદાહરણ :- 15 નીચેની માહિતી પરથી કૌટુંબિક બજેટની રીતે સૂચક આંક શોધો.

વસ્તુ	એકમ	વર્ષ 2018		વર્ષ 2022
		જથ્થો –	ભાવ (રૂ. માં)	ભાવ (રૂ. માં)
A	ક્વિન્ટલ	30 કિ.ગ્રા.	800	1200
B	ગ્રામ	50 કિ.ગ્રા.	10	16
C	ડઝન	36 ગ્રામ	42	63
D	બોક્સ	10 બોક્સ	5	6
E	કિ.ગ્રા.	25 કિ.ગ્રા.	12	18
F	લિટર	20 લિટર	14	22.4

જવાબ :- અહીં સૌ પ્રથમ ભાવ અને જથ્થાના એકમ સરખાં કરતાં અને એકમદીઠ ભાવ ધ્યાનમાં લઈ નીચે મુજબ કોષ્ટક તૈયાર થશે.

		વર્ષ 2018		વર્ષ 2022			
વસ્તુ	એકમ	જથ્થો	ભાવ	ભાવ	$I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	$W = p_0q_0$	IW
q_0	p_0	p_1					
A	1 કિ.ગ્રા.	30	8	12	150	240	36,000
B	1 ગ્રામ	50	10	16	160	500	80,000
C	1 ડઝન	3	42	63	150	126	18,900
D	1 બોક્સ	10	5	6	120	50	6,000
E	1 કિ.ગ્રા.	25	12	18	150	300	45,000
F	1 લિટર	20	14	22.4	160	280	44,800
						1496	2,30,700

સમજૂતી :- અહીં વસ્તુ Aમાં એકમ કિવન્ટલ છે એટલે ભાવ કિવન્ટલના આપ્યા છે તેથી ભાવને 100 વડે ગુણી પ્રતિ કિલો પ્રમાણે લખેલ છે. તેજ રીત વસ્તુ Cમાં ભાવ ડઝનમાં આપેલ છે. અને જથ્થો નંગમાં આપેલ છે તેથી જથ્થાને ડઝનમાં દર્શાવેલ છે.

$$\text{કૌટુંબિક બજેટની રીતે સૂચક આંક} = \frac{\sum IW}{\sum W} = \frac{2,30,700}{1496}$$

$$= 154.21$$

ઉદાહરણ :- 16 નીચે આપેલ માહિતી પરથી જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક મેળવો.

		વર્ષ 2019નો	વર્ષ 2022નો
સમૂહ	ભાર	ખર્ચ (રૂ. માં)	ખર્ચ રૂ. માં
ખોરાક	35	3000	4500
કપડાં	25	1500	3000
બળતણ	20	1000	1800
પરચુરણ	5	500	800

જવાબ :- અહીં વર્ષ 2019ના ખર્ચને P_0 અને વર્ષ 2022ના ખર્ચને P_1 વડે દર્શાવી ગણતરી કરીશું.

સમૂહ	ભાર W	P_0	P_1	$I = \frac{P_1}{P_0}\times100$	IW
ખોરાક	35	3000	4500	150	5250
કપડાં	25	1500	3000	200	5000
બળતણ	20	2000	3000	150	3000
ભાડું	15	1000	1800	180	2700
પરચુરણ	5	500	800	160	800

જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક $= \frac{\sum IW}{\sum W} = \frac{16750}{100}$

$= 167.5$

ઉદાહરણ :- 17 મધ્યમ વર્ગનાં કુટુંબોની તપાસ કરતાં નીચેની માહિતી પ્રાપ્ત થાય છે. તે ઉપરથી જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક શોધો.

ખર્ચની વિગત	ખોરાક 40 ટકા	ભાડું 10 ટકા	કપડાં 25 ટકા	બળતણ 15 ટકા	પરચુરણ 10 ટકા
ભાવ 2015	150	30	100	30	50
2022	300	36	170	45	70

જવાબ :- અહીં દરેક વસ્તુ પાછળ ખર્ચની વિગત સાથે ટકા આપેલ છે તે ભાર દર્શાવે છે.

સમૂહ	ભાર (W)	P_0	P_1	$I = \frac{P_1}{P_0}\times100$	IW
ખોરાક	40	150	300	200	8000
ભાડું	10	30	36	120	1200
કપડાં	25	100	170	170	4250
બળતણ	15	30	45	150	2250
પરચુરણ	10	50	70	140	1400
	100				17100

જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક = $\frac{\sum IW}{\sum W} = \frac{17100}{100} = 171$

ઉદાહરણ :- 18 પાંચ વસ્તુઓના ભાવમાં એક વર્ષ દરમિયાન આધાર વર્ષની સરખામણીમાં અનુક્રમે 30% 50% 20% 80% અને 125% વધારે થયો છે. તેમનું સાપેક્ષ મહત્વ 5 : 4 : 3 : 2 : 1ના પ્રમાણમાં છે. તો ભાવનો સૂચક આંક શોધો.

જવાબ : ધારો કે 5 વસ્તુઓ P, Q, R, S અને T છે. તો પ્રથમ P વસ્તુના ભાવમાં 30% વધારો થયો છે તેથી સૂચક આંક 100 + 30 = 130 થશે તેજ રીતે બીજી વસ્તુઓનો સૂચક આંક નીચે મુજબ છે.

વસ્તુ	સૂચક આંક (I)	ભાર (W)	IW
P	100 + 30 = 130	5	650
Q	100 + 50 = 150	4	600
R	100 + 20 = 120	3	360
S	100 + 80 = 180	2	360
T	100 + 125 = 225	1	225
		15	2195

જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક = $\frac{\sum IW}{\sum W}$

$$= \frac{2195}{15} = 146.33$$

10.9 તમારી પ્રગતિ ચકાસો.

10.9.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) સૂચક આંકની કુલ ખર્ચની રીત તેમજ કૌટુંબિક બજેટની રીત સમજાવો.

(2) સૂચક આંકની ગણતરીની રીતો વર્ણવો.

(3) સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણ અને પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણ સમજાવો.

(4) ફિશર સૂચક આંક એટલે શું ? ફિશરના સૂચક આંકને આદર્શ સૂચક શા માટે ગણવામાં આવે છે. તે સમજાવો.

(5) ફિશર અને માર્શલ અને એજવર્થના સૂચક આંકોએ બંને પરીક્ષણ માટે તપાસો.

(6) જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંક પર ટૂંકનોંધ લખો.

(7) જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની રચના સમજાવો.

(8) જીવન નિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકના ઉપયોગો અને મર્યાદાઓ લખો.

(9) સૂચક આંકની ગમતરીના નીચેનાં સૂત્રો સમજાવો. (i) લાસ્પેયરનું સૂત્ર (ii) પાશેનું સૂત્ર (iii) ફિશરનું સૂત્ર

(10) દર્શાવો કે ફિશરના સૂચક આંકનું સૂત્ર સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણ અને પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણ સમાધાન કરે છે.

(11) દર્શાવો કે માર્શલ અને એજવર્થનું સૂત્ર સમય વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે. પરંતુ પદ વિપર્યસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરતુ નથી.

(12) નીચેની માહિતી પરથી લાસ્પેયર, પાશે અને ફિશરના સૂચક આંકની રચના કરો.

વસ્તુઓ	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ	
	ભાવ (રૂ. માં)	જથ્થો (કિ.ગ્રા.)	ભાવ (રૂ. માં)	જથ્થો (કિ.ગ્રા માં)
A	10	12	12	15
B	7	15	5	20
C	5	24	9	20
D	16	5	14	5

(13) નીચેની માહિતી ઉપરથી લાસ્પેયર, પાશે અને ડોર્બિશ - બાઉલીનો સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	વર્ષ 2018		વર્ષ 2022	
	જથ્થો	કિંમત	જથ્થો	કિંમત
P	8	2	6	4
Q	10	5	5	6
R	14	4	10	5
S	19	2	13	2

(14) નીચે આપેલ માહિતી પરથી ફિશર અને માર્શલ-એજવર્થનો સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	આધાર વર્ષનો ભાવ	આધાર વર્ષનો કુલ ખર્ચ	ચાલુ વર્ષનો ભાવ	ચાલુ વર્ષનો કુલ ખર્ચ
W	6	300	10	600
X	2	80	2	100
Y	4	400	6	720
Z	10	120	30	720

(15) નીચેની માહિતી પરથી લાસ્પેયર, પાશે, ફિશર અને માર્શલ-એજવર્થનો સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	જથ્થો		ભાવ	
વર્ષ	2018	વર્ષ 2022	વર્ષ 2018	વર્ષ 2022
P	50	56	6	10
Q	100	120	2	2
Q	60	60	4	6
S	30	24	10	12
T	40	36	8	12

(16) નીચેની માહિતી પરથી લાસ્પેયર, પાશે, ફિશર, ડોર્બિશ-બાઉલી અને માર્શલ-એજવર્થનો સૂચક આંક શોધો.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ	
વસ્તુઓ	કિંમત	જથ્થો	કિંમત	જથ્થો
A	10	8	15	12
B	8	15	12	20
C	5	20	10	25
D	20	2.5	30	3

(17) નીચેની માહિતી પરથી લાસ્પેયર, પાશે, ફિશર અને ડોર્બિશ - બાઉલીના સૂચક આંકો મેળવો.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ	
વસ્તુ	જથ્થો	કુલ ખર્ચ	જથ્થો	કુલ ખર્ચ
A	5	10	5	20
B	4	12	5	30
C	8	8	8	16
D	5	20	3.5	28

(18) નીચે આપેલ માહિતી પરથી લાસ્પેયર, પાશે, ફિશર અને માર્શલ-એજવર્થનો સૂચક આંક શોધો.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ	
વસ્તુ	કિંમત	જથ્થો	કિંમત	જથ્થો
P	20	8	40	6
Q	50	10	60	5
R	40	15	50	15
S	20	20	20	25

(19) નીચે આપેલ માહિતી પરથી ફિશરના આદર્શ સૂચક આંકની રચના કરો તથા સમય વિપર્યાસ અને પદ વિપર્યસ પરીક્ષણ દ્વારા તેની ચકાસણી કરો.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ	
વસ્તુ	જથ્થો	કિંમત	જથ્થો	કિંમત
W	12	10	15	12
X	15	7	20	5
Y	24	5	20	9
Z	5	16	5	4

(20) નીચે આપેલી માહિતી પરથી દર્શાવઓ કે ફિશરનો સૂચક આંક સમય વિપર્યસ પરીક્ષણ અને પદ વિપર્યસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે.

વસ્તુઓ	જથ્થો (કિ.ગ્રા માં)		કિંમત (રૂ. માં)	
	2022	2020	2022	2020
A	9	6	55	50
B	3	2	125	100
C	6	4	65	60
D	14	10	25	30

(21) નીચે આપેલી માહિતી પરથી ફિશરનો સૂચક આંક મેળવો અને દર્શાવો કે ફિશરનો સૂચક આંક બંને પરીક્ષણોમાંથી પસાર થાય છે.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ	
વસ્તુ (રૂ. માં)	ભાવ કિ.ગ્રા. માં	જથ્થો રૂ. માં	ભાવ (કિ.ગ્રા.માં)	જથ્થો
A	2	8	4	6
B	5	10	6	5
C	4	14	5	10
D	2	19	2	13

(22) નીચે આપેલ માહિતી પરથી કુલ ખર્ચની રીતે અને કૌટુંબિક બજેટની રીતે સૂચક આંકની રચના કરો.

વસ્તુ	આધાર વર્ષની કિંમત (રૂ. માં)	ચાલુ વર્ષની કિંમત (રૂ. માં)	આધાર વર્ષનઓ જથ્થો
A	2	3	5
B	1	2	2
C	3	4	1

(23) નીચેની માહિતી પરથી કુલ ખર્ચની રીતે અને કૌટુંબિક બજેટની રીતે સૂચક આંક શોધો.

વસ્તુ	એકમ	આધાર વર્ષનો જથ્થો	આધાર વર્ષનો ભાવ	ચાલુ વર્ષનો ભાવ
A	ક્વિન્ટલ	6	5.75	6
B	ક્વિન્ટલ	6	5	8
C	ક્વિન્ટલ	1	6	9
D	ક્વિન્ટલ	6	8	10
E	ક્વિન્ટલ	4	2	1.50
F	ટન	1	20	15

(24) નીચેની માહિતી પરથી જીવન નિર્વાહ ખર્ચનઓ સૂચક આંક શોધો.

વસ્તુઓ	ભાર	સૂચક આંક
ખોરાક	10	350
બળતણ	2	150
કપડાં	2	200
ભાડું	2	150
પરચુરણ	4	225

(25) નીચે આપેલ માહિતી પરથી જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુઓ	ખોરાક	બળતણ	કપડા	ભાડું	પરચુરણ
ભાર	4	1	3	2	1
આધાર વર્ષના ભાવ	30	8	14	22	25
ચાલુ વર્ષના ભાવ	47	12	18	15	30

(26) નીચે આપેલ જુદા જુદા સમૂહોના ભાવ સાપેક્ષની ટકાવારી અને તેમના ભારની માહિતી પરથી ભારિત સરેરાશની રીતે જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક મેળવો.

સમૂહ	ખોરાક	બળતણ	કપડાં	ઘરભાડું	અન્ય
કુલ ખર્ચના ટકા	30	16	16	28	10
ભાવ સાપેક્ષ	80	115	110	95	88

(27) નીચે આપેલ માહિતી પરથી કૌટુંબિક બજેટની રીતે જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક શોધો.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષનો	
વસ્તુઓ	એકમ	ભાવ	જથ્થો	ભાવ
ઘઉં	ક્વિન્ટલ	2000	200 કિ.ગ્રા.	3000
ચોખા	ક્વિન્ટલ	4000	100 કિ.ગ્રા.	5200
મકાઈ	ક્વિન્ટલ	1500	0.5 ક્વિન્ટલ	2250
કઠોળ	ક્વિન્ટલ	7000	50 કિ.ગ્રા.	9100
શાકભાજી	ક્વિન્ટલ	500	100 કિ.ગ્રા.	1000
દૂધ	લિટર	50	50 લિટર	60
ગોળ	કિ.ગ્રા.	60	10 કિ.ગ્રા.	72
ખાંડ	કિ.ગ્રા.	40	20 કિ.ગ્રા.	48
મીઠું	કિ.ગ્રા.	10	5 કિ.ગ્રા.	12
તેલ	લિટર	100	40 લિટર	200
કપડાં	મીટર	50	20 મીટર	75
બળતણ	ક્વિલન્ટલ	400	100 કિ.ગ્રા.	640
ભાડું	ઘરદીઠ	2000	1 ઘર	3000
પરચુરણ	એકમદીઠ	500	5 એકમ	750

(28) આધાર વર્ષની સરખામણીમાં ચાલુ વર્ષમાં પાંચ વસ્તુઓ A B C D અને E નાં ભાવમાં અનુક્રમે 20%, 50%, 70%, 40% અને 110%નો વધારો થાય છે. જ્યારે તે વસ્તુઓનું મહત્વ અનુક્રમે 3 : 3 : 6 : 2 : 2ના પ્રમાણમાં છે. આ માહિતી પરથી જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક શોધો.

(29) મધ્યમ વર્ગનાં કુટુંબોની તપાસ કરતાં નીચેની માહિતી પ્રાપ્ત થાય છે. તે ઉપરથી જીવન નિર્વાહનો આંક શોધો.

ખર્ચની	ખોરાક	બળતણ	કપડાં	ભાડું	પરચુરણ
વિગત	35 ટકા	10 ટકા	20 ટકા	15 ટકા	20 ટકા
આધાર વર્ષની કિંમત	150	25	75	30	40
ચાલુ વર્ષની કિંમત	160	20	60	30	60

(30) મિલ કામદારઓના જીવન નિર્વાહ ખર્ચનાં આંક તૈયાર કરવા માટે ખાદ્ય ખોરાકના ખર્ચની વિગતો ઉપરથી કૌટુંબિક બજેટ પદ્ધતિથી ખાધા-ખોરાકીનો સૂચક આંક તૈયાર કરો.

વસ્તુ	વપરાશ (મણમાં)	આધાર વર્ષનો ભાવ (રૂ. માં)	ચાલુ વર્ષનો ભાવ (રૂ. માં)
ઘઉં	2	400	480
ચોખા	4	500	700
બાજરી	9	300	450
તુવેરની દાળ	3	2000	3000
ખાંડ	2	800	1200

જવાબો :

(12) $I_L = 118.8$ $I_P = 112.8$, $I_F = 115.76$

(13) $I_L = 125$, $I_P = 126.2$, $I_{D\text{-}B} = 125.6$

(14) નોંધ :- અહીં આધાર વર્ષનો કુલ ખર્ચ p_0q_0 આપેલ છે તેથી સૌ પ્રથમ દરેક વસ્તુ માટે આધાર વર્ષનો જથ્થો $q_0 = \frac{p_0q_0}{p_1}$ દ્વારા મેળવો. તેજ રીતે ચાલુ વર્ષનો કુલ ખર્ચ p_1q_1 આપેલ છે તેથી $q_1 = \frac{p_1q_1}{p_1}$ દ્વાર મેળવો.

$I_F = 176.16$, $I_{M\text{-}E} = 176.92$

(15) $I_L = 139.71$, $I_P = 139.88$, $I_F = 139.79$ $I_{M\text{-}E} = 139.79$

(16) $I_L = 164.29$, $I_P = 163.44$, $I_F = 163.86$, $I_{D\text{-}B} = 163.87$, $I_{M\text{-}E} = 163.80$

(17) નોંધ :- અહીં દરેક વસ્તુ માટે જથ્થો અને કુલ ખર્ચ આપેલ છે તેથી પ્રથમ એકમ દીઠ ભાવ શોધવા માટે ભાવ = $\frac{\text{કુલ ખર્ચ}}{\text{જથ્થા}}$ સૂત્રનો ઉપોગ કરો.

$I_L = 200$, $I_P = 200$, $I_F = 200$, $I_{D-B} = 200$

(18) $I_L = 124.70$, $I_P = 121.77$, $I_F = 123.23$, $I_{M\text{-}E} = 123.32$

(19) $I_F = 115.75$

(20) $I_F = 105$

(21) $I_F = 125.6$

(22) કુલ ખર્ચની રીતે સૂચક આંક = 153.33
કૌટુંબિક બજેટની રીતે સૂચક આંક = 153.33

(23) કુલ ખર્ચની રીતે સૂચક આંક = 118.77
કૌટુંબિક બજેટની રીતે સૂચક આંક = 118.77

(24) જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક = 256.5

(25) જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક = 128.98

(26) નોંધ :- અહીં કુલ ખર્ચના ટકા = W અને ભાવ સાપેક્ષ = 1 તરીકે લઈ ગણતરી કરવી.
જીવન નિર્વાહનો સૂચક આંક = 95.40

(27) નોંધ :- અહીં જે એકમમાં ભાવ આપેલ છે. તે પ્રમાણે જથ્થાને જે તે એકમમાં ફેરવીશું. દા.ત વસ્તુ ઘઉંનો ભાવ કિવન્ટલમાં આપેલ છે. જ્યારે વપરાશનો જથ્થો કિ.ગ્રા.માં આપેલ છે તેને 100 વડે ભાગી કિવન્ટલમાં ફેરવતા 2 કિવન્ટલ જથ્થો થશે. એજ રીતે જ્યાં પણ જથ્થામાં ફેરફાર જરૂરી છે; ત્યાં ફેરફાર કરો.
જીવન નિર્વાહ ખર્ચનાં સૂચક આંક = 148.52

(28) જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક = 128.125

(29) જીવન નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક = 106.33

(30) ખાધા ખોરાકીનો સૂચક આંક = 147.01

10.9.2 યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) કોના સૂત્રને સૂચક આંકનું આદર્શ સૂત્ર કહે છે ?

(A) લાસ્પેયર (B) પાશે (C) ફિશર (D) માર્શલ - એજવર્થ

(2) જો $\sum p_1q_0 = 1350$ અને $\sum p_0q_0 = 900$ હોયતો લાસ્પેયરનો સૂચક આંક .... થાય.

(A) 66.67 (B) 150 (C) 200 (D) 900

(3) ચાલુ વર્ષના જથ્થા સાથે ચાલુ વર્ષનો કુલ ખર્ચ $\sum p_1q_1 = 350$ અને ચાલુ વર્ષના જથ્થા સાથે આધાર વર્ષનો કુલ ખર્ચ $\sum p_0q_1 = 437.5$ હોય તો પાશેનો સૂચક આંક શોધો.

(A) 125 (B) 137.5 (C) 150 (D) 80

(4) જો લાસ્પેયરનો સૂચક આંક 150 અને પાશેનો સૂચક આંક 160 હોય તો ફિશરનો સૂચક આંક .... થાય.

(A) 150 (B) 160 (C) 155 (D) 154.92

(5) જો લાસ્પેયરનો સૂચક આંક 125 અને પાસેનો સૂચક આંક 127 હોય તો ડોર્બિશ બાઉલીનો સૂચક આંક શોધો.

(A) 125 (B) 127 (C) 125.90 (D) 126

(6) કયો સૂચક આંક સમય વિપર્યાસ અને પદ વિપર્યસ એમ બંને પરીક્ષણોનું સમાધાન કરે છે ?

(A) પાશે (B) ફિશર (C) માર્શલ-એજવર્થ (D) ડોર્બિશ - બાઉલી

(7) પાશેના સૂચક આંકમાં .... ને વધુ મહત્વ આપવામાં આવે છે.

(A) આધાર વર્ષના જથ્થાને (B) ચાલુ વર્ષના જથ્થાને

(C) (A) અને (B) બંનેને (D) ત્રણેમાંથી એક પણ નહીં

(8) માર્શલ-એજવર્થના સૂચક આંકમાં .... ને મહત્વ આપવામાં આવે છે.

(A) આધાર વર્ષના જથ્થાને (B) ચાલુ વર્ષના જથ્થાને

(C) (A) અને (B) બંનેને (D) ત્રણેમાંથી એક પણ નહીં

(9) લાસ્પેયરના સૂચક આંકમાં .... ને વધુ મહત્વ આપવામાં આવે છે.

(A) આધાર વર્ષના જથ્થાને (B) ચાલુ વર્ષના જથ્થાને

(C) (A) અને (B) બંનેને (D) ત્રણેમાંથી એક પણ નહીં

(10) જો પાશેનો સૂચક આંક = 150 અને ડોર્બિશ બાઉલીનો સૂચક આંક 152 હોય તો લાસ્પેયરનો સૂચક આંક શોધો.

(A) 150 (B) 151 (C) 152 (D) 154

(11) જો ફિશરનો સૂચક આંક અને પાશેનો સૂચક આંક અનુક્રમે 147.48 અને 150 હોય તો લાસ્પેયરનો સૂચક આંક .... છે.

(A) 145 (B) 148.74 (C) 150 (D) 147.48

(12) જો $\sum p_1q_0 = 2070$, $\sum p_0q_0 = 1660$, $\sum p_1q_1 = 1740$ અને $\sum p_0q_1 = 1740$ હોય તો માર્શલ અને એજવર્થનો સૂચક આંક .... થાય.

(A) 123.32 (B) 123.23 (C) 121.77 (D) 124.70

(13) જો $\sum p_1q_0 = 500$, $\sum p_1q_1 = 540$, $\sum p_0q_1 = 480$ અને $\sum p_0q_0 = 425$ હોય તો ફિશરનો સૂચક આંક શોધો.

(A) 117.65 (B) 117 (C) 115 (D) 112.5

(14) કયા સૂચક આંકના સૂત્રો સમય વિપર્યસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે ?

(A) લાસ્પેયર અને પાશે　　(B) પાશે અને ડોર્બિશ બાઉલી

(C) ફિશર અને માર્શલ એજવર્થ　　(D) લાસ્પેયર અને ડોર્બિશ બાઉલી

(15) લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચકનો સમાંતર મધ્યક લઈ કયા અર્થશાસ્ત્રીએ સૂત્ર આપેલ છે.

(A) ફિશર　　(B) માર્શલ - એજવથ

(C) કાર્લ પિયર્સન　　(D) ડોર્બિશ અને બાઉલી

(16) લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંકનો ગુણોત્તર મધ્યક લઈ કયા અર્થશાસ્ત્રી એ સૂત્ર આપેલ છે.

(A) ફિશર　　(B) માર્શલ-એજવર્થ

(C) કાર્લ પિયર્સન　　(D) ડોર્બિશ અને બાઉલી

જવાબો :

(1) C (2) B (3) A (4) D (5) D (6) B (7) B (8) C (9) A (10) D (11) A (12) A (13) C (14) C (15) D (16) A

10.10 ચાવીરૂપ શબ્દો :

- આદર્શ = સર્વશ્રેષ્ઠ
- P0 = આધાર વર્ષનો ભાવ
- q0 = આધાર વર્ષનો જથ્થો
- P1 = ચાલુવર્ષનો ભાવ
- q1 = ચાલુ વર્ષનો જથ્થો
- W = આપવામાં આવતો ભાર
- ભાર = અગત્યનો આંક
- ગુણોત્તર = પ્રમાણ

★ **સંદર્ભ ગ્રંથ**

- અર્થ વિષયક આંકડાશાસ્ત્ર ડૉ. M.C. જયસ્વાલ (1990) યુનિવર્સિટી ગ્રંથ નિર્માણ બોર્ડ, ગુજરાત રાજ્ય
- Fundamental of Statistics, S.C. and Sangya Srivastava, (2009), Anmol Biolications pvt.Ltd. New Delhi.

★ ★ ★

એકમ 11

સહસંબંધક
(Correlation)

11.0 ઉદ્દેશ

11.1 પ્રસ્તાવના

11.2 સહસંબંધનો અર્થ અને વ્યવસ્થા

11.3 સહસંબંધના પ્રકારો

11.4 સહસંબંધના અભ્યાસની રીતો

(A) વિકીર્ણ આકૃતિની રીત

(B) કાર્લ પિર્યસનની રીત

(C) સ્પિયરમેનના ક્રમાંક સહસંબંધાંકની રીત

11.5 દ્વિચલ કોષ્ટક ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધવાની રીત

11.6 કાર્લ પિયર્સનની રીતના ગુણાદોષ

11.7 સ્પિયરમેનની રીતના ગુણદોષ

11.8 સહસંબંધાંકનું અર્થઘટન

11.9 સંભવિત દોષ

11.10 નિર્ણાયકતાનો આંક

11.11 વિકીર્ણ આકૃતિની રીતના ઉદાહરણો અને સ્વાધ્યાય

11.12 કાર્લપિર્યસનની રીતના ઉદાહરણો અને સ્વાધ્યાય

11.13 સ્પિયરમેનની રીતના ઉદાહરણો અને સ્વાધ્યાય

11.14 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો (MCQ'S)

11.15 ચાવીરૂપ શબ્દો

– સંદર્ભ ગ્રંથ

11.0 ઉદ્દેશ

– બે ચલો એકબીજાથી કેટલા નજીક છે. તેની જાણકારી વિદ્યાર્થીઓને મળે.

– બે ચલો વચ્ચે કેવા પ્રકારના સંબંધો છે. (દાત. પ્રત્યક્ષ, પરોક્ષ કે અભાવ) તે અંગેની ગણતરી વિદ્યાર્થીઓ કરી શકે અને ચોક્કસ અનુમાનો મેળવી નિર્ણય લઈ શકે.

– આર્થિક ચલો જેવા કે માંગ, પુરવઠો, ભાગ વગેરે વચ્ચેના સંબંધોની જાણકારી મેળવી શકે.

11.1 પ્રસ્તાવના :

સહસંબંધની જાણકારી મેળવતા પહેલા ચલરાશિઓની જાણકારી મેળવવી જરૂરી છે. ચલરાશિઓ એટલે કે માંગ, પુરવઠો, વસ્તુના ભાવ વિદ્યાર્થીઓની કિંમતો બદલાતી રહે છે. અને તેને સંખ્યામાં દર્શાવી શકાય છે. આ ચલરાશીઓ વચ્ચે સંબંધો રહેલા હોય છે. દા.ત. માંગ અને તેની કિંમત વચ્ચેના સંબંધો માપવામાં આવે તો માંગ ફેરફાર થતો જોવા મળે છે એટલે કે જ્યારે એક ચલની કિંમતમાં ફેરફાર થાય છે ત્યારે બીજા

ચલની કિંમતમાં ફેરફાર થાય છે અને તે બંને ચલો વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ માલૂમ પડે તો તેને સહસંબંધ તરીકે ઓળખી શકાય અને જો બે ચલો વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધનો અભાવ જોવા મળે તો તેને સહસંબંધના અભાવ તરીકે ઓળખી શકાય એટલે કે બે ચલો વચ્ચે સંબંધ નથી તેમાં બંને ચલો વચ્ચે એક સાથે ફેરફાર થાય છે. પરંતુ બંને ચલો વચ્ચે કોઈ કાર્ય-કારણનો સંબંધ હોતો નથી. દા.ત. એક સમુહના વ્યક્તિઓનુ વજન અને આવક બંનેના આંકડા તપાસવામાં આવે તો તે બંનેમાં એકસાથે ફેરફારો થતા જોવા મળે છે. પરંતુ બંને વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ જોવા મળતો નથી. એટલે કે વજન અને આવક વચ્ચે સહસંબંધનો અભાવ છે.

11.2 સહસંબંધનો અર્થ અને વ્યાખ્યા :

અર્થ :

સહસંબંધ એ બે કે તેથી વધારે ચલો વચ્ચે કેવો અને કયા પ્રકારનો સંબંધ રહેલો છે. તે જાણવા માંટેની આકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિ છે. તેમાં એક ચલમાં ફેરફાર થાય તો તેને લીધે બીજા ચલમાં પણ ફેરફાર થતો જોઈ શકાય છે અને આ ફેરફાર કયા પ્રકારનો છે તે જાણી શકાય છે. એટલે કે એક ચલ બીજા ચલથી કેટલો નજીક છે. તેની જાણકારી મેળવી શકાય છે. દા.ત. નવા ઉદ્યોગોની સ્થાપના કરવાથી રોજગારીની તકોમાં વધારો થતો હોય છે. એટલેકે નવા ઉદ્યોગોની સ્થાપના કરવાથી તેમાં કાર્ય માટે માણસોની જરૂરિયાત ઊભી થશે. પરિણામે રોજગારીની નવીન તકો ઊભી થતી જોવા મળે છે. અહીં બંને ચલો વચ્ચે કાર્યકારણનો સંબંધ જોવા મળે છે. તેવી નવા ઉદ્યોગની સ્થાપના અને રોજગારીની તકો વચ્ચે સહસંબંધ છે એમ કહી શકાય.

વ્યાખ્યા :

– W.I. King ના મતે “correlation means that between two series or groups of data there exists some casual connection” એટલે કે કોઈપણ બે શ્રેણી કે સમુહો વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ હોય તો તેને સહસંબંધ કહે છે.

– Dr. M. H. Maisuria ના મતે કોઈપણ બે શ્રેણીઓ કે સમુહો વચ્ચે પ્રત્યક્ષ કે પરોક્ષ દિશામાં ફેરફાર થતો હોય અને આ ફેરફાર કાર્ય-કારણનો સંબંધને કારણે ઉદ્દભવતો હોય તો તેને સહસંબંધ કહે છે.

સહસંબંધના ઉદાહરણો :

– કિંમત અને માંગ

– માંગ અને પુરવઠો

– કિંમત અને પુરવઠો

– પતિની ઊંમર અને પત્નીની ઊંમર

– આવક અને ખર્ચ

– આવક અને બચત

– વરસાદ અને પાક

– ઊંચાઈ અને વજન

11.3 સહસંબંધના પ્રકારો : Type of correlation સહસંબંધ ને નીચેના ત્રણ પ્રકારોમાં વહેંચી શકાય. (A) ધન સહસંબંધ (B) ઋણ સહસંબંધ (C) સહ સંબંધનો અભાવ

(A) ધન સહસંબંધ : (Positive Correlation) :

જ્યારે કોઈપણ બે ચલો પૈકી કોઈ એક ચલની કિંમતમાં ઘટાડો થતો અને બીજા સંબંધિત ચલોની કિંમતમાં પણ ઘટાડો થતો હોય છે અથવા એક ચલની કિંમતમાં વધારો થતો અને બીજા સંબંધિત ચલની કિંમતમાં પણ વધારો થતો હોય છે એટલે કે બંને ચલોમાં એક જ દિશામાં ફેરફાર થતો હોય અને બંને વચ્ચે કાર્ય કારણનો

સંબંધ હોય તો આવા ચલો વચ્ચેના સંબંધને ધન સહસંબંધ કહેવામાં આવે છે. જે નીચેના ઉદાહરણો ઉપરથી સમજી શકાય.

ઉદાહરણ-1

વાહનોની સંખ્યા	10	17	19	21	23
અકસ્માતોની સંખ્યા	4	7	8	10	12

ઉપરના ઉદાહરણમાં જોઈ શકાય છે કે વાહનોની સંખ્યામાં વધારો થાય છે. તેમાં અકસ્માતોની સંખ્યામાં પણ વધારો થાય છે અને બંને વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ હોવાથી વાહનોની સંખ્યા અને અકસ્માતનોની સંખ્યા વચ્ચે ધન સહસંબંધ છે. એમ કહેવાય. પરંતુ અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે તે આ વધારાનું પ્રમાણ એક સરખુ નથી તેથી તેને આંશિક ધન સહસંબંધ તરીકે પણ ઓળખી શકાય.

ઉદાહરણ-2

આવક (રૂ.)	200	150	125	100	80
ખર્ચ (રૂ.)	160	110	80	50	40

ઉપરના ઉદાહરણમાં જોઈ શકાય છે કે કોઈ એક વ્યક્તિની આવકમાં ઘટાડો થાય છે તેમ તેના ખર્ચમાં ઘટાડો થાય છે. અને બંને વચ્ચે કાર્યકારણનો સંબંધ છે. તેથી આવક અને ખર્ચ બંને વચ્ચે ધન સહસંબંધ છે એમ કહેવાય પરંતુ અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે કે આ ઘટાડાનું પ્રમાણ એક સરખુ નથી તેથી તેને આંશિક ધન સહસંબંધ તરીકે ઓળખી શકાય.

(B) ઋણ સહસંબંધ (Nagative Correlation) :

જ્યારે કોઈપણ બે ચલો પૈકી કોઈ એક ચલની કિંમતમાં ઘટાડો થતો હોય અને બીજા સંબંધિત ચલની કિંમતમાં વધારો થતો હોય છે. અથવા કોઈ એક ચલની કિંમતમાં વધારો થતો હોય અને બીજા સંબંધિત ચલની કિંમતમાં ઘટાડો થતો હોય છે એટલે કે બંને ચલોમાં વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરફાર થતો હોય અને બંને વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ હોય તો આ બે ચલો વચ્ચેના સંબંધને ઋણ સહસંબંધ કહેવામાં આવે છે. જે નીચેના ઉદાહરણો ઉપરથી સમજી શકાય.

ઉદાહરણ-1

ભાવ (રૂ.)	16	10	8	6	5
માંગ (અંકમાં)	40	45	48	52	58

ઉપરના ઉદાહરણમાં જોઈ શકાય છે કે કોઈ એક વસ્તુના ભાવમાં ઘટાડો થતો હોય છે તેમ તેની માંગમાં વધારો થતો હોય છે. એટલે કે બંને વચ્ચે વિરુદ્ધ દિશમાં ફેરફાર થાય છે અને બંને વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ પણ છે. તેથી આવા બે ચલો વચ્ચેના સંબંધને ઋણ સહસંબંધ કહેવાય અલબત્ત અહીં એ ખાસ નોંધવું જોઈએ કે આ ફેરફારનું પ્રમાણ એક સરખુ નથી તેથી તેને આંશિક ઋણ સહસંબંધ તરીકે ઓળખી શકાય.

ઉદાહરણ-2

ભાવ	12	15	17	20	22
માંગ	14	11	9	7	6

ઉપરના ઉદાહરણમાં જોઈ શકાય છે કે કોઈ એક વસ્તુના ભાવમાં વધારો થતો હોય છે તેમ તેની માંગમાં ઘટાડો થતો હોય છે. એટલે કે બંને વચ્ચે વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરફાર થાય છે. અને બંને વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ પણ છે. તેથી આવા બે ચલો વચ્ચેના સંબંધને ઋણ સહસંબંધ તરીકે ઓળખી શકાય. અલબત્ત અહીં એ ખાસ નોંધવુ જોઈએ કે આ ફેરફારનું પ્રમાણ એકસરખુ નથી તેને આંશિક ઋણ સહસંબંધ તરીકે ઓળખી શકાય.

(C) સહ સંબંધનો અભાવ :

જ્યારે કોઈપણ બે ચલોનો થતો ફેરફાર એક જ દિશામાં કે વિરુદ્ધ દિશામાં થતો હોય પરંતુ તે બે ચલો વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ ન હોય તો તે બે ચલો વચ્ચે સહસંબંધનો અભાવ છે. એમ કહેવાય. એટલે કે બંને ચલો એકબીજાથી સ્વતંત્ર છે એમ કહેવાય.

વર્ષ	2019	2020	2021	2022
BAOUના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	200	400	500	600
અમદાવાદમાં થતુ કારનું ઉત્પાદન (હજારમાં)	50	70	90	95

ઉપરના ઉદાહરણમાં જોઈ શકાય છે કે BAOUના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યામાં વધારો થાય છે અને અમદાવાદમાં કારના ઉત્પાદનમાં પણ વધારો થાય છે એટલે કે વધારો એક જ દિશામાં જોવા મળે છે. પરંતુ આ બંને વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ નથી. (અહીં BAOUના વિદ્યાર્થીઓ અને અમદાવાદમાં કારના ઉત્પાદન સાથે કોઈ લેવા દેવા નથી.) તેથી તે બંને વચ્ચે સહસંબંધનો અભાવ છે. એમ કહેવાય. તેવી જ રીતે આ ફેરફારો વિરુદ્ધ દિશામાં થતો હોય અને બંને ચલો વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ ન હોય તો તે બે ચલો વચ્ચે સહસંબંધનો અભાવ છે એમ કહેવાય. અહીં બે ચલો એકબીજાથી કેટલા નિકટ છે તે જાણી શકાતુ નથી બંને ચલો સ્વતંત્ર છે.

11.4 સહસંબંધના અભ્યાસની રીતો (Methods of Studying Correlation) : બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે મુખ્યત્વે નીચે ત્રણ રીતોનો ઉપયોગ થાય છે. જે નીચે મુજબ છે.

(A) વિકીર્ણ આકૃતિની રીત

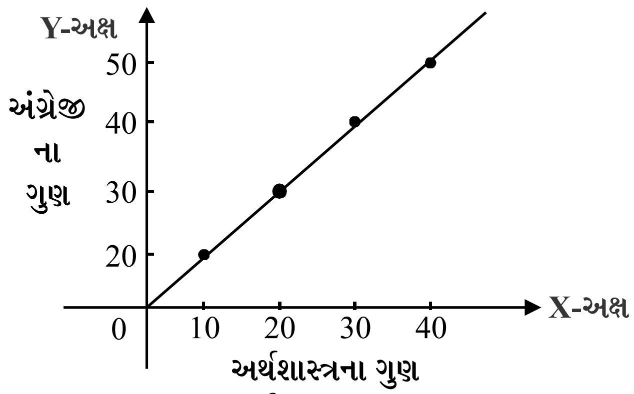
(B) કાર્લ પિર્યસનની રીત (ગુણન પ્રધાનની રીત)

(C) સ્પયરમેનની રીત (ક્રમાંક સહસંબંધની રીત)

(A) વિકીર્ણ આકૃતિની રીત :

સહસંબંધના અભ્યાસની રીતો પૈકીની પ્રથમ રીત એટલે વિકીર્ણ આકૃતિની રીત તેમાં બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધનું માપ અને પ્રકારોનો અભ્યાસ ખૂબ જ સરળતાથી કરી શકાય છે. આ રીતમાં બે ચલો પૈકી એક ચલની કિંમતોને X-અક્ષ ઉપર અને બીજા ચલની કિંમતોને Y-અક્ષ ઉપર દર્શાવવામાં આવે છે અને બંને ચલોના બિંદુઓ જોડકા પ્રમાણે લઈ તેનું એક ચિત્ર કે આકૃત્તિ દોરવામાં આવે છે. આ ચિત્ર કે આકૃત્તિને વિકીર્ણ ચિત્ર અથવા વિકીર્ણ આકૃતિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેની મદદથી બે ચલો વચ્ચે કયા પ્રકારનો સંબંધ છે અથવા બે ચલો વચ્ચે સહસંબંધનો અભાવ છે તે જાણી શકાય છે. આ પ્રકારની વિકીર્ણ આકૃતિઓને મુખ્યત્વે પાંચ વિભાગમાં વહેંચવામાં આવે છે. જે નીચે મુજબ છે.

આકૃતિ-1 સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ



(સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ)

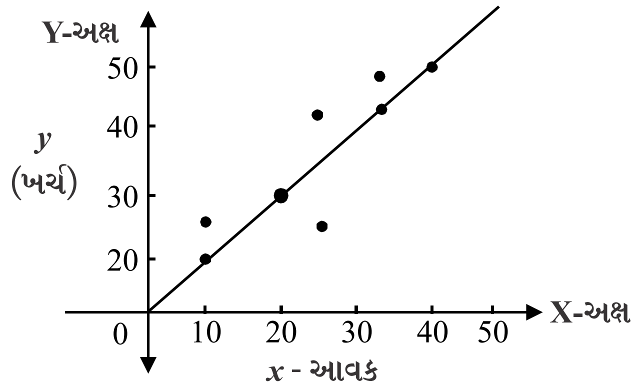
ઉપરની આકૃતિમાં જોઈ શકાય છે કે અર્થશાસ્ત્રના ગુણમાં વધારો થાય છે તેમ અંગ્રેજીના ગુણોમાં પણ

વધારો થાય છે. અને આ વધારો પ્રમાણસર છે અને આલેખની રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ અને નીચેથી ઉપર તરફ જાય છે. તેથી આ બંને ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

અર્થશાસ્ત્રના ગુણ	10	20	30	40
અંગ્રેજીના ગુણ	20	30	40	50

આમ કોઈપણ બે ચલો વચ્ચે થતી વધ-ઘટ એકજ દિશામાં અને પ્રમાણસર હોય અને આલેખમાં દર્શાવ્યા મુજબ રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ, નીચેથી ઉપર તરફ જતી હોય તો તે બે ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ ધન સહ સંબંધ છે એમ કહેવાય.

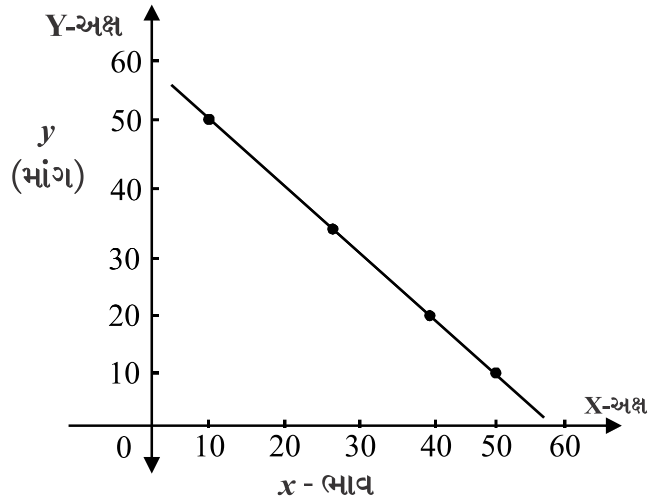
આકૃતિ-2 આંશિક ધન સંબંધ



આંશિક ધન સંબંધ

અહીં ઉપરની આકૃતિમાં જોઈ શકાય છે કે બે ચલોની કિંમતો x અને y (ખર્ચ)માં થતો ફેરફાર એક જ દિશામાં છે પરંતુ પ્રમાણસર નથી અને તેની રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચેથી ઉપર તરફ જાય છે. પરંતુ અમુક બિંદુઓ રેખાની આજુબાજુ પડે છે. (જે અપ્રમાણસર વધ ઘટ બતાવે છે.) તેથી આ બે ચલો વચ્ચે આંશિક રૈખિક ધન સહસંબંધ છે એમ કહી શકાય.

આકૃતિ-3 ઋણ સંબંધ



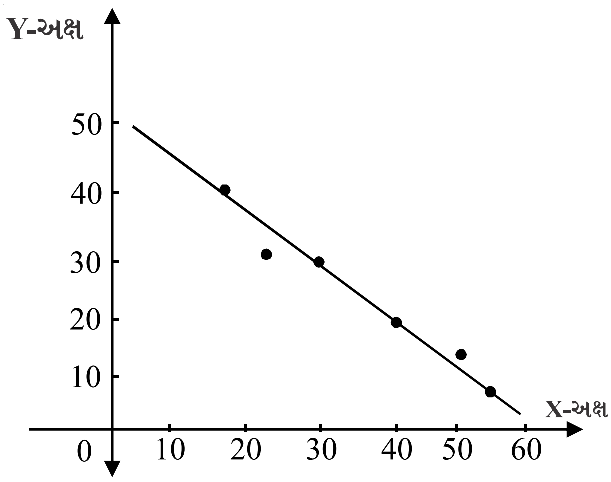
ઋણ સહ સંબંધ

ઉપરની આકૃતિમાં જોઈ શકાય છે કે વસ્તુનો ભાવ જેમ જેમ વધતો જાય છે તેમ તેમ પુરવઠામાં ઘટાડો

થતો જાય છે. આ ઘટાડો પ્રમાણસર છે અને આલેખની રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરથી નીચે તરફ જાય છે તેથી આ બંને ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ છે. એમ કહેવાય.

આમ કોઈપણ બે ચલો વચ્ચે થતી વધ-ઘટ વિરુદ્ધ દિશામાં અને પ્રમાણસર હોય અને આલેખમાં દર્શાવ્યા મુજબ રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરથી નીચેની તરફ જતી હોય તો તે બે ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

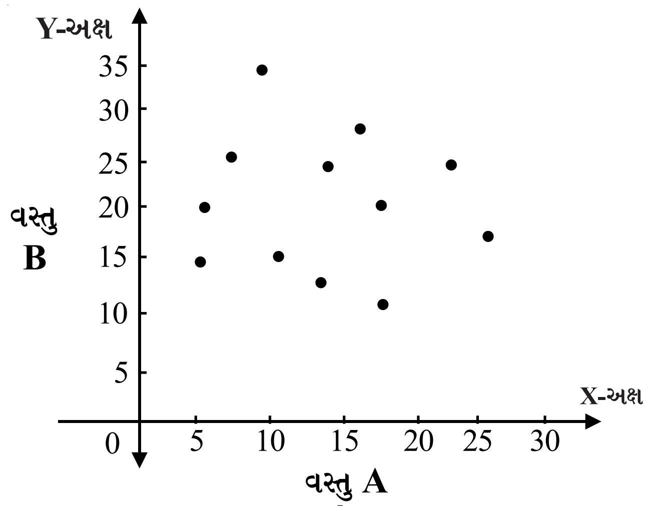
આકૃતિ-4 આંશિક ઋણ સહસંબંધ



આંશિક ઋણ સહસંબંધ

અહીં આકૃતિમાં જોઈ જોઈ શકાય છે કે બે ચલો x અને y મા થતો ફેરફાર વિરુદ્ધ દિશામાં છે પરંતુ પ્રમાણસર નથી અને તેની રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરથી નીચેની તરફ જાય છે પરંતુ અમુક બિંદુઓ આ રેખાની આજુબાજુ પડે છે (જે અપ્રમાણસર વધઘટ બતાવે છે.) તેથી આ બે ચલો વચ્ચે આંશિક ઋણ સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

આકૃતિ-5 સહસંબંધનો અભાવ



સહસંબંધનો અભાવ

ઉપરની આકૃતિમાં જોઈ શકાય છે કે વસ્તુ A અને વસ્તુ B ના બિંદુઓ ગમે ત્યાં વેર-વિખેર (અસ્ત વ્યસ્ત)

પડેલા છે તેથી તે બે-ચલો વચ્ચે સહસંબંધનો અભાવ છે એમ કહી શકાય. બંને ચલો એકબીજાથી સ્વતંત્ર છે એમ કહી શકાય.

આમ વિકીર્ણ આકૃતિની મદદથી બે ચલો એકબીજાથી કેટલા નજીક છે અને બે ચલો વચ્ચે કયા પ્રકારનો સહસંબંધ રહેલો છે તે જાણી શકાય છે. પરંતુ તેની એક ખામી એ છે કે સહસંબંધનું ચોક્કસ માપ જાણી શકતુ નથી, તેથી આ ખામીને દૂર કરવા કાર્લપિર્યસને આપેલુ માપ સમજવુ જરૂરી છે.

(B) કાર્લ પિયર્સનની રીત : આ રીતને ગુણન પ્રધાનની રીત તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. કાર્લ પિયર્સને આપેલી આ રીતની મદદથી બે ચલો વચ્ચેના સંબંધની દિશા તેમજ બે ચલો વચ્ચેની નિકટતા સંખ્યાત્મક રીતે દર્શાવી શકાય છે. એટલે કે આ રીતની મદદથી બે ચલો વચ્ચેનો રૈખિક સહસંબંધ સંખ્યાત્મક રીતે માપી શકાય છે અને પ્રકારના સહસંબંધના માપને સહસંબંધાંક તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. અને તેને r (આર) વડે દર્શાવવામાં આવે છે. સહસબંધાંક r (આર) ની ગણતરી માટે કાર્લ પિર્યસને નીચેના અલગ અલગ સૂત્રો આપેલા છે.

x અને y વચ્ચેના સહસંબંધંકની ગણતરીના સૂત્રો :

(1) સહસંબંધંક $r = \dfrac{Cov(x,y)}{S_x \cdot S_y}$

$Cov\ (x,\ y) = x$ અને y વચ્ચેનું સહવિચરણ

$$= \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$$

$5_x = x$નું પ્રમાણિત વિચલન

$$= \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$$

$5_y = y$નું પ્રમાણિત વિચલન

$$= \sqrt{\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}}$$

(2) સહસંબંધાક $r = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n.S_x.S_y}$

(3) સહસંબંધાક $= \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \times \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$

નોંધ : મધ્યકો પૂર્ણાંકમાં આવતા હોય એટલે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ની કિંમત પૂર્ણાંક સંખ્યામાં આવે ત્યારે આ સૂત્ર વાપરવું વધુ યોગ્ય ગણાય.

(4) સહસંબંધાંક $r = \dfrac{\Sigma xy - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{n\,S_x\,S_y}$

(5) સહસંબાંધક $r = \dfrac{n\Sigma xy - \Sigma x.\Sigma y}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \times \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$

(6) **સહસંબંધાંક શોધવાની ટૂંકી રીતનું સૂત્ર :**

સહસંબંધાંક $r = \dfrac{n\Sigma uv - \Sigma u.\Sigma v}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$

જ્યાં $u = x - \text{A}$ અથવા $u = \dfrac{x - \text{A}}{i_x}$

અને $v = \text{Y} - \text{B}$ અથવા $v = \dfrac{y - \text{B}}{i_y}$

A = x નો ધારેલો મધ્યક

i_x = x ની વર્ગ લંબાઈ

B = Y નો ધારેલો મધ્યક

i_y = y નો વર્ગ લંબાઈ

Σu = x ના વિચલનોનો સરવાળો

Σv = y ના વિચલનોનો સરવાળો

Σu^2 = x ના વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો

Σv^2 = y ના વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો

Σuv = x અને yના વિચલનોના ગુણાકારનો સરવાળો

n = કુલ પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા (જોડકા)

નોંધ :- આ સૂત્રનો ઉપયોગ જ્યારે $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ની કિંમત અપૂર્ણાંકમાં આવે ત્યારે કરવો વધુ યોગ્ય છે.

(7) **વર્ગીકૃત માહિતી ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધવાનું સૂત્ર**

$$\text{r} = \frac{n\Sigma fuv - \Sigma ufu\, \Sigma vfv}{\sqrt{n\Sigma u^2 fu - (\Sigma ufu)^2} \times \sqrt{n\Sigma v^2 fv - (\Sigma vfv)^2}}$$

નોંધ : જ્યારે અવલોકનોના જોડકાની સંખ્યા ખૂબ જ વધારે હોય (એટલે કે x અને y ના જોડકા મોટા પ્રમાણમાં હોય) ત્યારે મહિતીને બંને ચલો x અને yને આધારે વર્ગીકૃત કરી દ્વિચલ કોષ્ટક તૈયાર કરવામાં આવે છે. આ દ્વિચલ કોષ્ટક ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધવા ઉપરનુ સૂત્ર વપરાય છે.

દ્વિ-ચલ કોષ્ટકનું ઉદાહરણ

	x / ***y***	**અર્થશાસ્ત્રના ગુણ**			
		0-10	**10-20**	**20-30**	**30-40**
આંકડા	0-10	2	3	5	0
શાસ્ત્ર	10-20	2	6	4	2
ના	20-30	3	2	1	3
ગુણ	30-40	4	5	2	1

ઉપરનુ કોષ્ટક 40 ગુણની પરીક્ષામાં અર્થશાસ્ત્ર અને આંકડાશાસ્ત્રના વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણ અને વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા દર્શાવે છે. દા.ત. સૌ પ્રથમ ખાનાની આવૃત્તિ 2 આપેલ છે તેનો અર્થ એ થાય છે કે અર્થશાસ્ત્રમાં 0-10ની વચ્ચે અને આંકડાશાસ્ત્રમાં 0-10ની વચ્ચે ગુણ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા '2' છે તેવી જ રીતે બાકીની આવૃત્તિઓ સમજી શકાય છે.

11.5 દ્વિ-ચલ કોષ્ટક ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધવાની રીત (સમજૂતી) :

પગલુ-1 હારમાં દર્શાવેલા વર્ગોને x અને સ્તંભમાં દર્શાવેલા વર્ગોને y ધારો.

પગલુ-2 દરેક ખાનાનો આડો અને ઊભો સરવાળો કરો અને xના સરવાળાને fu અને y ના સરવાળને fv કહો.

પગલુ-3 x ના દરેક વર્ગોની મધ્ય કિંમતો શોધો અને yના દરેક વર્ગોની મધ્ય કિંમતો શોધો. દા.ત. 10-20 વર્ગ આપેલો હોય તો $\frac{10+20}{2}$ = 15, 20-30 હોય તો $\frac{20+30}{2}$ = 25 ....

પગલુ-4 x ની મધ્યકિંમતને x વડે અને yની મ.કિં.ને y વડે દર્શાવો.

પગલુ-5 x (મધ્ય કિંમત)ની કિંમતોમાંથી વચ્ચેની કોઈપણ કિંમત લઈ તેને ધારેલો મધ્યક A કહો ત્યારબાદ નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી તમામ કિંમતો શોધો અને તેને u કહો.

દા.ત.

મ.કિં. x	5	10	**15**	20	25

વચ્ચેની કિંમત A = 15 અને 5 - 10, 10 - 15 ...... વર્ગ આપેલ હોય તો વર્ગ લંબાઈ = 5 (10 – 5 = 5, 15 – 10 = 5 ....)

$$u = \frac{x-A}{i}$$ જ્યાં A = ધારેલો મધ્યક

i_x = x ની વર્ગ લંબાઈ

પગલુ-6 y (મધ્ય કિંમત)ની કિંમતોમાંથી વચ્ચેની કોઈપણ કિંમત લઈ તેને ધારેલો મધ્યક B કહો ત્યારબાદ નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી તમામ કિંમતો શોધો અને તેને v કહો. દા.ત.

મ. કિં.	y 10 20	30	40

વચ્ચેની કિંમત B = 30 અને 10 – 20, 20 – 30, ... વર્ગો આપેલા હોય તો વર્ગ લંબાઈ = 10 (જેમકે 20 – 10 = 10, 30 – 20 = 10, ...)

$$v = \frac{y-B}{1_y}$$ જ્યાં B = ધારેલો મધ્યક

1_y = yની વર્ગ લંબાઈ

પગલુ-7 u (પગલુ-5) અને fu (પગલુ-2) બંનેનો ગુણાકાર કરી ufu મેળવો.

પગલુ-8 v (પગલુ-6) અને fv (પગલુ-2) બંનેનો ગુણાકર કરી vfv મેળવો.

પગલુ-9 u (પગલુ-5) અને ufu (પગલુ-7) બંનેનો ગુણાકાર કરી v^2fv મેળવો.

પગલુ-10 v (પગલુ-6) અને vfv (પગલુ-8) બંનેનો ગુણાકર કરી v^2fv મેળવો.

પગલુ-11 f (આવૃત્તિ) × u × v (ત્રણેનો ગુણાકાર) કરી fuvની કિંમત આપેલી આવૃત્તિની બાજુમાં ◯ (રાઉન્ડ) માં વચ્ચે લખો.

દા.ત. દ્વિચલ કોષ્ટક નીચે મુજબ આપેલ હોય તો.

	10 – 20	20 – 30	30 – 40		v	fuv
10 – 20	5 (10)	(2) 2	(0) 1		– 1	12
20 – 30	– –	–	–		0	0
30 – 40	–	(–1) 1	–		1	–1
u	– 2	– 1	0			11
fuv	10 1		0	11		

$f \times u \times v$

5 (–1) × (–2) = 10 → જે ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ ◯ રાઉન્ડમાં લખો.

આ રીતે દાખલામાં આપેલ તમામ આવૃતિ જેમકે 2, 1, 1ની સામે ◯ માં રકમ લખી ત્યાર બાદ તેનો આડો અને ઊભો સરવળો કરો અને તેને *fuv* કહો. *fuv* બંને બાજુ સરખો સરવાળો આવશે. તેની નોંધ લો કે જેથી નીચે દર્શાવ્યા મુજબનું કોષ્ટક તૈયાર થશે.

વર્ગો $x \rightarrow$ / $y \downarrow$	10-20	20-30	30-40	*fu*	*y*	*v*	*vfv*	v^2fv	*fuv*
10-20 20-30 30-40									
fu									
x					= *n*		*vfv*	Σv^2fvu	
u									
ufu						→ *ufu*			
u^2f_4						→ u^2fu			
fuv						→ Σfuv			

નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી સહસબંધાંક *r* શોધી શકાય.

$$r = \frac{n\Sigma fuv - (\Sigma ufu)\,(\Sigma vfv)}{\sqrt{n\Sigma u^2 fu - (\Sigma ufu)^2} \times \sqrt{n\Sigma v^2 fv - (\Sigma vfv)^2}}$$

(C) સ્પિયરમેનની રીત : સ્પિયરમેને આપેલી સહસંબંધાંક શોધવાની રીતને ક્રમાંક સહસંબંધાંકની રીત તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે તેની શરૂઆત 1904માં ચાર્લ્સ સ્પિયરમેને કરી. તેમાં કોઈ પણ વ્યક્તિનું કે તેના કાર્યનું મૂલ્યાંકન કરવાનું હોય તો તે તેની પ્રમાણિકતા કે હોંશિયારીને આધારે કરવુ પડે છે. પરંતુ તેને આંકડાકીય ગ્રેડ આપવો કઠિન છે. તેથી તેનુ મૂલ્યાંકન ગુણ આપી તેને આધારે તેનો ક્રમ નક્કી કરી બે ચલો વચ્ચેના ક્રમોને આધારે સહસંબંધક શોધવામાં આવે છે. તેથી તેને સ્પિયરમેનની ક્રમાંક સહસંબંધાંકની રીત તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

જ્યારે ગુણાત્મક માહિતીને ચલ સ્વરૂપે રજૂ કરવી સરળ ન હોય પરંતુ તેને તેના ગુણધર્મો અનુસાર ક્રમ આપી શકાય તેમ હોય તો આ રીતનો ઉપયોગ ખૂબ જ મહત્વનો ગણાય છે.

આ રીતમાં આપેલ ચલના પ્રત્યેક અવલોકનોને તેમની કિંમત ઉપરથી ક્રમ આપવામાં આવે છે. સૌથી મોટા અવલોકનને પ્રથમ ક્રમ, તેનાથી નાના અવલોકનને દ્વિતિય ક્રમ, તેનાથી નાના અવલોકનને તૃતિય ક્રમ ....

આ પ્રમાણે બધા જ અવલોકનોને ક્રમ આપવામાં આવે છે. જો આપેલા અવલોકનોની કિંમત એકસરખી હોય તો તે અવલોકનો ઉપર આવતા ક્રમની સરેરાશ શોધી તે દરેકને તે ક્રમ આપવામાં આવે છે અને ત્યાર પછી નાના અવલોકનને ત્યાર પછીનો ક્રમ આપવામાં આવે છે. **દા.ત.** ધારોકે BAOUમાં સેમેસ્ટર-5 માં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓના અર્થશાસ્ત્ર વિષયમાં નીચે મુજબ ગુણ આવેલા છે.

18, 15, 17, 18, 19, 14, 15, 18

અહીં સૌથી મોટો અવલોકન 19 ને 1 ક્રમ તેનાથી નાનો અવલોકન 18 છે. જે ત્રણ વખત આવે છે. તેથી ત્યાર પછીના ત્રણ ક્રમો 2, 3 અને 4 ની સરેરાશ = $\frac{2+3+4}{3} = \frac{9}{3}$ = 3 છે. તેથી નીચે દર્શાવ્યા મુજબ 18ની સામે 3, 3 અને 3 ક્રમ આપવામાં આવશે. હવે 18થી નાનુ અવલોકન 17 છે. તેને 2, 3 અને 4 પછીનો ક્રમ 5 આપવામાં આવશે. ત્યાર બાદ 15 બે વખત છે તેથી તેને 6 અને 7ની સરેરાશ =$\frac{6+7}{2}$ = 6.5 ક્રમ આપો અને છેલ્લો ક્રમ 14 છે. તેને 6 અને 7 પછીનો ક્રમ 8 આપો. જે નીચે મુજબ મળશે.

ગુણ	ક્રમ
18	3
15	6.5
17	5
18	3
19	1
14	8
15	6.5
18	3

ધારોકે x અને y એમ બે શ્રેણીઓ વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવો હોય તો બંને શ્રેણીના અવલોકનોને ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ ક્રમો x ના ક્રમને r_x વડે અને y ના ક્રમને r_y વડે દર્શાવો. ત્યારબાદ તે બંને વચ્ચેનો તફાવત d શોધો. ($d = r_x - r_y$), તફાવતનો વર્ગ શોધી તેને d^2 વડે દર્શાવો અને નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરો.

ક્રમાંક સહ સંબંધાંક $r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$

જ્યાં d^2 = તફાવતનો વર્ગ

n = જોડકાની સંખ્યા

જયારે બે કે વધુ અવલોકનોની કિંમત સમાન હોય ત્યારે નીચેનું સૂત્રનો ઉપયોગ કરો.

ક્રમાંક સહસંબંધાંક

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + \frac{m}{12}\left(m^2-1\right) + \frac{m}{12}\left(m^2-1\right) + ...\right]}{n\left(n^2-1\right)}$$

જ્યાં m = અવલોકનોના પુનરાવર્તનની સંખ્યા

દા.ત. r_x અને r_yમા નીચે મુજબ ક્રમ મળ્યા હોય.

r_x	r_y
1	(2)
(2.5)	4
4	(2)
(2.5)	(2)

અહીં r_xમાં **2.5** બે વખત આવે છે. r_yમાં **2** ત્રણ વખત આવે છે. અને કુલ બે જોડ છે. તેથી સૂત્રમાં Σd^2ની કિંમતમાં $\frac{m}{12}$ $(m^2 - 1)$ બે વખત ઉમેરાશે (કારણ કુલ બે જોડ છે) આમ જેટલી જોડ હોય એટલી વખત આ સૂત્ર ઉમેરવું જે ઉપરના સૂત્ર પરથી સમજી શકાય. હવે બે જોડ પૈકી પ્રથમ જોડમાં બે અવલોકનો (2.5 અને 2.5) નું પુનરાવર્તન છે. તેથી પ્રથમ ઉમેરેલ સૂત્રમાં $m = 2$ અને બીજી જોડમાં ત્રણ અવલોકનો (2, 2, 2) નું પુનરાવર્તન છે તેથી બીજી વખત ઉમેરેલ સૂત્રમાં $m = 3$ લેવાય. તેથી ક્રમાંક સહ સંબંધોકનું સૂત્ર

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + \frac{m}{12}\left(m^2 - 1\right) + \frac{m}{12}\left(m^2 - 1\right)\right]}{n\left(n^2 - 1\right)}$$

જ્યાં પ્રથમ $m = 2$, $n = 4$

દ્વિતીય $m = 3$

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + \frac{2}{12}\left(2^2 - 1\right) + \frac{3}{12}\left(3^2 - 1\right)\right]}{4\left(4^2 - 1\right)}$$

સ્પિયરમેન ક્રમાંક સહસંબાંધકની કિંમત ± 1 જેટલી જ હોય છે. એટલે -1 અને $+1$ની વચ્ચે જ હોય છે.

11.6 કાર્લ પિર્યસનની રીતના ગુણ-દોષ :

ગુણો :

(1) જ્યારે બે ચલો વચ્ચેનો રૈખિક સહસંબંધ દર્શાવવાનો હોય ત્યારે આ રીત મુજબ સહસંબંધાંક શોધવામાં આવે તો તે શ્રેષ્ઠ માપ છે.

(2) બે ચલો વચ્ચેના સંબંધની નિકટતા જાણી શકાય છે. એટલે કે બે ચલો એક બીજાથી કેટલા નજીક છે તે જાણી શકાય છે.

(3) બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધનો પ્રકાર અને દિશા જાણી શકાય છે.

દોષો (મર્યાદા) :

(1) બે ચલો વચ્ચે રૈખિક સહસંબંધ દર્શાવવા આ રીત શ્રેષ્ઠ માપ છે પરંતુ આ રૈખિક સંબંધ ધારણા ઉપર રચાયેલી છે.

(2) ક્રમાંક સહસંબંધાંકની રીત કરતા આ રીતે સહસંબંધાંકની ગણતરી કરવી અઘરી છે.

(3) જ્યારે પ્રાપ્તાંકોના અવલોકનો ખૂબ મોટા કે ખૂબ નાના હોય ત્યારે સહસંબંધાંક ઉપર તેની અસર વધુ પડે છે.

11.7 સ્પિયરમેનની રીતના ગુણ-દોષ :

ગુણો :

(1) પ્રમાણિકતા, ગરીબાઈ, સૌંદર્ય, સ્પર્ધા વગેરે જેવી માહિતી માટે સહસંબંધંક શોધવો હોય તો આ રીતે સહસંબંધાંક શોધવો વધુ સરળ બને છે.

(2) જ્યારે અવલોકનો આપેલા ન હોય પરંતુ ફક્ત ક્રમો જ આપેલા હોય ત્યારે આ રીત જ ઉપયોગી બને છે.

(3) કાર્લપિયસનની રીત કરતા આ રીતે સહસંબંધાંક શોધવો વધુ સરળ છે.

(4) આ રીતમાં એક સરખા અવલોકનોને એક સરખા ક્રમ આપવામાં આવતા હોવાથી તેની અગત્યતા વધી જાય છે.

(5) ગુણાત્મક માહિતી માટે સહસંબંધાંક શોધવા આ જ રીત ઉપયોગી છે.

દોષો : (મર્યાદાઓ)

(1) આ રીતે શોધાયેલો સહસંબાંધાંક વધુ સરળ હોય છે પરંતુ ચોક્કસ હોતા નથી.

(2) દ્વિ-ચલ કોષ્ટકમાં માહિતી આપેલી હોય ત્યારે આ રીત ઉપયોગી નીવડતી નથી.

(3) જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા ખૂબ જ વધારે હોય ત્યારે દરેક અવલોકનને ક્રમ આપવો કંટાળાજનક છે.

11.8 સહસંબંધાંકનું અર્થઘટન :

સહસંબંધની મદદથી બે ચલો એકબીજાથી કેટલા નજીક છે. તે જાણી શકાય છે. એ આપણે જોયું, સહસંબંધના સંખ્યાત્મક માપને સહસંબંધાંક કહે છે. અને તેને 'r' વડે દર્શાવવામાં આવે છે. હવે આ 'r'ની કિંમતનું અર્થઘટન કરતા પહેલા તે બે ચલો વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે કે કેમ તે તપાસી લીધા બાદ જ તેનું અર્થઘટન કરવું જરૂરી છે. જે નીચે મુજબ કરી શકાય.

(1) 'r' = ± 1 નું અર્થઘટન :

જો 'r' = 1 હોય તો બે ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ રૈખિક ધન સહસંબંધ છે એમ કહેવાય. અને જો 'r' = – 1 હોય તો બે ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ રૈખિક ઋણ સહસંબંધ છે.

(2) 'r' = ± 0.9 કે તેથી વધુનુ અર્ધઘટન :

જો 'r' = 0.9 કે તેથી વધુ હોય તો ચલો વચ્ચે ખૂબ ઉચ્ચ ધન સહસંબંધ છે અને જો 'r' = – 0.9 કે તેથી વધુ હોય તો બે ચલો વચ્ચે ખૂબ ઉચ્ચ ઋણ સહસંબંધ છે. ('r'ની કિંમત – 1 કે + 1ની નજીક હોય તો બે ચલો વચ્ચે નિકટ રૈખિક સંબંધ છે.)

(3) જો 'r' ની કિંમતની 0 ની નજીક હોય તો બે ચલો વચ્ચે ઓછો સહસંબંધ છે.

(4) **'r' = 0 નું અર્થઘટન :**

જો 'r' = 0 હોય તો બંને ચલો વચ્ચે રૈખિક સહસંબંધનો અભાવ છે. એટલે કે બંને ચલો એકબીજાથી સ્વતંત્ર છે.

(5) બે ચલો વચ્ચેના સહસંબાંધાંકની સરખામણી તેની કિંમતોનાા પ્રમાણમાં હોતો નથી. દા.ત. ધારોકે $r = 0.82$ હોય અને $r = 0.41$ હોય તો તેનો અર્થ એવો નથી કે $r = 0.82$ એ $r = 0.41$ કરતાં બમણો સહસંબંધ દર્શાવે છે. પરંતુ તેનો અર્થ એ થાય કે $r = 0.82$ એ $r = 0.41$ કરતા વધુ નજીકનો સંબંધ ધરાવે છે.

11.9 સંભવિત દોષ :

નિદર્શનમાંથી મળેલ સહસંબાંધક ઉપરથી સમષ્ટિના સહસંબાંધાંકનું અનુમાન કરતી વખતે સહસંબંધાંકના સંભવિત દોષનો ખ્યાલ મેળવવો જરૂરી છે.

સંભવિત દોષનો ખ્યાલ :

કોઈ એક જ સમષ્ટિમાંથી એક સરખા કદના જુદા જુદા નિદર્શો લઈને સહસંબંધનો અભ્યાસ કરવામાં આવે તો જુદા જુદા દરેક નિદર્શ માટે સહસંબંધાંકની કિંમત જુદી જુદી મળે છે અને આ કિંમત સમષ્ટિનાા સહસંબાંધકની કિંમત કરતા જુદી હોય છે. ઉપરાંત નિદર્શના સહસંબધાંકની કિંમત ઉપરથી સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની કિંમતનું જે અનુમાન કરવામાં આવે છે, તેમાં ભૂલ થવાની સંભાવના રહેલી છે. આવી અપેક્ષિત ભૂલને સંભવિત દોષ કહેવાય છે.

સંભવિત દોષની વ્યાખ્યા :

"સમવિષ્ટના દરેકે દરેક જોડકાની મદદથી મેળવેલ સહસંબંધાંક અને તે જ સમષ્ટિમાંથી લેવામાં આવેલ એક સમાન કદના શકય દરેકે દરેક નિદર્શ પરથી મેળવેલ સહસંબંધકોની કિંમત વચ્ચેના તફાવતોની સરેરાશને સંભવિત દોષ કહે છે." તેને અંગ્રેજીમાં Probable Error કહેવામાં આવે છે. તેથી તેને સંકેતમાં P.E વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જે નીચેના સૂત્રની મદદથી શોધી શકાય.

$$\text{P.E.} = \frac{2/3\left(1-r^2\right)}{\sqrt{n}}$$

જ્યાં નિદર્શનો r = સહસંબંધંક

n = જોડકાંની સંખ્યા (નિદર્શના અવલોકનો)

અથવા

$$\text{P.E} = \frac{0.6745\left(1-r^2\right)}{\sqrt{n}}$$

સંભવિત દોષનો આધાર નિદર્શના કદ પર રહેલો છે. જેમ નિદર્શનુ કદ મોટું તેમ સંભવિત દોષ ઓછો.

સંભવિત દોષનુ અર્થઘટન :

(1) જો $r <$ P.E. એટલે કે જો સહસંબંધાંક rની કિંમત સંભવિત દોષ કરતા ઓછી હોય તો બે ચલો વચ્ચેનો સહસંબંધાંક સાર્થક છે.

(2) જો $r > 6$ P.E. એટલે કે જો સહસંબંધાંક r ની કિંમત સંભવિત દોષ ગુણ્યા છ કરતા વધુ હોય તો બે ચલો વચ્ચેનો સહસંબંધક અસાર્થક છે.

સમષ્ટિના સહસંબંધાંકનો ગાળો r ± P.E. એટલે કે r – P.E. અને r + P.E.

જ્યાં r = નિદર્શ સહસંબંધાંક અને P.E. = સંભવિત દોષ

આમ સંભવિત દોષનો ઉપયોગ સમષ્ટિના અવલોકનો વચ્ચેના સહસંબંધાંક સાર્થક છે કે અસાર્થક તે તપાસવા થાય છે.

11.10 નિર્ણાયકતાનો આંક :

સહસંબંધની મદદથી બે ચલો વચ્ચેના ગાણિતીય સંબંધ પ્રસ્થાપિત થઈ શકતો નથી. આ પ્રકારનો ગણિતીય સંબંધ નિયત સંબંધની મદદથી પ્રસ્થાપિત થઈ શકે છે. આ નિયત સંબંધનો અભ્યાસ બે ચલો વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધની ધારણા હેઠળ કરવામાં આવે છે. આ ધારણા સાચી હોય તો નિયત સંબંધનો અભ્યાસ અને તેના તારણો સાર્થક (વિશ્વાસનીય) છે કે અસાર્થક તે ચકાસવા માટેનું ઉપયોગી માપ એ નિર્ણાયકતાનો આંક છે. તેને R^2 વડે દર્શાવાય છે. R^2 એ બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધાંકનો વર્ગ (r^2) જેટલો જ થાય છે. એમ સાબિત કરી શકાય.

નિર્ણાયકતાના આંકનું સૂત્ર :

$$R^2 = \frac{\Sigma\left(y^1-\overline{y}\right)^2}{\Sigma\left(y-\overline{y}\right)^2}$$

જ્યાં $\Sigma\left(y^1-\overline{y}\right)^2$ = સકારણ ચલન

$\Sigma\left(y-\overline{y}\right)^2$ = કુલ ચલન

R^2 ની કિંમત 0 અને 1 ની વચ્ચે જ હોય છે.

R^2 ની કિંમત 0થી નજીક હોય તો તે સુરેખ સહસંબંધની ધારણા અસાર્થક છે. એમ માનવામાં આવે છે. પણ જો R^2 ની કિંમત 1ની નજીક હોય તો સુરેખ સહસંબંધની ધારણા સાર્થક છે એમ કહેવાય.

બે ચલો વચ્ચેના સંબંધનું અર્થઘટન કરવા માટે નિર્ણાયકતાનો આંક યોગ્ય અને ઉપયોગી માપ છે તેની મદદથી આધારિત ચલમાં સ્વતંત્ર ચલને કારણે જે ફેરફાર થાય છે તેનું પ્રમાણ જાણી શકાય છે. આધારિત ચલમાં થતા ફેરફાર કે ચલનને બે વિભાગમાં વહેંચી શકાય.

(1) સકારણ (સમજી શકાય તેવું) ચલન એટલે કે સ્વતંત્ર ચલને લીધે થતો ફેરફાર

(2) અકારણ ચલન એટલે કે અન્ય પરિબળોને લીધે થતુ ચલન.

નિર્ણાયકતાના આંકનું અર્થઘટન :

નિર્ણાયકતાના આંક R^2 એ સાપેક્ષ ચલમાં નિરપેક્ષ (સ્વતંત્ર) ચલને કારણે થતા ફેરફારનું પ્રમાણ દર્શાવતો આંક છે. તેને 100 વડે ગુણતા નિરપેક્ષ ચલને કારણે થતો ટકાવારી ફેરફાર દર્શાવી શકાય છે. દા.ત. જો બે ચલો વચ્ચેનો સહસબંધાંક $r = 0.9$ હોય તો તેનો વર્ગ (0.9×0.9) 0.81 મળે છે.

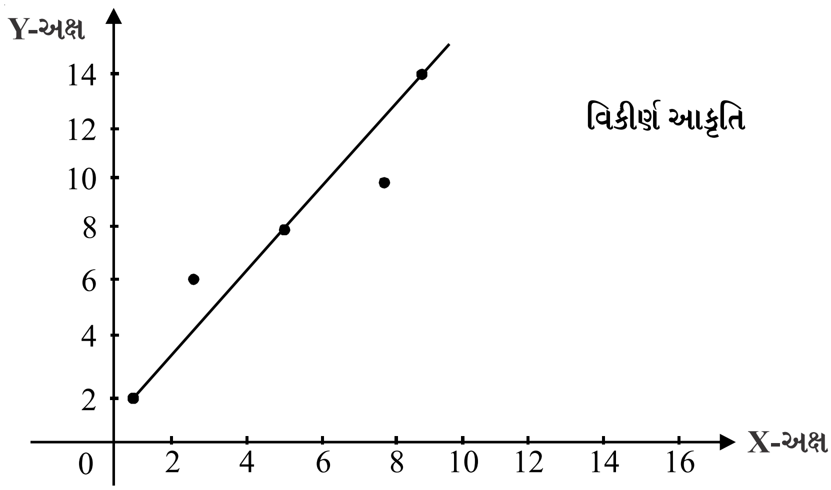
$\therefore$ નિર્ણાયકતાનો આંક $R^2 = r^2 = 0.81$ થાય છે જેને 100 વડે ગુણતા (0.81×100) 81% મળે છે. તેથી એમ કહી શકાય કે સાપેક્ષ ચલમાં થતાં કુલ ફેરફાર પૈકી 81% ચલન એ નિરપેક્ષ ચલને કારણે થાય છે. જેને સકારણ ચલન કહે છે. અને બાકીનું 19% ચલન (100 – 81) અન્ય પરિબળોને લીધે થતુ ચલન છે. (જેને અકારણ ચલન કહે છે.)

11.11 વિકીર્ણ આકૃતિની રીતના ઉદાહરણો અને સ્વાધ્યાય (જાતે ગણો) :

ઉદાહરણ-1 નીચે આપેલ ચલ x અને yની કિંમતો ઉપરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થ ઘટન કરો.

x	1	3	5	7	8
y	2	6	8	9	14

જવાબ :



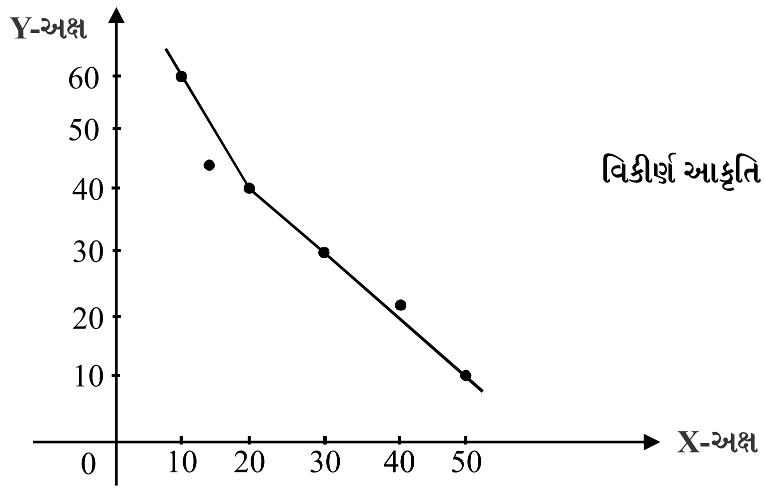
ઉપર દર્શાવેલ આકૃતિને વિકીર્ણ આકૃતિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. તેમાં ચલ x અને y ના બિંદુઓને આલેખપત્ર ઉપર દર્શાવવામાં આવેલ છે અને બિંદુઓની દિશા અને થતો ફેરફાર તપાસવામાં આવે છે.

અર્થઘટન

ઉપરની આકૃતિ ઉપરથી કહી શકાય કે બે ચલો x અને y માં થતો ફેરફાર એક જ દિશામાં છે પરંતુ પ્રમાણસર નથી અને તેની રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચેથી ઉપર તરફ જાય છે. પરંતુ એક-બે બિંદુઓ આ રેખાની આજુબાજુ પડેલા છે. જે અપ્રમાણસર વધઘટ બતાવે છે. તેથી બે ચલો x અને y વચ્ચે આંશિક રૈખિક ધન સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ-2 નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

x	10	15	20	30	40	50
y	60	45	40	30	20	10



ઉપર દર્શાવેલ આકૃતિને વિકીર્ણ આકૃતિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. તેમાં ચલ x અને y ના બિંદુઓને આલેખપત્ર ઉપર દર્શાવવામાં આવેલ છે. અને બિંદુઓની દિશા અને તેમાં થતો ફેરફાર તપાસવામાં આવે છે.

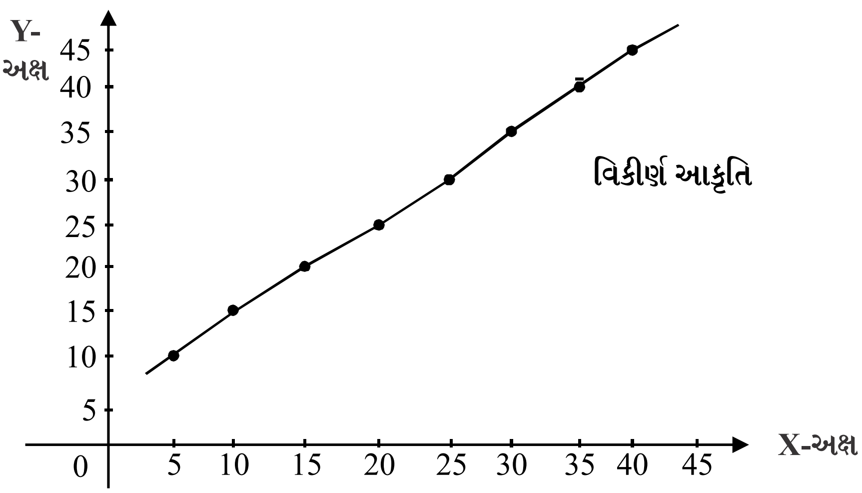
અર્થઘટન :

ઉપરની આકૃતિ ઉપરથી કહી શકાય કે બે ચલો x અને y મા થતો ફેરફાર વિરુદ્ધ દિશામાં અને અપ્રમાણસર છે. તેની રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઊપરથી નીચેની તરફ જાય છે. (પરંતુ અમુક બિંદુઓ આ રેખાની આજુબાજુ પડે છે જે પ્રમાણસર નથી.) તેથી આ બે ચલો વચ્ચે આંશિક ઋણ સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ-3 નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી વિકર્ણી આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

x	5	10	15	20	25	30	35	40
y	10	15	20	25	30	35	40	45

જવાબ :



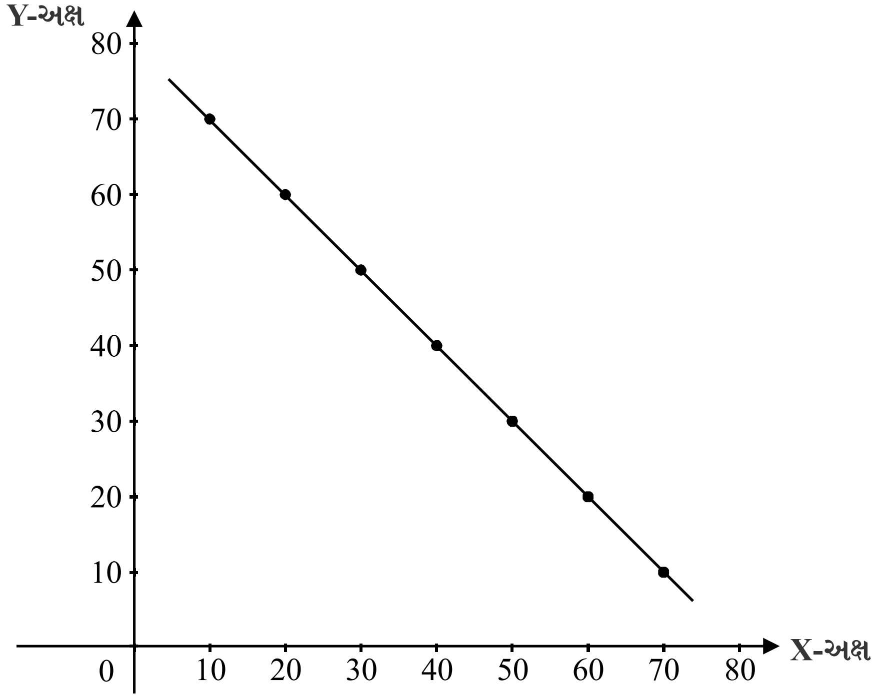
ઉપર દર્શાવેલ આકૃતિને વિકીર્ણ આકૃતિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. તેમાં ચલ x અને y ના બિંદુઓને આલેખપત્ર ઉપર દર્શાવવામાં આવેલ છે અને તે ઉપરથી બિંદુઓની દિશા અને થતો ફેરફાર તપાસવામાં આવે છે.

અર્થઘટન :

ઉપરની આકૃતિ ઉપરથી કહી શકાય છે કે બે ચલો x અને y વચ્ચે થતો ફેરફાર એક જ દિશામાં અને પ્રમાણસર છે અને આલેખમાં દર્શાવ્યા મુજબ રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચેથી ઉપર તરફ જાય છે. તેથી બે ચલો x અને y વચ્ચે સંપૂર્ણ રૈખિક ધન સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ : 4 નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

x	10	20	30	40	50	60	70
y	70	60	50	40	30	20	10



ઉપર દર્શાવેલ આકૃતિને વિકીર્ણ આકૃતિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. તેમાં ચલ x અને yના બિંદુઓને ઓળખવામાં આવે છે તેમાં ચલ x અને yના બિંદુઓને આલેખપત્ર ઉપર દર્શાવેલ છે અને તે ઉપરથી બિંદુઓની દિશા અને થતો ફેરફાર તપાસવામાં આવે છે.

અર્થઘટન :

ઉપરની આકૃતિ ઉપરથી કહી શકાય કે બે ચલો x અને y વચ્ચે થતી વધઘટ વિરુદ્ધ દિશામાં અને પ્રમાણસર છે અને આલેખમાં દર્શાવ્યા મુજબ રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરથી નીચેની તરફ જાય છે. તેથી એમ કહી શકાય કે બંને ચલો x અને y વચ્ચે સંપૂર્ણ રૈખિક ઋણ સહસંબંધ છે.

સ્વાધ્યાય

1. વિર્કીણ આકૃતિ એટલે શું ?
2. વિર્કીણ આકૃતિ સવિસ્તાર સમજાવો.
3. વિર્કીણ આકૃતિની રીતના પ્રકારો આકૃતિ સહિત સમજાવો.
4. **ટૂંકનોંધ લખો :** (1) વિકીર્ણ આકૃતિ અને તેના પ્રકારો
   (2) સંપૂર્ણ ધન અને ઋણ સહસંબંધ દર્શાવતી વિકીર્ણ આકૃતિ સમજાવો.
5. નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનુ અર્થઘટન કરો.

x	1	4	5	7	8
y	3	6	8	9	12

6. નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

x	10	16	20	30	40	60
y	60	46	45	30	20	10

(**જવાબ :** આંશિક ઋણ સહ સંબંધ)

(7) નીચે આપેલ આકૃતિ ઉપરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

x	6	10	14	18	22	26	30
y	30	26	22	18	14	10	6

(**જવાબ :** સંપૂર્ણ રૈખિક ઋણ સહસંબંધ)

(8) નીચે આપેલ આકૃતિ ઉપરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

x	7	10	13	16	19	22	25
y	10	13	16	19	22	25	28

(**જવાબ :** સંપૂર્ણ રૈખિક ધન સહસંબંધ)

11.12 કાર્લ પિર્યસનની રીતના ઉદાહરણો અને સ્વાધ્યાય

ઉદાહરણ-1 નીચે આપેલ માહિતી માટે કાર્લ પિર્યસનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો.

ઊંચાઈ	5	6	8	11	15
વજન	12	13	17	18	20

જવાબ : ધારોકે ઊંચાઈ = x અને વજન = y

	ઊંચાઈ x	વજન y	$(x-\overline{x})$	$(y-\overline{y})$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})\ (y-\overline{y})$
	5	12	– 4	– 4	16	16	16
	6	13	– 3	– 3	9	9	9
	8	17	– 1	1	1	1	– 1
	11	18	2	2	4	4	4
	15	20	6	4	36	16	24
કુલ	45	80	+ 8 – 8 0	7 – 7 0	66	46	53 – 1 = 52

$$\overline{x}=\frac{\Sigma x}{n}=\frac{x\text{ના પ્રાપ્તાંકોનો સરવાળો}}{x\text{ના પ્રાપ્તાંકોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$=\frac{45}{5}=9$$

$$\overline{y}=\frac{\Sigma y}{n}=\frac{y\text{ના પ્રાપ્તાંકોનો સરવાળો}}{y\text{ના પ્રાપ્તાંકોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$=\frac{80}{5}=16$$

અહીં $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ની કિંમત પૂર્ણાંક સંખ્યામાં આવે છે તેથી નીચેનું સૂત્રનો ઉપયોગ કરવો વધુ હિતાવહ છે.

સહસંબંધાંક $r = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \times \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$

$(x-\bar{x}) \Rightarrow x$ = 5, 6, 8, 11, 15 દરેકમાંથી $\bar{x}$ = 9 બાદ કરતા (5 – 9 = – 4) ....

$(y-\bar{y}) \Rightarrow y$ = 12, 13, 17, 18, 20 દરેકમાંથી $\bar{y}$ = 16 બાદ કરતા (12 – 16 = – 4) ....

$(x-\bar{x})^2 \Rightarrow (x-\bar{x})$ = – 4, – 3, – 1, 2, 6 દરેકનો વર્ગ કરતા (– 4 × – 4 = 16, ...)

$(y-\bar{y})^2 \Rightarrow (y-\bar{y})$ = – 4, – 3, – 1, 2, 4 દરેકનો વર્ગ કરતા (– 4 × – 4 = 16, ...)

$(x-\bar{x})\ (y-\bar{y}) \Rightarrow (x-\bar{x})$ ના દરેક ઘટકો સાથે ગુણાકાર કરો. (– 4 × – 4 = 16, ...)
દરેક સ્તંભનો સરવાળો કરતા નીચે પ્રમાણના પરિણામો મળશે.

$n = 5$, $\Sigma x = 45$, $\Sigma y = 80$, $\Sigma(x-\bar{x}) = 0$, $\Sigma(y-\bar{y}) = 0$ $\Sigma(x-\bar{x})^2 = 66$, $\Sigma(y-\bar{y})^2 = 46$,

$\Sigma(x-\bar{x})\ (y-\bar{y}) = 52$ આ કિંમતો ઉપર દર્શાવેલ સહસંબંધાંકના સૂત્રમાં મુકતા

સહસંબંધાંક $r = \dfrac{52}{\sqrt{66}\sqrt{46}}$

$$= \frac{52}{8.12 \times 6.78} = \frac{52}{55.05} = 0.94$$

ઉદાહરણ-2 નીચેના કોષ્ટકમાં પતિની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમર અંગેની માહિતી આપવામાં આવેલ છે. તો તે ઉપરથી સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

પતિની ઉંમર (વર્ષમાં)	26	27	29	32	47
પત્નીની ઉંમર (વર્ષમાં)	18	22	26	30	44

જવાબ :

ધારોકે પતિની ઉંમર = x અને પત્નીની ઉંમર = y

	પતિની ઉંમર x	**પત્નીની ઉંમર** y	$u = x - A$ $= x-32$	$v = Y - B$ $= y-28$	u^2	v^2	$u.v$
	26	18	– 6	– 10	36	100	60
	27	22	– 5	– 6	25	36	30
	29	26	– 3	– 2	9	4	6
	32	30	0	2	0	4	0
	47	44	15	16	225	256	240
કુલ	161	140	– 14 + 15 01	– 18 + 18 0	295	400	336

$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{161}{5} = 32.2$ જ્યાં $n = 5$

$\overline{y} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{140}{5} = 28$

અહીં $\overline{x} = 32.2$ છે જે અપૂર્ણાંક છે તેથી ધારેલો મધ્યક A = 32 ધારીશું અને $\overline{y} = 28$ છે. તેથી ધારેલો મધ્યક B = 28 જ ધારીશું અને નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી સહસબંધાંક શોધીશું.

(નોંધ : આ સૂત્ર જ્યારે $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ની કિંમત અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે ઉપયોગ કરવો યોગ્ય છે.)

સહસંબંધાંક $r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u).(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$

અહીં $u = x - A$ અને $v = Y - B$

x : xના પ્રાપ્તાંકોમાંથી y : yના પ્રાપ્તાંકોમાંથી

A = 32 બાદ કરો. B = 28 બાદ કરો.

u : xના દરેક પ્રાપ્તંકોમાંથી 32 બાદ કરો.

v : yના દરેક પ્રાપ્તાંકોમાંથી 28 બાદ કરો.

$u^2 \Rightarrow u$ની દરેક કિંમતનો વર્ગ કરો.

$v^2 \Rightarrow v$ની દરેક કિંમતનો વર્ગ કરો.

$uv \Rightarrow u$ ના દરેક ઘટકોને vના દરેક ઘટકો સાથે ગુણાકાર કરો.

દરેક સ્તંભોનો સરવાળો કરતા નીચેના પરિણામો મળશે.

$\Sigma u = 1,\ \Sigma v = 0,\ \Sigma u^2 = 295,\ \Sigma v^2 = 400,\ \Sigma uv = 336$

હવે મળેલ કિંમતો ઉપર દર્શાવેલ સહસંબંધકના સૂત્રમાં મુકી કિંમત શોધો.

$$r = \frac{5(336) - (1)(0)}{\sqrt{5(295) - (1)^2} \times \sqrt{5(400) - (0)^2}}$$

$$= \frac{1680}{\sqrt{1475 - 1} \times \sqrt{2000}}$$

$$= \frac{1680}{\sqrt{1474} \times \sqrt{2000}}$$

$$= \frac{1680}{38.39 \times 44.72}$$

$$= \frac{1680}{1716.97}$$

$= 0.98$

ઉદાહરરણ-3 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો.

x	45	46	52	55	70	73	75	82
y	42	44	50	53	70	73	72	78

જવાબ :

	x	y	$u = x - A$	$v = y - B$	u^2	v^2	uv
	45	42	– 17	– 18	289	324	306
	46	44	– 16	– 16	256	256	256
	52	50	– 10	– 10	100	100	100
	55	53	– 7	– 7	49	49	49
	70	70	8	10	64	100	80
	73	73	11	13	121	169	143
	75	72	13	12	169	144	156
	82	78	20	18	400	324	360
કુલ	498	482	– 50 + 52 = 2	– 51 + 53 = 2	1448	1466	1450

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{498}{8} = 62.25 \qquad n = 8,$

$\therefore A = 62$

$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{482}{8} = 60.25 \qquad \therefore B = 60$

$\bar{x}$ અને $\bar{y}$ બંનેની કિંમત અપૂર્ણાંક છે તેથી નીચેનું સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

$$\text{સહસંબંધાંક } r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u).(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

અહીં $\Sigma u = 2$, $\Sigma v = 2$, $\Sigma u^2 = 1448$, $\Sigma v^2 = 1466$, $\Sigma uv = 1450$ નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં

$$\text{સહસંબંધાંક } r = \frac{8(1450) - (2)(2)}{\sqrt{8(1448) - (2)^2} \times \sqrt{8(1466) - (2)^2}}$$

$$= \frac{11,600 - 4}{\sqrt{11,584 - 4} \times \sqrt{11,728 - 4}}$$

$$= \frac{11,596}{\sqrt{11,580} \times \sqrt{11724}}$$

$$= \frac{11,596}{107.61 \times 108.30}$$

$$= \frac{11,596}{11,654.163}$$

$= 0.995$

ઉદાહરણ - 4 જો x અને yનું સહવિચરણ = 1780, xનું પ્રમાણિત વિચલન = 45 અને yનું પ્રમાણિત વિચલન = 40 હોય તો સહસબંધાંકની કિંમત શોધો.

જવાબ : સહસબંધાંક $r = \frac{Cov.(x, y)}{S_x \ S_y}$

x અને y વચ્ચેનું સહવિચરણ = $Cov\ (x,\ y)$ = 1780 xનું પ્ર. વિ. = S_x = 45, yનું પ્ર. વિ. = 40

$$r = \frac{1780}{45 \times 40}$$

$$= \frac{1780}{1800}$$

$= 0.99$

ઉદાહરણ-5 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો અને તે ઉપરથી નિર્ણાયકતાનો આંક શોધો.

$\Sigma(x-\bar{x})\ (y-\bar{y})$ = 150, n = 5, Sx = 5.45 અને Sy = 5.8

જવાબ :

$$\text{સહસંબંધાંક } r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n.Sx.Sy}$$

$$= \frac{150}{5 \times 5.45 \times 5.8}$$

$$= \frac{150}{158.05}$$

$= 0.95$

નિર્ણાયકતાનો આંક = $R^2 = r^2 = (0.95)^2 = 0.9025$

ઉદાહરણ-6 નીચે આપેલા પરિણામોની મદદથી સહસંબંધાંક શોધો.

શ્રેણી x નો મધ્યક = 9.5

શ્રેણી y નો મધ્યક = 13.8

શ્રેણી x નું પ્રમાણિત વિચલન = 4.5

શ્રેણી y નું પ્રમાણિત વિચલન = 3.5

$n = 10$ $\Sigma xy = 1450$

જવાબ : $\bar{x}$ = 9.5, $\bar{y}$ = 13.8, Sx = 4.5, Sy = 3.5 n = 10 અને Σxy = 1450

સહસંબંધાંક $r = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}.\bar{y}}{n.Sx.Sy}$

$= \frac{(1450) - (10 \times 9.5 \times 13.8)}{10 \times 4.5 \times 3.5}$

$= \frac{1450 - 1311}{157.5}$

$= \frac{139}{157.5}$

$= 0.88$

ઉદાહરણ-7 નીચે આપેલી મહિતી ઉપરથી x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	3	4	6	2	4	3	2	1

જવાબ : નોંધ : અહીં x અને y ની કિંમત ખૂબ નાની છે. તેથી ગુણાકાર સરળતાથી કરી શકાય તેથી નીચેનું સૂત્રનો ઉપયોગ કરી સહસંબંધાંક શોધીશું.

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \times \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

	x	y	x^2	y^2	xy
	1	3	1	9	3
	2	4	4	16	8
	3	6	9	36	18
	4	2	16	4	8
	5	4	25	16	20
	6	3	36	9	18
	7	2	49	4	14
	8	1	64	1	8
કુલ	36	25	204	95	97

$n = 8,\ \Sigma x = 36,\ \Sigma y = 25,\ \Sigma x^2 = 204,\ \Sigma y^2 = 95\ \Sigma xy = 97$

સહ સંબંધાંક $= \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \times \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$

$= \frac{8(97) - (36)(25)}{\sqrt{8(204) - (36)^2} \times \sqrt{8(95) - (25)^2}}$

$$= \frac{776-900}{\sqrt{1632-1296}\times\sqrt{760-625}}$$

$$= \frac{-124}{\sqrt{336}\times\sqrt{135}}$$

$$= -\frac{124}{18.33\times11.62}$$

$$= -\frac{124}{213}$$

$$= -\ 0.58$$

ઉદાહરણ - 8 નીચે આપેલ મહિતી ઉપરથી અવલોકનોના જોડકાંઓની સંખ્યા શોધો.

સહસંબંધાંક = 0.5

$\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) \quad = \quad 135$

xનું પ્ર. વિ. $\quad = \quad 9$

$\Sigma(y-\bar{y})^2 \quad = \quad 90$

જવાબ : સહ સંબંધાંક $r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n.Sx.Sy}$

$$0.5 = \frac{135}{n.9.Sy}$$

$$n.\ Sy = \frac{135}{0.5\times 9}$$

$$n\ .\ Sy = \frac{135}{4.5}$$

$$n\ .\ Sy = 30\ ....\ (I)$$

$Sy = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}}$ જે સમીકરણ (I) માં મુક્તા

$$n = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}} = 30$$

બંને બાજુ વર્ગ કરતા

$$n^2 = \sqrt{\frac{\left(\Sigma(y-\bar{y})^2\right)^2}{n}} = (30)^2$$

$$n^2 \frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n} = 900$$

$$n\ \Sigma(y-\bar{y})^2 = 900$$

$$n\ (90) = 900$$

$$n = \frac{900}{90} = 10$$

ઉદાહરણ-9 બે ચલો x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક = 0.6 છે. અને તેમની વચ્ચેનું સહ વિચરણ = 140 છે જો y નું પ્ર. વિ = 18 હોયતો xનું પ્ર.વિ. શોધો.

જવાબ : $r = 0.6$ $Cov\ (x, y) = 140$ $Sy = 18$ Sx = શોધવાનું છે.

સહસંબાંધક $r = \frac{Cov.(x,y)}{S_x\ S_y}$

$$0.6 = \frac{140}{Sx \times 18}$$

$$Sx = \frac{140}{0.6 \times 18}$$

$$= \frac{140}{10.8}$$

$$= 12.96$$

ઉદાહરણ - 10 એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે નીચેની માહિતી મળે છે. તે ઉપરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

$n = 10$, xનો ધારેલો મધ્યક = 40,

y નો ધારેલો મધ્યક = 30

x ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોનો સરવાળો = − 168

y ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોનો સરવાળો = − 19

x ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો = 8200

y ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો = 2300

x અને y ના ધારેલાં મધ્યકોમાંથી લીધેલાં વિચલનોના ગુણાકારોનો સરવાળો = 3420

જવાબ :

$n = 10$, $A = 40$, $B = 30$, $\Sigma u = \Sigma(x - A) = -168$

$\Sigma v = \Sigma(y - B) = -19$, $\Sigma u^2 = \Sigma(x - A)^2 = 8200$

$\Sigma v^2 = \Sigma(y - B)^2 = 2300$ $\Sigma uv = \Sigma(x - A)(y - B) = 3420$

સહસંબંધાંક $r = \dfrac{n\Sigma uv - \Sigma u.\Sigma v}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$

$$= \frac{10(3420)-(-168)(-19)}{\sqrt{10(8200)-(-168)^2} \times \sqrt{10(2300)-(-19)^2}}$$

$$= \frac{34200-3192}{\sqrt{82,000-28,224} \times \sqrt{23,000-361}}$$

$$= \frac{31,008}{\sqrt{53,776} \times \sqrt{22,639}}$$

$$= \frac{31,008}{34,891.67}$$

$= 0.89$

ઉદાહરણ-11 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબાંધક શોધો.

$\Sigma x = 150$ $\Sigma y = 140$, $\Sigma (x - 15)^2 = 180$ $\Sigma (y - 10)^2 = 215$, $\Sigma (x - 15)(y - 10) = 60$, $n = 10$

જવાબ :

$\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n} = \dfrac{150}{10} = 15$

$\bar{y} = \dfrac{\Sigma y}{n} = \dfrac{140}{10} = 14$

અહીં $\Sigma (x - 15)^2 = 180$ અને $\Sigma (y - 10)^2 = 215$ છે.

પરંતુ $\bar{y} = 14$ છે. જ્યારે $\Sigma (y - 10)^2 = 215$ છે. એટલે કે અહીં $(y - B)^2 = 215$ આપેલ છે. તેથી B = ધારેલો મધ્યક = 10 છે.

હવે $\bar{y} = B + \dfrac{\Sigma v}{n}$

$14 = 10 + \dfrac{\Sigma v}{10}$

$14 - 10 = \dfrac{\Sigma v}{10}$

$4 \times 10 = \Sigma v$

$\therefore$ $\Sigma v = 40$ હોય તો $\Sigma u = 0$ થાય $\Sigma u^2 = 180$, $\Sigma v^2 = 215$, $\Sigma uv = 60$, $n = 10$

સહસંબંધાંક r $= \dfrac{n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2}\times\sqrt{n\Sigma v^2-(\Sigma v)^2}}$

$= \dfrac{10(60)-(0)(40)}{\sqrt{10(180)-(0)^2}\times\sqrt{10(215)-(40)^2}}$

$= \dfrac{600}{\sqrt{1800}\times\sqrt{2150-1600}}$

$= \dfrac{600}{42.43\times 23.45}$

$= \dfrac{600}{994.98}$

$= 0.60$

ઉદાહરણ - 12 બે સંબંધિત ચલ x અને y માટે નીચેના પરિણામો મળ્યા હતા.

$n = 20,\ \Sigma x = 100,\ \Sigma y = 80,\ \Sigma x^2 = 600$

$\Sigma y^2 = 550\ \Sigma xy = 500$ પાછળથી એવુ જાણવા મળ્યું કે માહિતીમાં બે જોડકાં (6, 8) અને (8, 12) ને બદલે (8, 6) અને (6, 14) લેવાય ગયા છે. તો સહસંબંધાંકની સાચી કિંમત શોધો.

જવાબ : અહીં માહિતીમાં ભૂલ છે તેથી બે જોડકાં (6, 8) અને (8, 12) ને બદલે (8, 6) અને (6, 14) લેવાય ગયા છે. તેથી સાચા જોડકાં ઉમેરાશે જે $\begin{pmatrix} x & y \\ 6, & 8 \end{pmatrix}$ અને $\begin{pmatrix} x & y \\ 8, & 12 \end{pmatrix}$ છે, ખોટા જોડકાં બાદ થશે જે $\begin{pmatrix} x & y \\ 6, & 8 \end{pmatrix}$ અને $\begin{pmatrix} x & y \\ 6, & 14 \end{pmatrix}$ છે. તેથી દખલામાં આપેલ તમામ પરિણામો સુધારી નવા સુધારેલ પરિણામોને આધારે સહસબંધાંક શોધીશું

સુધારેલ Σx = ખોટો Σx + સાચી x ની કિંમતો – x ની ખોટી કિંમતો

$= 100 + \begin{pmatrix} x & & x \\ 6 & + & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & & x \\ 8 & + & 6 \end{pmatrix}$

$= 100 + 14 - 14$

$= 100$

સુધારેલ Σy = ખોટો Σy + yની સાચી કિંમતો – yની ખોટી કિંમતો

$= 80 + (8 + 12) - (6 + 14)$

$= 80 + 20 - 20$

$= 80$

સુધારેલ Σx^2 = ખોટો Σx^2 + x^2ની સાચી કિંમતો – x^2ની ખોટી કિંમતો

$= 600 + \left(6^2 + 8^2\right) - \left(8^2 + 6^2\right)$

$= 600 + (36 + 64) - (64 + 36)$
$= 600 + 100 - 100$
$= 600$

સુધારેલ Σy^2 = ખોટો Σy^2 + y^2ની સાચી કિંમત – y^2ની ખોટી કિંમત

$= 550 + \left(8^2 + 12^2\right) - \left(6^2 + 14^2\right)$
$= 550 + (64 + 144) - (36 + 196)$
$= 550 + 208 - 232$
$= 526$

સુધારેલ Σxy = ખોટો Σxy + xyની સાચી કિંમત – xyની ખોટી કિંમતો

$= 500 + \left[(6 \times 8) + (8 \times 12)\right] - \left[(8 \times 6) + (6 \times 14)\right]$
$= 500 + [48 + 96] - [48 + 84]$
$= 500 + 144 - 132$
$= 512$

$$\text{સહ સંબંધાંક } r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \times \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{20(512) - (100)(80)}{\sqrt{20(600) - (100)^2} \times \sqrt{20(526) - (80)^2}}$$

$$= \frac{10,240 - 8000}{\sqrt{12,000 - 10,000} \times \sqrt{10520 - 6400}}$$

$$= \frac{2240}{\sqrt{2000} \times \sqrt{4120}}$$

$$= \frac{2240}{44.72 \times 64.19}$$

$$= \frac{2240}{2871}$$

$= 0.78$

ઉદાહરણ-13 જો x અને y મધ્યકમાંથી લીધેલ વિચલનો હોય તો નીચેની માહિતી પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

$n = 10$, S$x = 20$, S$y = 2.6$, $\Sigma xy = 400$

જવાબ : અહીં x અને y મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનો છે તેથી $x = x - \overline{x}$ અને $y = y - \overline{y}$ થશે

તેથી $\Sigma xy\ (x - \overline{x})\ (y - \overline{y}) = 400$

જવાબ : સહ સંબંધાંક r $= \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n Sx.Sy}$

$$= \frac{400}{10 \times 20 \times 2.6}$$

$$= \frac{400}{520}$$

$$= 0.77$$

ઉદાહરણ : 14 એક સમષ્ટિમાંથી લેવામાં આવેલાં 25 અવલોકનોની જોડ માટે સહસંબંધાંક 0.8 મળે છે. તો સંભવિત દોષ શોધી તેનું અર્થઘટન કરી સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની સીમાઓ શોધો.

જવાબ : $n = 25$ $r = 0.8$

સભવિત દોષ (P.E) $= \frac{0.6745(1-r^2)}{\sqrt{n}}$

$$= \frac{0.6745\left[1-(0.8)^2\right]}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{0.6745\ [1\ - 0.64]}{5}$$

$$= \frac{0.6745(0.36)}{5}$$

$$= \frac{0.24282}{5}$$

$$= 0.049$$

સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની સીમાઓ

$= r \pm$ P.E.

$r -$ P.E $= 0.8 - 0.049 = 0.751$

$r +$ P.E $= 0.8 + 0.049 = 0.849$

આ સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની સીમા 0.751થી 0.849 વચ્ચે હોવી જોઈએ.

અર્થઘટન :

$r = 0.8$

6. P. E. = 6 (0.049) = 0.291

$\therefore$ $r >$ 6. P. E થાય છે તેથી બે ચલ વચ્ચે સાર્થક સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ : 15 જો એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે સહસબંધાંક 0.8 હોય અને સંભવિત દોષ 0.04 હોય તો n ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $r = 0.8$, P.E $= 0.04$

$$P.E = \frac{0.6745\left(1-r^2\right)}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{0.6745\left(1-0.8^2\right)}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{0.6745(1-0.64)}{0.04}$$

$$\sqrt{n} = \frac{0.6745(0.36)}{0.04}$$

$$\sqrt{n} = \frac{0.24}{0.04}$$

$$\sqrt{n} = 6$$

બંને બાજુ વર્ગ કરતાં

$n = 36$

ઉદાહરણ : 16 એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે $r = 0.8$ અને સંભવિત દોષ = 0.06 હોય તો તે બે ચલ વચ્ચેનો સંબંધ સાર્થક છે કે અસાર્થક તે જણાવી સમષ્ટિના સહસબંધાંકની સીમાઓ શોધો.

જવાબ : $r = 0.8$ P.E = 0.06

$\therefore$ 6 PE 6 (0.06) = 0.36

$\therefore$ $r > 6$ P.E થાય છે તેથી બે ચલ વચ્ચે સાર્થક સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની સીમાઓ

$r -$ P.E = 0.8 − 0.06 = 0.74

$r +$ P.E = 0.8 + 0.06 = 0.86

સીમાઓ : 0.74 થી 0.86ની વચ્ચે છે.

(17) BAOU યુનિવર્સિટીના 25 વિદ્યાર્થીઓએ અર્થશાસ્ત્ર અને આંકડાશાસ્ત્રમાં મેળવેલા ગુણોના આવૃત્તિ વિતરણ માટે સહસંબાંધક (સહસંબંધ ગુણક) શોધો.

અર્થશાસ્ત્રમાં મેળવેલ ગુણ	આંકડાશાસ્ત્રમાં મેળવેલ ગુણ		
	5-15	15-25	25-35
0-10	2	-	6
10-20	8	-	4
20-30	-	-	-
30-40	-	3	-
40-50	-	2	-

જવાબ : ધારો કે આંકડાશાસ્ત્રમાં મેળવેલ ગુણ = x અને અર્થશાસ્ત્રમાં મેળવેલ ગુણ = y

$x \rightarrow$ / $y \downarrow$	5-15	15-25	25-35	કુલ fv	મ.કિં y	v	vfv	v^2fv	fuv
0-10	(4) 2	–	(– 12) 6	8	5	– 2	– 16	32	– 8
10-20	(8) 8	–	(– 4) 4	12	15	– 1	– 12	12	4
20-30	– –	–	–	0	[25] B	0	0	0	0
30-40	–	(0) 3	–	3	35	1	3	3	0
40-50	–	(0) 2	–	2	45	2	4	8	0
કુલ = fu	10	5	10	25 = n	–	–	– 21	55	– 4
મ.કિ. x	10	[20] = A	30	–					
u	– 1	0	1	–					
ufu	– 10	0	10	0					
u^2fu	10	0	10	20					
fuv	12	0	– 16	– 4					

સમજૂતી :

(1) x અને yની આપેલી આવૃત્તિઓનો સરવાળો કરો.
(આડા સરવાળાને f_v ઊભા સરવાળાને f_u કરો)

(2) x ની મૂ. કિ. શોધો. $\left(\frac{5+15}{2}=10, \frac{15+25}{2}=20, \frac{25+35}{2}=30\right)$

(3) આડા અને ઊભા સરવાળાના સરવાળાને n કહો. (n = 25)

(4) y ની મ.કિ. શોધો. $\left(\frac{0+10}{2}=5, \frac{10+20}{2}=15, \ldots \text{ તેવી જ રીતે } 25, 35 \text{ અને } 45\right)$

(5) xની મ. કિ. માંથી વચ્ચેની કિંમત (જે 20 છે.) તેને A ધારો એટલે કે A = 20

(6) yની મ. કિ. માંથી વચ્ચેની કિંમત (જે 25 છે.) તેને B ધારો એટલે કે B = 25

(7) $y = \frac{x-A}{i_x}$ શોધો. જ્યાં i_x = x ની વર્ગ લંબાઈ

(જે 15 - 5 = 10, 25 - 15 = 10.........) $\therefore$ i_x = 10 અને

$$u = \frac{10-20}{10} = \frac{-10}{10} = -1, \frac{20-20}{10} = 0, \frac{30-20}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

(8) $v = \frac{y-B}{i_y}$ શોધો. જ્યાં i_y = yની વર્ગ લંબાઈ

(જે 10 - 0, 10, 20 - 10, ...) $\therefore$ i_y = 10 અને

$v = \frac{5-25}{10} = \frac{-20}{10} = -2, \frac{15-25}{10} = \frac{-10}{10}, \frac{25-25}{10}$ = 0 તેવી જ રીતે 1, 2 શોધો)

(9) u અને fuનો ગુણાકાર કરો.

($-1 \times 10 = -10$, $0 \times 5 = 0$, $1 \times 10 = 10$)

(10) v અને fvનો ગુણાકાર કરો.

($-2 \times 8 = 16$, $-1 \times 12 = -12$, $0 \times 0 = 0$, $1 \times 3 = 3$, $2 \times 2 = 4$)

(11) $u^2fu = u \times ufu$

($-1 \times 10 = -10$, $0 \times 0 = 0$, $1 \times 10 = 10$)

(12) $v^2fv = v \times vfv$

$[-2 \times (-16)] = 32$, $[-1 \times (-12)] = 12$ તેવી જ રીતે 0, 3, 8 મેળવો.

(13) $f \times u \times v$ નો ગુણાર કરો.

f = દાખલામાં આપેલી આવૃત્તિઓ પ્રથમ આવૃત્તિ 2 છે તેની ઊભી અને આડી બાજુ uના ખાનામાં -1 અને v ના ખાનામાં -2 છે. તેથી $2 \times (-1) \times (-2) = 4$ જે 2ની બાજુમાં રઉન્ડ કરી લખો. (◯)

તેવી જ રીતે આવૃત્તિ $(f) \times u \times v$

$6 \times 1 \times (-2) = -12$

$8 \times (-1) \times (-1) = 8$

$4 \times 1 \times (-1) = -4$

$3 \times 0 \times 1 = 0$

$2 \times 0 \times 2 = 0$

(14) રાઉન્ડમાં શોધેલ સંખ્યાઓનો આડો અને ઊભો સરવાળો કરો અને તેને fuvના ખાનામાં જે તે જગ્યાએ લખો.

આડો સરવાળો $4 - 12 = -8$, $8 - 4 = 4$, 0, 0, 0

ઊભો સરવાળો : $4 + 8 = 12$, 0, $-12 - 4 = -16$

(15) શોધેલ સરવાળાનો આડો અને ઊભો સરવાળો કરી તેને Σfuv કરો. ($\Sigma fuv = -4$)

(16) ufu, u^2fuનો પણ સરવાળો કરી તેને અનુક્રમે Σufu અને Σu^2fu કહો. ($\Sigma ufu = 0$ અને $\Sigma u^2fu = 20$)

(17) vfv, v^2fv નો પણ સરવાળો કરી તેને અનુક્રમે Σvfv અને Σv^2fv કહો.

($\Sigma vfu = -21$, $\Sigma v^2fv = 55$)

(18) નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી સહસંબંધાંક શોધો.

$$r = \frac{n\Sigma fuv - (\Sigma ufu)(\Sigma vfv)}{\sqrt{n\Sigma u^2 fv - (\Sigma ufu)^2} \times \sqrt{n\Sigma v^2 fv - (\Sigma vfv)^2}}$$

$$= \frac{25(-4) - (0)(-21)}{\sqrt{25(20) - (0)^2} \times \sqrt{25(55) - (-21)^2}}$$

$$= \frac{-100}{\sqrt{500} \times \sqrt{1375 - 441}}$$

$$= \frac{-100}{\sqrt{500} \times \sqrt{934}}$$

$$= \frac{-100}{22.36 \times 30.56}$$

$$= \frac{-100}{683.32}$$

$= -\ 0.146$

ઉદાહરણ : 18 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો.

		x	
y	0-10	10-20	20-30
5	2	6	–
15	9	4	5
25	–	–	4

જવાબ :

		x							
y	0-10	10-20	20-30	fv	y	v	vfv	v^2fv	fuv
5	(2) 2	(0) 6	–	8	5	– 1	– 8	8	2
15	(0) 9	(0) 4	(0) 5	18	[15] B	0	0	0	0
25	–	–	(4) 4	4	25	1	4	4	4
કુલ fu	11	10	9	$30 = n$	–	–	– 4	12	6
મ.કિં. x	5	15 A	25	–					
fu	– 1	0	1	–					
ufu	– 11	0	9	– 2					
u^2fu	11	0	9	20					
fuv	2	0	4	6					

નોંધ : u ની મ. કિં. $\frac{0+10}{2} = 5$, તેવીજ રીતે 15, 25

v ની મ.કિં. એની એજ કિંમતો લખશે. 5, 15, 25

$i_x = 10 \qquad i_y = 10$

$$u = \frac{x-A}{i_x},\ v = \frac{y-B}{i_y}$$

$n = 30$

$\Sigma ufu = -\ 2$

$\Sigma u^2 fu = 20$

$\Sigma vfv = -4$

$\Sigma v^2 fv = 12$

$\Sigma fuv = 6$

$$\text{સહસંબંધાંક } r = \frac{n\Sigma fuv-(\Sigma ufu)(\Sigma vfv)}{\sqrt{n\Sigma u^2 fv-(\Sigma ufu)^2}\times\sqrt{n\Sigma v^2 fv-(\Sigma vfv)^2}}$$

$$= \frac{30(6)-(-2)(-4)}{\sqrt{30(20)-(-2)^2}\times\sqrt{30(12)-(-4)^2}}$$

$$= \frac{180-8}{\sqrt{600-4}\times\sqrt{360-16}}$$

$$= \frac{172}{\sqrt{596}\times\sqrt{344}}$$

$$= \frac{172}{24.41\times 18.55}$$

$$= \frac{172}{452.80} = -0.38$$

ઉદાહરણ : 19 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબંધક શોધો.

x \ y	10-25	25-40	40-50
20-40	–	4	–
40-60	5	–	1
60-80	3	8	4

જવાબ :

x \ y	10-25	25-40	40-50	કુલ fu	મ.કિ. x	u	ufu	u^2fu	fuv
20-40	–	(0) 4	–	4	30	– 1	– 4	4	0
40-60	(0) 5	–	(0) 1	6	A [50]	0	0	0	0
60-80	(–3) 3	(0) 8	(4) 4	15	70	1	15	15	1
કુલ fv	8	12	5	25 = n	–	–	11	19	1
મ.કિ. y	17.5	[32.5]	47.5						
v	– 1	0	1	–					
vfv	8	0	5	13					
v^2fv	– 8	0	5	– 3					
fuv	– 3	0	4	1					

સહસંબંધાંક $r = \frac{n\Sigma fuv-(\Sigma ufu)(\Sigma vfv)}{\sqrt{n\Sigma u^2 fv-(\Sigma ufu)^2}\times\sqrt{n\Sigma v^2 fv-(\Sigma vfv)^2}}$

$$= \frac{25(1)-(11)(13)}{\sqrt{25(19)-(11)^2\times\sqrt{25(-3)-(13)^2}}}$$

$$= \frac{25-143}{\sqrt{475-121}\times\sqrt{-75-169}}$$

$$= \frac{-118}{\sqrt{354}\sqrt{-244}}$$

$$= \frac{-118}{(18.81)(-15.62)}$$

$$= \frac{118}{293.81}$$

$$= 0.40$$

સ્વાધ્યાય

(A) પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

1. સહસંબંધાંક એટલે શું ?
2. સહસંબંધાંકના પ્રકારો વિસ્તારપૂર્વક સમજાવો.
3. કાર્લ પિર્યસનના સહસંબંધાંકના સૂત્રો જણાવો.
4. સહસંબંધાંક એટલે શું ?
5. સહસંબંધાંકનું અર્થઘટન લખો.
6. $r = 1$, $r = -1$, $r = 0$નું અર્થઘટન કરો.
7. સહસંબંધકનો અભાવ એટલે શું ?
8. કાર્લ પિર્યસનનો સહસંબંધ શોધતી વખતે $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ની કિંમત પૂર્ણાંકમાં આવે તો કયુ સૂત્ર વાપરવુ યોગ્ય છે ?
9. કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધ શોધતી વખતે $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ની કિંમત અપૂર્ણાંકમાં આવે તો કયુ સૂત્ર વાપરવુ યોગ્ય છે ?
10. દ્વિ-ચલ કોષ્ટકની રીતે સહસંબંધાંક શોધવાની રીત સમજાવો.

(B) દાખલા ગણો.

(1) નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

ભાવ (રૂ. માં)	6	7	9	12	16
માંગ (હજારમાં એકમમાં)	11	12	17	16	19

(**જવાબ :** $n = 5$, $\bar{x} = 10$, $\bar{y} = 15$, $r = 0.89$)

(2) પતિ અને પત્નીની ઉંમર અંગેની માહિતી નીચે મુજબ છે તો તેના ઉપરથી પતિ અને પત્ની વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

પતિની ઉંમર	25	26	28	30	45
પત્નીની ઉંમર	19	22	26	28	42

(**જવાબ :** $n = 5$, $\bar{x} = 30.8$, A = 31, $\bar{y} = 27.4$, B = 27 સહસંબંધાંક $r = 0.98$)

(3) નીચેની માહિતી ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો.

x	25	30	33	41	67
y	20	28	32	40	65

(**જવાબ :** $n = 5$, $\bar{x} = 39.2$, A = 39, $\bar{y} = 37$, B = 37, r = 0.99)

(4) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી કાર્લ પિર્યસનનો સહસંબંધાંક શોધો.

x	44	45	51	54	69	72	75	80
y	40	42	48	51	68	71	70	76

(**જવાબ :** $n = 8$, $\bar{x} = 61.25$, A = 61, $\bar{y} = 58.25$, B = 58, $r = 0.99$)

(5) નીચેની માહિતી ઉપરથી સહસંબાંધક શોધો.

x	2	2	3	4	4	5	7	8
y	3	2	4	2	4	2	2	2

(**જવાબ :** $n = 8$, $\Sigma x = 35$, $\Sigma y = 21$, $\Sigma x^2 = 187$, $\Sigma y^2 = 61$, $\Sigma xy = 86$, $r = -0.41$)

(6) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો અને તેના ઉપરથી નિર્ણયાકતાનો આંક શોધો.

$n = 10$, $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 155$ $S_x = 4.4$ $S_y = 5.2$

(**જવાબ :** $r = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n\, Sx\, Sy}$ નો ઉપયોગ કરતા $r = 0.67$) $R^2 = 0.4489$

(7) નીચે આપેલા પરિણામોની મદદથી સહસંબંધાંક શોધો.

શ્રેણી xનો મધ્યક = 8.2   શ્રેણી yનો મધ્યક = 12.1

શ્રેણી xનું પ્રમાણિત વિચલન = 4.5

શ્રેણી yનું પ્રમાણિત વિચલન = 3.5

$n = 10$ $\Sigma xy = 980$

(**જવાબ :** $r = \dfrac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n S_x S_y}$, $r = 0.61$)

(8) નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી અવલોકનોના જોડકાની સંખ્યા શોધો.

$r = 0.5$, $\Sigma xy = 120$, $\Sigma x^2 = 90$, $Sy = 8$ જયાં x અને yના મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનો છે.

જવાબ : અહીં x અને y મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનો છે. તેથી $\Sigma xy = \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ એટલે

$x = (x-\bar{x})$, $y = (y-\bar{y})$ થશે. હવે

$r = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n\, Sx\, Sy}$ નો ઉપયોગ કરતા $n = 10$)

(9) બે ચલો x અને y વચ્ચેનો સહસંબાંધક = 0.7 છે અને તેમની વચ્ચેનું સહવિચરણ = 120 છે. જો yનું પ્ર.વિ. = 20 હોય તો xનું પ્ર.વિ. શોધો.

(જવાબ : $S_x = 12.96$)

(10) એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે નીચેની માહિતી મળે છે તે ઉપરથી કાર્લ પિયર્સનો સહસંબંધાંક શોધો.

	x	y
ધારેલો મધ્યક	40	30
ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોનો સરવાળો	170	20
ધારેલ મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો	8100	2280
x અને y ના ધારેલા મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનોના ગુણાકારનો સરવાળો	3400	
જોડકાની સંખ્યા = 8		

(**જવાબ :** $r = 0.94$)

(11) દશ જોડકાં માટે નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબાંધક શોધો.

$\Sigma x = 140 \quad \Sigma y = 150$

$\Sigma (x-10)^2 = 180$, $\Sigma (y-15)^2 = 215$

$\Sigma (x-10)(y-15) = 60$

(**જવાબ :** $r = 0.91$)

(12) 15 જોડકાં માટે નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો.

$\bar{x} = 25 \quad \bar{y} = 18$

$(x-25) = 136$, $\Sigma (y-18) = 138$ $\Sigma (x-25)\ \Sigma (y-18) = 112$

(**જવાબ :** $r = 0.8$)

(13) બે સંબંધિત ચલ x અને y માટે નીચેના પરિણામો મળ્યાં હતાં.

$n = 25$, $\Sigma x = 110$, $\Sigma y = 95$, $x^2 = 650$, $\Sigma y^2 = 460$, $\Sigma xy = 508$ પરંતુ પાછળથી એવું જાણવા મળ્યું કે મહિતીમાં બે જોડકાં (8, 12) અને (6, 8) ને બદલે ભુલથી (6, 14) અને (8, 6) લેવામાં આવ્યાં હતાં તો સહસંબંધાંકની સાચી કિંમત મેળવો.

(**જવાબ :** $r = 0.67$)

(14) બે સંબંધિત ચલ x અને y માટે નીચેનાં પરિણામો મળ્યા છે તો તે ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો.

	x	y
પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા	8	8
મધ્યકો	51	34
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો	42	60
મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોના ગુણાકારનો સરવાળા = − 16		

(**જવાબ :** $r = -0.32$)

(15) એક સમષ્ટિમાંથી લેવામાં આવેલા 16 અવલોકનોની જોડ માટે સહસંબાંધક 0.72 મળે છે. તો તેનો સંભવિત દોષ શોધી તેનું અર્થઘટન કરો. ઉપરાંત સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની સીમાઓ શોધો.
(**જવાબ :** P.E. = 0.081, સીમાઓ 0.639 થી 0.801, **અર્થઘટન :** $r > 6$ P. E. સાર્થક)

(16) જો એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે સહસંબંધાંક = 0.8 હોય અને સંભવિત દોષ 0.06 હોય તો n ની કિંમત શોધો. (**જવાબ :** $n = 4$)

(17) જો એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે સહ સંબંધાંક = 0.5 હોય અને સંભવિત દોષ 0.125 હોય તો nની કિંમત શોધો. (**જવાબ :** $n = 9$)

(18) એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે $r = 0.6$ અને સંભવિત દોષ = 0.05 હોયતો બે ચલ વચ્ચેનો સંબંધ સાર્થક છે કે અસાર્થક તે જણાવી સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની સીમાઓ શોધો.
(**જવાબ :** 6.P.E. = 0.3, $r > 6$ P.E., સાર્થક 0.55 થી 0.65)

(19) એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે $r = 0.8$, P.E. = 0.06 હોય તો nની કિંમત શોધો.
(**જવાબ :** $n = 16$)

(20) નીચે આપેલ દ્વિ-ચલ કોષ્ટકની મદદથી સહસંબંધાંક શોધો.

ગણિતના ગુણ y	**ગુજરાતીના ગુણ**		
	20-25	25-30	30-35
4	22	−	−
8	16	12	4
12	−	10	6
16	−	6	4

(**જવાબ :** $r = 0.69$)

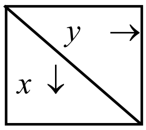
(21) નીચે આપેલ દ્વિ-ચલ કોષ્ટકની મદદથી સહસંબંધાંક શોધો.

પત્નીની ઉંમર (x)	**પતિની ઉંમર (y)**		
	25-30	30-35	35-40
20-24	18	28	−
24-28	12	22	6
28-32	−	−	14

[Hint (**જવાબ :** $r = 0.58$)

આડી હારમાં x છે તેથી f_u, x , u , ufu, u^2fu, fuv આડા આવશે ઊભી સંખ્યામાં y છે

તેથી f_u, x , u , ufu, u^2fu, fuv



fv

v

vfv

v^2fv

fuv

ઊભી આવશે.

11.13 સ્પિયરમેન ક્રમાંક સહસંબંધાંકની રીતના દાખલા :

(1) નીચે આપેલ માહિતી માટે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

x	38	58	22	67	44	35	46	52	17	62
y	5.2	37	72	27	60	77	62	47	82	30

જવાબ :

x	y	r_x = x નો ક્રમ	r_y = yનો ક્રમ	તફાવત $d = r_x - r_y$	d^2
38	52	7	6	1	1
58	37	3	8	– 5	25
22	72	9	3	6	36
67	27	1	10	– 9	81
44	60	6	5	1	1
35	77	8	2	6	36
46	62	5	4	1	1
52	47	4	7	– 3	9
17	82	10	1	9	81
62	30	2	9	– 7	49
				કુલ	$320 = \Sigma d^2$

સમજુતી : $r_x \Rightarrow x$ માં સૌથી મોટી રકમ 67 ને 1 નંબર, તેથી નાની 62 ને 2 નંબર, તેથી નાની 58 ને 3 નંબર તેથી નાની 52 ને 4 તેવી જ રીતે 1 થી 10 સુધી નંબર લખો.

$ry \Rightarrow y$ માં સૌથી મોટી રકમ 82 ને 1 નંબર, તેથી નાની 77ને 2 નંબર, તેથી નાની 72 ને 3 નંબર, તેથી નાની 62 ને 4 નંબર તેવી જ રીતે 1 થી 10 સુધી નંબર લખો.

તફાવત = $d \Rightarrow$ હવે $d = r_x - r_y$ શોધો એટલે કે r_xની કિંમતમાંથી r_yની કિંમત બાદ કરી d વાળો સ્તંભ તૈયાર કરો.

$d^2 \Rightarrow$ હવે d^2 ની દરેક કિંમતનો વર્ગ કરો.

$\Sigma d^2 \Rightarrow d^2$ની દરેક કિંમતનો સરવાળો કરો. $n = 10$ જોડકાની સંખ્યા

ક્રમાંક સહસંબંધાંક $r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$

$$= 1 - \frac{6(320)}{10(10^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{1920}{10(100 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{1920}{10 \times 99}$$

$$= 1 - \frac{1920}{990}$$

$= 1 - 1.94$

$= - 0.94$

(2) BAOU યુનિ.ના Semester-6માં ભણતા વિદ્યાર્થીઓ એ આંકડાશાસ્ત્ર અને અર્થશાસ્ત્ર વિષયમાં મેળવેલ ગુણોના ક્રમ નીચે કૌંસમાં આપવામાં આવેલ છે તો તે ઉપરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો. (1, 4), (8, 9), (6, 5), (7, 6), (5, 8), (9, 1), (10, 3), (4, 2), (3, 7), (2, 10)

જવાબ:(અહીં ક્રમ નંબર આપેલા છે તેથી ક્રમ આપવાની જરૂર નથી. આંકડાશાસ્ત્રના ક્રમ નંબરને r_x અને અર્થશાસ્ત્રના ક્રમ નંબર ને r_y ધારીશું. ($n = 10$)

r_x **xના ક્રમ**	r_y **yના ક્રમ**	**તફાવત** $d = r_x - r_y$	d^2
1	4	− 3	9
8	9	− 1	1
6	5	1	1
7	6	1	1
5	8	− 3	9
9	1	8	64
10	3	7	49
4	2	2	4
3	7	− 4	16
2	10	− 8	64
			218

ક્રમાંક સહસંબંધાંક $r \quad = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n\left(n^2 - 1\right)}$

$$= 1 - \frac{6(218)}{10\left(10^2 - 1\right)}$$

$$= 1 - \frac{1308}{10\left(10^2 - 1\right)}$$

$$= 1 - \frac{1308}{10(99)}$$

$$= 1 - \frac{1308}{990}$$

$$= 1 - 1.32$$

$$= - 0.32$$

(3) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

x	32	– 40	– 20	0	– 24	40	32	36	– 24	–4
y	12	20	0	4	4	– 16	– 20	– 32	20	4

જવાબ : અહીં અમુક રકમ માઈનસમાં આપેલી છે તેથી ક્રમ આપતી વખતે નીચે મુજબ ધ્યાન રાખવું.

–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5

સમજૂતી : ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ અહીં સૌથી મોટી કિંમત 5 છે અને સૌથી નાની કિંમત – 5 છે. એટલે કે જેમ જેમ ડાબી બાજુ જઈશુ તેમ તેમ કિંમત નાની થતી જાય છે.

x	y	r_x x નો ક્રમ	r_y y નો ક્રમ	તફાવત $d = r_x - r_y$	d^2
32	12	3.5	3	0.5	0.25
– 40	20	10	1.5	8.5	72.25
– 20	0	7	7	0	0.00
0	4	5	5	0	0.00
– 24	4	8.5	5	3.5	12.25
40	– 16	1	8	– 7.0	49.00
32	– 20	3.5	9	5.5	30.25
36	– 30	2	10	– 8.0	64.00
– 24	20	8.5	1.5	7.0	49.00
– 4	4	6	5	1.0	1.00
			કુલ		$278 = \Sigma d^2$

સમજૂતી : r_x સૌથી મોટી કિંમત 40 ને 1 નંબર, તેથી નાની રકમ 36 ને 2 નંબર, તેથી નાની રકમ 32 બે વખત છે. તેથી 3 અને 4 નંબરની સરેરાશ $\frac{3+4}{2}$ = 3.5 બંને ને 3.5 નંબર આપો. તેથી નાની 0 ને 5 નંબર તેથી નાની – 4 ને 6 નંબર તેથી નાની – 20 ને 7 નંબર, તેથી નાની – 24 બે વખત છે તેથી 8 અને 9 નંબરની સરેરાશ $\frac{8+9}{2}$ = 8.5 નંબર બંનેને તેથી નાની – 40 ને 10 નંબર આપો.

r_y : સૌથી મોટી કિંમત 20 બે વખત છે. તેથી 1 અને 2 ને સરેરાશ $\frac{1+2}{2}$ = 1.5 નંબર બંનેને આપો તેથી નાની 12 ને 3 નંબર તેથી નાની 4 ત્રણ વખત આવે છે તેથી 4, 5 અને 6 નંબરની સરેરાશ $\frac{4+5+6}{3}$ = 5

નંબર ત્રણેને આપો તેથી નાની રકમ 0 ને 7 નંબર તેથી નાાની – 16 ને 8 નંબર તેથી નાની – 20 ને 9 નંબર અને તેથી નાની – 24 ને 10 નંબર આપો.

→ $d = r_x - r_y$ શોધી તેનો વર્ગ d^2 શોધો.

	બેની જોડ	ત્રણની જોડ
r_xમાં જોડ	(3.5, 3.5)	–
	(8.5, 8.5)	–
r_y માં જોડ	(1.5, 1.5)	(5, 5, 5)

અહીં કુલ ચાર જોડ છે તેથી સૂત્રમાં $\frac{m}{12}$ $(m^2 - 1)$ સૂત્ર ચાર વખત ઉમેરાશે અને તેમાં બેની જોડ 3 વખત અને ત્રણની જોડ એક વખત છે. તેથી પ્રથમ ત્રણ સૂત્રમાં $m = 2$ અને ચોથા સૂત્રમાં $m = 3$ લેવાશે જે નીચે મુજબ જોઈ શકાશે.

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + \frac{m}{12}\left(m^2-1\right) + \frac{m}{12}\left(m^2-1\right) + \frac{m}{12}\left(m^2-1\right) + \frac{\text{M}}{12}\left(m^2-1\right)\right]}{n\left(n^2-1\right)}$$

$$= 1 - \frac{6\left[278 + \frac{2}{12}\left(2^2-1\right) + \frac{2}{12} + \left(2^2-1\right) + \frac{2}{12}\left(2^2-1\right) + \frac{3}{12}\left(3^2-1\right)\right]}{10\left(10^2-1\right)}$$

$$= 1 - \frac{6\left[278 + \frac{2}{12}(3) + \frac{2}{12} + (3) + \frac{2}{12}(3) + \frac{3}{12}(8)\right]}{10(100-1)}$$

$$= 1 - \frac{6\left[278 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 2\right]}{10(99)}$$

$$=1-\frac{6[281.5]}{990}$$

$$=1-\frac{1689}{990}$$

$= 1 - 1.706$

$= -0.706$

(4) નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

x	3.0	5.0	1.4	0.3	2.4	6.2
y	6.3	0.8	7.2	2.8	4.5	1.3

x	y	r_x x નો ક્રમ	r_y y નો ક્રમ	તફાવત $d = r_x - r_y$	d^2
3.0	6.3	3	2	1	1
5.0	0.8	2	6	– 4	16
1.4	7.2	5	1	4	16
0.3	2.8	6	4	2	4
2.4	4.5	4	3	1	1
6.2	1.3	1	5	– 4	16
				કુલ	54 Σd^2

$n = 6$ લો

ક્રમાંક સહસંબંધાંક

$$r = 1-\frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$=1-\frac{6(54)}{6(6^2-1)}$$

$$=1-\frac{324}{6(36-1)}$$

$$=1-\frac{324}{210}$$

$= 1 - 1.54$

$= -0.54$

(5) એક દ્વિચલ નિદર્શમાં બે ચલનાં અવલોકનોના ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 66 છે અને તે બે ચલો વચ્ચેનો સહસંબંધાંક 0.6 છે તો જોડકાંઓની સંખ્યા શોધો.

જવાબ :

$\Sigma d^2 = 66, \ r = 0.4$

ક્રમાંક સહસંબાંધાંક = $r = 1 - \dfrac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$

$$0.6 = 1 - \frac{6(66)}{n(n^2-1)}$$

$$0.6 = 1 - \frac{396}{n(n^2-1)}$$

$$\frac{396}{n(n^2-1)} = 1 - 0.6$$

$$\frac{396}{0.4} = n\ (n^2 - 1)$$

$$990 = n\ (n - 1)\ (n + 1)$$

$$9 \times 10 \times 11 = (n - 1)\ n\ (n + 1)$$

$$\therefore n = 10$$

(6) દસ વિદ્યાર્થીઓના આંકડાશાસ્ત્ર અને ભૂગોળ વિષયમાં મેળવેલ ગુણ વચ્ચેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક 0.5 મળે છે. પાછળથી માલુમ પડ્યું કે તેમાના એક વિદ્યાર્થીના બે વિષયોના ગુણના ક્રમનો તફાવત ભુલથી સાત ને બદલે ત્રણ લેવાઇ ગયો છે. સુધારેલો સહસંબંધાંક શોધો.

જવાબ :

$n = 10 \quad r = 0.5$

સાચો ક્રમ	ખોટો ક્રમ
7	3

તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો = Σd^2

સહસબંધાંક $r = 1 - \dfrac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$

$$0.5 = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{10(10^2-1)}$$

$$=\frac{6\Sigma d^2}{10(99)} = 1 - 0.5$$

$$\Sigma d^2 = \frac{0.5 \times 990}{6}$$

ખોટો $= \Sigma d^2 = \frac{495}{6} = 82.5$

સુધારેલો Σd^2 = ખોટો $\Sigma d^2 + (7)^2 - (3)^2$

$= 82.5 + 49 - 9$

$= 122.5$

સુધારેલો સહસબંધાંક $= r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$

$$=1-\frac{6(122.5)}{10(10^2-1)}$$

$$=1-\frac{735}{990}$$

$= 1 - 0.74$

$= 0.26$

(7) BAOUના T.Y. B.A.ના એક વર્ગની વકતૃત્વ સ્પર્ધામાં ત્રણ નિર્ણાયકો એ 8 સ્પર્ધકોને નિમ્નાનુસાર ક્રમ આપેલ છે. તે પરથી કયા બે નિર્ણયકોની પસંદગી સૌથી વધારે નજીક છે તે સ્પિયરમેનના સહસંબંધાંક દ્વારા નક્કી કરો.

સ્પર્ધક	1	2	3	4	5	6	7	8
નિર્ણાયક Aનો ક્રમ	1	5	2	6	3	7	4	8
નિર્ણાયક Bનો ક્રમ	3	5	6	7	4	2	8	1
નિર્ણાયક Cનો ક્રમ	2	4	7	5	3	1	8	6

જવાબ : ત્રણ નિર્ણાયકો પૈકી કયા બે નિર્ણાયકોની પસંદગી સૌથી વધારે નજીક છે તે તપાસવાનું હોવાથી નિર્ણાયકો A B C પૈકી AB, AC અને BC એમ ત્રણ વચ્ચેનો ક્રમશઃ સહસંબંધાંક શોધીશું.

Aનો ક્રમ r_A	Bનો ક્રમ r_B	Cનો ક્રમ r_C	A અને Bના ક્રમનો તફાવત $d_1 = r_A - r_B$	d_1^2	A અને Cના ક્રમનો તફાવત $d_2 = r_A = r_c$	d_2^2	B અને Cના ક્રમનો તફાવત $d_3 = r_B - r_C$	d_3^2
1	3	2	– 2	4	– 1	1	1	1
5	5	4	0	0	1	1	1	1
2	6	7	– 4	16	– 5	25	– 1	1
6	7	5	– 1	1	1	1	2	4
3	4	3	– 1	1	0	0	1	1
7	2	1	5	25	6	36	1	1
4	8	8	– 4	16	– 4	16	0	0
8	1	6	7	49	2	4	– 5	25
			$\Sigma d_1^2 =$	112	$\Sigma d_2^2 =$	84	$\Sigma d_3^2 =$	34

સમજૂતી : સૌથી પ્રથમ નિર્ણાયક A અને નિર્ણાયક Bના ક્રમો વચ્ચેનો તફાવત d_1 શોધી તેનો વર્ગ d_1^2 શોધો.

– નિર્ણાયક A અને નિર્ણાયક Cના ક્રમો વચ્ચેનો તફાવત d_2 શોધી તેનો વર્ગ d^2_2 શોધીશું.

– નિર્ણાયક B અને Cના ક્રમો વચ્ચેનો તફાવત d_3 શોધી તેનો વર્ગ d_3^2 શોધીશું.

– ત્રણેના સહસંબંધાંક શોધીશું.

નિર્ણાયક A અને નિર્ણાયક B વચ્ચેનો સહસંબંધાંક

$$r_{AB} = 1 - \frac{6\Sigma d_1^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(112)}{8(8^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{672}{504}$$

$$= 1 - 1.33$$

$$= -0.33$$

નિર્ણાયક A અને નિર્ણાયક C વચ્ચેનો

સહસંબંધાંક $r_{AC} = 1 - \frac{6\Sigma d_2^2}{n(n^2-1)}$

$$=1-\frac{6(84)}{8(8^2-1)}$$

$$=1-\frac{504}{504}$$

$= 1 - 1$

$= 0$

નિર્ણાયક B અને નિર્ણાયક C વચ્ચેનો સહસંબંધાંક $r_{BC} = 1-\frac{6\Sigma d_3^2}{n(n^2-1)}$

$$=1-\frac{6(34)}{504}$$

$$=1-\frac{204}{504} = 1 - 0.40$$

$= 0.60$

અહીં $r_{AB} = -0.33 \Rightarrow$ ઋણ સહસંબંધ છે.

$r_{AC} = 0 \Rightarrow$ સહસંબંધનો અભાવ

$r_{BC} = 0.60 \Rightarrow$ ધન સહસંબંધ

એટલે કે નિર્ણાયક B અને નિર્ણાયક Cના પરિણામમાં વધુ નિકટતા જોવા મળે છે.

સ્વાધ્યાય

(1) પાંચ કોલેજના યુનિવર્સિટીના પરિણામ અને વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાને આધારે નિમ્ન ક્રમ આપેલ છે. તે પરથી વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા અને યુનિવર્સિટીના પરિણામ વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાનો ક્રમ	4	1	3	2	5
યુનિવર્સિટીના પરિણામનો ક્રમ	3	5	2	4	1

(**જવાબ :** $\Sigma d^2 = 38$, $r = -0.9$)

(2) BAOUમાં અભ્યાસ કરતાં T.Y.B.Aના વિદ્યાર્થીઓના વર્ગમાં ગ્રંથલાયનો ઉપયોગ કરનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા અને તે વર્ગના આંકડાશાસ્ત્ર વિષયમાં મેળવેલ ગુણની સરેરાશ નીચે મુજબ છે તે ઉપરથી તે બે વચ્ચેનો ક્રમાંક સહસબંધાંક શોધો.

ગ્રંથાલયનો ઉપયોગ કરનાર વિદ્યાર્થીઓ	42	40	44	41	43	47
આંકડાશાસ્ત્ર વિષયમાં મેળવેલ ગુણ સરેરાશ	90	84	85	86	87	82

(**જવાબ :** $\Sigma d^2 = 44$, $r = -0.26$)

(3) નીચેની માહિતી પરથી નિબંધ લેખનમાં અને પત્ર લેખનમાં મેળવેલ ગુણ વચ્ચે સહસંબંધ શોધો.

નિબંધ લેખનના ગુણ	20	19	17	20	21	16	17	20
પત્ર લેખનન ગુણ	13	14	15	14	17	14	12	18

(**જવાબ :** $\Sigma d^2 = 48.5$, $\frac{m}{12}(m^2 - 1)$ સૂત્ર ત્રણ વખત ઉમેરાશે. બે વખત $m = 3$ અને એક વખત $m = 2$ તેથી $6\ (48.5 + 0.5 + 2 + 2) = 318$, $r = 0.63$)

(4) એક દ્વિચલ નિદર્શમાં બે ચલનાં અવલોકનોના ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 200 છે અને તે બે ચલો વચ્ચેનો સહસંબંધાંક – 0.2121 છે તો જોડકાઓની સંખ્યા શોધો. ($n = 10$)

(5) અર્થશાસ્ત્ર અને આંકડશાસ્ત્રના ગુણ વચ્ચેનો સહસંબંધાંક 0.5 છે અને તે બે ચલોના અવલોકનોના ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 60 છે તો જોડકાઓની સંખ્યા શોધો. ($n = 9$)

(6) બે ચલ x અને yના અવલોકનોના ક્રમોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 30 છે અને તેમની વચ્ચેનો સહસંબંધાંક 0.75 હોય તો તે અવલોકનોના જોડકાઓની કિંમત શોધો. [($n = 9$) Hint $8 \times 9 \times 10$]

(7) ગુજરાતી અને ઇતિહાસના ગુણોના ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 126 અને તેમની વચ્ચેનો સહસંબંધક – 0.5 હોય તો જોડકાંઓની સંખ્યા શોધો. [($n = 8$) Hint $7 \times 8 \times 9$]

(8) એક દ્વિચલ નિદર્શનના અવલોકનોની 10 જોડ માટે ક્રમાંક સહસંબંધક 0.4 મળે છે. પાછળથી માલુમ પડ્યું કે અવલોકનોની એક જોડ માટે ક્રમનો તફાવત ભૂલથી 7 ને બદલે 3 લેવાય ગયો છે તો સુધારેલ સહસંબંધાંક શોધો.

($r = 0.16$)

(9) BAOU યુનિ.માં અભ્યાસ કરતાં 10 વિદ્યાર્થીઓના તર્કશાસ્ત્ર અને મનોવૈજ્ઞાનિક વિષયમાં મેળવેલ ગુણ વચ્ચેનો સહસંબંધાંક 0.3 છે. પછીથી જાણવા મળ્યું કે તેમાંના એક વિદ્યાર્થીના બે વિષયોના ગુણના ક્રમનો તફાવત ભૂલથી 6 ને બદલે 9 લીધો છે. તો સુધારેલો સહસંબંધાંક શોધો.

(**જવાબ :** $r = 0.57$)

(10) BAOU યુનિમાં યોજાયેલ સંગીત સ્પર્ધામાં ત્રણ નિર્ણાયકો એ દશ સ્પર્ધકોને નીચેના ક્રમ આપેલ છે તો કયા બે નિર્ણાયકો વચ્ચે વધુ નિકટતા છે તે ક્રમાંક સહસંબંધાંકની મદદથી શોધો.

નિર્ણાયક - X	7	8	1	6	9	5	4	3	10	2
નિર્ણાયક - Y	6	9	3	5	1	8	2	7	4	10
નિર્ણાયક - Z	5	7	6	4	10	9	3	1	8	2

(**જવાબ :** $r_{xy} = -0.21$, $r_{xz} = 0.64$, $r_{yz} = -0.29$)

(11) ક્રમાંક સહસબંધાંકની રીત સમજાવો.

(12) ક્રમાંક સહસબંધાંક ને બીજ કયા નામથી ઓળખવામાં આવે છે.

(13) ક્રમાંક સહસંબંધાંકની રીતે સહસંબંધાંક ક્યારે શોધવામાં આવે છે.

11.14 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો (MCQ'S)

(1) ...., ... અને .... સહસંબંધના પ્રકારો છે.

(A) સાદો સહસંબંધ, જટિલ સહસંબંધ, ધન સહસંબંધ

(B) ધન સહસંબંધ, સહસંબંધ, સ્વતંત્ર સહસંબંધ

(C) કાચો સહસંબંધ, પાકો સહસંબંધ, મધ્યમ સહસંબંધ

(D) એકપણ નહીં

(2) જો $\Sigma\ (x-\bar{x})(y-\bar{y})\ =\ 30,\ \Sigma(x-\bar{x})^2 = 23\ \ \Sigma(y-\bar{y})^2\ =\ 75$ હોય તો સહસંબંધાંક r = ...

(A) 0.7 (B) – 0.7 (C) 0.07 (D) એકપણ નહીં

(3) જો x અને y વચ્ચે r = 0.6 હોય તો, (2 – 3x) અને (4y + 1) વચ્ચે r = ...

(A) – 0.6 (B) 0.6 (C) 0.3 (D) – 0.3

$$\left[\text{Hint:}\frac{Cor(u.v)}{\sqrt{v(u)}\times\sqrt{v(v)}}=\frac{Cor(-3x,4y)}{\sqrt{-3^2}\times\sqrt{4^2}}=\frac{-12\,Cor(xy)}{12}=Cov(x\,y)=0.6\ \therefore\ Cov(x,y)=-0.6\right]$$

(4) ક્રમાંક સહસંબાંધકની રીતમાં xનો ક્રમ અને yનો ક્રમ બંને સરખા હોય તો સહસબંધાંક r = ...

(A) – 1 (B) 1 (C) 0 (D) એકપણ નહીં

(5) વિકર્ણ ચિત્રમાં બધા જ બિંદુઓ એક જ ત્રાંસી રેખા પર હોય તો સહસંબંધાંક r = ...

(A) – 1 (B) + 1 (C) ± 1 (D) 0

(6) સહસંબંધાંક rની કિંમત .... થી .... ની વચ્ચે જ હોય છે.

(A) 0, 1 (B) 0, – 1 (C) – 1, 1 (D) – 1, 0

(7) પાંચ વિદ્યાર્થીઓએ બે વિષયમાં મેળવેલ ગુણોના ક્રમાંકો નીચે મુજબ છે. તો તે ઉપરથી સ્પિયરમેનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક r = ...

x	3	4	5	2	1
y	5	3	2	1	4

(A) 0.2 (B) – 0.2 (C) 1.2 (D) – 1.2

(8) સહસંબંધાંક r .... અને .... પરિવર્તનથી નિરપેક્ષ છે.

(A) ઉગમબિંદુ, સ્કેલ (B) સ્વતંત્ર, આધાર

(C) ધન, ઋણ (D) એકપણ નહીં

(9) જો n = 10 અને Σd^2 = 212 હોય તો ક્રમાંક સહસંબંધાંક = ...

(A) 1.285 (B) – 1.285 (C) 0.285 (D) – 0.285

(10) r^2ની કિંમત .... વધુ હોતી નથી.

(A) – 1 (B) 0 (C) + 1 (D) એક પણ નહીં

(11) જો ચલ x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક 0.62 હોય તો ચલ - x અને - y વચ્ચેનો સહસબંધાંક = ... જ્યારે ચલ – x અને y વચ્ચેનો સહસબંધાંક = ...

(A) – 0.62, 0.62 (B) 0.62, – 0.62

(C) 0.62, 0.62 (D) એક પણ નહીં

(12) એક દ્વિચલ નિદર્શના દશ જોડકાને આધારે નીચે મુજબ પરિણામો મળેલ છે.

Σxy = 4800, $\bar{x}$ = 20, $\bar{y}$ = 18, S_x = 9 અને S_y = 11 તો સહસંબંધક r = ...

(A) 0.21 (B) 1.21 (C) – 0.21 (D) – 1.21

(13) એક સમષ્ટિમાંથી લેવામાં આવેલા 25 અવલોકનોની જોડ માટે સહસંબંધાંક 0.6 છે તો સંભવિત દોષ = ...

(A) 0.086 (B) 0.43 (C) 0.128 (D) એક પણ નહીં

(14) x અને y વચ્ચેનું સહવિચરણ = 1700 અને S_x = 45 અને S_yનું વિચરણ = 1600 હોય તો સહસંબંધાંક r = ...

(A) 1.94 (B) 0.94 (C) 0.06 (D) એક પણ નહીં

(15) (Cov $x; y$) = 16, $5x$ = 4 અને સહસંબંધાંક r = 0.8 હોય તો Sy = ...

(A) 0.4 (B) 0.2 (C) 5 (D) 4

જવાબ : (1) B (2) A (3) A (4) B (5) C (6) C (7) B (8) A
(9) D (10) C (11) B (12) B (13) A (14) B (15) C

11.15 ચાવીરૂપ શબ્દો :

સહ સંબંધાંક	–	બે ચલ વચ્ચેની નિકટતા તપાસતુ માપ
કાર્ય - કરાણ	–	એક ચલ બીજા ચલ ઉપર આધારિત હોય (એક ચલમાં કંઈક કાર્ય થાય તો તેને કારણે બીજા ચલ ઉપર તેની અસર થાય)
ઊગમ બિંદુ	–	મૂળભૂત બિંદું
ધન સહસંબંધ	–	સીધો સંબંધ
ઋણ સહસંબંધ	–	વ્યસ્ત સંબંધ
સ્વતંત્ર સહસંબંધ	–	નિરપેક્ષ સંબંધ
પ્રમાણિત વિચલન	–	વિચરણનું વર્ગમૂળ
દ્વિ-ચલ કોષ્ટક	–	બે ચલો વાળુ કોષ્ટક

→ **સંદર્ભ ગ્રંથ**

– "ધંધાકીય સંશોધન પદ્ધતિઓ", મૈસુરીયા એન્ડ પટેલ અક્ષર પબ્લિકેશન, અમદાવાદ-2019
– 'આંકડશાસ્ત્ર' જોષી, પંચોળી, કરકર અને અન્ય સી. જમનાદાસ કંપની, અમદાવાદ 1998-99
– 'Business Statistics' Sachdeva Laxminarayan Agrawal, 2005
– આંકડાશાસ્ત્રી વિશ્લેષણ "પટેલ, જોશી, કાસુન્દ્રા અને અન્ય" સી. જમનાદાસ કંપની, અમદાવાદ-2003.
– 'Statistics' "Sancheti & Kapoor" Sultan Chand & Sons, New Delhi – 2007.

* * *

એકમ 12	નિયત સંબંધ (Regression)

એકમ 12

નિયત સંબંધ (Regression)

12.0 નિયત સંબંધના અભ્યાસનો હેતુ

12.1 પ્રસ્તાવના

12.2 નિયત સંબંધનો અર્થ

12.3 નિયત સંબંધની મર્યાદાઓ

12.4 નિયત સંબંધ રેખાના - ગુણધર્મો

12.5 નિયત સંબંધ રેખાઓ

12.6 નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો (મોડેલો)

12.7 નિયત સબંધાંકો

12.8 નિયત સંબંધાંકોના ગુણધર્મો

12.9 ઉદાહરણો

12.10 સ્વાધ્યાય

12.11 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો

12.12 ચાવીરૂપ શબ્દો

સંદર્ભ ગ્રંથ

12.0 નિયતસંબંધના અભ્યાસનો હેતુ

(1) વિદ્યાર્થીઓ સ્વતંત્ર અને આધારિત ચલ અંગેની સમજૂતી મેળવી શકે છે. ઉપરાંત એક ચલની કિંમત આપેલી હોય ત્યારે બીજા ચલની કિંમતનું અનુમાન દ્વારા નિયત સંબંધ અંગે જાણકારી મેળવી શકે છે.

(2) એક ચલની કિંમતમાં થતા એકમ ફેરફારની અસર બીજા ચલની કિંમત ઉપર કેટલી થાય છે તે જાણી શકે છે.

(3) બે ચલના અભ્યાસમાં સ્વતંત્ર ચલ અને આધારિત ચલની ઓળખ કરવાની ક્ષમતા કેળવી શકે છે.

12.1 પ્રસ્તાવના :

સહસંબંધ એ બે ચલો એકબીજાથી કેટલા નજીક છે તે દર્શાવે છે જ્યારે નિયત સંબંધ બે ચલો વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે આ સંબંધો દર્શાવવા માટે ગાણિતીય મોડેલોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

ટૂંકમાં નિયત સંબંધ એટલે બે ચલો વચ્ચેનો ગાણિતીય વિધેયો દ્વારા નક્કી કરવામાં આવતો સંબંધ. આ સંબંધ ને જ્યારે સુરેખાના સ્વરૂપમાં રજૂ કરવામાં આવે ત્યારે તેને સુરેખ નિયત સંબંધ કહે છે. સુરેખ નિયત સંબંધની મદદથી એક ચલમાં થતા ફેરફારની અસર બીજા ચલ ઉપર કેટલી થાય છે તે જાણી શકાય છે. આ અસર જાણવા માટે એક ચલને સ્વતંત્ર ચલ અને બીજા ચલને આધારિત ચલ તરીકે લઈ નિયત સંબંધ રેખાઓ મેળવવામાં આવે છે.

નિયત સંબંધ રેખાઓ મેળવવા માટે સ્વતંત્ર ચલ ને x અને આધારિત ચલને y તરીકે લેવામાં આવે છે અને તે ઉપરથી yની x ઉપરની રેખા મેળવવામાં આવે છે. તેવીજ રીતે y ને સ્વતંત્ર ચલ અને xને આધારિત ચલ તરીકે લઈ તે ઉપરની x ની y ઉપરની રેખા મેળવવામાં આવે છે.

12.2 નિયત સંબંધનો અર્થ (વ્યાખ્યા) :

"જો બે ચલો પરસ્પર સંબંધિત હોય અને તે બે ચલો પૈકી એક ચલમાં ફેરફાર થાય તો આ ફેરફારની અસર બીજા ચલ ઉપર કેટલી થાય છે. તે જાણવા માટેનો અભ્યાસ એટલે નિયત સંબંધ."

12.3 નિયત સંબંધની મર્યાદાઓ :

નિયત સંબંધના અભ્યાસ દરમ્યાન જ્યારે બે ચલનો અભ્યાસ કરવાનો હોય ત્યારે કયા ચલને સ્વતંત્ર ગણવો અને કયા ચલનો આધારિત ગણવો એ નક્કી કરવું ખૂબ અઘરુ છે. તેવી જ રીતે બંને ચલો પરસ્પર આધારિત હોય ત્યારે કયા ચલને સ્વતંત્ર ગણવો અને કયા ચલને આધારિત ગણવો તે ખૂબ જ મુશ્કેલ બને છે.

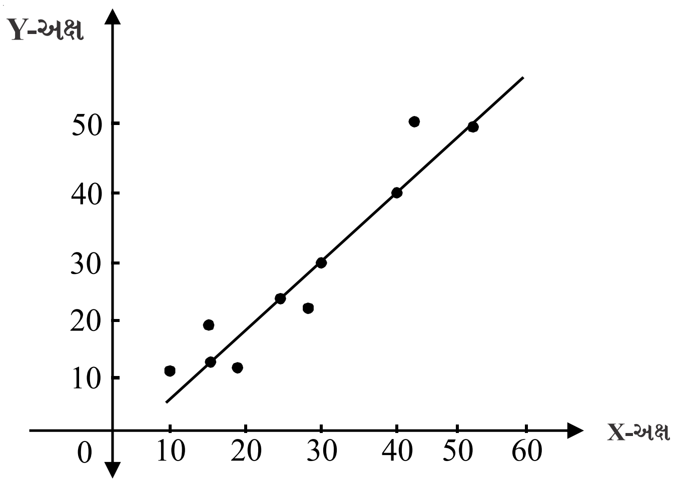
12.4 નિયત સંબંધ રેખાના ગુણ ધર્મો :

(1) જ્યારે એક ચલમાં વધારો થવાથી બીજામાં પણ સપ્રમાણ વધારો થતો હોય એટલે કે બે ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ હોય ત્યારે બે નિયત સંબંધ રેખાઓ એકાકાર થાય છે.

(2) નિયત સંબંધ રેકાઓ મુખ્યત્વે બે પ્રકારની છે. (x ની y ઉપરની અને yની x ઉપરની આ બંને રેખાઓ એકબીજાને છેદતી હોય છે. અને આ છેદન બિંદુઓ $\overline{x}$, $\overline{y}$ છે.

12.5 નિયત સંબંધ રેખાઓ :

નિયત સંબંધ રેખાઓ મુખ્યત્વે બે ચલો વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે. તેમાં એક ચલને સ્વતંત્ર ચલ અને બીજા ચલને આધારિત ચલ ગણી સુરેખાની રચના કરવામાં આવે છે. આ રેખાઓ બે ચલો માટેની વિકીર્ણ આકૃતિની મદદથી મેળવવામાં આવે છે. જે નીચેની આકૃતિની મદદથી સમજીશું.



ઉપરની આકૃતિમાં જોઈ શકાય છે કે બિંદુઓ રેખાની આજુબાજુ પડેલા છે. હવે સમસ્યા એ ઉદ્દભવે છે કે દરેક અલગ વ્યક્તિઓ આ પ્રકારની રેખાઓ દોરે તો રેખાઓ અલગ અલગ મળશે તેથી આ બધી રેખાઓ પૈકી શ્રેષ્ઠ રેખા શોધવી પડે જેને શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા કહીશું. જે ન્યુનત્તમ વર્ગોની પદ્ધતિ"નો ઉપયોગ કરીને મેળવવામાં આવે છે. આ પદ્ધતિ મુજબ જે રેખા માટે વિકર્ણ આકૃતિમાંના બિંદુઓમાંથી રેખા ઉપરનાં અંતરોના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનત્તમ થાય તે રેખા શ્રેષ્ઠ રેખા તરીકે ઓળખાય અને આ રેખાને શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા અથવા નિયત સંબંધ રેખા કહીશું. આ રેખાઓ મુખ્યત્વે બે પ્રકારની છે. જેમ કે yની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા. x ને સ્વતંત્ર ચલ અને y ને આધારિત ચલ ગણી તેને $Y = A + bx$ના સ્વરૂપે રજૂ કરવામાં આવે છે. તેવી જ રીતે xની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખામાં yને સ્વતંત્ર ચલ અને x ને આધારિત ચલ ગણી તેને $x = a + by$ના સ્વરૂપે રજૂ કરવામાં આવે છે.

12.6 નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો (મોડેલો) :

yની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાને $y = A + bx$ તરીકે રજૂ કરી yનું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવવામાં આવે છે જ્યારે xની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાને $x = a + by$ તરીકે રજૂ કરી xનું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવવામાં આવે છે. જે બંને સમીકરણો નીચે મુજબ છે.

y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ $Y = A + B_{yx} X$

જ્યાં $A = \bar{y} - Byx.\bar{x}$

B_{yx} = yનો x પરનો નિયત સંબંધાંક

xનું y ઉપરનું સંબંધ સમીકરણ $X = a + B_{xy} \bullet Y$

જ્યાં $a = \bar{x} - B_{xy} \bullet \bar{y}$

B_{xy} = xનો y ઉપરનો નિયત સબંધાંક

12.7 નિયત સબંધાંકો :

નિયત સંબંધના માપને નિયત સબંધાંક તરીકે ઓળખીશું. નિયત સંબંધાંકો બે પ્રકારના હોય છે.

(1) yનો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક જેને b_{yx} વડે દર્શાવીશું.

(2) xનો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક જેને b_{xy} વડે દર્શાવીશું.

આ બંને નિયત સંબંધોકોની ગણતરીના સૂત્રો નીચે મુજબ છે.

$\bar{x}$ અને $\bar{y}$ બને મધ્યકોની કિંમત પૂર્ણાક સંખ્યામાં આવે ત્યારે :

y નો x ઉપરનો નિયત સબંધાંક

$$b_{yx} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-x)^2}$$

અથવા

$$b_{yx} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

$\bar{x}$ અને $\bar{y}$ બંને મધ્યકોની કિંમત જ્યારે અપૂર્ણાંક સંખ્યામાં આવે ત્યારે y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાક

$$b_{yx} = \frac{n\Sigma uv - \Sigma u \Sigma v}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2}$$

જ્યાં $u = x - A$

જ્યાં A = ધારેલો મધ્યક

V = Y – B

B = ધારેલો મધ્યક

વર્ગીકૃત માહિતી આપેલી હોય ત્યારે :-

y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક

$$b_{yx} = \frac{n\Sigma fuv - (\Sigma ufu)(\Sigma vfv)}{n\Sigma u^2 fu - (\Sigma ufu)^2} \times \frac{i_y}{i_x}$$

જ્યાં $u = \frac{x-A}{i_x}$, i_x = xની વર્ગ લંબાઈ

$v = \frac{y-B}{i_y}$, i_y = yની વર્ગ લંબાઈ

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma ufu}{n} \times i_x$$

$$\bar{y} = B + \frac{\Sigma vfu}{n} \times i_y$$

સહસંબાંધાંક કે પ્ર. વિ. આપેલ હોય ત્યારે

yનો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક

$$byx = r\ \frac{S_y}{S_x}$$

જ્યાં S_y = yનું પ્રમાણિત વિચલન

S_x = xનું પ્રમાણિત વિચલન

r = સહસંબંધાંક

$\bar{x}$ અને $\bar{y}$ બંનેની કિંમતનો પૂર્ણાંક સંખ્યામાં આવે ત્યારે

***x* નો *y* ઉપરનો નિયતસંબંધાંક**

$$bxy = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$$

અથવા

$$\frac{\sum xy}{\sum y^2}$$

$\bar{x}$ અને $\bar{y}$ બંનેની કિંમતો અપૂર્ણાંક સંખ્યામાં આવે ત્યારે

xનો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક

$$b_{xy} = = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}$$

જ્યાં $u = x - A$

જ્યાં A = ધારેલો મધ્યક

અને

$v = y - B$

જ્યાં B = ધારેલો મધ્યક

વર્ગીકૃત માહિતી આપેલી હોય ત્યારે

xનો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક

$$b_{xy} = \frac{n\Sigma fuv - (\Sigma ufu)(\Sigma vfv)}{n\Sigma v^2 fv - (\Sigma vfv)^2} \times \frac{i_x}{i_y}$$

જ્યાં $u = \frac{x-A}{i_x}$, i_x = xની વર્ગ લંબાઈ

$v = \frac{y-B}{i_y}$, i_y = yની વર્ગ લંબાઈ

સહ સબધાંક કે પ્ર. વિ. આપેલ હોય ત્યારે

***x*નું *y* ઉપરનું નિયત સંબંધાંક**

$$b_{xy} = r\,\frac{S_x}{S_y}$$

જ્યાં S_x = xનું પ્રમાણિત વિચલન

S_y = yનું પ્રમાણિત વિચલન

r = સહસબંધાંક

12.8 નિયત સંબંદાંકોના ગુણધર્મો :

yનો x ઉપરનો અને xનો y ઉપરના નિયત સબંધાંકોના ગુણધર્મો નીચે મુજબ છે.

(1) yનો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક અને xનો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંકનો ગુણાકાર સહસંબંધાંકના વર્ગ જેટલો થાય છે.

એટલે કે

$$b_{yx} \times b_{xy} = r\,\frac{S_y}{S_x} \times r.\frac{S_x}{S_y}$$

$$b_{yx} \times b_{xy} = r^2$$

(2) સહસંબંધાંક એ બે નિયત સંબંધાંકોનો ગુણોત્તર મધ્યક છે.

$r^2 = b_{yx} \times b_{xy}$ (r^2ની કિંમત 1થી વધુ ન હોઈ શકે)

બને બાજુ વર્ગમૂળ લેતા

$$r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$$

$\because$ ગુણોત્તર મધ્યક = $\sqrt{ab}$

(3) બે નિયત સંબંધાકો b_{yx} અને b_{xy} તેમજ સહસબંધાંક r એ ત્રણેના ચિહ્નો સમાન હોય છે (એટલે કે ઋણ હોય તો ઋણ અને ધન હોય તો ધન)

દા.ત. $b_{yx} = -0.5$ અને $b_{xy} = -1.5$ હોય તો rની કિંમત પણ ઋણ જ આવે.

$r^2 = b_{yx} \times b_{xy}$

$r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$

$= \sqrt{-0.5 \times -1.5}$

$= \sqrt{0.75}$ થાય પરંતુ

$r = -\ 0.866$ થાશે.

ચિહ્નો સમાન હોવાનું કારણ

$$b_{yx} = \frac{Cov(x,y)}{Sx^2}, \quad b_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{Sy^2}$$

અને $r = \dfrac{Cov(x,y)}{S_x \times S_y}$

અહીં S_x અને S_y એ પ્રમાણિત વિચલનો છે. તેથી તે હંમેશા ધન જ આવશે તેથી જે Cov (x, y) ની કિંમત ઋણ હોય તો b_{xy}; b_{yx} ના ચિહ્નો ઋણ જ આવશે અને જો ધન હોય તો ધન જ આવે.

(4) જો બે ચલો સંપૂર્ણ ઋણ સહ સંબંધક કે સંપૂર્ણ ધન સહસબંધ હોય એટલે કે બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધની કિંમત

$\pm$ 1 થતી હોય તો બંને નિયત સંબંધાંકો એકબીજાના વ્યસ્ત થાય છે.

$r = \pm 1$

$\therefore\ r^2 = 1$

$b_{yx} \times b_{xy} = 1$

$\therefore\ b_{yx} = \dfrac{1}{b_{xy}}$ અથવા $b_{xy} = \dfrac{1}{b_{yx}}$

(5) નિયત સંબંધોકોની કિંમત ઊગમબિંદુ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર છે. પરંતુ સ્કેલ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર નથી.

12.9 ઉદાહરણો :

ઉદા-1. નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી y નો x ઉપરનો નિયત સબંધાંક શોધો.

x	10	11	13	16	20
y	7	8	13	12	15

જવાબ : yનો x ઉપરનો નિયત સબંધાંક $= b_{yx}$

	x	y	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
	10	7	− 4	− 4	16	16
	11	8	− 3	− 3	9	9
	13	13	− 1	2	1	− 2
	16	12	2	1	4	2
	20	15	6	4	36	24
કુલ	70	55	–	–	66	49

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{70}{5} = 14$

મધ્યક $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{55}{5} = 11$

$\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે તેથી

$$b_{yx} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$$

$= \frac{49}{66}$

$= 0.74$

સમજૂતી :

– x અને yનો સરવાળો કરો.

– x નો સરવાળાને કુલ સંખ્યા વડે ભાગો $70 \div 5 = 14$

– x ની દરેક સંખ્યામાથી મધ્યક 14 બાદ કરી $(x-\bar{x})$ શોધો.

– y ની દરેક સંખ્યામાંથી મધ્યક 11 બાદ કરી $(y-\bar{y})$ શોધો.

– $(x-\bar{x})$ની દરેક કિંમતનો વર્ગ કરી $\Sigma(x-\bar{x})^2$ શોધો.

– $(x-\bar{x})$ અને $(y-\bar{y})$ બંને સ્તંભનો ગુણાકાર કરી $(x-\bar{x})$ $(y-\bar{y})$ શોધો.

– b_{yx}ના સૂત્રમાં y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક શોધો.

(નોંધ : અહીં બંને મધ્યકો પૂર્ણાંક સંખ્યામાં છે. તેથી ઉપર મુજબનું સૂત્રનો ઉપયોગ કરવો.

ઉદા-2 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી xનો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક શોધો.

x	9	10	12	15	19
y	12	13	18	17	20

જવાબ : xનો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક $= b_{xy}$

	x	y	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
	9	12	– 4	– 4	16	16
	10	13	– 3	– 3	9	9
	12	18	– 1	2	4	– 2
	15	17	2	1	1	2
	19	20	6	4	16	24
કુલ	65	80	–	–	46	49

$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{65}{5} = 13$

$\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{80}{5} = 16$

$\overline{x}$ અને $\overline{y}$ બંને પૂર્ણાંક સંખ્યા છે તેથી

$$b_{xy} = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\Sigma(y-\overline{y})^2}$$

$= \frac{49}{46}$

$= 1.0652$

સમજૂતી :

– x અને y નો સરવાળો કરો.

– $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ શોધો.

– xની દરેક કિંમતમાંથી $\overline{x} = 13$ બાદ કરી $(x-\overline{x})$ મેળવો.

– yની દરેક કિંમત માંથી $\overline{y} = 16$ બાદ કરી $(y-\overline{y})$ મેળવો.

– $(y-\overline{y})$ની દરેક કિંમતનો વર્ગ કરી $(y-\overline{y})^2$ મેળવો.

– $(x-\overline{x})$ અને $(y-\overline{y})$ બંને કોલમનો ગુણાકાર કરી $(x-\overline{x})$ $(y-\overline{y})$ મેળવો.

– b_{xy}નું ઉપર મુજબનું સૂત્ર મૂકી કિંમત શોધો.

ઉદા-3 એક વસ્તુની માગ અને તેના ભાવ અંગેની માહિતી નીચે મુજબ છે. તે ઉપરથી માંગનો ભાવ ઉપરનો નિયત સંબંધ સમીકરણ શોધી જ્યારે ભાવ રૂ. 80 હોય ત્યારે માંગ શોધો.

માંગ (kg)	30	37	43	50	70
ભાવ (રૂ.) માં	24	30	41	48	67

જવાબ :

ધારો કે માંગ = x, ભાવ = y

માંગ = xનું ભાવ (y) ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ શોધવાનું છે એટલે કે x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ $x = a + b_{xy.y}$

x	y	$(x-\overline{x})$	$(y-\overline{y})$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
30	24	– 16	– 18	324	288
37	30	– 9	– 12	144	108
43	41	– 3	– 1	1	3
50	48	4	6	36	24
70	67	24	25	625	600
230	210	–	–	1130	1023

$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{230}{5} = 46$

$\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{210}{5} = 42$

$\overline{x}$ અને $\overline{y}$ બંને પૂર્ણાંક સંખ્યા છે તેથી

$$b_{xy} = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\Sigma(y-\overline{y})^2}$$

$= \frac{1023}{1130}$

$= 0.91$

$a = \overline{x} - bxy\ \overline{y}$

$a = 46 - (0.91)\ (42)$

$= 46 - 38.22$

$= 7.78$

$\therefore\ x = a + b_{xy}\ y$ માં a અને b_{xy}ની કિંમત મૂક્તા

$x = 7.78 + 0.91\ y$

x = ભાવ અને y = માંગ છે અને જ્યારે (y) ભાવ = 80 હોય ત્યારે માંગ (x) શોધવાનું છે.

$\therefore\ x = 7.78 + 0.91\ (80)$

$= 7.78 + 72.8$

= 80.58 KG. માંગ હશે.

સમજૂતી :

– ઉદા-2 મુજબ b_{xy} શોધો.

– $a = \overline{x} - b_{xy}\ \overline{y}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી aની કિંમત શોધો.

– xનું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

– $x = a + b_{xy}\ y$ માં a અને b_{xy}ની કિંમતો મૂકી શોધો.

– મળેલ સમીકરણમાં $y = 80$ મૂકી x ની કિંમત શોધો.

ઉદા-4

નીચેના કોષ્ટકમાં પતિની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમર વર્ષમાં આપેલ છે તો તે ઉપરથી પત્નીનું પતિ ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવો અને પતિની ઉંમર 78 વર્ષ હોય ત્યારે પત્નીની ઊંમર શોધો.

પતિની ઊંમર	25	35	42	51	67
પત્નીની ઊંમર	22	30	39	46	63

જવાબ : ધારોકે પતિની ઊંમર = x અને પત્નીની ઊંમર = y

અહીં પત્ની (y)નું પતિ (x) ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ શોધવાનું છે એટલેકે yનું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ $Y = A + byx^x$ શોધવાનું છે.

x	y	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
25	22	− 19	− 18	361	342
35	30	− 9	− 10	81	90
42	39	− 2	− 1	4	2
51	46	7	6	49	42
67	63	23	23	529	529
220	200	−	−	1024	1005

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{220}{5} = 44$

$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{200}{5} = 40$

$\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક સંખ્યામાં છે

$\therefore b_{yx} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$

$= \frac{1005}{1024}$

$= 0.98$

$A = \bar{y} - byx\ \bar{x}$

$= 40 - (0.98)\ 44$

$= 40 - 43.12$

$= - 3.12$

પત્ની (y) નું પતિ (x) ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણમાં b_{yx} અને Aની કિંમત મુકતાં

$Y = A + b_{yx}\, x$

$Y = - 3.12 + (0.98)\, x$

પતિ (x)ની ઉંમર = 78 હોય ત્યારે પત્નીની ઊંમર (y) કેટલા ?

$x = 78$ મૂકતા

$y = - 3.12 + 0.98\ (78)$

$= - 3.12 + 76.44$

$= 73.72$

= 73 વર્ષ (લગભગ)

સમજૂતી : ઉદા.-3 મુજબ b_{yx} શોધી Aની કિંમત શોધો આ બંને કિંમતો $y = A + b_{yx}\ x$ માં મુકી $x = 78$ લઈ જવાબ શોધો.

ઉદાહરણ : 5 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી બંને નિયત સંબંધ સમીકરણો શોધો.

x	28	31	36	40	70
y	20	28	33	39	65

જવાબ : અહી નિયત સંબંધ સમીકરણો શોધો એવુ લેખેલુ છે તેથી y ની x ઉપરની અને x ની y ઉપરની એમ બંને સમીકરણો શોધીશું.

x	y	$(x-\overline{x})$	$(y-\overline{y})$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
28	20	– 13	– 17	169	289	221
31	28	– 10	– 13	100	169	130
36	33	– 5	– 8	25	64	40
40	39	– 1	– 2	1	4	2
70	65	29	24	841	576	696
205	185	–	–	1136	1102	1089

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{205}{5} = 41$$

$$\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{185}{5} = 37$$

y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$Y = A + b_{yx} \quad x$

$$b_{yx} = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\Sigma(x-\overline{x})^2}$$

$$= \frac{1089}{1136} = 0.96$$

$A = \overline{y} - b_{yx} \ \overline{x}$

$= 37 - (0.96)\ 41$

$= 37 - 39.36$

$A = - 2.36$

હવે b_{yx} અને Aની શોધેલી કિંમત નીચેના સૂત્રમાં મૂકતા

$Y = A + b_{yx} \quad x$

$\therefore\ Y = - 2.36 + 0.96\overline{x}$

જે yનું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે.

xનું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$x = a + b_{xy}\ y$

$$bxy = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\Sigma(y-\overline{y})^2}$$

$$= \frac{1089}{1102} = 0.99$$

$a = \overline{x} - bxy\ \overline{y}$

$= 41 - (0.99)\ 37$

$= 41 - 36.63$

$= 4.37$

હવે b_{xy} અને aની કિંમત નીચેના સૂત્રમાં મૂકતા

$\therefore x = a + b_{xy}\ y$

$= 4.37 + 0.99\ y$

જે xનું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ : 6 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી yનો x ઉપરનો નિયત સબંધાંક શોધો.

x	12	11	14	16	20
y	8	8	13	12	15

જવાબ :

x	y	$u = x - A$	$v = Y - B$	u^2	uv
12	8	− 3	− 3	9	9
11	8	− 4	− 3	16	12
14	13	− 1	2	1	− 2
16	12	1	1	1	1
20	15	5	4	25	20
73	56	− 2	1	52	40

$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{73}{5} = 14.6 \qquad \therefore\ A = 15$

$\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{56}{5} = 11.2 \qquad \therefore\ B = 11$

અહીં $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ અપૂર્ણાંક સંખ્યામાં છે. તેથી yનો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક

$$b_{yx} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2}$$

$$= \frac{5(40) - (-2)(1)}{5(52) - (-2)^2}$$

$$= \frac{200 + 2}{260 - 4}$$

$$= \frac{202}{256}$$

$$= 0.79$$

સમજૂતી :

- x અને y નો સરવાળો કરો.
- $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ (બંને મધ્યકો) શોધો.
- મધ્યકો અપૂર્ણાંકમાં આવતા હોય તો u અને v વાળુ b_{yx}નું સૂત્રને ધ્યાનમાં લો.
- $\overline{x}$ની કિંમત 14.6 છે. તેથી તેની લગભગ કિંમત 15 છે તેને ધારેલો મધ્યક A લગભગ કિંમત કહો.
- $\overline{y}$ની કિંમત 11.2 છે તેથી લગભગ કિંમત 11 છે તે ધારેલો મધ્યક B કહો.
- xના દરેક પ્રાપ્તાંકોમાંથી A = 15 બાદ કરી u શોધો.
- yના દરેક પ્રાપ્તાંકોમાંથી B = 11 બાદ કરી v શોધો.
- uના દરેક પ્રાપ્તાંકોનો વર્ગ કરી u^2 મેળવો.
- u અને vના દરેક પ્રાપ્તાંકોનો ગુણાકાર કરી uv મેળવો.
- uના સરવાળાનો Σu, vના સરવાળાને Σv
- u^2ના સરવાળાને Σv^2, uv ના સરવાળાને Σuv અને $n = 5$ (પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા) લો. સૂત્રનો ઉપયોગ કરી b_{yx} શોધો.

ઉદાહરણ : 7 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી xનો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક શોધો.

x	11	10	13	15	20
y	10	13	16	17	19

જવાબ :

x	y	$u = x - A$	$v = y - B$	v^2	uv
11	10	– 3	– 5	25	15
10	13	– 4	– 2	4	8
13	16	– 1	1	1	– 1
15	17	1	2	4	2
20	19	6	4	16	24
69	75	– 1	0	50	48

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{69}{5} = 13.8 \qquad \therefore \ A = 14$$

$$\overline{y} = \frac{75}{5} = 15 \qquad \therefore \ B = 15$$

અહીં x અપૂર્ણાંક અને $\overline{y}$ પૂર્ણાંક છે તેથી x નો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક

$$b_{xy} = \frac{n\Sigma uv - \Sigma u.\Sigma v}{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}$$

$$= \frac{5(48) - (-1)(0)}{5(50) - (0)^2}$$

$$= \frac{240+1}{250}$$

$$= \frac{241}{250}$$

b_{xy} = 0.964

સમજૂતી :

– x અને yનો સરવાળો કરો.

– $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ (બંને મધ્યકો) શોધો.

– $\bar{x}$ અપૂર્ણાંક મળે છે તેને લગભગ કિંમત 14 મળે છે. તેને ધારેલો મધ્યક A = 14 જ્યારે $\bar{y}$ પૂર્ણાંક મળે છે તેથી એજ કિંમતને ધારેલો મધ્યક B તરીકે લઈશું. (B = 15)

– x ના દરેક પ્રાપ્તોકોમાંથી A = 14 બાદ કરી u મેળવો.

– y ના દરેક પ્રાપ્તોકોમાંથી B = 15 બાદ કરી v મેળવો.

– v ના દરેક પ્રાપ્તોકોનો વર્ગ કરી v^2 મેળવો.

– u અને vનો ગુણાકાર કરી uv મેળવો.

– uના સરવાળાને Σu, vના સરવાળાને Σv, v^2ના સારવાળાને Σv^2 અને uvના સરવાળાને Σuv n = 5 લઈ સૂત્રમાં મૂકી b_{xy} શોધો.

ઉદાહરણ : 8 નીચેના કોષ્ટકમાં પતિની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમર આપેલ છે તો તે ઉપરથી નિયત સંબંધ સમીકરણો મેળવો અને જ્યારે પતિની ઉંમર 90 હોય ત્યારે પત્નીની ઊંમર અને પત્નીની ઉમર 82 હોય ત્યારે પતિની ઉંમર શોધો.

પતિની ઉંમર	46	51	56	58	73	76	81	82
પત્નીની ઉંમર	41	42	52	55	69	72	78	80

જવાબ : ધારો કે પતિની ઉંમર = x અને પત્નીની ઊંમર = y

x	y	$u = x - A$	$v = Y - B$	u^2	v^2	uv
46	41	− 19	− 20	361	400	380
51	42	− 14	− 19	196	361	266
56	52	− 9	− 9	81	81	81
58	55	− 7	− 6	49	36	42
73	69	8	8	64	64	64
76	72	11	11	121	121	121
81	78	16	17	256	289	272
82	80	17	19	289	361	323
523	489	3	1	1417	1713	1549

$n = 8$

$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{523}{8} = 65.375$ $\therefore$ A = 65

$\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{489}{8} = 61.125$ $\therefore$ B = 61

yનું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$y = A + b_{yx} \quad x$

$$b_{yx} = \frac{n\Sigma uv - \Sigma u.\Sigma v}{n\Sigma v^2 - (\Sigma u)^2}$$

$$= \frac{8(1549) - (3)(1)}{8(1417) - (3)^2}$$

$$= \frac{12,392 - 3}{11,336 - 9}$$

$$= \frac{12389}{11327}$$

$= 1.09$

$A = \overline{y} - b_{yx} \ \overline{x}$

$= 61.125 - (1.09)\ 65.375$

$= 61.125 - 71.259$

$= -\ 10.134$

હવે b_{yx} અને Aની કિંમત નીચેના સૂત્રમાં મુક્તા

$Y = A + b_{yx}\ x$

$= -\ 10.134 + 1.09\ x$

જે y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે એટલે કે પત્નીનું પતિ ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે.

પતિની ઉંમર $x = 90$ મૂક્તા પત્ની ઉંમર

$Y = -\ 10.134 + 1.09\ (90)$

$= -\ 10.134 + 98.1$

$= 87.97$

$\approx$ 88 વર્ષ (લગભગ)

xનું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$x = a + b_{xy} \quad y$

$$= \frac{n\Sigma uv - \Sigma u.\Sigma v}{n\Sigma v^2 - \Sigma(v)^2}$$

$$=\frac{8(1549)-(3)(1)}{8(1713)-(1)^2}$$

$$=\frac{12392-3}{13704-1}$$

$$=\frac{12389}{13703}$$

$= 0.90$

$a \quad = x^2 - \bar{x} - bxy\,\bar{y}$

$= 65.375 - (0.9)\ (61.125)$

$= 65.375 - 55.013$

$= 10.362$

bxy અને aની કિંમત નીચેના સમીકરણમાં મૂકતા

$x \quad = a + b_{xy} \quad y$

$= 10.362 + 0.9\ y$

જે x (પતિ) ઉંમરનું y (પત્ની) ઉંમરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે.

પત્ની (y) ની ઉંમર 82 મૂક્તા પતિની ઉંમર

$x \quad = 10.362 + 0.9\ (82)$

$= 10.362 + 73.8 = 84.162$

= 84 વર્ષ (લગભ)

ઉદાહરણ : 9 એક પરીક્ષાના પરિણામ ઉપરથી નીચેની માહિતી મળે છે.

	અર્થશાસ્ત્રના ગુણ	**આંકડાશાસ્ત્રના ગુણ**
સરેરાશ	38	47
પ્રમાણિત વિચલન	10.6	16.6

x અને y વચ્ચેનો સહસબંધાંક = 0.41 નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો મેળવો.

જવાબ : ધારો કે

અર્થશાસ્ત્રના ગુણ = x

આંકડાશાસ્ત્ર ગુણ = y

$\therefore\ \bar{x} = 38,\ \bar{y} = 47,\ r = 0.41$ xનું. પ્ર.વિ. $S_x = 10.6$ yનું પ્ર.વિ. $S_y = 16.6$

yની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$y \quad = \quad A + b_{yx} \quad x$

$$\text{byx} \quad = \quad r\,\frac{S_y}{S_x} = (0.41)\ \frac{16.6}{10.6}$$

$$= \frac{6.806}{10.6}$$

$$= 0.64$$

$A = \bar{y} - b_{yx}\ \bar{x}$

$= 47 - (0.64)\ 38$

$= 47 - 24.32$

$= 22.68$

$\therefore\ b_{yx}$ અને Aની કિંમત સમીકરણમાં મૂક્તા

$y = 22.68 + (0.64)\ x$

જે yની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ છે.

xની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$x = a + b_{xy}\ y$

$$bxy = r\ \frac{S_x}{S_y} = 0.41 \times \frac{10.6}{16.6}$$

$$= \frac{4.35}{16.6}$$

$= 0.26$

$a = \bar{x} - b_{xy}\ \bar{y}$

$= 38 - (0.26)\ 47$

$= 38 - 12.22$

$= 25.78$

b_{xy} અને aની કિંમત સમીકરણમાં મુકતા

$x = 25.78 + 0.26\ y$

જે xની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ : 10 બે સંબંધિત x અને y માટે મળેલા પરિણામો નીચે મુજબ છે તેના ઉપરથી xની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

$n = 10\ \Sigma x = 225\ \Sigma y = 120$

$\Sigma y^2 = 2202\ \Sigma_{xy} = 3462$

જવાબ : xની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$x = a + b_{xy}\ y$

$$\therefore\ bxy = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}$$

$$= \frac{10\,(3462) - (225)\,(120)}{10(2202)\ - (120)^2}$$

$$= \frac{34,620 - 27,000}{22,020 - 14,400}$$

$$= \frac{7,620}{7,620}$$

$= 1$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = 22.5$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = = \frac{120}{10} = 12$$

$a = \bar{x} - bxy \;\; \bar{y}$

$= 22.5 - 1\ (12)$

$a = 10.5$

xની y પરની નિયત સંબંધ રેખા

$\therefore\ y = 10.5 + x$

ઉદાહરણ : 11 નીચે આપેલ બે સંબંધિત શ્રેણીના નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો ઉપરથી $\bar{x}$, $\bar{y}$ અને r શોધો.

$2x - sy + 80 = 0$

$10x - 9y + 80 = 0$

જવાબ :

$2x - 5y = -80$ ..... (I)

$10x - 9y = -80$ ..... (II)

આમ (1) ને 5 વડે ગુણાતા

$10x - 25y = -400$

$10x - 9y = -80$

$-\quad +\qquad +$

$-16y = -320$

$$y = \frac{320}{16} = 20$$

$\therefore\ \bar{y} = 20$

$\bar{y} = 20$ સમી (I) મા મૂકતા

$2x - 5(20) + 80 = 0$

$2x - 100 + 80 = 0$

$2x - 20 = 0$

$2x = 20$

$$x = \frac{20}{2} = 10$$

$\therefore\ \bar{x} = 10$

$r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$

y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા

$2x - 5y + 80 = 0$

$2x + 80 = 5y$

$$y = \frac{2x}{5} + \frac{80}{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ y &= 16 + \frac{2}{5}x \\ y &= A + b_{yx}.x \end{aligned}\right\}$$ ⇒ સરખાવતા b_{yx} મા મળશે.

$$\therefore\ b_{yx} = \frac{2}{5}$$

x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા

$10x - 9y + 80 = 0$

$$\left.\begin{aligned} 10x &= -80 + 9y \\ x &= \frac{-80}{10} + \frac{9}{10}y \end{aligned}\right\}$$

$x = a + bxy\ y$ ⇒ સરખાવતા b_{xy} મળશે.

$$\therefore\ b_{xy} = \frac{9}{10}$$

$$\therefore\ r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$$

$$r = \sqrt{\frac{2}{5} \times \frac{9}{10}}$$

$$r = \sqrt{\frac{18}{50}}$$

$= \sqrt{0.36}$

$= 0.6$

ઉદાહરણ : 12 $b_{yx} = -0.5$, $Sx^2 = 12$, $r^2 = 0.75$ હોય તો S_y^2 અને b_{xy} શોધો.

$$b_{yx} = r\ \frac{S_y}{S_x}$$

Sy^2 શોધવાનું છે તેથી બંને બાજુ વર્ગ કરતાં

$$\left(b_{yx}\right)^2 = r^2 \frac{S_y^2}{S_x^2}$$

$$(-0.5)^2 = \frac{(0.75)}{12} S_y^2$$

$$-0.25 = \frac{0.75}{12} S_y^2 = \frac{-0.25 \times 12}{0.75} = S_y^2$$

$$\frac{3}{0.75} = S_y^2$$

$$\therefore 4 = S_y^2$$

$$\left(b_{yx}\right)^2 = r^2 \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

$$\left(b_{xy}\right)^2 = (0.75) \frac{12}{4}$$

$$\left(b_{xy}\right)^2 = (0.75) \times 3$$

$$\left(b_{xy}\right)^2 = 2.25$$

બંને બાજુ વર્ગમૂળ કરતા

$$b_{xy} = \sqrt{2.25}$$

$= 1.5$

ઉદાહરણ : 13 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી yની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

$\overline{x} = 21$, $\overline{y} = 26$, $S_x = 4$, $S_y = 12$ $Cov(x, y) = 43.6$

જવાબ : yની x પરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$Y = A + b_{yx}\ x$

$$b_{yx} = \frac{Cov(x,y)}{Sx^2}$$

$$= \frac{43.6}{(4)^2}$$

$$= \frac{43.6}{16}$$

2.725

$a = \bar{y} - b_{yx}\ \bar{x}$

$= 26 - (2.725)\ (21)$

$= 26 - 57.225$

$= -31.23$

yનું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$y = a + b_{yx}\ x$

$y = -31.23 + 2.725\ x$

ઉદાહરણ : 14 x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા ઉપર બિંદુઓ (21, 5) અને (22, 10) આપેલાં છે તો તે રેખાનું સમીકરણ મેળવી $y = 15$ હોય ત્યારે xની કિંમતનું અનુમાન મેળવો.

જવાબ : xની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા

$x = a + b_{xy}\ y$ અને તેની ઉપરના

$\therefore$ બિંદુઓ $\begin{matrix} x & y \\ 21, & 5 \end{matrix}$ અને $\begin{matrix} x & y \\ 22, & 10 \end{matrix}$ છે તે મૂક્તા

$21 = a + b_{xy}\ (5)$ .... (1)

$22 = a + b_{xy}\ (10)$ .... (2)

બંને સમીકરણોને ઉકેલતા

$a + 5b_{xy} = 21$ .... (I)

$\underset{-}{a} + \underset{-}{10}_{bxy} = 22$ .... (II)

$-5\ b_{xy} = -1$

$\therefore\ b_{xy} = \frac{1}{5} = 0.2$

સમીકરણ (1) મા $b_{xy} = 0.2$ મૂકતા

$a + 5\ (0.2) = 21$

$a = 21 - 1$

$= 20$

$\therefore$ x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$x = a + \text{b}xy\ y$

$x = 20 + 0.2y$

$y = 15$ મુકતા

$x = 20 + 0.2\ (15)$

$= 20 + 3$

$= 23$

ઉદાહરણ : 15 દ્વિ-ચલ કોષ્ટકનો દાખલો :

નીચે આપેલા દ્વિ-ચલ કોષ્ટક ઉપરતી નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો શોધો.

$x \rightarrow$ / $y \downarrow$	10-15	15-20	20-25
14-18	11	16	–
18-22	8	12	5
22-26	–	–	8

જવાબ :

x / y	10-15	15-20	20-25	કુલ fv	મ. કિં y	$v = \frac{Y-B}{i_y}$	$v\ f\ v$	v^2fv	fuv
14-18	(11) 11	(0) 16	–	27	16	– 1	– 27	27	11
18-20	(0) 8	(0) 12	(0) 5	25	20	0	0	0	0
22-26	–	–	(8) 8	8	24	1	8	8	8
કુલ= fu	19	28	13	$60 = n$	–	–	– 19	35	19
મા.કિ. x	12.5	17.5	22.5	–	–				
$u = \frac{x-A}{i_x}$	– 1	0	1	–	–				
ufu	– 19	0	13	– 6	–				
u^2fu	19	0	13	32	–				
fuv	11	0	8	19	–				

ધારો કે A = 17.5 B = 20 (ધારેલા મધ્યકો છે)

$i_x = 5$ અને $i_y = 4$

$$\overline{x} = A + \frac{\Sigma_u f_u}{n} \times i_x$$

$$= 17.5 + \frac{(-6)}{60} \times 5$$

$$= 17.5 - 0.5$$

$$= 17$$

$\overline{y} = B + \frac{\Sigma_v f_v}{n} \times i_y$

$= 20 + \frac{(-19)}{60} \times 4$

$= 20 - \frac{76}{60}$

$= 20 - 1.27$

$= 18.73$

yની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$y = A + b_{yx} \quad x$

$$b_{yx} = \frac{n(\Sigma fuv) - (\Sigma ufu)(\Sigma vfv)}{n\left(\Sigma u^2 fu\right) - (\Sigma ufu)^2} \times \frac{i_y}{i_x}$$

$$= \frac{60(19) - (-6)(-19)}{60(32) - (-6)^2} \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{1140 - 114}{1920 - 36} \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{1026 \times 4}{1884 \times 5}$$

$$= \frac{4104}{9420}$$

$b_{yx} = 0.44$

$A = \overline{y} - b_{yx} \quad \overline{x}$

$= 18.73 - (0.44)\ 17$

$= 18.73 - 7.48$

$= 11.25$

$\therefore\ y = 11.25 + 0.44 \quad x$ જે yનું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે.

xની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$x = a + bxy \quad y$

$$b_{xy} = \frac{n(\Sigma fuv) - (\Sigma ufu)(\Sigma vfv)}{n\left(\Sigma v^2 fv\right) - (\Sigma vfv)^2} \times \frac{i_x}{i_y}$$

$$=\frac{60(19)-(-6)(-19)}{60(35)-(-19)^2}\times\frac{5}{4}$$

$$=\frac{1140-114}{2100-361}\times\frac{5}{4}$$

$$=\frac{1026\times5}{1739\times4}$$

$$=\frac{5130}{6956}$$

b_{xy} = 0.74

a = $\bar{x}$ − b_{xy} $\bar{y}$

= 17 − (0.74) (18.73)

= 17 − 13.86

a = 3.14

x = 3.14 + 0.74 y

જે xનું y ઉપરનું નિયતસંબંધ રેખાનું સમીકરણ છે.

સમજૂતી : અહીં

$x \rightarrow$ (સ્તંભ)

$\downarrow$

y આપેલ છે.

(હાર)

- ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ $x \rightarrow$ (સ્તંભ) અને $y \downarrow$ (હાર) આપેલા હોય ત્યારે દરેક સ્તંભનો સરવાળો કરો અને તેને fu વડે દર્શાવઓ અને દરેક હારનો સરવાળો કરો અને તેને fv વડે દર્શાવો.
- બંને ઊભા અને આડા સરવાળાનો સરવાળો કરો અને તે n વડે દર્શાવો (n = 60)
- xની મધ્યક્તિ શોધો તેને x વડે દર્શાવો.

$$\left(\frac{10+15}{2}=\frac{25}{2}=12.5,\frac{15+20}{2}=17.5,\frac{20+25}{2}=22.5\right)$$

- yની મધ્ય કિંમત શોધો તેને y વડે દર્શાવો.

$$\left(\frac{14+18}{2}=16=\frac{18+22}{2}=20,\frac{22+26}{2}=24\right)$$

- મ. કિ. xની વચ્ચેની કિંમત ને ધારેલો મધ્યક A કહો. (A = 17.5)
- મ. કિ. yની વચ્ચેની કિંમતને ધારેલો મધ્યક B કહો. (B = 20)
- u = $\frac{x-A}{i_x}$ સૂત્ર લઈને u શોધો.

xની દરેક કિંમત માંથી ધારેલો મધ્યક 17.5 બાદ કરી xની વર્ગ લંબાઈ $i_x = 5$ (15 − 10 = 5, 20 – 15 = 5, 25 − 20 = 5) વડે ભાગો.

$v = \frac{y - B}{i_y}$ સૂત્ર લઈને v શોધો.

yની દરેક કિંતમાંથી ધારેલો મધ્યક 20 બાદ કરી yની વર્ગ લંબાઈ $i_y = 4$ (18 − 14 = 4, 22 − 18 = 4, 26 − 22 = 4) વડે ભાગો.

- u અને fu બંને હારના દરેક ઘટકોનો ગુણાકાર કરી ufu મેળવો.
- v અને fv બંને સ્તંભના દરેક ઘટકોનો ગુણાકાર કરી vfv મેળવો.
- u અને ufv બંને હારના દરેક ઘટકોનો ગુણાકાર કરી u^2fu મળવો.
- v અને vfv બંને સ્તંભના દરેક ઘટકોનો ગુણાકાર કરી v^2fv મેળવો.
- (આપેલ આવૃત્તિ) f, (આવૃત્તિની સામે નીચેની બાજુ ↓) u અને આવૃત્તિની સામે સીધી બાજુ →) v એમ ત્રણેનો ગુણાકાર કરી fuv મેળવી જેને આવૃત્તિની ડાબી બાજુ વર્તુળમાં લખો.

  $f \quad x \quad u \quad x \quad v \quad = \quad fuv$

  $11 \quad x \quad -1 \quad x \quad -1 \quad = \quad (11)$ તેવી જ રીતે અન્ય

નોંધ :- u અને vની કિંમતોમાં o આવતુ હોય ત્યાં હાર અને સ્તંભમાં fuvની કિંમત o જ આવશે તેથી સૌ પ્રથમ $u = 0$ હોય ત્યાં ઊભા સ્તંભમાં તમામ આવૃત્તિની બાજુમાં 0 વર્તુળમાં શૂન્ય લખો તેવી જ રીતે $v = 0$ હોય ત્યાં આડી હારમાં તમામ આવૃત્તિની બાજુમાં 0 વર્તુળમાં શૂન્ય લખો. ત્યારબાદ બાકીની આવૃત્તિની કિંમત માટે (fuv) શોધો.

- કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા મુજબ ufu, u^2fu, fuv ત્રણેનો આડી હારમાં સરવાળો કરી Σufu, Σu^2fu અને Σfuv મેળવો.

  $\Sigma ufu = -6$, $\Sigma u^2fu = 32$, $\Sigma fuv = 19$

  તેવી જ રીતે vfv, v^2v, fuv ત્રણેનો ઊભા સ્તંભમાં સરવાળો કરી Σvfv, Σv^2fv અને Σfuv શોધો.

  $\Sigma vfv = -19$ $\Sigma v^2fv = 35$, $\Sigma fuv = 19$

- દાખલામાં બતાવ્યા મુજબ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ની કિંમત શોધો.

  $\bar{x} = 17$, $\bar{y} = 18, 73$

- yની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

  $Y = A + b_{yx}\ x$ લો. તેમાંથી b_{yx} અને Aની કિંમત દાખલામાં બતાવ્યા મુજબ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શોધો.

  ($b_{yx} = 0.44$, A = 11.25) આ બંને કિંમતો ઉપરના સમીકરણમાં મુકી yનું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવો.

  $y = 11.25 + 0.44\ y$

- તેવી જ રીતે xને બદલે y અને yને બદલે x મુકી xનું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ લો.

  $x = a + b_{xy}\ x$

હવે b_{xy} અને aની કિંમત શોધો.

$(b_{xy} = 0.74,\ a = 3.14)$

xનું y ઉપરનું સંબંધ સમીકરણ મેળવો.

$x = 3.14 + 0.74\ \ y$

ખાસ નોંધ : જો દાખલામાં

x ↓ (હાર)	y →	સ્તંભ	આપેલ હોય.

íkku[÷ x માટેની ગણતરીનું કોષ્ટક ઊલટી રીતે ગણાશે. એટલે કે x માટે → fu, x, u, ufu, u^2fu, fuv શોધાશે. જ્યારે ચલ y માટેની ગણતરી.

y માટે
↓
fv
y
v
vfv
v^2fv
fuv

જે નીચેના ઉદાહરણ ઉપરથી સમજી શકાશે.

ઉદાહરણ : 16 નીચે આપેલી દ્વિ-ચલ કોષ્ટકની મદદથી yનું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવો અને $x = 60$ હોય ત્યારે yની કિંમતનું આગલાન કરો.

	y			
x	25	30	35	40
15-25	8	3	–	–
25-35	2	5	2	2
35-45	–	2	9	6
45-55	–	–	5	6

x \ $y \rightarrow$ ↓	25	30	35	40	કુલ fu	મ.કિં. x	$u = \frac{x-A}{i_x}$	ufu	u^2fu	fuv
15-25	(16) 8	(3)	–	–	11	20	– 1	– 11	11	19
25-35	(0) 2	(0) 5	(0) 2	(0) 2	11	30	0	0	0	0
35-45	–	–(2) 2	(0) 9	(6) 6	17	40	1	17	17	4
45-55	–	–	(0) 5	(12) 6	11	45	2	22	44	12
કુલ fv	10	10	16	14	50 = n	–	–	28	72	35
મ.કિં. y	25	30	35	40						
$v = \frac{y-B}{i_y}$	– 2	– 1	0	1	–					
vfv	– 20	– 10	0	14	– 16					
v^2fv	40	10	0	14	64					
fuv	16	1	0	18	35					

A = 30, i_x = 10 (સમજૂતી 20, 30, 40, 50...... અંતર = 10)

B = 35 i_y = 5 (25, 30, 35, 40.....) અંતર = 5

n = 50

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma ufu}{n} \times i_x$$

$$= 30 + \frac{28}{50} \times 10$$

$$= 30 + 5.6$$

$$= 35.6$$

$$\bar{y} = B + \frac{\Sigma vfv}{n} \times i_y$$

$$= 35 + \frac{-16}{50} \times 5$$

$$= 35 - 1.6$$

$$= 33.4$$

yનું x ઉપરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$$y = A + b_{yx}\, x$$

$$b_{yx} = \frac{n(\Sigma fuv) - (\Sigma ufu)(\Sigma vfv)}{n\Sigma u^2 fu - (\Sigma ufu)^2} \times \frac{i_y}{i_x}$$

$$=\frac{50(35)-(28)(-16)}{50(72)-(28)^2}\times\frac{5}{10}$$

$$=\frac{1750+448}{3600-784}\times\frac{5}{10}$$

$$=\frac{2198\times5}{2816\times10}$$

$$=\frac{10990}{28160}$$

$= 0.39$

A $= \bar{y} - byx\ \bar{x}$

$= 33.4 - 0.39\ (35.6)$

$= 33.4 - 13.88$

$= 19.52$

$\therefore y = 19.52 + 0.39\ x$ જે y નું x ઉપરનું નિયત સમીકરણ $x = 60$ મુક્ત

$y = 19.52 + 0.39\ (60)$

$y = 19.52 + 23.4$

$= 42.92$

ઉદાહરણ : 17 એક દ્વિ.ચલ કોષ્ટકમાં $b_{yx} = 2.61$, $b_{xy} = 0.29$ A = 0.4 અને $a = 5.62$ પરિણામો મળે છે. તો તે ઉપરથી સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

જવાબ :

સહસંબંધાંક r $= \sqrt{byx\times bxy}$

$=\sqrt{2.61\times0.29}$

$=\sqrt{0.7569}$

$= 0.87$

ઉદાહરણ : 18 એક દ્વિચલ કોષ્ટકમાં $r = 0.76$ અને $b_{yx} = 0.76$ હોય તો $b_{xy} = ?$

જવાબ : $r = \sqrt{byx\times bxy}$

$0.76 = \sqrt{0.76\times bxy}$

બંને બાજુ વર્ગ લેતા

$(0.76)^2 = 0.76 \times b_{xy}$

$$\frac{0.76\times0.76}{0.76} = b_{xy}$$

$\therefore\ b_{xy} = 0.76$

ઉદાહરણ : 19 બે સંબંધિત ચલ x અને y માટે નીચેના પરિણામો મળ્યા હતા.

$n = 20$, $\Sigma x = 100$, $\Sigma y = 80$, $\Sigma x^2 = 600$, $5y^2 = 550$, $\Sigma_{xy} = 500$ પાછળથી એવું જાણવા મળ્યું કે માહિતીમાં બે જોડકાં (6, 8) અને (8, 12) ને બદલે (8, 6) અને (6, 14) લેવાય ગયા છે. તો બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સાચા સમીકરણો મેળવો અને સહસંબંધાંક પણ શોધો.

જવાબ : અહી માહિતીમાં ભૂલ છે તેથી બે જોડકા (6, 8) અને (8, 12) ને બદલે (8, 6) અને (6, 14) લેવાય ગયા છે. તેથી

સાચા જોડકા ઉમેરાશે જે $\begin{matrix} x & y \\ 6, & 8 \end{matrix}$ અને $\begin{matrix} x & y \\ 8, & 12 \end{matrix}$ છે.

ખોટા જોડકા બાદ થશે જે $\begin{matrix} x & y \\ 8, & 6 \end{matrix}$ અને $\begin{matrix} x & y \\ 6, & 14 \end{matrix}$ છે.

તેથી દાખલામાં આપેલ તમામ પરિણામો સુધારી સાચા પરિણામો મેળવીશું.

સુધારેલો Σx = ખોટો $\Sigma x + x$ ની સાચી કિંમત $-$ xની ખોટી કિંમત

$= 100 + \begin{matrix} x & + & x \\ 6 & + & 8 \end{matrix} - \begin{matrix} x & & x \\ 8 & + & 6 \end{matrix}$

$= 100 + 14 - 14$

$= 100$

સુધારેલો Σy = ખોટો $\Sigma y + y$ ની સાચી કિંમત $-$ yની ખોટી કિંમત

$= 80 + (8 + 12) - (6 + 14)$

$= 80 + 20 - 20$

$= 80$

સુધારેલો Σx^2 = ખોટો $\Sigma x^2 + x^2$ની સાચી કિંમત $-$ x^2ની ખોટી કિંમત

$= 600 + \left(6^2 + 8^2\right) - \left(8^2 + 6^2\right)$

$= 600 + (36 + 64) - (64 + 36)$

$= 600 + 100 - 100$

$= 600$

સુધારેલો Σy^2 = ખોટો $\Sigma y^2 + y^2$ની સાચી કિંમત $-$ y^2ની ખોટી કિંમત

$= 550 + \left(8^2 + 12^2\right) - \left(6^2 + 14^2\right)$

$= 550 + (64 + 144) - (36 + 196)$

$= 550 + 208 - 232$

$= 526$

સુધારેલો Σxy = ખોટો Σxy + ખોટો Σxyની સાચી કિંમત $-$ xyની ખોટી કિંમત

$= 500 + [(6 \times 8) - [(8 \times 12)] - [(8 \times 6)\ (8 \times 14)]$

$= 500 + [48 + 96] - [48 + 84]$

$= 500 + 144 - 132$

$= 512$

yનું x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$Y = A + b_{yx}\, x$

$$\therefore \text{byx} = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{20(512) - (100)(80)}{20(600) - (100)^2}$$

$$= \frac{10,240 - 8,000}{12,000 - 10,000}$$

$$= \frac{2240}{2000}$$

$b_{yx} = 1.12$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{100}{20} = 5$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{80}{20} = 4$$

$A = \bar{y} - b_{yx}\, \bar{x}$

$= 4 - (1.12)\ (4)$

$= 4 - 4.48$

$= - 0.48$

$y = - 0.48 + 1.12\, x$ જે y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે.

xનું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$x = a + bxy\ .\ y$

$$\text{bxy} = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma y)^2}$$

$$= \frac{20(512) - (100)(80)}{20(526) - (80)^2}$$

$$= \frac{10,240 - 8,000}{10,520 - 6,400}$$

$$= \frac{2240}{4120}$$

$bxy = 0.54$

$a = \bar{x} - b_{xy}\ \bar{y}$

$= 5 - (0.54)\ 4$

$= 5 - 2.16$

$= 2.84$

$\therefore x = 2.84 + 0.54\ y$ જે x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ છે.

સહસંબંધાંક r $= \sqrt{byx \times bxy}$

$= \sqrt{1.12 \times 0.54}$

$= \sqrt{0.6048}$

$= 0.78$

ઉદાહરણ : 20 એક દ્વિ-ચલ નિદર્શ માટે નીચેની માહિતી મળેલ છે તે ઉપરથી નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો શોધો.

$n = 10$ xનો ધારેલો મધ્યક = 40

y નો ધારેલો મધ્યક = 30

x ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોનો સરવાળો = – 168

y ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોનો સરવાળો = – 19

x ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલ વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો = 8200

y ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો = 2300

x અને yના ધારેલા મધ્યકમાથી લીધેલાં વિચલનોના ગુણાકારોનો સરવાળો = 3420

જવાબ :

$n = 10$, A = 40, B = 30, $\Sigma u = \Sigma(x - A) = -168$ $\Sigma v = \Sigma(y - B) = -19$, $\Sigma u^2 = \Sigma (x - A)^2 = 8200$, $\Sigma v^2 = \Sigma(y - B)^2 = 2300$, $\Sigma uv = \Sigma(x - A)(y - B) = 3420$

yનું x ઉપરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$y = A + b_{yx}\ x$

$$byx = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2}$$

$$= \frac{10(3420) - (-168)(-19)}{10(8200) - (-168)^2}$$

$$= \frac{34,200 - 3,192}{82000 - 28,224}$$

$$= \frac{31,008}{53,776}$$

$= 0.58$

$$\overline{x} = A + \frac{\Sigma u}{n}$$

$$= 40 + \frac{-168}{10}$$

$= 40 - 16.8$

$= 23.2$

$$\overline{y} = B + \frac{\Sigma v}{n}$$

$$= 30 + \frac{-19}{10}$$

$= 30 - 1.9$

$= 28.1$

$A = \overline{y} - b_{yx} \overline{x}$

$= 28.1 - (0.58)\ 23.2$

$28.1 - 13.456$

$= 14.644$

$y = 14.644 + (0.58)x$

જે y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે.

x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$x = a + b_{xy} y$

$$b_{xy} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2}$$

$$= \frac{10(3420) - (-168)(-19)}{10(2300) - (-19)^2}$$

$$= \frac{34,200 - 3,192}{23,000 - 361}$$

$$= \frac{31,008}{22,639} = 1.37$$

$a = \overline{x} - b_{xy} \ \overline{y}$

$= 23.2 - (1.37)\ (28.1)$

$= 23.2 - 38.497$

$= - 15.297$

$x = - 15.297 + 1.37$ y જે xનું y ઉપરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ : 21 જો $b_{yx} = - 0.375$ અને $S_y : S_x = 1:2$ હોય તો r અને b_{xy} શોધો.

જવાબ :

$$b_{yx} = r \frac{S_y}{S_x}$$

$$- 0.375 = r \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$r = (- 0.375) \times 2$$

$$= - 0.75$$

$$bxy = r \frac{S_x}{S_y}$$

$$= (-0.75) \frac{2}{1}$$

$$= - 1.5$$

12.10 સ્વાધ્યાય

* **પ્રશ્નોના જવાબ લખો.**

1. નિયત સંબંધ એટલે શું ?
2. નિયત સંબંધ રેખા કેટલી હોય છે કઈ કઈ ?
3. નિયત સંબંધાંક એટલે શું ?
4. નિયત સંબંધ સમીકરણો કયાં કયા છે તે લખો.
5. નિયત સંબંધની મર્યાદાઓ લખો.
6. નિયત સંબંધ રેખાના ગુણધર્મો લખો.
7. નિયત સંબંધાંકોના પ્રકાર લખો.
8. નિયત સંબંધાંકોના સૂત્રો લખો.
9. yની x ઉપરની રેખાનું નિયત સંબંધ સમીકરણ લખી b_{yx} અને A નું સૂત્ર લખો.
10. x ની y ઉપરની રેખાનું નિયત સંબંધ સમીકરણ લખી b_{xy} અને a નુ સૂત્ર લખો.

(B) નીચે આપેલા દાખલાઓ ગણો.

(1) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંકો શોધો.

x	13	12	15	17	23
y	10	10	13	12	15

(જવાબ : $b_{yx} = 0.45$)

(2) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી x નો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક શોધો.

x	26	24	20	37	23
y	22	24	20	26	18

(જવાબ : $b_{xy} = 1.6$)

(3) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી બંને નિયત સંબંધાંકો શોધો.

x	65	60	65	60	50	65	60	50	55	55
y	15	14	15	13	13	16	16	11	13	14

(જવાબ : $b_{yx} = 0.22$, $b_{xy} = 2.96$)

(4) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી બંને નિયત સંબંધાંકો શોધો.

x	43	41	45	46	42	44	40
y	39	37	41	40	38	36	35

(જવાબ : $b_{yx} = b_{xy} = 0.75$)

(5) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો મેળવો.

માંગ	10	20	30	40	50
કિંમત રૂ. માં	25	30	20	10	15

(જવાબ : y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$y = 32 - 0.4x$

x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ $x = 62 - 1.6y$)

(6) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો શોધો.

x	28	33	35	33	32	38	46	36	40	41
y	30	26	30	31	31	34	28	26	31	34

(જવાબ : A = 36, B = 30, $b_{yx} = 0.07$, $b_{xy} = 0.24$, n = 10

y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ = $y = 27.6 + 0.07x$

x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકર = $x = 29.07 + 0.24\ y$)

(7) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવો અને $x = 78$ હોય ત્યારે yની કિંમતનું અનુમાન મેળવો.

x	75	75	71	69	72	74	70	71
y	70	71	69	69	72	76	67	68

(જવાબ : $y = 17.9 + 0.73x$, $y = 74.8$)

(8) નીચે આપેલી માહિતી પરથી y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવો. અને $x = 15$ હોય ત્યારે xની કિંમત શોધો.

x	5	6	7	8	9	10	11
y	2	4	5	6	3	8	7

(જવાબ : $y = -1 + 0.75\ x$, $y = 10.25$)

(9) એક પરીક્ષાના પરિણામ ઉપરથી નીચેની માહિતી મળે છે.

	ભુગોળના ગુણ	ઈતિહાસના ગુણ
સરેરાશ	25	40
પ્રમાણિત વિચલન	3	6

સહસંબંધોક = 0.8

નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો મેળવો.

(s ö lçk : yની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

y = 0 + 1.6 x, xની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = 9 + 0.4 y)

(10) બે સંબંધિત ચલ x અને y માટે મળેલા પરિણામો નીચે મુજબ છે. તેના ઉપરથી yની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવી. x = 60 હોય ત્યારે yની કિંમતનું અનુમાન કરો.

n = 10, Σu = 580, = Σv 370, Σu^2 = 41 650 Σv^2= 30860 Σuv = 11490

(જવાબ : yનું x ઉપરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = 109.21 – 1.25 x, y = 34.21)

(11) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી yની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

n = 10, Σx = 100, Σy = 205, Σx^2 = 2000 Σy^2 = 1750 Σxy = 3202

(જવાબ : y = 9.5 + 1.1 x)

(12) નીચે આપેલ દ્વિ-ચલ કોષ્ટકની મદદથી નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો મેળવો.

y \ x	20-30	30-40	40-50	50-60	કુલ
20-30	20	26	–	–	46
30-40	8	14	37	–	59
40-50	–	4	18	3	25
50-60	–	–	4	6	10
કુલ	28	44	59	9	–

(જવાબ : y = 3.37 + (0.72) x, x = 12.72 + 0.694 $\bar{x}$ = 29.9, $\bar{y}$ = 24.9)

(13) નીચેના દ્વિચલ કોષ્ટકમાં આપેલી માહિતીની મદદથી yનું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ શોધો અને x = 25 હોય ત્યારે yની કિંમતનું અનુમાન કરો.

y_1	x		
	5-10	10-15	15-20
16	9	14	–
20	6	11	3
24	–	–	7

(જવાબ : i_x = 5, i_y = 4, $\bar{x}$ = 27, $\bar{y}$ = 20.72 y = 8.03 + 0.47x, $\hat{y}$ = 19.78)

(14) જો $b_{xy} = -1.5$ અને $\frac{S_y}{S_x}=\frac{1}{2}$ હોય તો b_{xy} અને સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

(જવાબ : $b_{yx} = -0.375$, r = – 0.75)

(15) નીચે આપેલા બે સંબંધિત શ્રેણીના નિયત સંબંધ રેખાના સીકરણો ઉપરથી $\bar{x}$, $\bar{y}$ અને r શોધો.

$16x - 4y = -160$

$15x - 2y = 95$

(જવાબ : $\bar{x} = 25$, $\bar{y} = 140$, $r = 0.72$)

(16) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો મેળવો અને $y = 26$ હોય ત્યારે xની કિંમતનું અનુમાન કરો અને $x = 12$ હોય ત્યારે yની કિંમતનું અનુમાન કરો.

$\bar{x} = 25.5$ $\bar{y} = 40$, $S_x = 2.4$, $S^2_y = 36$ અને Cov (x, y) (સહવિચરણ x, y) = 11.52

(જવાબ : y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $y = -11 + 2x \Rightarrow x = 12$ ત્યારે $y = 13$)

$x = 12.7 + 0.32y \Rightarrow y = 26$ ત્યારે $x = 21.02$)

(17) xની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $4y - 5x = 8$ અને yની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $2x - 3y = -4$ હોય તો બે નિયત સંબંધોકો શોધો અને જો xનું વિચરણ 9 હોય તો y નું પ્ર.વિ. શોધો.

(જવાબ : $b_{xy} = 0.8$, $b_{yx} = 0.67$, $S_y = 2.74$)

(18) yની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા ઉપર બિંદુઓ (8, 24) અને (12, 25) આપેલા છે. તો તે રેખાનું સમીકરણ મેળવી $x = 12$ હોય ત્યારે yની કિંમતનું અનુમાન કરો.

(જવાબ : $b_{yx} = 0.25$, $y = 22 + 0.25x$ ($x = 12$ ત્યારે $y = 25$)

(19) એક દ્વિ-ચલ કોષ્ટક માટે નીચે મુજબ માહિતી મળે છે. તે ઉપરથી નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો મેળવો.

$n = 10$

xનો ધારેલો મધ્યક = 25

yનો ધારેલો મધ્યક = 23

xના ધારેલા મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનોનો સરવાળો = 5

yના ધારેલા મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનોનો સરવાળો = 0

xના ધારેલા મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો = 85

yના ધારેલા મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો = 144

x અને yના ધારેલા મધ્યકોમાંથી વિચલનોના ગુણાકારોનો સરવાળો = 105

(જવાબ : $\bar{x} = 25.5$, $\bar{y} = 23$, $y = -9.39 + 1.27x$, $x = 8.71 + 0.73y$)

(20) બે સંબધિત ચલ x અને y માટે નીચેના પરિણામો મળ્યા છે.

$n = 30$, $\Sigma x = 130$ $\Sigma y = 100$, $\Sigma x^2 = 300$, $\Sigma y^2 = 620$ $\Sigma xy = 360$ છે. પાછળથી એવું માલૂમ પડ્યું કે પ્રાપ્તાંકોના બે જોડકાં (8, 12) અને (10, 8) ને બદલે (8, 10) અને (12, 7) લીધેલાં હતા તો yની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા શોધો.

(જવાબ : $\Sigma x = 128$, $\bar{x} = 4.27$, $\Sigma y = 103$, $\bar{y} = 3.43$ $\Sigma x^2 = 359$, $\Sigma y^2 = 576$, $\Sigma xy = 372$, $byx = 0.36$ $y = 4.97 + 0.36x$)

12.11 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો :

(1) નિયત સંબંધ રેખાઓની સંખ્યા .... હોય છે.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) એક પણ નહીં

(2) બે નિયત સંબંધ રેખાઓ એકબીજાને .... અને .... માં છેદ છે.

(A) Sx, Sy (B) $\bar{x}$, $\bar{y}$ (C) a, β (D) A, a

(3) બે નિયત સંબંધોકોના ગુણાકાર = ...

(A) r (B) r^2 (C) byx (D) bxy

(4) સહસંબંધાંક નિયત સંબંધોકોનો .... મધ્યક છે.

(A) સમાંતર (B) હરાત્મક (C) ગુણોત્તર (D) એકપણ નહીં

(5) y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક $byx = \frac{?}{S^2_x}$

(A) વિચરણ (x, y) (B) સહ વિચરણ (x,y)

(C) પ્ર.વિ. (x, y) (D) એક પણ નહીં

(6) x નો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક

bxy = સહ વિચરણ (x, y) ÷ ?

(A) Sx^2 (B) Sy^2 (C) Sx (D) Sy

(7) જો $r = 0.65$ અને $\frac{Sy}{Sx} = \frac{1}{2}$ હોય તો b_{yx} = ... અને b_{xy} = ...

(A) 3.25, 1.3 (B) 1.3, 0.325 (C) 0.325, 1.3 (D) એકપણ નહીં

(8) જો $r = 0.72$ હોય તો b_{yx} = ... અને b_{xy} = ...

(A) 0.72, 0.52 (B) 0.52, 0.84

(C) 0.52, 0.72 (D) 0.72, 0.72

(9) જો $n = 9$, $\Sigma u = 7$, $\Sigma v = 0$, $\Sigma u^2 = 80$, $\Sigma v^2 = 140$, $\Sigma uv = 110$ હોય તો b_{yx} = ...

(A) 0.67 (B) 0.79 (C) 1.48 (D) 1.27

(10) જો $n = 9$, $\Sigma u = 7$, $v = 0$, $\Sigma u^2 = 80$ $\Sigma v^2 = 140$, $\Sigma uv = 110$ હોય તો b_{xy} = ...

(A) 0.67 (B) 0.79 (C) 1.48 (D) 1.27

(11) જો A = 92, $a = 32$, $b_{yx} = -0.43$, $b_{xy} = 0.78$ હોય તો y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ = ...

(A) $y = 92 + 0.43\ x$ (B) $y = 92 - 0.43\ x$

(C) $x = 32 + 0.78\ y$ (D) $y = 32 - 0.43\ x$

(12) જો A = 92, $a = 32$, $b_{yx} = -0.43$, $b_{xy} = 0.78$ હોય તો x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ = ...

(A) $x = 92 + 0.43\ y$ (B) $x = 92 - 0.43\ x$

(C) $y = 32 - 0.43\ x$ (D) $y = 32 + 0.78\ x$

(13) એક દ્વિચલ કોષ્ટક માટે $n = 100$, $\Sigma fuv = 98$ $\Sigma ufu = (-8)$, $\Sigma vfv = -9$, $\Sigma u^2fu = 122$ $i_x = i_y = 10$ હોય તો b_{yx} = ...

(A) 0.8 (B) 1.25 (C) 1.47 (D) એકપણ નહીં

(14) એક દ્વિચલ કોષ્ટક માટે $n = 100$ $\Sigma fuv = 99$, $\Sigma ufu = -8$, $\Sigma vfv = -9$, $\Sigma v^2fv = 120$, $i_x = i_y = 10$ હોય તો b_{xy} = ...

(A) 0.82 (B) 1.23 (C) 1.25 (D) એકપણ નહીં

(15) જો b_{yx}, b_{xy} ની કિંમત ધન કિંમતો હોય તો સહસંબાંધકની કિંમત .... જ્યારે b_{xy} b_{yx}ની કિંમતો ઋણ કિંમત હોય તો સહસંબંધાંકની કિંમત = ...

(A) +, + (B) –, – (C) +, – (D) –, +

(16) y નો x ઉપરના નિયત સંબંધાંક ને .... વડે અને xના y ઉપરના નિયત સંબંધાંકને .... વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

(A) b_{xy} , b_{yx} (B) b_{yx}, b_{xy} (C) r_{xy}, r_{uv} (D) r_x, r_y

(17) y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધાંક $b_{yx} = \frac{\text{-- નું પ્ર. વિ}}{\text{-- નું પ્ર. વિ}}$ × સહસંબંધાંક

(A) y, x (B) x, y (C) B, A (D) એક પણ નહીં

(18) xનું y ઉપરનું નિયત સંબંધાંક .$b_{xy} = \frac{\text{-- નું પ્ર. વિ}}{\text{-- નું પ્ર. વિ}}$ × સહસંબંધાંક

(A) y, x (B) x, y (C) A, a (D) એકપણ નહીં

(19) બે શ્રેણીના નિયત સંબંધોકો 0.6 અને 0.4 છે તો તે બે વચ્ચેનો સહસંબંધાંક ....

(A) 0.49 (B) 0.24 (C) 0.34 (D) એક પણ નહીં

(20) જો $r = 1$, $b_{yx} = 0.5$ હોય તો b_{xy} = ...

(A) 0.5 (B) 1 (C) 2 (D) 2.5

(21) બે ચલ x અને y માટે નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો $6y = 5x + 90$ અને $10x = By + 90$ છે. જો $\bar{x} = 18$ હોય તો $\bar{y}$ = ... અને B = ...

(A) 15, 5 (B) 30, 3 (C) 18, 3 (D) એકપણ નહીં

(સમજુતી : $\bar{x} = 18$ છે. $\therefore x = 18$, $6y = 5x + 90$ માં મૂક્તા $6y = 5(18) + 90$

$\therefore y = \frac{180}{6} = 30$ $\therefore \bar{y} = 30$ હવે $x = 18$ અને $y = 30$, $10x = BY + 90$ માં મૂક્તાં 10 (18)

$10 = B(30) + 90$, $\frac{180-90}{30} = B$, $B = 3$)

(22) byx, bxy અને r ના ચિહ્નોનો આધાર .... ઉપર છે.

(A) વિચરણ (B) પ્રમાણિત વિચલન (C) સહ વિચરણ (D) એકપણ નહીં

(23) x જો y પરની નિયત સંબંધાંક શોધવા જ્યારે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક સંખ્યામાં આવતુ હોય ત્યારે bxy = ... સૂત્ર લેવુ વધુ હિતાવહ છે.

(A) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$ (B) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$

(C) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$ (D) $\frac{\Sigma(x-A)(y-B)}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$

(24) y ને x પરની નિયત સંબંધાંક શોધવા જ્યારે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક સંખ્યામાં આવે ત્યારે b_{yx} = ... સૂત્ર લેવું વધુ હિતાવહ છે.

(A) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$ (B) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$

(C) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$ (D) $\frac{\Sigma(x-A)(y-B)}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$

(25) x નો y પરનો નિયત સંબંધાંક શોધવા જ્યારે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક સંખ્યામાં ન આવે ત્યારે b_{xy} = ... સૂત્ર લેવું વધુ હિતાવહ છે.

(A) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$ (B) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$

(C) $\frac{n\Sigma uv-\Sigma u.\Sigma v}{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2}$ (D) $\frac{n\Sigma uv-\Sigma u.\Sigma v}{n\Sigma v^2-(\Sigma v)^2}$

(26) y નો x પરનો નિયત સંબંધાંક શોધવા જ્યારે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક સંખ્યામાં ન આવે ત્યારે b_{xy} = ...

(A) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$ (B) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$

(C) $\frac{n\Sigma uv-\Sigma u.\Sigma v}{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2}$ (D) $\frac{n\Sigma uv-\Sigma u.\Sigma v}{n\Sigma v^2-(\Sigma v)^2}$

જવાબ :

(1) A (2) B (3) B (4) C (5) B (6) B (7) C (8) D (9) C (10) B (11) B (12) D (13) A (14) A (15) C (16) B (17) A (18) B (19) A (20) C (21) B (22) C (23) A (24) B (25) D (26) C

12.12 ચાવીરૂપ શબ્દો :

નિયત સંબંધ – બે ચલ પૈકી એક ચલના ફેરફારથી બીજા ચલ પર પડતી અસર જાણવા માટેની રીત.

નિયત સંબંધોક : નિયત સંબંધનું માપ

શ્રેષ્ઠ અન્યવાયોજીત રેખા – શ્રેષ્ઠ રેખા

મોડેલો – સમીકરણો

સંદર્ભ ગ્રંથ

– ધંધાકીય સંશોધન પદ્ધતિઓ મૈસુરીયા એન્ડ પટેલ અક્ષર પબ્લિકેશન, અમદાવાદ, 2019

– "આંકડા શાસ્ત્ર જોષી પંચોળી, કરકર" * સી જમનાદાસ (પ્રકાશન) અમદાવાદ - 1998-99

– "Business Statistics" sachdeva, Laxminarayan Agrwal, 2005

– "આંકડાશાસ્ત્રીય વિશ્લેષણ" પટેલ, જોશી, કાસુન્દ્રા સી. જમનાદાસ કંપની (પ્રકાશન) અમદાવાદ-2003

– 'Statistics' "sancheti & Kapoor" Sultan Chand & Sons, New Delhi – 2007.

* * *

એકમ 13 — વસ્તી વિષયક અભ્યાસની રીતો (Demographic Methods)

13.0 ઉદ્દેશો

13.1 પ્રસ્તાવના

13.2 વસ્તી વિષયક અભ્યાસની રીતો

13.3 વસ્તી વિષયક અભ્યાસની રીતની ઉપયોગિતા

13.4 વસ્તી વિષયક આંકડા એકઠા કરવાની રીતો

13.5 વસ્તી વિષયક આંકડાની ખામીઓ

13.6 સાદો જન્મદર

13.7 મૃત્યુદર

13.8 જન્મદર અને મૃત્યુદરના ઉદાહરણો

13.9 પ્રજનન દર

13.9.1 - સારાંશ

13.9.2 - પ્રજનન દરના પ્રકારો

13.9.3 - પ્રજનન દરના ઉદાહરણો

13.10 સ્વાધ્યાય (તમારી પ્રગતિ ચકાસો)

13.11 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો (MCQ'S)

13.12 વૈકલ્પિક પ્રશ્નોના જવાબો

13.13 ચાવીરૂપ શબ્દો

★ સંદર્ભ ગ્રંથ

13.0 ઉદ્દેશો :

આ પ્રકારના અભ્યાસથી વિદ્યાર્થીઓ નીચેના ઉદ્દેશો સિદ્ધ કરી શકશે.

(1) વસ્તી વિષયક અભ્યાસનો અર્થ, તેની ઉપયોગિતા તથા તેની ખામીઓ અંગેની જાણકારી મેળવી શકશો.

(2) વસ્તી વિષયક ઓકડાઓ કઈ પદ્ધતિથી મેળવી શકાય તે અંગે સમજી શકશો.

(3) જન્મદર, મૃત્યુદર અને પ્રજનન દરોનો અભ્યાસ કરી તે અંગે વિસ્તૃતમાં જાણકારી મેળવી શકાશે.

13.1 પ્રસ્તાવના :

વર્તમાન યુગમા વસ્તી વિષયક અભ્યાસનું મહત્વ અને ઉપયોગિતા તેમજ તેના અર્થની જાણકારી મેળવવી એ ખૂબ જ અગત્યનું છે કારણ ભારત દેશ વસ્તીની બાબતમા વિશ્વમા બીજા ક્રમે છે અને જેમ જેમ સમય વિતતો જાય છે તેમ તેમ વસ્તીમા કુદકે ને ભૂસકે વધારો થતો જાય છે અને તે કારણે તે માત્ર વસ્તી ગણતરીનો જ પ્રશ્ન રહ્યો નથી પરંતુ તેની સાથે સાથે આર્થિક, રાજકીય, ધાર્મિક, વ્યવસાયિક, શૈક્ષણિક અને સામાજીક પ્રશ્નોનો પણ અભ્યાસ જરૂરી બન્યો છે, તેથી આ પ્રકરણમા આપણે તેનો અર્થ ઉપયોગિતા, ખામીઓ અંગેની જાણકારી મેળવી શકીશું, ઉપરાંત વસ્તી વિષયક આંકડા કઈ પદ્ધતિથી મેળવી શકાય તે અંગેની જાણકારી મેળવી શકીશું. ઉપરાંત

જન્મ દર, મૃત્યુ દર અને પ્રજનન દરોનો અર્થ સમજી શકીશુ અને તે કેવી રીતે શોધવામા આવે છે તે અંગેની જાણકારી મેળવી શકીશુ.

13.2 વસ્તી વિષયક અભ્યાસની રીતનો અર્થ :

ભારત દેશ એ અલ્પવિકસિત દેશ છે અને તેને વિકસિત દેશની હરોળમાં મુકવો હોય તો વસ્તી વિષયક અભ્યાસની રીતો શું છે ? તે જાણવું ખુબ જરૂરી છે. વસ્તી વિષયક અભ્યાસની રીતને અંગ્રેજીમાં Demographic mehotds કહેવાય છે તેની જાણકારી સૌ પ્રથમ જહોન ગ્રાન્ટ નામા વ્યક્તિએ સત્તરમી સદીના મધ્ય ભાગમાં મેળવી હતી તે માટે તેમણે ખુબજ મોટા પાયા ઉપર લંડનની વસ્તી વિષયક માહિતી એકત્રિત કરી હતી તેમાં તેઓએ વસ્તીના આંકડાઓ, જન્મ-મૃત્યુના આંકડાઓ, મૃત્યુ અંગેના કારણો, ધર્મ અને વ્યવસાય જેવી માહિતીઓનો સમાવેશ કરેલ હતો તેથી તેને વસ્તી વિષયક અભ્યાસના પ્રણેતા તરીકે ગણવામા આવે છે. જુદા જુદા અભ્યાસીઓ એ જુદી જુદી વ્યાખ્યાઓ (વસ્તીવિષયક અભ્યાસની) કરી છે. જે પૈકી **''પીટર આર કોકસે''** આપેલી વ્યાખ્યા વધુ વિસ્તૃત દેખાય છે જે નીચે મુજબ છે.

વસ્તીશાસ્ત્ર એ માનવ વસ્તીનો આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓ દ્વારા કરવા આવતો અભ્યાસ છે. જેમાં માનવ સંખ્યાનો વિસ્તાર, કદ વિકાસ જેવા માપદંડો તથા જીવતા જન્મેલા અથવા અમુક ચોક્કસ પ્રદેશમા મૃત્યુ પામેલા માનવો તથા જન્મ-મૃત્યુને લગતા પ્રજનન દરો, મૃત્યુ અને લગ્નનો સમાવેશ થાય છે.

ડૉ. એમ. એચ. મૈસુરીયા' ના મતે વસ્તી વિષયક અભ્યાસની રીત એ આંકડાશાસ્ત્રીય અને વૈજ્ઞાનિક રીત છે કે જેમાં માનવીના જન્મથી મૃત્યુ સુધીના તમામ આંકડાઓ (જેમ કે જન્મ, જાતિ, શિક્ષણ, માંદગી, ધંધો કે નોકરી, માનસિક પરિસ્થિતિ, રહેઠાણ, આર્થિક પરિસ્થિતિ, સામાજીક દરજ્જો, લગ્ન, છુટાછેડા, સ્થળાંતર, મૃત્યુ વગેરે) નો સમાવેશ કરવામા આવે છે અને તેનો વૈજ્ઞાનિક અભ્યાસ કરવા આવે છે.

13.3 વસ્તી વિષયક અભ્યાસની ઉપયોગિતા :

વસ્તી વિષયક અભ્યાસનું કેટલુ મહત્વ છે અને તે કયા કયા ક્ષેત્રે કે કેટલી ઉપયોગિતા ધરાવે છે તે અંગેની સમજણ નીચે મુજબ છે.

(1) વસ્તીમાં થતી વધ-ઘટ જાણવા :

વસ્તી વિષયક આંકડા એટલે મુખ્યત્વે જન્મ, મરણ અને લગ્નના આંકડામાં થતી વધઘટ ઉપરથી દેશની વસ્તીમા થતી વધ-ઘટ અને તે અંગેનું વલણ જાણી શકાય છે.

(2) સરકારી વ્યવસ્થામાં ઉપયોગી :

વસ્તી વિષયક આંકડાની મદદથી સરકારે જાહેર કરેલ આર્થિક તેમજ સામાજીક આયોજનો તેમજ તે અંગેના જાહેર કાર્યક્રમો વગેરેની વ્યવસ્થા કરવામા ખુબ જ ઉપયોગી છે.

(3) સંશોધન ક્ષેત્રે ઉપયોગી :

વસ્તી વિષયક આંકડાઓની મદદથી કોઈ એક વિસ્તારમાં અમુક ચોક્કસ રોગને લીધે થતા મૃત્યુઓની સંખ્યાની જાણકારી મળે છે અને તેની મદદથી નવી નવી દવાઓના સંશોધનો કરી શકાય છે.

(4) આરોગ્ય ખાતાને ઉપયોગી :

વસ્તી વિષયક આંકડાઓની મદદથી જે તે વિસ્તારમાં જુદી જુદી ઉંમર ગાળા દરમ્યાન જુદા જુદા રોગોને કારણે ઉદ્ભવતા મૃત્યુઓ અંગેની માહિતી મેળવી શકાય છે. અને તે ઉપરથી આરોગ્ય ખાતાને આરોગ્ય અંગેની જરૂરી સેવાઓમા સુધારા કરવા મદદરૂપ થાય છે.

(5) મૃત્યુદરના કોષ્ટકોની રચના કરવા :

વસ્તી વિષયક આંકડાની મદદથી મૃત્યુદરના કોષ્કોની રચના કરી શકાય છે. આ કોષ્ટકો વીમા વિજ્ઞાન અને જીવન વીમા ક્ષેત્રે ખુબ જ ઉપયોગી નીવડે છે.

(6) માનવ સુખાકારી અંગેની જાણકારી મેળવવા :

વસ્તી વિષયક આંકડાઓની મદદથી દેશમા રહેતા માનવો કેટલા સુખી અને સમૃદ્ધ છે તે જાણી શકાય છે અને અન્ય દેશો સાથે તેની સરખામણી કરી આંતરરાષ્ટ્રીય માનવ સુખાકારી યોજના પણ ઘડી શકાય છે.

(7) મનુષ્યોની નિવૃત્તિવય નક્કી કરવા :

વસ્તી વિયક આંકડાઓની મદદથી જે તે ઊંમર જૂથના વ્યક્તિઓની કાર્યક્ષમતામાં થતા ઘટાડા અંગેની અસર જાણી શકાય છે અને તેને આધારે મનુષ્યોની નિવૃત્તિવય નક્કી કરી શકાય છે.

13.4 વસ્તી વિષયક આંકડાઓ એકઠી કરવાની વિવિધ રીતો :

(Methods of collecting demographics statistics)

વસ્તી વિષયક આંકડાઓ કરવાની વિવિધ રીતોમાં મુખ્યત્વે ત્રણ રીતો ખુબ જ અગત્યની છે. જે નીચે મુજબ છે.

(1) નોંધણી કરવાની રીત (2) વસ્તી ગણતરીની રીત (3) વિશ્લેષણની રીત

(1) નોંધણી કરવાની રીત :

નોંધણી કરાવવાની રીતમાં જન્મ લગ્ન, સ્થળાંતર, મૃત્યુ વગેરે ઘટનાઓની તૈયારી કરવામાં આવે છે. કાયદાની રૂએ આ પ્રકારની નોંધણી ફરજીયાત છે. ભારત દેશમાં જન્મ અને મરણની નોંધણી કરાવવા માટે કાયદાકીય જોગવાઈ કરેલી છે. આ પ્રકારની નોંધણી એ ખુબ જ અગત્યનો દસ્તાવેજી પુરાવો છે. આપણા દેશમાં આ પ્રકારની નોંધણી કરાવવા માટે ગામ હોય તો ગ્રામ પંચાયત, શહેર હોય તો નગર પાલિકાઓમાં કરાવવાની વ્યવસ્થા કરેલ છે. આ પ્રકારની નોંધણીમાં જન્મ સમયે નીચેની બાબતોની ખાસ નોંધણી કરાવવી જોઈએ. જેમકે જન્મ તારીખ, જન્મ સ્થળ, જન્મનારની જાતિ, જન્મનારના માતા-પિતાનો ધર્મ, જન્મનારનું નામ, જન્મનારની માતાની ઊંમર અને જન્મનાર બાળકનો ક્રમ. તેવી જ રીતે મૃત્યુ સમયે નીચેની બાબતોની ખાસ નોંધણી કરાવવી જોઈએ. જેમ કે મૃત્યુની તારીખ, મૃત્યુ પામનારનું નામ, મૃત્યુનુ સ્થળ, મૃત્યુ પામનારની ઊંમર, મૃત્યુનું કારણ, મૃત્યુ પામનારનો ધંધો કે જાતિ, મૃત્યુ પામનારનો વૈવાહિક દરજ્જો તેમજ મૃત્યુ પામનારના પિતા કે પતિનું નામ વગેરે.

નોંધણી કરાવવાની રીતની મદદથી જન્મ-મૃત્યુમાં થતી વધઘટ, વસ્તી વધારાનો દર, મૃત્યુ દર, લગ્નોમાં થતી વધઘટ અને સ્થળાંતરના કારણોની જાણકારી પણ મેળવી શકાય છે.

(2) વસ્તી ગણતરીની રીત :

દેશમા રહેતા વ્યક્તિઓને લગતી જુદી જુદી માહિતી ભેગી કરવાની રીતને વસ્તી ગણતરીની રીત કહે છે. ભારત દેશ આઝાદ થયા પછી સૌ પ્રથમ વખત 1951માં વસ્તી ગણતરી કરવામાં આવી હતી ત્યાર બાદ દર દશ વર્ષે વસ્તી ગણતરી કરવામા આવી હતી. 2001 અને 2011ની વસ્તી ગણતરી કર્યા પછી એવું લાગતું હતુ કે ભારતમા એટલી વધી વસ્તીમા વધારો થાય છે કે તેની ગણતરી દર વર્ષે થવી જોઈએ. પરંતુ વસ્તી ગણતરીમા ફક્ત વ્યક્તિઓની જ ગણતરી કરવી એ યોગ્ય નથી પરંતુ તેની સાથે સાથે તેમા લોકોની આર્થિક સ્થિતિ, ભણતર, મકાન અને ભૌતિક સુવિધાઓ, જન્મદર, મૃત્યુદર, ભાષા, ધર્મ, જાતિ, સ્થળાંતર વગેરે વિવિધ માહિતીઓ ભેગી કરવી જોઈએ. આ તમામ માહિતીઓ ભેગી કરવામા ખુબ જ સમય જાય છે તેથી ભારતમા વસ્તી ગણતરી દર દશ વર્ષે જ કરવામા આવે છે અને તે હિતાવહ છે. વસ્તી ગણતરીના આંકડાઓનો ઉપયોગ કેન્દ્ર સરકાર અને રાજ્ય સરકારની પોલિસીઓ બનાવવા માટે થાય છે. આ આંકડાઓનો ઉપયોગ લોકસભા અને વિધાનસભાની ચૂંટણીઓમાં રિઝર્વેશનમાં પણ કરવામાં આવે છે અને તેનું સંચાલન અને દેખરેખ કેન્દ્રીય મંત્રાલય દ્વારા કરવામાં આવે છે. અત્યાર સુધી કુલ 15 વખત વસ્તી ગણતરી થયેલ છે. અને 16મી વખત 2021માં થવાની હતી પરંતુ કોરોનાને કારણે કરી શકાઈ નથી. જ્યારે ભારત દેશ આઝાદ થયા બાદ કુલ સાત વખત વસ્તી ગણતરી થઈ છે અને હવે પછી માં 8મી વખત કરવામાં આવશે. જેની મુખ્ય થીમ (વિષય) જન ભાગીદારીથી ''જનકલ્યાણ'' છે.

16મી વસ્તી ગણતરીમાં દરેક કુટુંબને જે વિવિધ પ્રશ્નો પુછવામાં આવશે. તેમાં નાગરિકોની આર્થિક તેમજ સામાજીક પરિસ્થિતિ સંબંધિત આંકડાઓ એકઠા કરવામાં આવશે. પ્રશ્નોમા મુખ્યત્વે કુંટુબના વડાનું નામ, મકાન નંબર, ઘરની સ્થિતિ, ફરતી દિવાલ અને છતમાં વપરાયેલ માલસામાન, કુંટુબના સભ્યોની કુલ સંખ્યા, જાતિ-સ્ત્રી/પુ, વૈવાહિક દરજ્જો, પીવાના પાણીની સગવડ અને તેનો સ્ત્રોત્ત, શૌચાલય અને બાથરૂમની વ્યવસ્થા, ગટર લાઈન, રસોઈ ઘરની ઉપલબ્ધી, L.P.G / PNG ગેસ કનેક્શનની સ્થિતિ, રેડિયો, ટી.વી, ઈન્ટરેનેટની સુવિધાઓ, સાઈકલ, મોટર બાઈક, કાર, જીપ વગેરેનો સમાવેશ કરવામાં આવશે.

મર્યાદા : આ રીતની મુખ્ય મર્યાદા એ છે કે તે માહિતી દશ વર્ષે મેળવવામાં આવે છે. વચ્ચેના વર્ષોમાં માહિતી મેળવવી જરૂરી હોય ત્યારે યોગ્ય માહિતી મેળવી શકાતી નથી.

(3) વિશ્લેષણની રીત :

વસ્તી ગણતરીની રીતની મુખ્ય મર્યાદા એ છે કે તેમાં માહિતી દર દશ વર્ષે મેળવવામાં આવે છે. પરંતુ વચ્ચેના વર્ષોની માહિતી મેળવી શકતા નથી. આ મર્યાદાને દૂર કરવા વિશ્લેષણની રીતનો ઉપયોગ કરી શકાય છે. વિશ્લેષણની રીત એ એક ગાણિનીક રીત છે તેમાં ગણતરીના સૂત્રોનો ઉપયોગ કરી વચ્ચેના વર્ષોની માહિતી મેળવી શકાય છે અથવા અનુમાન કરી શકાય છે. આ રીતની મદદથી છેલ્લી બે વસ્તી ગણતરીના આંકડાઓ મેળવી ગાણિતીય સૂત્રો દ્વારા વચ્ચેના વર્ષોની વસ્તીનું અનુમાન મેળવી શકાય છે.

13.5 વસ્તી વિષયકો આંકડાની ખામીઓ :

વસ્તી વિષયક આંકડાઓમાં મુખ્યત્વે માનવ સંખ્યા જાતિ, જન્મ, લગ્ન, મૃત્યુ અને સ્થળાંતર જેવા આંકડાઓનો સમાવેશ થાય છે. આ આંકડાઓ ખુબ જ ઉપયોગી હોવા છતા તેમાં નીચે પ્રમાણેની ખામીઓ રહેલી છે.

(1) આખા દેશમાં જન્મ અને મૃત્યુની નોંધણી કરવામાં અસમાનતા જોવા મળે છે. કેટલાક રાજ્યો ફરજીયાત નોંધણી કરવામાં વિલંબ કરતા હોય છે.

(2) દેશમાં કેટલીક જગ્યાએ જન્મ-મરણની નોંધણીમાં અધુરી વિગતો આપવામાં આવે છે. અથવા નોંધણી કરવામાં આવતી નથી. જન્મ-મરણ અંગેના ફોર્મમાં સંપૂર્ણપણે માહિતી ભરાતી નથી.

(3) મૃત્યની નોંધણી કરતી વખતે મૃત્યુનું સાચુ કારણ બતાવવામાં આવતું નથી. મૃત્યુ દા.ત. ગુપ્ત રોગથી થયું હોય તો તેની નોંધ કરાવતા લોકો ખચકાંટ અનુભવે છે.

(4) મૃત્યુની નોંધણી વખતે કેટલીક વખત ખોટી ઊંમરની નોંધણી કરવામાં આવે છે અથવા અનુમાન કરી ઊંમરની નોંધણી કરવામાં આવે છે.

આ ખામીઓ નોંધણી કરનાર અને કરાવનાર ને જન્મ-મરણનું મહત્વ સમજાવી તેનો પ્રચાર અને પ્રસાર કરી સુધારી શકાય છે. તેમજ નોંધણી કરવા માટે ઊભા કરેલા તંત્રોએ નોંધેલ માહિતીઓ દેશની મુખ્ય ઓફીસો સુધી પહોંચે તેની તકેદારી રાખવી જોઈએ.

13.6 સાદો જન્મ દર (Cruve Birth rate) :

સાદો જન્મ દર ને કાચા જન્મદર તરીકે પણ ઓળખી શકાય છે. તે ગણતરીમાં ખૂબ જ સરળ છે. સાદો જન્મદર નીચેના સૂત્રની મદદથી શોધી શકાય.

$$\text{સાદો જન્મદર (C.B.R)} = \frac{\text{એક વર્ષમાં જે તે વિસ્તારમાં જીવતા જન્મેલ બાળકોની સંખ્યા}}{\text{તે વર્ષની જે તે વિસ્તારની કુલ સરેરાશ વસ્તી}} \times 100$$

નોંધ : જીવન ક્રિયાના કોઈપણ દર નક્કી કરવા હોય તો એકમ તરીકે 1000 લેવામાં આવે છે. કારણ જન્મ-મરણના કોષ્ટકની રચના દર 1000 વ્યક્તિએ કરવામાં આવે છે.

આમ અમુક વિસ્તારમાં એક વર્ષ દરમ્યાન જન્મેલા અને જીવતા રહેલા બાળકની સંખ્યા ને જે તે વિસ્તારની જે તે વર્ષની કુલ સરેરાશ વસ્તી વડે ભાગી એક હજાર વડે ગુણવાથી સાદો જન્મદર શોધી શકાય છે. આ જન્મ દરને કાચો જન્મદર એટલા માટે કહેવામાં આવે છે તેમાં કુલ સરેરાશ વસ્તીને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે અને કુલ વસ્તીમાં સ્ત્રી પુરુષના બંનેનો સમાવેશ થાય છે જે અયોગ્ય છે.

13.7 મૃત્યુ દર :

મૃત્યદર દરમાં આપણે ત્રણ પ્રકારનાં દરોનો અભ્યાસ કરીશું જે નીચે મુજબ છે.

(1) સાદો મૃત્યુ દર (2) પ્રમાણિત મૃત્યુ દર (3) બાળ મૃત્યુ દર

(1) સાદો મૃત્યુ દર (CDR) : Crade death rate સાદો મૃત્યુદર ગણતરીમાં ખૂબ જ સરળ છે. તેની મદદથી જે તે પ્રદેશમાં અમુક ચોક્કસ સમય દરમ્યાન વસ્તીમાં કેટલા દરથી ઘટાડો થાય છે તે અંગેની જાણકારી મેળવી શકાય છે એટલે કે વસ્તી વિષયક આંકડામાં મૃત્યુ દર નક્કી કરવા માટે ઉપયોગી છે. જે તે પ્રદેશની સુખાકારી અંગેની જાણકારી મેળવવા માટે પણ સાદા મૃત્યુદરનો જ ઉપયોગ કરવમાં આવે છે અને તેની મદદથી જે તે શહેર કે દેશ કેટલું તંદુરસ્ત છે તે જાણી શકાય છે. સાદો મૃત્યુદર એટલે દર હજારે થયેલ મૃત્યુની સંખ્યા તે નીચેના સૂત્રની મદદથી શોધી શકાય.

$$\text{સાદો મૃત્યુ દર (CDR)} = \frac{\text{જે તે પ્રદેશમાં અમુક ચોક્કસ સમય દરમ્યાન થયેલ કુલ મૃત્યુ સંખ્યા}}{\text{જે તે પ્રદેશની અમુક ચોક્કસ સમયની કુલ વસ્તી}} \times 1000$$

નોંધ : જીવન ક્રિયાના કોઈપણ દર નક્કી કરવા હોય તો એકમ તરીકે 1000 લેવામાં આવે છે. કારણ જન્મ-મૃત્યુના કોષ્ટકની રચના દર 1000 વ્યક્તિએ કરવામાં આવે છે.

મર્યાદા :

(1) સાદા મૃત્યુદરની ગણતરીમાં દરેક ઊંમર-જૂથની વ્યક્તિઓની વસ્તીનો સરવાળો અને દરેક ઊંમર જૂથની મૃત્યુ સંખ્યાનો સરવાળો કરવામાં આવે છે. જે અયોગ્ય છે.

(2) સાદા મૃત્યુમાં દરેક ઊંમર જૂથને એક સરખું મહત્વ આપવામાં આવે છે. પરંતુ દરેક ઊંમર જૂથમાં વસ્તી અને મૃત્યુ સંખ્યા એકસરખી હોતી નથી તેથી આ મૃત્યુ દરને કાચો (સાદો) મૃત્યુદર તરીકે ઓળખી શકાય

(3) જે શહેર કે પ્રદેશમાં વૃદ્ધોની સંખ્યા વધારે હોય ત્યાં આ મૃત્યુ દર ઊંચો જોવા મળે છે. જે સુખાકારીનું સાચું ચિત્ર રજૂ કરી શકતો નથી.

(4) જે શહેર કે પ્રદેશમાં યુવાનોની સંખ્યા વધારે હોય ત્યાં આ મૃત્યુદર નીચો જોવા મળે છે. જે પણ અયોગ્ય છે.

ઉપરની મર્યાદાઓને કારણે સાદા મૃત્યુદરની મદદથી બે શહેર કે વિસ્તારોની સરખામણી કરવામાં આવે તો તે સ્પષ્ટ ચિત્ર રજુ કરી શકતો નથી. તેથી આ મર્યાદો દૂર કરવા પ્રમાણિત મૃત્યુદરનો અભ્યાસ જરૂરી બને છે.

(2) પ્રમાણિત મૃત્યુદર : (SDR) Standardised Death Rate : પ્રમાણિત મૃત્યુદર શોધવા ભારિત મધ્યકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. મૃત્યુ દરમાં જુદા જુદા શહેરો કે પ્રદેશો માટે દરેક ઉંમર-જૂથમાં વસ્તી અને મૃત્યુ સંખ્યાને ચોક્કસ મહત્વ આપવામાં આવે છે. તેથી બે કે તેથી વધુ શહેરોના પ્રમાણિત મૃત્યુદરોની મદદથી કયુ શહેર આરોગ્યની દૃષ્ટિએ વધુ ચઢિયાતુ છે તે જાણી શકાય છે.

ધારોકે બે શહેરોના પ્રમાણિત મૃત્યુ શોધવા હોય તો

→ બેમાંથી કોઈપણ એક શહેરને પ્રમાણિત ગણી તે શહેરની વસ્તીને (પ્રમાણિત વસ્તી) W (ભાર) કહો.

→ પ્રમાણિત શહેર માટે

પ્રમાણિત મૃત્યુ દર (SDR) = તે જ શહેરનો સાદો મૃત્યુ દર (CDR)

→ અન્ય શહેર માટે

પ્રમાણિત મૃત્યુ દર SDR $= \frac{\Sigma XW}{\Sigma W}$

જ્યાં ΣW = પ્રમાણિત શહેરની કુલ વસ્તી

X = અમુક ઉંમર વર્ગમાં તે શહેરના દર હજારે થતા મૃત્યુ (મૃત્યુ દર)

ΣXW = X અને Wના ગુણાકારનો કુલ સરવાળો

અહીં જે શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુદર ઓછો મળે તે શહેર આરોગ્યની દૃષ્ટિએ ચઢિયાતુ છે એવો નિર્ણય કરવામાં આવે છે.

(3) બાળ મૃત્યુ દર : (IMR) Infant Mortality Rate કોઈપણ પ્રદેશ કે શહેરની સામાન્ય તંદુરસ્તીનો ખ્યાલ મેળવવા માટે બાળ મૃત્યુ દર ઉપયોગી છે. સામાન્ય રીતે પછાત વિસ્તારોમાં બાળ મૃત્યુ દરનું પ્રમાણ વધારે જોવા મળે છે. કારણ આ વિસ્તારોમાં જન્મ સમયે માતા અને બાળકની કાળજી યોગ્ય રીતે લેવામાં આવતી નથી, વસ્તી વિષયક આંકડાઓમાં બાળ-મૃત્યુદર ખૂબ જ અગત્યની ભૂમિકા ભજવે છે. બાળ મૃત્યુ દરની મદદથી જુદા જુદા સમાજની સુખાકારી અંગે જાણકારી મેળવી શકાય છે. સામાન્ય રીતે વિકસિત દેશો કરતાં અલ્પવિકસિત દેશોમાં બાળ મૃત્યુનું પ્રમાણ લગભગ 5 થી 6 ગણુ વધુ જોવા મળે છે. જે તે શહેર કે વિસ્તારમાં જે વર્ષ દરમિયાન એક વર્ષની નીચેની ઊંમરના જે તે વર્ષ દરમિયાન થયેલા કુલ જન્મની સંખ્યા વડે ભાગી તેને એક હજાર વડે ગુણતા મળતી રકમને બાળમૃત્યુ દર તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. જે નીચેના સૂત્ર દ્વારા શોધી શકાય.

$$\text{બાળ મૃત્યુ દર} = \frac{\text{અમુક ચોક્કસ વિસ્તારમાં જે તે વર્ષ દરમિયાન એક વર્ષથી નીચેની ઊંમરનાં બાળકોના થયેલા કુલ મૃત્યુની સંખ્યા}}{\text{અમુક પ્રદેશમાં જે તે વર્ષે થયેલા કુલ જન્મની સંખ્યા}} \times 1000$$

13.8 જન્મદર અને મૃત્યુદરના ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ : 1 એક શહેરમાં કુલ જન્મેલા બાળકોની સંખ્યા 13,012 જેટલી છે. અને તે શહેરની કુલ વસ્તી 6,00,000 હોય તો તે શહેરનો સાદો જન્મદર શોધો.

$$\text{જવાબ : સાદો જન્મ દર CBR} = \frac{\text{જન્મેલા કુલ બાળકોની સંખ્યા}}{\text{કુલ વસ્તી}} \times 1000$$

$$= \frac{13{,}012}{6{,}00{,}000} \times 1000$$

$$= 21.69$$

ઉદાહરણ : 2 એક શહેરમાં એક વર્ષ દરમ્યાન જન્મેલા કુલ 25,000 બાળકોમાં 340 બાળકો એક વર્ષની ઓછી ઉંમરમાં મૃત્યુ પામ્યા તો તે શહેર માટે બાળ મૃત્યુ દર શોધો.

જવાબ : બાળ મૃત્યુ દર =

$$\frac{\text{એક શહેરમાં એક વર્ષમાં એક વર્ષથી ઓછી ઉંમરમાં મૃત્યુ પામેલા બાળકોની સંખ્યા}}{\text{તે શહેરમાં એક વર્ષ દરમ્યાન થયેલા કુલ જન્મ સંખ્યા}} \times 1000$$

$$\text{બાળ મૃત્યુ દર IMR} = \frac{340}{25{,}000} \times 1000$$

$$= 13.6$$

ઉદાહરણ : 3 બે શહેરોમાં થયેલ મૃત્યુ અને વસ્તી અંગેની માહિતી નીચે મુજબ આપેલ છે. તો તે ઉપરથી કયુ શહેર આરોગ્યની દૃષ્ટિ એ વધુ ચઢિયાતુ છે કે કારણ સહિત કહો. (શહેર A ને પ્રમાણિત ગણો.)

ઉંમર વર્ષમાં	A - શહેર		B - શહેર	
	વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા	વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા
0-5	18,000	216	5500	154
5-45	54,000	270	27500	165
45-80	1,26,000	1008	62500	500
80 થી વધુ	16,000	1104	6500	468

જવાબ :- અહીં A શહેરને પ્રમાણિત ગણવાનું છે તેથી A શહેરની વસ્તી = W અને B શહેરના દર હજારે મૃ. = $\frac{154}{5500}\times1000 = 28$, $\frac{165}{27100}\times1000 = 6$, $\frac{500}{62,500}\times1000 = 8$ અને $\frac{468}{6500}\times100 = 72$

ઉંમર વર્ષમાં	A- શહેર		B-શહેર		X	XW
	W વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા	વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા	દર હજારે મૃત્યુ સંખ્યા	
0-5	18,000	216	5500	154	28	5,04,000
5-45	54,000	270	27500	165	6	3,24,000
45-80	1,26,000	1008	62,500	500	8	10,08,000
80 થી વધુ	16,000	1104	6500	468	72	11,52,000
કુલ	2,14,000	2598	1,02,000	1287	–	29,88,000

B શહેરની નિયત ઉંમરગાળાની દર હજારે મૃ. સંખ્યા (X) શોધવાનું સૂત્ર નીચે મુજબ છે.

$$\text{B શહેરની (નિયત ઉંમરગાળાની) દર હજારે મૃ. સંખ્યા} = \frac{\text{નિયત ઊંમરગાળાની મૃ. સંખ્યા}}{\text{નિયત ઊંમરગાળાની વસ્તી}}\times1000$$

$$\text{A શહેરનો સાદો મૃત્યુ દર } CDR_A = \frac{\text{A શહેરની કુલ મૃત્યુ સંખ્યા}}{\text{A શહેરની કુલ વસ્તી}}\times1000$$

$$= \frac{2598}{2,14,000}\times1000$$

$$= 12.14$$

$$\text{B શહેરનો સાદો મૃત્યુ દર } CDR_B = \frac{\text{B શહેરની કુલ મૃત્યુ સંખ્યા}}{\text{B શહેરની કુલ વસ્તી}}\times1000$$

$$= \frac{1287}{1,02,000}\times1000 = 12.62$$

A શહેરને પ્રમાણિત ગણતા A શહેરની વસ્તી = W

$\therefore$ A શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુ દર (SDR_A) = A શહેરનો સાદો મૃત્યુ દર (CDR_A)

= 12.14

B શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુ દર (SDR_B) $= \frac{\Sigma XW}{\Sigma W}$

$= \frac{29,88,000}{2,14,000}$

= 13.96

A શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુ દર B શહેર કરતા ઓછો છે તેથી A શહેર આરોગ્યની દૃષ્ટિએ ચઢિયાતુ છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ : 4 નીચેની માહિતી ઉપરથી બે શહેરોના આરોગ્યની સરખામણી કરો. (શહેર B ને પ્રમાણિત ગણો.)

ઉંમર	શહેર- A		શહેર- B	
	વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા	વસ્તી સંખ્યા	મૃત્યુ સંખ્યા
0-15	30,000	750	30,000	900
15-45	50,000	1100	50,000	1000
45થી વધુ	10,000	400	16,000	400

જવાબ : અહી B શહેર પ્રમાણિત છે તેથી તેની વસ્તી = W

A શહેરનો દર હજારે મૃત્યુ $=\frac{750}{30,000}\times1000 = 25,\ =\frac{1100}{50,000}\times1000 = 22,\ \frac{400}{10,000}\times1000 = 40$

ઉંમર	A- શહેર		X	B-શહેર		XW
	W વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા	દર હજારે મૃત્યુ સંખ્યા	W વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા	
0-15	30,000	750	25	30,000	900	7.50,00
15-45	50,000	1100	22	50,000	1000	11,00,000
45 થી વધુ	10,000	400	40	16,000	400	4,00,000
કુલ	90,000	2250	–	96,000	2300	22,50,000

A શહેરનો સાદો મૃત્યુ દર $CDR_A = \frac{\text{શહેર Aની કુલ મૃત્યુ સંખ્યા}}{\text{શહેરAની કુલ વસ્તી}}\times1000$

$= \frac{2250}{90,000}\times1000$

= 25

$$\text{B શહેરનો સાદો મૃત્યુ દર} = \frac{\text{શહેર Bની કુલ મૃત્યુ સંખ્યા}}{\text{શહેર Bની કુલ વસ્તી}} \times 1000$$

$$= \frac{2300}{96,000} \times 1000$$

$$= 23.96$$

A શહેરનો નિયત ઊંમરગાળાનો દર હજારે મૃ. સંખ્યા (X) શોધવાનું સૂત્ર નીચે મુજબ છે.

$$\text{A શહેરનો નિ. ઉ. ગાળાનો દર હજારે મૃ. સં} = \frac{\text{A શહેરની નિ. ઉ. ગાળાની મૃ. સંખ્યા}}{\text{A શહેર નિ. ઉ. ગાળાની વસ્તી}} \times 1000$$

B શહેરને પ્રમાણિત ગણતા B શહેરની વસ્તી = W

$\therefore$ B શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુ દર (SDR_B) = 23.96

$$\text{A શહેરનો પ્રમાણિત મૃ. દર} = \frac{\Sigma \times W}{\Sigma W}$$

$$= \frac{22,50,000}{96,000}$$

$$= 23.44$$

A શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુ દર B શહેરના પ્રમાણિત મૃત્યુ દર કરતા ઓછો છે તેથી A શહેર આરોગ્યની દૃષ્ટિએ ચઢિયાતુ છે.

(યાદ રાખો)

નોંધ : બે શહેરના આરોગ્યની સરખામણી કરવાની હોય ત્યારે કયુ શહેર પ્રમાણિત છે એવુ ન આપેલુ હોય તો બંને પૈકી કોઈપણ એક શહેર પ્રમાણિત ગણો અને ઉદાહરણ-3 અથવા ઉદાહરણ-4 મુજબ દાખલો ગણો.

ઉદાહરણ-5

નીચેની માહિતી ઉપરથી B શહેરને પ્રમાણિત ગણી બે શહેરના આરોગ્યની સરખામણી કરો.

	શહેર- A		**શહેર- B**	
ઉંમર	**વસ્તી**	**મૃત્યુ સંખ્યા**	**વસ્તી સંખ્યા**	**મૃત્યુ સંખ્યા**
5 થી ઓછી	3500	50	1600	60
5-25	5500	60	2400	35
25-50	4500	30	3000	25
50થી વધુ	2500	60	3500	50

જવાબ : અહીં મૃત્યુ સંખ્યાને બદલે દર હજારે મૃત્યુ (મૃત્યુ દર) આપેલ છે. તેથી સૌપ્રથમ બંને શહેરના મૃત્યુની સંખ્યા શોધવા નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરો.

$$\text{મૃત્યુ સંખ્યા} = \frac{\text{વસ્તી} \times \text{દરહજારે મૃત્યુ}}{1000}$$

ઉંમર	A- શહેર		મૃત્યુ સંખ્યા	A-શહેર		મૃત્યુ સંખ્યા	XW
	વસ્તી	દર હજારે મૃત્યુ X		વસ્તી W	મૃત્યુ દર		
5 થી ઓછી	3500	50	175	1600	60	96	80,000
5-25	5500	60	330	2400	35	84	1,44,000
25-50	4500	30	135	3000	25	75	90,000
50 થી વધુ	2500	60	150	3500	50	175	2,10,000
કુલ	16,000	–	790	10,500	–	430	5,24,000

A શહેરની મૃત્યુ સંખ્યા $= \frac{3500 \times 50}{1000} = 175, \quad \frac{5500 \times 60}{1000} = 330$ ....

.... તેવી જ રીતે 135, 150 મેળવો.

B શહેરની મૃત્યુ સંખ્યા $= \frac{1600 \times 60}{1000} = 96, \quad \frac{2400 \times 35}{1000} = 84$

...... તેવી જ રીતે 75, 175 મેળવો.

A શહેરનો સાદો મૃત્યુ દર $= \frac{\text{A શહેરની કુલ મૃત્યુ સંખ્યા}}{\text{A શહેરની કુલ વસ્તી}} \times 1000$

$$= \frac{790}{16000} \times 1000$$

$$= 49.38$$

B શહેરનો સાદો મૃત્યુ દર $= \frac{\text{B શહેરની કુલ મૃત્યુ સંખ્યા}}{\text{B શહેરની કુલ વસ્તી}} \times 1000$

$$= \frac{430}{10,500} \times 1000$$

$$= 40.95$$

B શહેરની પ્રમાણિત ગણતા B શહેરની વસ્તી = W

∴ B શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુ દર = B શહેરનો સાદો મૃત્યુ દર

$$= 40.95$$

A શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુ દર $= \frac{\Sigma \times W}{\Sigma W}$

$$= \frac{5,24,000}{10,500}$$

$$= 49.90$$

B શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુ દર A શહેર કરતા ઓછો છે તેથી B શહેર આરોગ્યની દષ્ટિએ ચઢિયાતું છે.

(યાદ રાખો)

નોંધ : જો દાખલામાં ઊંમરગાળા મુજબ મૃત્યુ સંખ્યા આપેલ હોય તો દરેક ઊંમરગાળાની મૃત્યુ દર નીચેના સૂત્રથી શોધો.

$$\text{દરેક ઊંમરગાળાનો મૃત્યુ દર} = = \frac{\text{ઊંમરગાળાની મૃત્યુ સંખ્યા}}{\text{ઊંમરગાળાની વસ્તી}} \times 1000$$

જો દાખલામાં દરેક ઊંમરગાળા મુજબ મૃત્યુ દર આપેલ હોય તો દરેક ઊંમર ગાળા માટે મૃત્યુ સંખ્યા નીચેના સૂત્રથી શોધો.

$$\text{દરેક ઊંમરગાળાની મૃત્યુ સંખ્યા} = \frac{\text{વસ્તી} \times \text{મૃત્યુ દર}}{1000}$$

ઉદાહરણ : 6 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી શહેર-B ને પ્રમાણિત ગણી બંને શહેરની આરોગ્યની દષ્ટિએ સરખામણી કરો.

	શહેર-A		**શહેર-B**	
ઉંમર	**વસ્તી**	**મૃત્યુ સંખ્યા**	**વસ્તી**	**મૃત્યુ દર**
0-15	8700	435	4000	60
15-40	13750	825	6000	35
40-80	11200	336	7200	25
80 થી વધુ	6250	375	8700	50

જવાબ : અહીં શહેર-Aમાં મૃત્યુ સંખ્યા આપેલ છે. જ્યારે શહેર-Bમાં મૃત્યુ દર આપલે છે. તેથી સૌપ્રથમ શહેર-Bની મૃત્યુ સંખ્યા શોધો ત્યારબાદ શહેર-B પ્રમાણિત છે તેની વસ્તી = W અને શહેર-Aનો મૃત્યુ દર (X) શોધાય જે નીચે મુજબ છે.

શહેર-A				**શહેર-B**			**XW**
ઉંમર	**વસ્તી**	**મૃત્યુ સંખ્યા**	**(X)**	**વસ્તી W**	**મૃત્યુ દર**	**મૃત્યુ સંખ્યા**	
0-15	8700	435	50	4000	60	240	2,00,000
15-40	13750	825	60	6000	35	210	3,60,000
40-80	11200	336	30	7200	25	180	2,16,000
80 થી વધુ	6250	375	60	8700	50	435	5,22,000
કુલ	39,900	1971	–	25900	–	1067	12,98,000

$$\text{B શહેરની દરેક ઊંમરગાળાની મૃત્યુ સંખ્યા} = \frac{\text{વસ્તી} \times \text{મૃત્યુ દર}}{1000}$$

$= \frac{4000 \times 60}{1000} = 240$, ... તેવી જ રીતે, 210, 180, 435 મળશે.

A શહેરની દરેક ઊંમર ગાળાનો મૃત્યુ દર $= \frac{\text{મૃત્યુ સંખ્યા}}{\text{વસ્તી}} \times 1000 = \frac{435}{8700} \times 1000$ = 50 – તેવી રીતે 60, 30, 60 મળશે.

$$\text{A શહેરનો સાદો મૃ. દર} = \frac{\text{A શહેરની કુલ મૃત્યુ સંખ્યા}}{\text{A શહેરની કુલ વસ્તી}} \times 1000$$

$$= \frac{1971}{39,900} \times 1000$$

$$= 49.40$$

$$\text{B શહેરનો સાદો મૃ. દર} = \frac{\text{B શહેરની કુલ મૃત્યુ સંખ્યા}}{\text{B શહેરની કુલ વસ્તી}} \times 1000$$

$$= \frac{1065}{25900} \times 1000$$

$$= 41.12$$

B શહેરનો પ્રમાણિત ગણતા B શહેરોની વસ્તી = W

∴ B શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુ દર = B શહેરનો સાદો મૃત્યુ દર

= 41.12

$$\text{A શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુ દર} = \frac{\Sigma \times W}{\Sigma W}$$

$$= \frac{12,98,000}{25900}$$

$$= 50.12$$

B શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુદર ઓછો છે તેથી B શહેર વધુ ચઢિયાતુ છે.

ઉદાહરણ : 7 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી કયુ. શહેર આરોગ્યની દૃષ્ટિએ ચઢિયાતુ છે તે કહો. (શહેર-Aને પ્રમાણિત ગણો.)

ઉંમર	**શહેર-A**		**શહેર-B**	
	વસ્તી (હજારમાં)	**મૃત્યુ સંખ્યા**	**વસ્તી**	**મૃત્યુ સંખ્યા**
0-5	9	108	5500	77
5-50	27	135	27500	165
15-80	63	504	62500	250
80 થી વધુ	8	552	6500	234

જવાબ : અહીં શહેર-Aની વસ્તી હજારમાં આપેલ છે. તેથી જે સરવાળો મળે તેથી 1000 વડે ગુણો અને પછી સૂત્રમાં લખો.

ઉંમર	શહેર-A		શહેર-B			XW
	વસ્તી (હજારમાં) W	મૃત્યુ સંખ્યા	વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા	શહેર-B મૃત્યુ X દર	
0-5	9	108	5500	77	14	126
5-50	27	135	27500	165	6	162
50-80	63	504	62,500	250	4	252
80 થી વધુ	8	552	6500	2340	36	288
કુલ	107	1299	1,02,000	726	–	828

સાદા મૃત્યુ દરની ગણતરીમાં શહેરની Aની કુલ વસ્તી = 107 × 1000 = 1,07,000 લેવાય.

(તેવી જ રીતે જો કોઈ દાખલામાં વસ્તી લાખમાં એવું લખેલ હોય તો તે વસ્તીના સરવાળાને એક લાખ વડે ગુણાય)

શહેર Aનો સાદો મૃત્યુ દર $= \frac{\text{A શહેરની કુલ મૃત્યુ સંખ્યા}}{\text{A શહેરની કુલ વસ્તી}} \times 1000$

$= \frac{1299}{1,07,000} \times 1000$

$= 12.14$

B શહેરનો સાદો મૃ. દર $= \frac{\text{B શહેરની કુલ મૃત્યુ સંખ્યા}}{\text{B શહેરની કુલ વસ્તી}} \times 1000$

$= \frac{726}{1,02,000} \times 1000$

$= 7.12$

A શહેરનો પ્રમાણિત ગણતા A શહેરની વસ્તી = W

∴ A શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુદર = A શહેરનો સાદો મૃ. દર

$= 12.14$

B શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુ દર $= \frac{\Sigma \times W}{\Sigma W}$

$= \frac{828}{107}$

$= 7.74$

B શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુ દર A શહેર કરતા ઓછો છે તેથી તે શહેર આરોગ્યની દૃષ્ટિએ ચઢિયાતું છે.

ઉદાહરણ : 8 બે શહેરો વિશેની નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી બંને શહેરના સાદા અને પ્રમાણિત મૃત્યુદરો શોધીને સરખાવો.

ઉંમર (વર્ષમાં)	શહેર-A		શહેર-B		
	વસ્તી (હજારમાં)	દર હજારે મૃત્યુ	વસ્તી (હજારમાં)	દર હજારે મૃત્યુ	પ્રમાણિત વસ્તી (હજારમાં)
0-5	8	40	10	45	12
5-30	42	20	52	20	40
30-60	30	10	30	12	42
60 થી વધુ	20	30	18	25	16

જવાબ : અહીં પ્રમાણિત વસ્તી = W આપી દેવામાં આવેલ છે તેથી કોઈપણ શહેરની વસ્તીને પ્રમાણિત ધારવાની નથી. બીજુ બંને શહેરોના મૃત્યુદર આપેલા છે પરંતુ મૃત્યુ સંખ્યા આપેલ નથી તે નીચેના સૂત્રની મદદથી શોધશે.

$$\text{મૃત્યુ સંખ્યા} = = \frac{\text{વસ્તી દર} \times \text{દર હજારે મૃત્યુ}}{1000} \quad \text{જેમ કે} = \frac{8000 \times 40}{1000} = 320 \text{ તેવી જ રીતે } 840,300,600$$

ઉંમર વર્ષમાં –	શહેર-A		શહેર-B		પ્રમાણિત	શહેર-A	શહેર-B		
	વસ્તી હજારમાં	દરહજારે મૃત્યુ X_1	વસ્તી (હજારમાં)	દર હજારે મૃત્યુ X_2	વસ્તી (હજારમાં) W	ની મૃત્યુ –	ની મૃત્યુ –	W_{X1} –	W_{X2} –
0-5	8	40	10	45	12	320	450	480	540
5-30	42	20	52	20	40	840	1040	800	800
30-60	30	10	30	12	42	300	360	420	504
60 થી વધુ	20	30	18	25	16	600	450	480	400
કુલ	100	–	110	–	110	2060	2300	2180	2244

$$\text{A શહેરનો સાદો મૃત્યુ દર} = \frac{\text{A શહેરની કુલ મૃ. સં.}}{\text{A શહેરની કુલ વસ્તી}} \times 1000$$

$$= \frac{2060}{1,00,000}$$

$$= 20.6$$

$$\text{B શહેરનો સાદો મૃત્યુ દર} = \frac{\text{B શહેરની કુલ મૃત્યુ સંખ્યા}}{\text{B શહેરની કુલ વસ્તી}} \times 1000$$

$$=\frac{2300}{110,000}\times 1000$$

$$= 20.91$$

A શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુ દર $= \frac{\Sigma X_1 W}{\Sigma W}$

$$=\frac{2180}{110}$$

$$= 19.82$$

B શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુદર $=\frac{\Sigma X_2 W}{\Sigma W}$

$$=\frac{2244}{110} = 20.4$$

A શહેરનો પ્રમાણિત મૃત્યુ દર ઓછો હોવાથી તે શહેર વધુ ચડિયાતુ છે.

13.9 પ્રજનન દર : (Fertility Rate)

13.9.1 સારાંશ :

આપણે અગાઉ જાણકારી મેળવી તે મુજબ સાદા જન્મદરમાં કુલ સરેરાશ વસ્તીને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. પરંતુ સ્ત્રીઓની સંખ્યા અને તેઓની ઉંમરને ધ્યાનમાં લેવામાં આવતી નથી. તેથી સાદો જન્મદર એ ફક્ત કાચો જન્મદર જ બની જાય છે. તેથી આ ખામીને દૂર કરવા પ્રજનન દરનો અભ્યાસ કરવો જરૂરી બને છે. પ્રજનન દર સ્ત્રીઓની સંખ્યા અને એક વર્ષમાં જીવતા જન્મેલા બાળકોની સંખ્યા ઉપરથી શોધવામાં આવે છે એટલે કે તેમાં એક વર્ષમાં જન્મેલા પરંતુ મૃત્યુ પામેલા બાળકોનો સમાવેશ કરવામાં આવતો નથી. પ્રજનન દરની મદદથી ભવિષ્યની વસ્તીનુ અનુમાન અને તેને અનુરૂપ આયોજન કરી શકાય છે. એટલે પ્રજનન દરની મદદથી વસ્તી વૃદ્ધિનો દર પણ જાણી શકાય છે.

13.9.2 પ્રજનન દરના પ્રકારો :

સામાન્ય રીતે તેને મુખ્યત્વે ત્રણ વિભાગમાં વહેંચવામાં આવે છે.

(1) સાદો પ્રજનન દર (GFR) (2) વિશિષ્ટ કે નિયત ઉંમરગાળા માટેનો પ્રજનન દર (SFR) (3) કુલ પ્રજન દર (TFR)

(1) સાદો પ્રજનન દર (General Fertility rate)

સાદા પ્રજનન દર ને સામાન્ય પ્રજનનદર તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે તેને ટૂંકમાં GFR વડે દર્શાવીશું.

કોઈ એક પ્રદેશમાં એક વર્ષમાં જન્મેલા અને જીવતા રહેલા કુલ બાળકોની સંખ્યાને તે પ્રદેશમાં તે વર્ષ દરમ્યાન પ્રજનન વય ધરાવતી સ્ત્રીઓની કુલ સંખ્યા વડે ભાગી તેને 1000 વડે ગુણવાથી સાદો પ્રજનન દર મેળવી શકાય છે. જે નીચેના સૂત્રથી શોધી શકાય.

$$(1)\ GFR = \frac{\text{અમુક પ્રદેશમાં એક વર્ષમાં જન્મેલા અને જીવતા રહેલા કુલ બાળકોની સંખ્યા}}{\text{તે પ્રદેશમાં તે વર્ષ દરમ્યાન પ્રજનન વય ધરાવતી સ્ત્રીઓની કુલ સંખ્યા}}\times 1000$$

$$(2)\ G.F.R = = \frac{\Sigma SFR}{\text{ઊંમર વર્ગોની સંખ્યા}}$$

જ્યાં પ્રજનવય ધરાવતી સ્ત્રીઓ એટલે 15 થી 49 વર્ષની સ્ત્રીઓની સંખ્યા અને સ્ત્રીઓની આ ઉંમરને પ્રજનન વય કે પ્રજનન ગાળા તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. આ વય દરમ્યાન સ્ત્રીઓ બાળકને જન્મ આપી શકે છે. સાદો પ્રજનન દરની મદદથી પ્રજનન વય ધરાવતી સ્ત્રીઓ એક વર્ષમાં વસ્તી વૃદ્ધિમાં કેટલો વધારો કરી શકે તે જાણી શકાય છે. સાદા પ્રજનન દરની મુખ્ય મર્યાદાઓ છે કે તેમાં કુલ નવા જન્મેલા બાળકો અને પ્રજનન વય ધરાવતી કુલ સ્ત્રીઓનો સમાવેશ થાય છે. પરંતુ સ્ત્રીઓનાં જુદા જુદા ઉંમર ગાળાને ધ્યાનમાં લેવામાં આવતા નથી. તે દરનું સાચું ચિત્ર રજુ કરી શક્તો નથી. આ ખામીને દૂર કરવા આપણે નિયત ઉંમરગાળાના પ્રજનન દરનો અભ્યાસ કરીશું.

(2) નિયત ઉંમર-ગાળાનો પ્રજનન દર (Spcific Fertility rate)

નિયત ઉંમર ગાળાના પ્રજનન દરને વિશિષ્ટ પ્રજનન દર તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. તેને આપણે SFR વડે દર્શાવીશું.

એક વર્ષમાં અમુક વિસ્તારમાં નિયત ઊંમરગાળા ધરાવતી સ્ત્રીઓએ નવા જન્મ આપેલા અને જીવતા રહેલા બાળકોની સંખ્યાને ઊંમરગાળાની સ્ત્રીઓની સંખ્યા વડે ભાગી તેને 1000 વડે ગુણવાથી નિયત ઉંમર ગાળાનો પ્રજનન દર શોધી શકાય છે જે સૂત્ર નીચે મુજબ છે.

$$SFR = \frac{\text{એક વર્ષમાં અમુક વિસ્તારમાં નિયત ઊંમરગાળો ધરાવતી સ્ત્રીઓ નવા જન્મ આપેલા અને જીવતા રહેલા બાળકોની સંખ્યા}}{\text{તે ઊંમરગાળો ધરાવતી સ્ત્રીઓ}} \times 1000$$

નિયત ઉંમરગાળાના પ્રજનન દરની મદદથી અમુક ચોક્કસ ઊંમર જૂથની સ્ત્રી કેટલા નવા બાળકોને જન્મ આપશે તે જાણી શકાય છે. દા.ત. 25-29 વર્ષની સ્ત્રીઓએ આપેલા જન્મો, તેવી જ રીતે 45-49 વર્ષની સ્ત્રીઓએ આપેલા જન્મોની સંખ્યા અહીં એ સ્પષ્ટ છે કે 25-29ના ઊંમર ગાળો ધરાવતી સ્ત્રીઓની પ્રજનન શક્તિ 45-49ના ઊંમર ગાળો ધરાવતી સ્ત્રીઓ કરતા વધુ હોય છે. આમ અહીં ઊંમરના જુદા જુદા ગાળાઓ (જેવા કે 15 - 19, 20 - 24, 25 - 29, 45 - 49 વગેરે) લઈ પ્રજનન દર શોધી અલગ અલગ વિસ્તારોના પ્રજનન દરોની સરખામણી કરી પ્રજનન દર અંગેનું સાચુ ચિત્ર રજૂ કરી શકાય છે.

(3) કુલ પ્રજનન દર : Total Fertility rate

પ્રજનન વય ગાળા દરમ્યાન દર હજાર સ્ત્રીઓએ જન્મ આપેલ કુલ બાળકોની સંખ્યાને કુલ પ્રજનન દર તરીકે ઓળખવામાં આવે છે તેને ટૂંકમાં TFR વડે દર્શાવીશુ જે નીચેના સૂત્રની મદદથી શોધી શકાય.

$TFR = \Sigma SFR \times i$

જ્યાં ΣSFR નિયત ઉંમર ગાળાનો પ્રજનન દરનો સરવાળો

i = ઉંમર વર્ગોની વર્ગ લંબાઈ

TFR ને 1000 વડે ભાગવામાં આવે તો દર સ્ત્રીએ કેટલા બાળકોનો જન્મ થાય છે તે જાણી શકાય છે.

13.9.3 પ્રજનન દરના ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ : 9

નીચેની માહિતી પરથી સાદો પ્રજનન દર (GFR) વિશિષ્ટ પ્રજનન દર (SFR) અને કુલ પ્રજનન દર (TFR) શોધો

ઉંમર (વર્ષમાં) –	સ્ત્રીઓની સંખ્યા –	જીવતા રહેલા બાળકોની સંખ્યા
15-19	40,000	1120
20-24	30,000	3800
25-29	25,000	2670
30-34	23,000	2030
35-39	16,000	700
40-44	11,000	190
45-49	5,000	8

જવાબ :

ઉંમર (વર્ષમાં)	સ્ત્રીઓની સંખ્યા	જીવતા રહેલા બાળકોની સંખ્યા	**SFR**
15-19	40,000	1120	28.00
20-24	30,000	3800	126.67
25-29	25,000	2670	106.80
30-34	23,000	2030	88.26
35-39	16,000	700	43.75
40-44	11,000	190	17.27
45-49	5000	8	1.60
કુલ	1,50,000	10,518	412.35

S.F.R (વિશિષ્ટ પ્રજનનદર) નીચે મુજબ શોધો.

15-19 વર્ષ માટે SFR = $= \frac{1120}{40,000} \times 1000$ = 28 તેવી જ રીતે બાકીના SFR શોધો.

G.F.R. = $\frac{\text{જીવતા રહેલા બાળકોની સંખ્યા}}{\text{સ્ત્રીઓ કુલ સંખ્યા}} \times 1000$

$= \frac{10,518}{1,50,000} \times 1000$

= 70.12

T.F.R = $\Sigma SFR \times i$

= 412.35×5

= 2061.75 દર હજાર સ્ત્રીઓએ જન્મેલ બાળકો

= 2.06175

= (લગભગ) 2 બાળકો દર સ્ત્રીએ

ઉદાહરણ : 10 નીચે આપેલ બે શહેરોની માહિતી ઉપરથી સાદો પ્રજનન દર (GFR), નિયત ઉંમરગાળાનો પ્રજન દર (SFR), કુલ પ્રજનન દર (TFR) અને સાદો જન્મ દર (CBR) શોધો. (શહેરની કુલ વસ્તી 4,00,000 છે.)

ઉંમર વર્ષમાં	**સ્ત્રીઓની સંખ્યા (હજારમાં)**	**જન્મ આપેલાં બાળકોની સંખ્યા**
15-20	17	442
20-25	16	1856
25-30	15	2250
30-35	15	1680
35-40	14	1190
40-45	13	455
45-50	10	50

જવાબ :

ઉંમર વર્ષમાં	**સ્ત્રીઓની સંખ્યા હજારમાં**	**જન્મ આપેલ બાળકોની સંખ્યા**	**S.F.R. નિયત ઉંમર ગાળાનો પ્રજન દર**
15-20	17	442	26
20-25	16	1856	116
25-30	15	2250	150
30-35	15	1680	112
35-40	14	1190	85
40-45	13	455	35
45-50	10	50	6
કુલ	100	7923	529

15-20ની ઉંમર ગાળાનો પ્રજનન દર (SFR) $= \frac{442}{17,000} \times 1000 = 26$

તેવી જ રીતે 116, 150 .... 5 શોધો.

સાદો પ્રજનન દર G.F.R $= \frac{\text{જન્મ આપેલ બાળકોની કુલ સંખ્યા}}{\text{સ્ત્રીઓની કુલ સંખ્યા}} \times 1000$

$= \frac{7923}{1,00,000} \times 1000$

$= 79.23$

કુલ પ્રજનન દર TFR $= \Sigma SFR \times i$

$= 529 \times 5$

= 2645 દર હજાર સ્ત્રીઓએ

= 2.645

= લગભગ 3 બાળકો દર સ્ત્રીએ

સાદો જન્મ દર C.B.R $= \frac{\text{જન્મ આપેલ બાળકોની કુલ સંખ્યા}}{\text{તે શહેરની કુલ વસ્તી}} \times 1000$

$= \frac{7923}{4,00,000} \times 1000$

$= 19.81$

ઉદાહરણ : 11 એક શહેર માટે નીચેની માહિતી ઉપરથી સાદો પ્રજનન દર (GFR) અને કુલ પ્રજનન દર (TFR) શોધો.

ઉંમર (વર્ષમાં)	સ્ત્રીઓની સંખ્યા (હજારમાં)	નિયત ઉંમર ગાળા માટેનો પ્રજનન દર (દર હજારે)
15-20	20	27
20-25	33	118
25-30	30	150
30-35	32	114
35-40	30	87
40-45	25	36
45-49	20	5

જવાબ : અહીં નિ. ઉ. ગાળાનો પ્રજનન દર (SFR) આપેલ છે તેથી તે ઉપરથી નવા જન્મેલ બાળકોની સંખ્યા નીચે મુજબ શોધો.

જન્મેલા બાળકો $= \frac{\text{સ્ત્રીઓ} \times SFR}{1000}$

15-20 વર્ષ માટે જન્મેલ બાળકો $= \frac{20,000 \times 27}{1000} = 540$

20-25 વર્ષ માટે જન્મેલ બાળકો $= \frac{33,000 \times 118}{1000} = 3894$

તેવી જ રીતે 4500, 3648, 2610, 900, 100 શોધો.

ઉંમર (વર્ષમાં) –	સ્ત્રીઓની સંખ્યા (હજારમાં)	SFR	નવા જન્મેલા બાળકો
15-20	20	27	540
20-25	33	118	3894
25-30	30	150	4500
30-35	32	114	3648
35-40	30	87	2610
40-45	25	36	900
45-49	20	5	100
કુલ	190	537	16,192

$$GFR = \frac{\text{નવા જન્મેલા બાળકોની સંખ્યા}}{\text{સ્ત્રીઓની કુલ સંખ્યા}} \times 1000$$

$$= \frac{1,6192}{1,90,000} \times 1000$$

$= 85.22$

TFR $= \Sigma SFR \times i$

$= 537 \times 5$

$= 2685$ દર હજાર સ્ત્રીઓ એ

$= 2.685$

$= 3$ (લગભગ) દર સ્ત્રીએ.

ઉદાહરણ : 12 નીચેની માહિતી ઉપરથી કુલ પ્રજનન દર અને સાદો પ્રજનન દર શોધો.

ઉંમર વર્ષમાં	SFR (વિશિષ્ટ પ્રજનનદર) (દર હજાર સ્ત્રીએ)
15-19	17
20-24	25
25-29	26
30-34	22
35-39	15
40-44	9
45-49	5
કુલ	119

જવાબ :

કુલ પ્રજનન દર (T.F.R.) $= \Sigma SFR \times i$

$= 119 \times 5$

$= 595$ (દર હજાર સ્ત્રીઓ એ)

$$\text{સાદો પ્રજનન દર (G.F.R.)} = \frac{\Sigma SFR}{\text{ઊંમર વર્ગોની સંખ્યા}}$$

$$= \frac{119}{7}$$

$= 17$ (દર હજારે)

ઉદાહરણ : 13 એક શહેરનો પ્રજનન દર 30 છે. શહેરની વસ્તીમાં દર હજાર પુરુષોએ સ્ત્રીઓની સંખ્યા 900 છે. તેમા પ્રજનન વય ધરાવતી સ્ત્રીઓ કુલ સ્ત્રીઓના 50% છે. જો શહેરની કુલ વસ્તી 3,00,000 હોય તો એક વર્ષમાં કુલ કેટલા નવા બાળકોનો જન્મ થશે ?

જવાબ :

કુલ વસ્તી = 3,00,000

પુરુષો	:	સ્ત્રીઓ
1000	:	900
10	:	9

$$\therefore \text{સ્ત્રીઓની સંખ્યા} = \frac{9}{19} \times 3,00,000$$

$= 1,42,105$

$\therefore$ પ્રજનન વય ધરાવતી સ્ત્રીઓ $= 1,42,105 \times 50\%$

$= 71,053$

$$\text{સાદો પ્રજનન દર} = \frac{\text{નવા જન્મેલા બાળકો}}{\text{પ્રજનન વય ધરાવતી સ્ત્રીઓ}} \times 1000$$

$$30 = \frac{\text{નવા જન્મેલા બાળકો}}{71053} \times 1000$$

$$\therefore \text{નવા જન્મેલા બાળકો} = \frac{30 \times 71053}{1000}$$

$= 2131.59$

$= 2132$

13.10 સ્વાધ્યાય તમારી પ્રગતિ ચકાસો

(1) એક શહેરમાં એક વર્ષ દરમ્યાન જન્મેલા કુલ 35,000 બાળકોમાંથી 700 બાળકો 1 વર્ષથી ઓછી ઊંમરમાં મૃત્યુ પામ્યા તો તે શહેર માટે બાળમૃત્યુ દર શોધો.

(જવાબ : 20 દર હજારે)

(2) એક શહેરની કુલ વસ્તી 6,00,000 છે. જો તે શહેરમાં કુલ જન્મેલા બાળકોની સંખ્યા 13,900 હોય તો તે શહેરનો સાદો જન્મદર શોધો.

(જવાબ : 23.16 દર હજારે)

(3) બે શહેરોમાં મૃત્યુ અંગે નીચે પ્રમાણે માહિતી મળે છે. તમે કયા શહેરને તંદુરસ્તીની દૃષ્ટિએ ચઢિયાતું ગણાશો ? શા માટે ? (B શહેરને પ્રમાણિત ગણો)

ઉંમર	શહેર-A		શહેર-B	
(વર્ષમાં)	વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા	વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા
5થી ઓછી	4000	100	10,000	300
5-20	6000	72	16,000	240
20-50	8000	80	24,000	240
60થી વધુ	6000	30	6000	100

(**જવાબ :** A શહેરનો CDR = 15.92, B શહેરનો CDR = 15.71 A શહેરનો SDR = 14.5 B શહેરનો S.D.R = 15.71 A શહેર ચઢિયાતું)

(4) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી કયુ શહેર આરોગ્યની દૃષ્ટિએ ચઢિયાતુ છે તે કહો. (શહેર A ને પ્રમાણિત ગણો)

	શહેર-A		શહેર-B	
ઉંમર	વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા	વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા
5થી ઓછી	20,000	300	40,000	1100
5-25	27,000	150	1,00,000	900
25-50	35,000	400	1,50,000	1600
50થી વધુ	20,000	420	50,000	2300

(જવાબ : CDR_A = 12.45, CDR_B = 17.35, SDR_A = 12.45, SDR_B = 20.45)

(5) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સાદો અને પ્રમાણિત મૃત્યુ દરો શોધો અને સરખાવો.

શહેર-A	શહેર-B		(પ્રમાણિત)	
ઉંમર	વસ્તી	મૃત્યુ દર	વસ્તી	મૃત્યુ દર
5થી ઓછી	90,000	35	90,000	35
5-50	1,50,000	22	1,50,000	25
50થી વધુ	30,000	40	48,000	25

(જવાબ : CDR_A = 28.33, CDR_B = 28.13, SDR_A = 29.06, SDR_B = 28.13)

(6) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી B શહેરને પ્રમાણિત શહેર અને A શહેરને સ્થાનિક શહેર ગણી સાદા અને પ્રમાણિત મૃત્યુદરો શોધો અને કયુ શહેર આરોગ્યની દૃષ્ટિએ ચઢિયાતુ છે તે કારણ સહિત કહો.

ઉંમર	શહેર-A		શહેર-B	
	વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા	વસ્તી	મૃત્યુ દર
15થી ઓછી	6800	306	5500	60
15-50	1,3200	792	12,200	35
50-80	10300	309	7200	25
80થી વધુ	8900	534	8300	50

(જવાબ : CDR_A = 49.52, CDR_B = 40.72, SDR_A = 51.01, SDR_B = 40.72)

(7) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી કયુ શહેર આરોગ્યની દૃષ્ટિએ વધુ ચઢિયાતુ છે તે કહો.

ઉંમર	શહેર-A (પ્રમાણિત)		શહેર-B (સ્થાનિક)	
	વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા	વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા
–	(હજારમાં)	–	–	–
0-5	8	107	5000	80
5-40	30	134	27550	160
40-80	60	504	62550	250
80થી વધુ	10	550	6550	230

(જવાબ : CDR_A = 11.99, CDR_B = 7.08, SDR_A = 11.99, SDR_B = 8.27)

(8) નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી બંને શહેરની સરખામણી કરો.

ઉંમર	શહેર-A (પ્રમાણિત)		શહેર-B (સ્થાનિક)		
	વસ્તી (હજારમાં)	દર હજારે મૃત્યુ	વસ્તી (હજારમાં)	દર હજારે મૃત્યુ	પ્રમાણિત વસ્તી (હજારમાં)
0- 5	10	42	12	43	10
5-25	35	18	54	25	45
25-50	28	13	28	10	42
50 થી વધુ	22	30	22	25	16

(જવાબ : CDR_A = 24.83, CDR_B = 23.24, SDR_A = 19.96, SDR_B = 21.02)

(9) નીચેની માહિતી પરથી સાદો પ્રજનન દર (GFR) વિશિષ્ટ પ્રજનન દર (SFR) અને કુલ પ્રજનન દર (TFR) શોધો.

ઉંમર વર્ષમાં	સ્ત્રીઓની સંખ્યા	જીવતા રહેલા બાળકોની સંખ્યા
15-19	14,000	1120
20-24	13,000	800
25-29	12500	670
30-34	12300	930
35-39	11600	700
40-44	11100	190
45-49	1500	8

(જવાબ : GFA = 58.13, TFR = 1768 (દર હજારે) SFR : 80, 61.5, 53.6, 75.6, 60.3, 17.1, 5.3)

(10) કોઈ એક શહેરની વસ્તી 5,00,000 છે અને નીચે આપેલી માહિતી પરથી સાદો જન્મદર (CBR), સાદો પ્રજનનદર (GFR), નિયત ઊંમર ગાળા માટેનો પ્રજનન દર (SFR) અને કુલ પ્રજનદર (TFR) મેળવો.

ઉંમર વર્ષમાં	સ્ત્રીઓની સંખ્યા	જીવતા રહેલા બાળકો
15-19	19	475
20-24	15	1725
25-29	13	1885
30-24	12	1320
35-39	13	1131
40-44	12	468
45-49	10	60

(જવાબ : GFR = 75.15, TFR = 2635 (દર હજાર સ્ત્રીઓએ) SFR : 25, 115, 145, 110, 87, 39, 6, CBR = 14.13)

(11)

ઉંમર	સ્ત્રીઓની સંખ્યા	પ્રજનન દર (SFR)
15-20	21	28
20-25	34	112
25-30	32	142
30-35	28	113
35-40	35	85
40-45	25	34
45-50	19	6

(જવાબ : GFR = 82.70 TFR = 2600 (દર હજાર સ્ત્રીઓએ)

(12) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી કુલ પ્રજનન દર અને સાદો પ્રજનન દર શોધો.

ઉંમર (વર્ષમાં)	વિશિષ્ટ પ્રજનન દર (દર હજાર સ્ત્રીએ)
15-19	18
20-24	27
25-29	24
30-34	20
35-39	14
40-44	8
45-49	6

જવાબ : GFR = 16.41 TFR = 585

(13) એક શહેરનો સાદો પ્રજનન દર 40 છે શહેરની વસ્તીમાં દર હજાર પુરૂષે 800 સ્ત્રીઓ છે. તેમાંથી 55% સ્ત્રીઓ પ્રજનન વય ધરાવે છે અને તે શહેરની વસ્તી 4,00,000 હોય તો નવા જન્મેલા બાળકોની સંખ્યા શોધો.

(જવાબ : 3911)

(14) એક શહેરનો સાદો પ્રજનન દર 35 છે. શહેરની કુલ વસ્તી 7,00,000 છે. જો તે શહેરની વસ્તીમાં પુરૂષો અને સ્ત્રીઓનું પ્રમાણ 6 : 4 હોય અને તે પૈકી 60% સ્ત્રીઓ પ્રજનન વય ધરાવતી હોય તો તે શહેરનો સાદો જન્મદર શોધો. (જવાબ : નવા જન્મેલા બાળકો = 5880, CBR = 8.4)

(15) વસ્તી વિષયક અભ્યાસની રીત એટલે શું ? તેની ઉપયોગિતાઓ જણાવો.

(16) વસ્તી વિષયક આંકડા એકઠા કરવાની રીતો સમજાવો.

(17) વસ્તી વિષયક આંકડા એકઠા કરવાની ખામીઓ જણાવો.

(18) સાદો જન્મદર એટલે શું ? તેનું સૂત્ર લખો.

(19) સાદો મૃત્યુદર એટલે શું ? તેનું સૂત્ર લખો.

(20) પ્રજનન દર એટલે શું ? તેના પ્રકારોના નામ લખો.

(21) સાદો અને પ્રમાણિત મૃત્યુ દર કેવી રીતે શોધાય ?

(22) બે શહેરોની સરખામણી કરવા કયા મૃત્યુદરો સાચુ ચિત્ર રજૂ કરતા નથી.

(23) બે શહેરોની સરખામણી કરવા કયા મૃત્યુ દરો શોધવા જોઈએ.

(24) સાદો પ્રજનન દર સૂત્ર સહિત સમજાવો.

(25) વિશિષ્ટ પ્રજનન દર અને કુલ પ્રજનન દર વિશે ટૂંકનોંધ લખો.

(26) ટૂંકનોંધ લખો : (1) નોંધણીની રીત
(2) વસ્તી ગણતરીની રીત
(3) વિશ્લેષણની રીત

13.11. નીચેના પ્રશ્નમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી જવાબ લખો. (MCQ)

(1) કોઈ એક શહેરની કુલ વસ્તી 6 લાખ છે અને તેનો સાદો જન્મ દર 22 છે. તો તે શહેરમાં જન્મેલા બાળકોની સંખ્યા = ...

(A) 13200 (B) 13.2 (C) 1320 (D) એકપણ નહીં

(2) એક શહેરમાં વર્ષ 2018 માં 60,000 લોકો વસતા હતા તે પૈકી 1850 લોકોના મૃત્યુ થયા હોય તો સાદો મૃત્યુદર = ...

(A) 32.43 (B) 30.83 (C) 36.23 (D) એક પણ નહીં

(3) અમદાવાદ શહેરના કોઈ એક વિસ્તારનો સાદો મૃત્યુદર 25.3 હોય જો તે વિસ્તારની કુલ મૃત્યુ સંખ્યા 1450 જેટલી હોય તો તે વિસ્તારની કુલ વસ્તી કેટલી ?

(A) 57312 (B) 17448 (C) 1744828 (D) એક પણ નહીં

(4) કોઈ એક વિસ્તારમાં એક વર્ષમાં 50,000 બાળકોનો જન્મ થયો હોય જેમાંથી 652 બાળકો મરણ પામ્યા હોય તો તે શહેરનો બાળમૃત્યુ શોધો.

(A) 13.04 (B) 76.69 (C) 18.69 (D) એકપણ નહીં

(5) નીચેની માહિતી ઉપરથી સાદો મૃત્યુ દર શોધો.

ઉંમર	વસ્તી	મૃત્યુ દર
30 થી ઓછી	9000	100
30 થી વધુ	6000	100

(A) 200(B) શૂન્ય (C) 100 (D) એક પણ નહીં

(6) એક શહેરની નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી મૃત્યુ દર શોધો.

	ઉંમર	વસ્તી	મૃત્યુ સંખ્યા
(A)	25 થી ઓછી	4500	430
(B)	25થી વધુ	9500	800

(A) 11.38 (B) 87.86 (C) 8.786 (D) એકપણ નહીં

(7) કોઈ એક પ્રદેશમાં જન્મેલા અને જીવતા રહેલા બાળકોની સંખ્યા 130 છે. તથા તે પ્રદેશમાં પ્રજનન વય ધરાવતી સ્ત્રીઓની સંખ્યા 3600 હોય તો સાદો પ્રજનન દર = ...

(A) 13.01 (B) 27.69 (C) 36.11 (D) એક પણ નહીં

(8) $\sum$ S F R $\times$ i = ... (જ્યાં i = વર્ગ લંબાઈ)

(A) GFR (B) CBR (C) CDR (D) એક પણ નહીં

(9) એક શહેર માટે જુદા જુદા વય જૂથ માટે વર્ગાન્તર 5 હોય તેવા નિયત ઉંમરગાળાના પ્રજનન દર અનુક્રમે 16, 92, 110, 100, 70, 23, 3 હોય તો કુલ પ્રજનન દર શોધો.

(A) 2070 (દર હજારે) (B) 414 (દર હજારે)

(C) 82.8 (દર હજારે) (D) એક પણ નહીં

(10) એક વિસ્તારની કુલ વસ્તી 50 લાખ છે. તેનો સાદો પ્રજનન દર 65 અને સાદો જન્મદર 24 જેટલો હોય તો તે વિસ્તારમાં પ્રજનન વય ગાળામાં હોય તેવી સ્ત્રીઓ = ...

(A) 12,000 (B) 18,46,154 (C) 1,20,000 (D) એકપણ નહીં

(11) એક શહેરમાં પ્રજનન ગાળામાં હોય તેવી સ્ત્રીઓની કુલ સંખ્યા 2,25,000 છે. અને તેનો સાદો પ્રજનન દર 40 હોય તો તે શહેરમાં એક વર્ષમાં કુલ કેટલા બાળકો જન્મેલા હશે ?

(A) 2250 (B) 5625 (C) 9000 (D) એકપણ નહીં

(12) કોઈ એક વિસ્તારનો SFR અનુક્રમે 62, 112, 115, 102, 62, 34, 12 હોય તો GFR શોધો.

(A) 499 (B) 71.29 (C) 49.9 (D) એક પણ નહીં

(13) CBR .... GFR

(A) <   (B) =   (C) >   (D) એક પણ નહીં

(14) એક પ્રમાણિત શહેરનો CDR = 20.6 હોય તો તે શહેરનો SDR = ...

(A) 20.6   (B) 2060   (C) 2.06   (D) એકપણ નહીં

(15) એક શહેરનો CBR = 25 અને તે શહેરની વસ્તી = 5,00,000 હોય તો જન્મેલા બાળકોની સંખ્યા = ...

(A) 1250   (B) 7500   (C) 12500   (D) એકપણ નહીં

(16) કોઈ એક પ્રમાણિત શહેર માટે SDR_A .... CDR_A

(A) ≥   (B) ≠   (C) =   (D) એક પણ નહીં

(17) એક વિસ્તારોની આરોગ્યની દૃષ્ટિએ સરખામણી કરવા માટે .... ઉપયોગી છે.

(A) પ્રમાણિત મૃત્યુદર (B) સાદો જન્મદર (C) સાદો પ્રજનનદર (D) એકપણ નહીં

(18) સ્ત્રીઓના .... વય ગાળાને પ્રજનવય ગાળા તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

(A) 15 – 20   (B) 15 – 40   (C) 15 – 49   (D) એક પણ નહીં

13.12 વૈકલ્પિક પ્રશ્નોના જવાબો :

(1) A, 13200	(2) B. 30.83	(3) A, 57312	(4) D, 1304
(5) C, 100	(6) B, 87.86	(7) C, 36.11	(8) D, એક પણ નહિ
(9) A, 2070 (એકમો)	(10) B, 1846,154	(11) C, 9000	
(12) B, 71.29			
(13) C, > 0, >	(14) A, 20.6	(15) C, 12500	
(16) C =	(17) A, પ્રમાણિત મૃત્યુ દર	(18) C, 15 – 49	

13.13 ચાવીરૂપ શબ્દો :

- વસ્તી વિષયક આંકડા – માનવ વિષયક (જન્મ થી મૃત્ય સુધીના) આંકડાઓ.
- જન્મ નોંધ – જન્મનાર વ્યક્તિની માહિતી જેમકે જન્મ તારીખ, સ્થળ, જાતિ, માતા-પિતા..... વગેરે માહિતીની નોંધ કરાવવી.
- મૃત્યુ નોંધ – મરનાર વ્યક્તિની માહિતી જેમ કે મૃત્યુનું કારણ, નામ, સ્થળ ..... વગેરે માહિતીની નોંધ કરવી.
- જન્મ દર / મૃત્યુ દર – દર હજારે થયેલ જન્મ કે દર હજારે થયેલ મૃત્યુ
- પ્રજનન દર – એક વર્ષમાં જીવતા જન્મેલા બાળકોનો દર
- સાદો પ્રજનન દર – સામાન્ય પ્રજનન દર
- નિયત ઊંમર ગાળા માટેનો પ્રજનન દર – વિશિષ્ટ પ્રજનન દર

★ **સંદર્ભ ગ્રંથ**

(1) censusindia. gov. in – 2011

(2) Vital Statistis, stephen Mckenzle, 15, March 2013, Kindle. E-Book

(3) Statistical Methods, N.G. Das, Mc Grand Hill – 2010

* * *

એકમ 14	કાર્યાત્મક સંશોધન Operation Research (વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા)

14.0 ઉદ્દેશો
14.1 પ્રાસ્તાવિક
14.2 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો અર્થ
14.3 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનું ગાણિતિક સ્વરૂપ
14.4 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના લક્ષણો
14.5 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનું મહત્ત્વ
14.6 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલવાની રીતો
14.6.1 વાયવ્ય ખૂણાની રીત
(A) ઉદાહરણો
14.6.2 ન્યૂનતમ શ્રેણીની રીત
(A) ઉદાહરણો
14.6.3 વૉગેલની અંદાજી રીત
(A) ઉદાહરણો
14.7 તમારી પ્રગતિ ચકાસો.
14.7.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો
14.7.2 નીચેના વિધાનો સાચા છે કે ખોટા તે જણાવો
14.7.3 યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.
14.8 ચાવીરૂપ શબ્દો
● સંદર્ભગ્રંથ

14.0 ઉદ્દેશો :

કંપનીએ ઉત્પાદિત કરેલ વસ્તુનો જથ્થો જુદા જુદા વેચાણ કેન્દ્રો પર, તેની માંગ (જરૂરિયાત) અનુસાર નિયમિત રીતે પૂરો પાડવો પડે છે. તે માટે જે ખર્ચ થાય છે, તે ખર્ચ કેવી રીતે ઓછો કરી શકાય તે વિકટ પ્રશ્ન છે. આવા જુદા જુદા પ્રશ્નોનો અભ્યાસ કરી જુદી જુદી રીતો દ્વારા ઉકેલ મેળવવામાં આવે છે. આવી રીતોનો અભ્યાસ કરી વિદ્યાર્થીઓ વ્યવહારિક રીતે પણ પરિવહન ખર્ચ ઘટાડી શકે તેવા હેતુ માટે આ પ્રકરણનો અભ્યાસ વિદ્યાર્થીઓને ખૂબ જ ઉપયોગી પુરવાર થશે.

14.1 પ્રસ્તાવના :

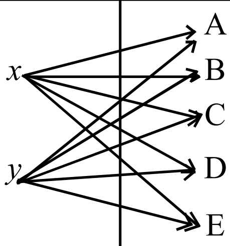
કાર્યાત્મક સંશોધનમાં વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા એક આગવું સ્થાન ધરાવે છે. વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા એ સુરેખ આયોજનની સમસ્યાનું એક વિશિષ્ટ સ્વરૂપ છે. વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો મુખ્ય ઉદ્દેશ ઓછામાં ઓછા સમયે અને ખર્ચે કંપનીમાં ઉત્પાદિત થયેલ વસ્તુઓને વેચાણ કેન્દ્રો પર પહોંચાડવાનો હોય છે. દા.ત. કોઈ એક વસ્તુનું ઉત્પાદન કરતી કંપની જુદી જુદી ત્રણ ફેક્ટરીઓમાં વસ્તુનું ઉત્પાદન કરે છે અને 8 વેચાણ

કેન્દ્રો પર તેનું વેચાણ કરવામાં આવે છે. હવે આ ફેક્ટરીઓ પરથી જે તે વેચાણ કેન્દ્રોની જરૂરિયાત અનુસાર કેટલા એકમોનો જથ્થો કઈ ફેક્ટરી પરથી કયા વેચાણ કેન્દ્રો પર પહોંચાડવાથી સમય અને ખર્ચ ઓછો થાય તે નક્કી કરવાનું છે, આવી સમસ્યાને વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા કહે છે.

14.2 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો અર્થ :

વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા એ ઉત્પાદિત થયેલ જથ્થાને વેચાણ કેન્દ્ર પર પહોંચાડવા થતાં ખર્ચને કઈ રીતે ઓછામાં ઓછો કરી શકાય તેની સાથે સંકળાયેલો છે. એક વસ્તુના જથ્થાને જુદા જુદા ઉદ્ભવસ્થાનો (જેમ કે કારખાનું, ફેક્ટરી, ઉત્પાદન કેન્દ્ર) પરથી જુદા જુદા પ્રાપ્તિસ્થાનો (જેવા કે વેચાણ કેન્દ્રો, ગોડાઉનો, વખાર, દુકાનો વગેરે) પર પહોંચાડવાનો હોય છે અને આ જથ્થો પહોંચાડવા માટે થતો ખર્ચ અને સમયને ઓછામાં ઓછો કરવાનો હોય છે, જેથી કંપનીને વધુમાં વધુ ફાયદો પ્રાપ્ત થઈ શકે.

વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા સમજવા માટે નીચે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ પરિસ્થિતિ તપાસીએ.

પુરવઠો	ફેક્ટરી (ઉદ્ભવસ્થાન)	ગોડાઉન (પ્રાપ્તિસ્થાન)	જરૂરિયાત
a_1 a_2			b_1 b_2 b_3 b_4 b_5

અહીં ઉત્પાદક પાસે બે ફેક્ટરીઓ x અને y માં વસ્તુનું ઉત્પાદન થાય છે અને પાંચ વેચાણકેન્દ્રો A, B, C, D અને E પર આ ઉત્પાદિત જથ્થાને નિયમિતપણે પહોંચાડવાનો છે. દરેક ફેક્ટરીનો પુરવઠો a_1 અને a_2 એકમો છે. જ્યારે પ્રત્યેક વેચાણકેન્દ્રની જરૂરિયાત અનુક્રમે b_1, b_2, b_3, b_4 અને b_5 એકમો છે. કોઈપણ ફેક્ટરી (ઉદ્ભવસ્થાન) પરથી કોઈપણ વેચાણકેન્દ્ર (પ્રાપ્તિસ્થાન) પર વસ્તુના એકમો મોકલવાનો એક એકમદીઠ ખર્ચ આપેલ હોય. તો કઈ ફેક્ટરીથી કયા વેચાણ કેન્દ્ર પર વસ્તુના કેટલા એકમો, જરૂરિયાત મુજબ મોકલવા જોઈએ કે જેથી વાહન-વ્યવહારના પરિવહનનો કુલ ખર્ચ ઓછામાં ઓછો (ન્યૂનતમ) થાય. આ પ્રશ્નને વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા કહેવામાં આવે છે. જ્યારે વાહન-વ્યવહારની સમસ્યામાં ઘણા બધા ઉત્પત્તિસ્થાનો અને પ્રાપ્તિસ્થાનો હોય ત્યારે તેનો ચાર્ટ બનાવવાથી સમજવામાં અઘરો પડશે તેથી આપણે તેને કોષ્ટક સ્વરૂપે રજૂ કરીશું. તેને વાહન વ્યવહારની સમસ્યાનું ગાણિતિક સ્વરૂપ કહેવાય છે.

14.3 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનું ગાણિતીક સ્વરૂપ :

વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનું ગાણિતીક સ્વરૂપ નીચે મુજબ મેળવી શકાય. ધારો કે, જુદા જુદા m ઉદ્ભવસ્થાનો (ઉત્પાદન કેન્દ્રો) O_1, O_2 .... O_i .... O_m છે, જે દરેક ઉદ્ભવસ્થાનોના પુરવઠા અનુક્રમે a_1, a_2 .... a_i .... a_m એકમો છે અને જુદા જુદા n પ્રાપ્તિસ્થાનો (વેચાણકેન્દ્રો) D_1, D_2 .... D_j .... D_n છે. જે દરેક પ્રાપ્તિસ્થાનોની જરૂરિયાત અનુક્રમે b_1, b_2 .... b_j .... b_n એકમો છે. ઉદ્ભવસ્થાન O_i માંથી પ્રાપ્તિસ્થાન D_j પર મોકલવામાં આવતા એકમોની સંખ્યા x_{ij} વડે દર્શાવીએ. તેમજ ઉદ્ભવસ્થાન O_i માંથી પ્રાપ્તિસ્થાન D_j પર જથ્થો મોકલવા માટે થતા ખર્ચને C_{ij} વડે દર્શાવીએ. તો દરેક ઉત્પાદન કેન્દ્રના પુરવઠાને ધ્યાનમાં રાખી પ્રાપ્તિસ્થાનોની જરૂરીયાત એવી રીતે સંતોષવામાં આવે છે કે જેથી વાહન-વ્યવહારના પરિવહનનો કુલ ખર્ચ ઓછામાં ઓછો (ન્યૂનતમ) થાય. આ વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાને ગાણિતીક સ્વરૂપમાં નીચે મુજબ લખી શકાય.

ઉદ્ભવ	પ્રાપ્તિસ્થાનો				પુરવઠો
સ્થાનો	D_1	D_2	D_i	D_n	a_i
O_1	x_{11} C_{11}	x_{12} C_{12}	x_{1j} C_{1j}	x_{1n} C_{1n}	a_1
O_2	x_{21} C_{21}	x_{22} C_{22}	x_{2j} C_{2j}	x_{2n} C_{2n}	a_2
.	. .	. .	. .	. .	.
.	. .	. .	. .	. .	.
O_i	x_{i1} C_{i1}	x_{i2} C_{i2}	x_{ij} C_{ij}	x_{2n} C_{in}	a_i
.	. .	. .	. .	. .	.
.	. .	. .	. .	. .	.
O_m	x_{m1} C_{m1}	x_{m2} C_{m2}	x_{mj} C_{mj}	x_{mn} C_{mn}	a_m
જરૂરિયાત b_j	b_1	b_2	b_j	b_n	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

ઉપરના કોષ્ટકમાં (i, j) ના ખાનામાં x_{ij} એકમો દર્શાવેલ છે, જે i માં ઉદ્ભવસ્થાન O_i થી j માં પ્રાપ્તિસ્થાન D_j તરફ મોકલવાના એકમોની સંખ્યા દર્શાવે છે. x_{ij} ની આવી $m \times n$ કિંમતો અજ્ઞાત છે. જે આપણે નક્કી કરવાની છે. જ્યારે C_{ij} i માં ઉદ્ભવ સ્થાનથી j ના નિર્ધારિત સ્થાન તરફ એ એકમ જથ્થો (માલ) મોકલવાનો એકમદીઠ ખર્ચ દર્શાવે છે. આવી $m \times n$ કિંમતો જ્ઞાત છે.

આ વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા સંતુલિત છે. એટલે કે જેટલા એકમોનો પુરવઠો સંતુલિત છે. એટલે કે જેટલા એકમોનો પુરવઠો છે તેટલા જ એકમોની માંગ છે. આ સમસ્યાને ઉકેલ મેળવવા માટે એવી x_{ij} (એકમોની ફાળવણી)ની કિંમત નક્કી કરો કે જેથી દરેક ઉદ્ભવસ્થાનો પરનો પુરવઠો પણ પૂર્ણ થાય અને દરેક પ્રાપ્તિસ્થાનોની જરૂરિયાત (માંગ) પણ સંતોષાય.

14.4 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના લક્ષણો અથવા ધારણાઓ :

(1) દરેક ઉત્પાદન કેન્દ્રો પર વસ્તુનો પ્રાપ્ય જથ્થો મર્યાદિત હોય છે.

(2) દરેક વેચાણ કેન્દ્રો પર વસ્તુઓની માંગ રહેલી હોય છે.

(3) દરેક ઉત્પાદન કેન્દ્ર પર વસ્તુનો પ્રાપ્ય જથ્થો અને દરેક વેચાણ કેન્દ્રની માંગના એકમો જાણીતા હોય છે.

(4) દરેક ઉત્પાદન કેન્દ્રો પરથી વેચાણ કેન્દ્ર પર વસ્તુનો એક એકમ પહોંચાડવાનો ખર્ચ આપેલ હોય છે.

(5) પ્રાપ્ય જથ્થો અને માંગ હંમેશા પૂર્ણાંક હોય છે.

(6) આ પ્રશ્નમાં શક્ય તેટલા ઓછા ખર્ચે જુદા જુદા વેચાણ કેન્દ્રોની માંગ જુદા જુદા ઉત્પાદન કેન્દ્રના જથ્થા દ્વારા સંતોષવાનો હોય છે.

14.5 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનું મહત્ત્વ અથવા તેના ઉપયોગો :

(1) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના અભ્યાસ દ્વારા કોઈ પણ કંપની તેના ઉત્પાદિત વસ્તુને તે કંપની સાથે સંકળાયેલ વખારો કે ગોડાઉનોમાં મોકલવા માટેનું ઓછામાં ઓછા ખર્ચે આયોજન કરી શકે છે.

(2) જુદા જુદા બસ ડેપોમાં અમુક નિશ્ચિત સંખ્યામાં બસો ઉપલબ્ધ હોય છે. તેમને જુદા જુદા ટર્મિનલ સ્થાનો પર મોકલવાની હોય છે અને દરેક ટર્મિનલ સ્થાનની જરૂરિયાત કેટલી છે તે પણ જાણતા હોઈએ છીએ. આ બસો ડેપો પરથી જુદા જુદા ટર્મિનલ સ્થાનો પર કેવી રીતે મોકલવી જોઈએ કે જેથી કુલ પરિવહન ખર્ચ ઓછું થાય કે મુસાફરોને વધુ લાભ મળે તેનું આ પદ્ધતિથી આયોજન કરી શકાય છે.

(3) જુદા જુદા બંદરો પર ઉતરતા માલને અલગ અલગ ગોડાઉન પર ઓછામાં ઓછા ખર્ચે માલને પહોંચાડવાનું આયોજન કરી શકાય છે.

(4) રેલવે દ્વારા જુદા જુદા રેલવે સ્ટેશનો પર ઉતરતા માલને જે તે વસ્તુના વખારો તરફ ન્યૂનતમ સમય કે ખર્ચે મોકલવાનું આયોજન કરી શકાય છે.

(5) નાણાંકીય રોકાણો માટેની વિવિધ યોજનાઓમાં કયા પ્રકારની યોજનામાં કેટલું રોકાણ કરી શકાય કે જેથી તેમાંથી મળતું વળતર મહત્તમ થાય તે માટેનું આયોજન કરી શકાય છે.

(6) શસ્ત્રોના ભંડારોમાંથી યુદ્ધની સરહદ પર વિવિધ પ્રકારના સંરક્ષણના સાધનો તેમજ લશ્કરી એકમોની જરૂરિયાતવાળા લશ્કરી થાણાઓ ઉપર લઘુત્તમ સમયે શસ્ત્રો મોકલવાનું આયોજન કરી શકાય છે.

14.6 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલની રીતો :

વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો પ્રારંભિક મૂળભૂત પ્રાપ્ય ઉકેલ મેળવવા માટે જુદી-જુદી રીતોમાંથી આપણે નીચે પ્રમાણેની ત્રણ રીતોનો અભ્યાસ કરીશું.

(1) વાયવ્ય ખૂણાની રીત (North-West Corner Method)

(2) ન્યૂનતમ શ્રેણિકની રીત (Least Cost Method)

(3) વૉગેલની અંદાજી રીત (Vogel's Approximation Method)

14.6.1 વાયવ્ય ખૂણાની રીત :

વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો પ્રાથમિક મૂળભૂત ઉકેલ મેળવવાની આ ખૂબ જ સરળ રીત છે. આ રીતમાં એકમદીઠ ખર્ચને ધ્યાનમાં લીધા વગર વસ્તુઓના એકમોની ફાળવણી કરવામાં આવે છે. આ રીતને નીચે મુજબ પગથીયામાં વિભાજીત કરી શકાય છે.

પગથિયું-1 : આ રીતમાં વાયવ્ય ખૂણા તરફ આવેલ ખાનામાં એટલે કે ડાબી બાજુ સૌથી ઉપરના ખાનામાં તેને અનુરૂપ હારનો (પ્રથમ હારનો) પુરવઠો અને પ્રથમ સ્તંભની જરૂરિયાત બંનેમાંથી જે ઓછા હોય તેટલા એકમો ફાળવવામાં આવે છે.

આમ આ રીતમાં (1, 1) ખાનાથી ફાળવણીની શરૂઆત થાય છે અને તેમાં પ્રથમ હારનો પુરવઠો a_1 અને પ્રથમ સ્તંભની જરૂરિયાત b_1 માંથી જે ઓછા એકમો હોય તેટલા એકમો (1,1) ખાનામાં ફાળવવામાં આવે છે. એટલે કે (1, 1) ખાનામાં લઘુત્તમ (a_1, a_2) જેટલા એકમો ફાળવવામાં આવે છે.

પગથિયું-2 (A) : જો પગથિયા-1માં પ્રથમ હારનો પુરવઠો a_1 પ્રથમ સ્તંભની જરૂરિયાત b_1 કરતાં ઓછો હોય એટલે કે $a_1 < b_1$ હોય તો (1, 1) ખાનામાં a_{11} એકમો ફાળવવામાં આવ્યા હોય છે, તેથી પ્રથમ હાર બંધ થશે. જ્યારે સ્તંભમાં $(b_1 - a_1)$ એકમો બાકી રહેશે. એટલે કે પ્રથમ હારના કોઈ પણ ખાનામાં ફાળવણી થઈ શકશે નહિ. હવે બીજી હારમાં પ્રથમ સ્તંભ (2, 1) ખાનામાં જાઓ અને તેમાં એકમોથી ફાળવણી કરવા માટે પગથિયું-1ને અનુસરો.

(B) જો પગથિયું-1માં પ્રથમ સ્તંભની જરૂરિયાત b_1 પ્રથમ હારની માંગ a_1 કરતાં ઓછી હોય એટલે કે $b_1 < a_1$ હોય તો (1, 1) ખાનામાં b_1 એકમો ફાળવવામાં આવતા હોય છે. તેથી પ્રથમ સ્તંભ બંધ થશે. જ્યારે પ્રથમ હારમાં $(a_1 - b_1)$ એકમો બાકી રહેશે. હવે બાજુમાં પ્રથમ હાર અને બીજા સ્તંભ એટલે કે (1, 2) ખાનામાં જાઓ અને તેમાં એકમોની ફાળવણી કરવા માટે પગથિયું-1 અનુસરો.

પગથિયું-3 : આપેલ ઉદ્ભવસ્થાનોના પુરવઠા દ્વારા બધા જ પ્રાપ્તિસ્થાનોની જરૂરિયાત સંતોષાય ત્યાં સુધી ઉપર મુજબની રીતનું પુનરાવર્તન કરો. એટલે કે વાહન-વ્યવહારના કોષ્ટકમાં જમણી બાજુના સૌથી નીચે (અગ્નિ ખૂણામાં)ના ખાનામાં એકમોની ફાળવણી કરવામાં ન આવે ત્યાં સુધી આ રીતનું પુનરાવર્તન કરો.

પગથિયું-4 : આ રીતે ફાળવાયેલ તમામ એકમો x_{ij} ને ઉકેલ કહેવામાં આવે છે. આ ઉકેલ દ્વારા કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij} \cdot x_{ij}$ દ્વારા મેળવો.

14.6.1 (A) ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 : નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો મૂળભૂત પ્રાપ્ય ઉકેલ વાયવ્ય ખૂણાની રીતે મેળવો.

	D_1	D_2	D_3	પુરવઠો
O_1	8	6	14	30
O_2	2	10	4	40
O_3	8	18	10	40
જરૂરિયાત	45	35	30	110

જવાબ :

પગથિયું-1 : વાયવ્ય ખૂણામાં એકમોની ફાળવણીની શરૂઆત વાયવ્ય ખૂણાથી એટલે કે (1, 1) ખાનાથી કરવામાં આવે છે. પ્રથમ હાર a_1 નો પુરવઠો 30 એકમ અને પ્રથમ સ્તંભ D_1 ની જરૂરિયાત 45 એકમોની છે. તેથી લઘુત્તમ (30, 40) = 30 હોવાથી આ ખાનું (1, 1) માટે વધુમાં વધુ x_{11} = 30 એકમો ફાળવી શકાય છે. આ ફાળવણી બાદ પ્રથમ હારના તમામ એકમો વપરાઈ ગયા હોવાથી પ્રથમ હાર બંધ થશે. પ્રથમ સ્તંભમાં બાકી વધેલા એકમો 45 – 30 = 15 રહેશે. (1, 1) ખાનામાં 30 એકમોની ફાળવણી કરેલ છે જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

	D_1	D_2	D_3	પુરવઠો
D_1	30 8	– 6	– 14	~~30~~ 0
D_2	2	10	4	40
D_3	8	18	10	40
જરૂરિયાત	~~45~~ 15	15	30	110

પગથિયું-2 : હવે વાયવ્ય ખૂણાનું ખાનું (2, 1) છે. તેમાં O_2 હારના કુલ એકમો 40 અને D_1 સ્તંભના કુલ એકમો 15 છે. તેમાં લઘુત્તમ (40, 15) = 15 હોવાથી અહીં x_{21} એકમો ફાળવવામાં પ્રથમ સ્તંભની જરૂરિયાત પૂર્ણ થશે. તેથી તેને બંધ કરો. O_2 હારમાં પુરવઠો (40 – 15) = 25 એકમો વધશે.

પગથિયું-3 : પછીની ફાળવણી (2, 2) ખાના માટે કરો. અગાઉ પ્રમાણે અહીં લઘુત્તમ (25, 35) = 25 હોવાથી આ ખાનામાં x_{22} = 25 એકમોની ફાળવણી થશે. O_2 મી હાર બંધ થશે અને D_2 સ્તંભની જરૂરિયાત (35 – 25) = 10 એકમો વધશે. હવે બાકીના કોષ્ટકમાં (3, 2) ખાનામાં ફાળવણી થશે. જે લઘુત્તમ (10, 40) = 10 થશે તેથી (3, 2) ખાનામાં x_{32} = 10 એકમો ફાળવતાં O_3 ની હારમાં (40 – 10) = 30 એકમો વધશે અને D_2 મો સ્તંભ બંધ થશે હવે એક માત્ર (3, 3) ખાનું બાકી રહેતાં તેમાં 30 એકમોને ફાળવતાં આખા કોષ્ટકમાં ફાળવણી પૂર્ણ થશે. કોષ્ટકમાં વહેંચણી કરેલા એકમોનો ખાનાની ડાબી બાજુ ઉપર તરફ⌋ માં દર્શાવેલા છે.

	D_1	D_2	D_3	પુરવઠો
D_1	30 8	– 6	– 14	~~30~~ 0
D_2	15 2	25 10	– 4	~~40~~ ~~25~~ 0
D_3	– 10	10 30	30 10	~~40~~ ~~30~~ 0
જરૂરિયાત	~~45~~ ~~15~~ 0	~~35~~ ~~10~~ 0	~~30~~ 0	110

પગથિયું-4 : ફાળવણી કરેલ ખાનાનો ઉકેલ નીચે મુજબ છે.

$x_{11} = 30, x_{21} = 15, x_{22} = 25, x_{32} = 10$ અને $x_{33} = 30$

આ ઉપરથી વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાને કુલ ખર્ચ નીચે મુજબ મળે છે.

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij}\ x_{ij}$

$\therefore\ Z = (8 \times 30) + (2 \times 15) + (10 \times 25) + (18 \times 10) + (10 \times 30)$

$\therefore\ Z = 240 + 30 + 250 + 180 + 300$

$\therefore\ Z = 1000$

ઉદાહરણ-2 : નીચેની વાહન વ્યવહારની સમસ્યા વાયવ્ય ખૂણાની રીતે ઉકેલો અને કુલ પરિવહન ખર્ચ મેળવો.

પ્લાન્ટ	ગોડાઉન				પુરવઠો
	P	Q	R	S	
A	8	16	14	20	80
B	8	12	10	06	50
C	10	15	04	12	70
માંગ	16	70	90	24	200

ઉકેલ : વાયવ્ય ખૂણાની રીતે આપેલ સમસ્યાનો પ્રાથમિક પ્રાપ્ય ઉકેલ નીચે મુજબ મળે છે.

પ્લાન્ટ	ગોડાઉન				પુરવઠો
	P	Q	R	S	
A	[16] 8	[64] 16	– 14	– 20	~~80~~ ~~64~~ 0
B	– 8	[6] 12	[44] 10	– 6	~~50~~ ~~44~~ 0
C	– 10	– 15	[46] 4	[24] 12	~~70~~ ~~24~~ 0
માંગ	~~16~~ 0	~~70~~ ~~6~~ 0	~~90~~ ~~46~~ 0	~~24~~ 0	200

સમજૂતિ :

સૌપ્રથમ વાયવ્ય ખૂણામાં એટલે કે (1,1) ખાનામાં ફાળવણી કરેલ છે. તેથી x_{11} = લઘુત્તમ (80,16) = 16 એકમોની ફાળવણી (1,1) ખાનામાં કરેલ છે. આમ પ્રથમ સ્તંભની માંગ સંતોષાશે તેથી પ્રથમ સ્તંભ બંધ થશે. હવે બીજી ફાળવણી (1,2) ખાનામાં થશે. તેથી x_{12} = લઘુત્તમ (64,70) = 64 એકમોની ફાળવણી (1,2) ખાનામાં કરો. તેથી પ્રથમ હારનો પુરવઠો પૂર્ણ થશે, માટે પ્રથમ હાર બંધ થશે. ત્રીજી ફાળવણી (2,2) ખાનામાં x_{22} = લઘુત્તમ (50,6) = 6 એકમોની કરો તેથી બીજો સ્તંભ બંધ થશે. ચોથી ફાળવણી (2,3) ખાનામાં x_{23} = લઘુત્તમ (44, 90) = 44 એકમોની કરો. તેથી બીજી હાર બંધ થશે. પાંચમી ફાળવણી (3,3) ખાનામાં x_{33} = લઘુત્તમ (70,46) = 46 એકમોની કરો, તેથી ત્રીજો સ્તંભ બંધ થશે. છઠ્ઠી ફાળવણી (3,4) ખાનામાં x_{34} = લઘુત્તમ (24,24) = 24 એકમોની કરો. તેથી ત્રીજી હાર અને ચોથો સ્તંભની ફાળવણી પણ પૂર્ણ થશે. આમ તમામ માંગ અને પુરવઠાની ફાળવણી પૂર્ણ થશે.

મૂળભૂત ઉકેલ : $x_{11} = 16, x_{12} = 64, x_{22} = 6, x_{23} = 44, x_{33} = 46$ અને $x_{34} = 24$

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij}\ x_{ij}$

$= (8 \times 16) + (16 \times 64) + (12 \times 6) + (10 \times 44) + (4 \times 46) + (12 \times 24)$

$= 128 + 1024 + 72 + 440 + 184 + 288$

$= 2136$

ઉદાહરણ-3 : વાયવ્ય ખૂણાની રીતે નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો મૂળભૂત પ્રારંભિક ઉકેલ મેળવો. તેમજ કુલ ખર્ચ પણ મેળવો.

પ્રતિ તરફથી	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	પ્રાપ્ય જથ્થો
O_1	3	5	6	4	2	60
O_2	2	1	5	8	7	50
O_3	6	8	7	6	5	35
O_4	4	3	2	1	8	55
માંગ	20	30	40	50	60	

ઉકેલ :

પ્રતિ તરફ	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	પ્રાપ્ય જથ્થો
O_1	[20] 3	[30] 5	[10] 6	– 4	– 2	~~60~~ ~~40~~ ~~10~~ 0
O_2	– 2	– 1	[30] 5	[20] 8	– 7	~~50~~ ~~20~~ 0
O_3	– 6	– 8	– 7	[30] 6	[5] 5	~~35~~ ~~5~~ 0
O_4	– 4	– 3	– 2	– 1	[55] 8	~~55~~ 0
માંગ	~~20~~ 0	~~30~~ 0	~~40~~ ~~30~~ 0	~~50~~ ~~30~~ 0	~~60~~ ~~55~~ 0	200

ઉકેલ :

$x_{11} = 20,\ x_{12} = 30,\ x_{13} = 10,\ x_{23} = 30,\ x_{24} = 20,\ x_{34} = 30,\ x_{35} = 5,\ x_{45} = 55$

$Z = (3 \times 20) + (5 \times 30) + (6 \times 10) + (5 \times 30) + (8 \times 20) + (6 \times 30) + (5 \times 5) + (8 \times 55)$

$= 60 + 150 + 60 + 150 + 160 + 180 + 25 + 440$

$\therefore\ Z = 1225$

14.6.2 ન્યૂનતમ શ્રેણિકની રીત અથવા લઘુત્તમ ખર્ચની રીત (Matrix-Minimum Method or Least Cost Method) :

વાયવ્ય ખૂણાની રીતમાં એકમોની ફાળવણી કરતી વખતે વસ્તુનો પુરવઠો અને જરૂરિયાતને જ ધ્યાનમાં લઈ ફાળવણી કરવામાં આવે છે. પરંતુ આ સમસ્યાનો મહત્ત્વનો એકમ, ખર્ચની અવગણના કરવામાં આવે છે. તેથી આ રીતમાં સમસ્યાનો ઉકેલ મળે છે. પરંતુ ખર્ચ ઓછો થતો નથી.

ન્યૂનતમ શ્રેણિકની રીતમાં વાયવ્ય ખૂણાની રીતની મર્યાદાઓ દૂર કરી આપેલ ખર્ચ શ્રેણિકમાંથી ન્યૂનતમ ખર્ચને ધ્યાનમાં લઈ ફાળવણી કરવામાં આવે છે અને તેથી ન્યૂનતમ શ્રેણિકની રીત એ વાયવ્ય ખૂણાની રીત કરતાં વધુ સારી રીત છે. આ રીતે મૂળભૂત ઉકેલ મેળવવા માટે નીચે મુજબના પગથિયા કરવામાં આવે છે.

પગથિયું-1 : સૌપ્રથમ બધી જ હાર અને બધા જ સ્તંભમાંથી (માંગ અને પુરવઠાની કિંમત સિવાય) લઘુત્તમ ખર્ચ એટલે કે નાનામાં નાની કિંમત જે ખાનામાં હોય તે ખાનું પસંદ કરો. ધારો કે લઘુત્તમ ખર્ચ (i, j) ખાનામાં છે. તેથી તેને અનુરૂપ પુરવઠો a_i અને માંગ b_j એકમોમાંથી જે ઓછા હોય તેટલા એકમોની ફાળવણી (i, j) ખાનામાં કરો. આ ફાળવણીને x_{ij} વડે દર્શાવીશું.

પગથિયું-2 (A) : જો i મી હારમાં પુરવઠો a_i કરતાં j મા સ્તંભની માંગ b_j ની કિંમત વધુ એટલે કે $[a_i < b_j]$ હોય તો $x_{ij} = a_i$ એકમોની ફાળવણી કરો તેથી i મી હારનો પુરવઠો પૂર્ણ થશે. માટે i મી હાર બંધ થશે. એટલે કે હવે i મી હારના કોઈપણ ખાનામાં ફાળવણી કરી શકાશે નહિ અને j માં સ્તંભની માંગ $b_j - a_i$ બાકી રહેશે.

(B) જો i મી હારનો પુરવઠો a_i કરતાં j માં સ્તંભની માંગ b_j ઓછી $[a_i > b_j]$ હોય તો $x_{ij} = b_j$ એકમોની ફાળવણી કરો, તેથી j માં સ્તંભની માંગ સંતોષાશે માટે j મો સ્તંભ બંધ થશે.

(C) જો લઘુત્તમ ખર્ચના ઘટકો એક કરતાં વધારે વખત આવતા હોય ત્યારે નીચે પ્રમાણે ફાળવણી કરો.

– લઘુત્તમ ખર્ચવાળા ખાનાઓમાંથી જે ખાનામાં વધુ એકમોની ફાળવણી થતી હોય તે ખાનું પસંદ કરી ફાળવણી કરો.

– જો લઘુત્તમ ખર્ચવાળા ખાનાઓમાં ફાળવણી પણ સરખા એકમોની થતી હોય તો કોઈપણ એક ખાનામાં ફાળવણી કરો.

પગથિયું-3 : આપેલ ઉત્પત્તિ સ્થાનના પુરવઠા દ્વારા બધા જ પ્રાપ્તિસ્થાનોની જરૂરિયાત ન સંતોષાય ત્યાં સુધી ઉપર મુજબની રીતનું પુનરાવર્તન કરો.

14.6.2 (A) ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-4 : નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો મૂળભૂત પ્રાપ્ય ઉકેલ ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતથી મેળવો.

ઉદ્ભવ સ્થાન	પ્રાપ્તિસ્થાન				પુરવઠો
	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	5	8	4	10	105
O_2	6	1	12	3	60
O_3	9	11	3	2	60
માંગ	30	75	90	30	225

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપેલ ખર્ચ શ્રેણીકમાં લઘુત્તમ (ન્યૂનતમ) ખર્ચ ધરાવતું ખાનું શોધો.

આપેલ ખર્ચ શ્રેણીકમાં લઘુત્તમ ખર્ચ 1 એકમ છે, જે (2,2) ખાનામાં છે. માટે x_{22} = લઘુત્તમ (60,75) = 60 (જ્યાં (60,75) એ લઘુત્તમ ખર્ચ ખાનાની હારનો પુરવઠો અને સ્તંભની જરૂરિયાત છે.) એકમોની ફાળવણી કરેલ છે. તેથી બીજી હારનો પુરવઠો પૂર્ણ થશે. તેથી બીજી હાર બંધ થશે. જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

ઉદ્ભવ સ્થાન	D_1	D_2	D_3	D_4	પુરવઠો
O_1	5	8	4	10	105
O_2	– 6	[60] 1	– 12	– 3	~~60~~ 0
O_3	9	11	3	2	60
માંગ	30	~~75~~ 15	90	30 0	225

હવે બાકીના કોષ્ટકમાં (બીજી હાર સિવાયના) લઘુત્તમ ખર્ચ (3,4) ખાનામાં 2 એકમ છે. આમ x_{34} = લઘુત્તમ (60,30) = 30 એકમોની ફાળવણી કરીશું તેથી ચોથો સ્તંભ બંધ થશે. જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

ઉદ્ભવ સ્થાન	D_1	D_2	D_3	D_4	પુરવઠો
O_1	5	8	4	10	105
O_2	– 6	[60] 1	– 12	– 3	~~60~~ 0
O_3	9	11	3	[30] 2	~~60~~ 30
માંગ	30	~~75~~ 15	90	~~30~~ 0	225

હવે બાકીના કોષ્ટક (બીજી હાર અને ચોથો સ્તંભ સિવાયનો) લઘુત્તમ ખર્ચ (3,3) ખાનામાં 3 એકમ છે. માટે x_{33} = લઘુત્તમ (30,90) = 30 એકમોની ફાળવણી થશે. તેથી ત્રીજી હાર પણ બંધ થશે. હવે બાકીના શ્રેણિકમાં લઘુત્તમ ખર્ચ (1,3) ખાનામાં 4 એકમ છે. માટે x_{13} = લઘુત્તમ (105,60) = 60 એકમોની ફાળવણી થશે. હવે ન્યૂનતમ ખર્ચ (1,1) ખાનામાં 5 એકમ છે. માટે x_{11} = લઘુત્તમ (45,30) = 30 એકમોની ફાળવણી થશે. હવે ફક્ત (1,2) ખાનું બાકી રહેશે. જ્યાં પુરવઠો = 15 એકમો બાકી રહે છે. માટે x_{12} = 15 એકમોની ફાળવણી કરો. તેથી તમામ ફાળવણી પૂણ થશે. જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

ઉદ્ભવ સ્થાન	D_1	D_2	D_3	D_4	પુરવઠો
O_1	[30] 5	[15] 8	[60] 4	– 10	~~105~~ ~~45~~ ~~15~~ 0
O_2	– 6	[60] 1	– 12	– 3	~~60~~ 0
O_3	– 9	– 11	[30] 3	[30] 2	~~60~~ ~~30~~ 0
માંગ	~~30~~ 0	~~75~~ ~~15~~ 0	~~90~~ ~~60~~ 0	~~30~~ 0	225

ઉકેલ : $x_{11} = 30$, $x_{12} = 15$, $x_{13} = 60$, $x_{22} = 60$, $x_{33} = 30$ અને $x_{34} = 30$

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij} x_{ij}$

$= (5 \times 30) + (8 \times 15) + (4 \times 60) + (1 \times 60) + (3 \times 30) + (2 \times 30)$

$= 150 + 120 + 240 + 60 + 90 + 60$

$= 720$

ઉદાહરણ-5 : લઘુત્તમ ખર્ચની રીતે નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવો.

ગોડાઉન	સ્ટોર					
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	પુરવઠો
G_1	7	6	9	12	15	30
G_2	18	8	14	5	14	15
G_3	12	9	11	10	18	20
G_4	6	11	10	7	9	5
જરૂરિયાત	14	12	16	10	18	70

સમજૂતિ :

સૌપ્રથમ આપેલ ખર્ચ શ્રેણીકમાં લઘુત્તમ ખર્ચ ધરાવતું ખાનું શોધો, જે ખાનું (2,4) માં 5 એકમ છે, માટે x_{24} = લઘુત્તમ (15,10) = 10 એકમોની ફાળવણી કરેલ છે. તેથી ચોથો સ્તંભ બંધ થશે. હવે બાકીના શ્રેણીકમાં લઘુત્તમ ખર્ચ 6 એકમવાળા બે ખાના (1,2) અને (4,1) છે. જે બંને ખાનામાં ફાળવણી જોતાં (1,2) ખાનામાં (4,1) ખાના કરતાં વધુ ફાળવણી કરી શકાય છે. તેથી પ્રથમ x_{12} = લઘુત્તમ (30,12) = 12 એકમોની ફાળવણી કરેલ છે. ત્યારબાદ x_{41} = લઘુત્તમ (5,14) = 5 એકમોની ફાળવણી કરેલ છે. તેથી બીજો સ્તંભ અને ચોથી હાર બંધ થશે. હવે બાકીના શ્રેણીકમાં લઘુત્તમ ખર્ચ 7 એકમ (1,1) ખાનામાં છે. માટે x_{11} = લઘુત્તમ (18,9) = 9 એકમોની ફાળવણી કરેલ છે. તેથી પ્રથમ સ્તંભ બંધ થશે. હવે બાકીના શ્રેણીકમાં લઘુત્તમ એકમ 9 છે. જે (1,3) ખાનામાં છે. માટે x_{13} = લઘુત્તમ (9,16) = 9 એકમોની ફાળવણી થશે. તેથી પ્રથમ હાર બંધ થશે. હવે બાકીના શ્રેણીકમાં લઘુત્તમ એકમ 9 છે. જે (3,3) ખાનામાં છે. માટે x_{33} = લઘુત્તમ (20,7) = 7 એકમોની ફાળવરી થશે. તેથી ત્રીજો સ્તંભ બંધ થશે. હવે ફક્ત પાંચમા સ્તંભમાં ઘટકો ફાળવી શકાશે તેથી પ્રથમ (2,5) ખાનામાં ફાળવણી x_{25} = લઘુત્તમ (5,18) = 5 એકમોની થશે, જ્યારે છેલ્લે (3,5) ખાનું બાકી રહેશે. જેમાં

પુરવઠો અને જરૂરિયાત બંને 13 એકમ બાકી રહે છે. તેથી x_{35} = 13 એકમોની ફાળવણી કરો. આમ, તમામ ફાળવણી પૂર્ણ થાય છે. જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

ગોડાઉન	સ્ટોર					
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	પુરવઠો
G_1	9 7	12 6	9 9	– 12	– 15	~~30~~ ~~18~~ ~~9~~ 0
G_2	– 18	– 8	– 14	10 5	5 14	~~15~~ ~~5~~ 0
G_3	– 12	– 9	7 11	– 10	13 18	~~20~~ ~~13~~ 0
G_4	5 6	– 11	– 10	– 7	9	~~5~~ 0
જરૂરિયાત	~~14~~ ~~9~~ 0	~~12~~ 0	~~16~~ ~~7~~ 0	10 0	~~18~~ ~~13~~ 0	70

ઉકેલ : $x_{11} = 9$, $x_{12} = 12$, $x_{13} = 9$, $x_{24} = 10$, $x_{25} = 5$, $x_{33} = 7$, $x_{35} = 13$, $x_{41} = 5$

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij}\, x_{ij}$

$= (7 \times 9) + (6 \times 12) + (9 \times 9) + (5 \times 10) + (14 \times 5) + (11 \times 7) + (18 \times 13) + (6 \times 5)$

$= 63 + 72 + 81 + 50 + 70 + 77 + 234 + 30$

$= 677$

ઉદાહરણ-6 : નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ લઘુત્તમ ખર્ચની રીતે મેળવો.

ઉદ્‌ભવ	પ્રાપ્તિસ્થાન				પુરવઠો
સ્થાન	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	4	6	7	4	40
O_2	5	10	9	7	20
O_3	8	6	5	8	20
જરૂરિયાત	25	10	15	30	80

સમજૂતિ :

આપેલ ખર્ચ શ્રેણીકમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક 4 બે ખાના (1,1) અને (1,4)માં આવે છે. પરંતુ ખાના (1,1)માં 25 એકમોની અને ખાના (1,4)માં 30 એકમોની ફાળવણી થઈ શકે છે. તેથી જે ખાનામાં વધુ એકમો ફાળવી શકાતા હોય તેવા ખાનામાં પ્રથમ ફાળવણી કરવા માટે x_{14} = લઘુત્તમ (40,30) = 30 એકમોની ફાળવણી થશે. તેથી ચોથો સ્તંભ બંધ થશે. બીજી ફાળવણી (1,1) ખાનામાં કરો. પરંતુ પ્રથમ હારમા (40-30) = 10 એકમો બાકી રહે છે. માટે x_{11} = લઘુત્તમ (10,25) = 10 એકમોની ફાળવણી થશે. તેથી પ્રથમ હાર પણ બંધ થશે. હવે બાકીના ખર્ચ શ્રેણીકમાં સૌથી નાનો ઘટક 5 બે વખત ખાના (2,1) અને (3,3)માં આવે છે. જે બંને ખાનામાં ફાળવણી પણ સરખી એટલે 15 એકમોની થાય છે. તેથી ગમે તે એક ખાનું પસંદ કરી ફાળવણી કરી શકાય. અહીં આપણે x_{21} = લઘુત્તમ (20,15) = 15 એકમોની ફાળવણી કરેલ છે. પછી x_{33} = લઘુત્તમ (20,15) = 15 એકમોની ફાળવણી કરીશું. તેથી પ્રથમ અને ત્રીજો સ્તંભ બંધ થશે. હવે ફક્ત બીજા સ્તંભમાં બે ખાનાઓ બાકી રહેશે. જેમાં ફાળવણી કરતાં x_{32} = લઘુત્તમ (5,10) = 5 x_{22} = લઘુત્તમ (5,5) = 5 એકમોની ફાળવણી કરતાં ફાળવણી પૂર્ણ થશે. જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

ઉદ્ભવ સ્થાન	પ્રાપ્તિસ્થાન D_1	D_2	D_3	D_4	પુરવઠો
O_1	[10] 4	– 6	– 7	[30] 4	~~40~~ ~~10~~ 0
O_2	[15] 5	[5] 10	– 9	– 7	~~20~~ ~~5~~ 0
O_3	– 8	[5] 6	[15] 5	– 8	~~20~~ ~~5~~ 0
જરૂરિયાત	~~25~~ ~~15~~ 0	~~10~~ ~~5~~ 0	~~15~~ 0	~~30~~ 0	80

ઉકેલ : $x_{11} = 10, x_{14} = 30, x_{21} = 15, x_{22} = 5, x_{32} = 5, x_{33} = 15$

કુલ લઘુત્તમ ખર્ચ = $Z = \Sigma\Sigma C_{ij} x_{ij}$

$\therefore Z = (4 \times 10) + (4 \times 30) + (5 \times 15) + (10 \times 5) + (6 \times 5) + (5 \times 15)$

$= 40 + 120 + 75 + 50 + 30 + 75$

$= 390$

14.6.3 વૉગેલની અંદાજી રીત (Vogel's Approximation Method [VAM]) :

વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના પ્રારંભિક ઉકેલ માટેની બધી જ રીતો કરતાં આ રીત વધુ ચઢિયાતી છે, કારણ કે આ રીત દ્વારા મળતો મૂળભૂત પ્રાપ્ય ઉકેલ, ઇષ્ટ ઉકેલની વધુ નજીક હોય છે. બાકીની રીતોની સરખામણીમાં વૉગેલની રીતે મેળવેલ ઉકેલમાં કુલ ખર્ચ પણ ઓછો થાય છે. વૉગેલની રીતની સમજૂતી નીચે મુજબ છે.

પગથિયું-1 : સૌપ્રથમ આપેલ સમસ્યાના ખર્ચ શ્રેણીકની દરેક હાર માટે ખર્ચની સૌથી બે નાની કિંમતો (એટલે કે હારની સૌથી નાની કિંમત અને તેના પછી આવતી નાની કિંમત) વચ્ચે તફાવત શોધવામાં આવે છે. આ તફાવતોને જે તે હારની જમણી બાજુએ છેલ્લે "હારના તફાવત" એમ મથાળા હેઠળ લખવામાં આવે છે.

પગથિયું-2 : હારના તફાવતો લખ્યા બાદ દરેક સ્તંભમાં ખર્ચની સૌથી બે નાની કિંમતો (એટલે કે સ્તંભની સૌથી નાની કિંમત અને તેના પછી આવતી નાની કિંમત. નોંધ : બે નાની કિંમતો સમાન હોય તો તફાવત 0 (શૂન્ય) આવશે.) વચ્ચેના તફાવત શોધવામાં આવે છે. આ તફાવતોને જે તે સ્તંભની નીચે "સ્તંભના તફાવત" મથાળા હેઠળ લખવામાં આવે છે.

પગથિયું-3 : હાર અને સ્તંભના તફાવતો મેળવ્યા બાદ આ બંનેમાં સૌથી મોટો તફાવત હોય તે હાર કે સ્તંભને પસંદ કરવામાં આવે છે. હવે પસંદ કરેલ હાર અથવા સ્તંભમાંથી સૌથી ઓછો ખર્ચ ધરાવતું ખાનું શોધવામાં આવે છે. ધારે કે (i, j) ખાનામાં સૌથી ઓછો ખર્ચ છે, તેથી પુરવઠો a_i અને માંગ b_j માંથી જે ઓછા હોય તેટલા એકમો (i, j) ખાનામાં ફાળવણી કરવામાં આવે છે. હવે જે હારનો પુરવઠો કે સ્તંભની જરૂરિયાત સંતોષાય હોય તે હાર કે સ્તંભ બંધ કરવામાં આવે છે.

- જો લઘુત્તમ ખર્ચ ધરાવતાં ખાના પણ એક કરતાં વધુ વખત આવતા હોય તો લઘુત્તમ ખર્ચવાળા ખાનાઓમાં વધુ એકમોની ફાળવણી કરી શકાતી હોય તેવું ખાનું પસંદ કરી ફાળવણી કરવામાં આવે છે.
- હવે જો પસંદ કરેલ લઘુત્તમ ખર્ચવાળા ખાનામાં પણ સરખા એકમોની ફાળવણી થતી હોય તેવા સંજોગોમાં તેમાંથી કોઈપણ એક ખાનું પસંદ કરી ફાળવણી કરવામાં આવે છે.

પગથિયું-4 : આપેલ સમસ્યામાં ઉત્પત્તિસ્થાનના પુરવઠા દ્વારા બધા જ પ્રાપ્તિસ્થાનોની જરૂરિયાત ન સંતોષાય ત્યાં સુધી પગથિયું-1થી પગથિયું-3ની પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરતા રહો.

14.6.3 (A) ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-7 : વૉગેલની અંદાજી રીતે નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો મૂળભૂત ઉકેલ મેળવો.

ઉદ્‌ભવ   પ્રાપ્તિસ્થાન   પુરવઠો

સ્થાન	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	5	9	8	6	30
O_2	4	7	6	9	25
O_3	10	8	3	7	45
જરૂરિયાત	20	40	30	10	100

સમજૂતિ :

સૌપ્રથમ આપેલ ખર્ચ શ્રેણીકની દરેક હાર અને દરેક સ્તંભ માટે સૌથી નાની કિંમત અને તેના પછી આવતી નાની કિંમત વચ્ચેનો તફાવત શોધવામાં આવે છે. હાર માટેના તફાવતોને જે તે હારની સામે જમણી બાજુએ છેલ્લે ''હારના તફાવત'' મથાળા હેઠળ અને સ્તંભ માટેના તફાવતોને જે તે સ્તંભની નીચે ''સ્તંભ તફાવત'' મથાળા હેઠળ નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

	D_1	D_2	D_3	D_4	પુરવઠો	હારના તફાવત
O_1	5	9	– 8	6	30	1
O_2	4	7	– 6	9	25	2
O_3	10	8	[30] 3	7	~~45~~ 15	(4)
માંગ	20	40	~~30~~ 0	10	100	
સ્તંભ તફાવત	1	1	3	1		

સમજૂતિ :

હાર અને સ્તંભના બધા જ તફાવતોમાં સૌથી મોટો તફાવત ત્રીજી હારમાં 4 છે. ત્રીજી હારમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક 3 છે, જે (3,3) ખાનામાં છે. તેથી x_{33} = લઘુત્તમ (45,30) = 30 એકમોની ફાળવણી કરો. જેથી ત્રીજા સ્તંભની માંગ સંતોષાશે અને ત્રીજી હારમાં 45 – 30 = 15 એકમોનો પુરવઠો બાકી રહેશે. અને ત્રીજો સ્તંભ બંધ થશે. બાકી રહેલા ખર્ચ શ્રેણીક માટે ફરીથી આ રીતનું પુનરાવર્તન કરો.

	D_1	D_2	D_4	પુરવઠો	હારના તફાવત
O_1	– 5	9	6	30	1
O_2	[20] 4	7	9	~~25~~ 5	(3)
O_3	– 10	8	7	15	1
માંગ	~~20~~ 0	40	10	100	
સ્તંભ તફાવત	1	1	1		

સમજૂતિ :

હાર અને સ્તંભના તફાવતોમાં હવે સૌથી મોટો તફાવત બીજી હારમાં 3 છે. આ બીજી હારમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક 4 છે જે (2,1) ખાનામાં છે, તેથી x_{21} = લઘુત્તમ (25,20) = 20 એકમોની ફાળવણી કરો, જેથી પ્રથમ સ્તંભની માંગ સંતોષાશે. તેથી પ્રથમ સ્તંભ બંધ કરો અને બીજી હારમાં 25 – 20 = 5 એકમોનો પુરવઠો બાકી રહેશે. ફરીથી આ રીતનું પુનરાવર્તન કરો.

	D_2	D_4	પુરવઠો	હારના તફાવત
O_1	9	[10] 6	~~20~~	(3)
O_2	7	– 9	5	2
O_3	8	– 7	15	1
માંગ	40	~~10~~ 0		
સ્તંભના તફાવત	1	1		

સમજૂતિ :

ઉપરના કોષ્ટકમાં હાર અને સ્તંભના બધા જ તફાવતો જોતાં હવે પ્રથમ હારમાં સૌથી મોટો તફાવત 3 છે. આ પ્રથમ હારમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક 6 છે. જે (1,4) ખાનામાં છે. માટે x_{14} = લઘુત્તમ (30,10) = 10 એકમોની ફાળવણી કરતાં ચોથો સ્તંભ બંધ થશે અને પ્રથમ હારમાં 30 – 10 = 20 એકમો બાકી રહેશે. હવે શ્રેણીકમાં ફક્ત એક જ સ્તંભ બાકી રહેશે. તેથી તફાવત શોધવાની જરૂર નથી. આ (બીજા) સ્તંભમાં સૌથી નાના ઘટકોના ક્રમ અનુસાર નીચે મુજબ ફાળવણી કરો.

	D_2	પુરવઠો
O_1	[20] 9	~~20~~ 0
O_2	[5] 7	~~5~~ 0
O_3	[15] 8	~~15~~ 0
માંગ	~~40~~ ~~35~~ ~~20~~ 0	

ઉકેલ : કોષ્ટક

	D_1	D_2	D_3	D_4	પુરવઠો
O_1	– 5	20 9	– 8	[10] 6	~~30~~ ~~20~~ 0
O_2	[20] 4	[5] 7	– 6	– 9	~~25~~ ~~5~~ 0
O_3	– 10	[15] 8	[30] 3	– 7	~~45~~ ~~15~~ 0
માંગ	~~20~~ 0	~~40~~ ~~25~~ ~~20~~ 0	~~30~~ 0	~~10~~ 0	100

ઉકેલ : $x_{12} = 20$, $x_{14} = 10$, $x_{14} = 10$, $x_{21} = 20$, $x_{22} = 5$, $x_{32} = 15$, $x_{33} = 30$

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij}\ x_{ij}$

$Z = (9 \times 20) + (6 \times 10) + (4 \times 20) + (7 \times 5) + (8 \times 15) + (3 \times 30)$

$= 180 + 60 + 80 + 35 + 120 + 90$

$Z = 565$

ઉદાહરણ-8 : નીચેની વાહનવ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વૉગેલની અંદાજી રીતથી (VAM થી) મેળવી કુલ પરિવહન ખર્ચ શોધો.

પ્લાન્ટ	માર્કેટ			
	M_1	M_2	M_3	M_4
P_1	190	300	500	100
P_2	700	300	400	600
P_3	400	100	600	200

દરેક પ્લોટનો પુરવઠો અનુક્રમે 140, 180 અને 360 એકમો છે અને દરેક માર્કેટની માંગ અનુક્રમે 100, 160, 140 અને 280 એકમોની છે.

જવાબ : સૌપ્રથમ આ પ્રશ્નને ગાણિતીક સ્વરૂપે ગોઠવતાં પ્લાન્ટના પુરવઠાને જમણીબાજુ અને દરેક માર્કેટની માંગને શ્રેણિકની નીચે લખીશું.

પ્લાન્ટ	માર્કેટ				પુરવઠો
	M_1	M_2	M_3	M_4	
P_1	190	300	500	100	140
P_2	700	300	400	600	180
P_3	400	100	600	200	360
માંગ	100	160	140	280	680

સૌ પ્રથમ ખર્ચ શ્રેણીકના દરેક હાર અને દરેક સ્તંભની સૌથી બે નાની કિંમતો વચ્ચેનો તફાવત શોધી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવીશું.

	M_1	M_2	M_3	M_4	પુરવઠો	હારના તફાવત
P_1	[100] 190	300	500	100	~~140~~ 40	90
P_2	– 700	300	400	600	180	100
P_3	– 400	100	600	200	360	100
માંગ	~~100~~ 0	160	140	280	680	
સ્તંભના તફાવત	(220)	200	100	100		

સમજૂતિ :

ઉપરના કોષ્ટકમાં હાર અને સ્તંભના તફાવતોમાં સૌથી મોટો તફાવત પ્રથમ સ્તંભમાં 220 છે. પ્રથમ સ્તંભમાં સૌથી નાની ખર્ચની કિંમત 190 છે. તેથી x_{11} = લઘુત્તમ (140, 100) = 100 એકમોની ફાળવણી કરતાં પ્રથમ સ્તંભ બંધ થશે અને પ્રથમ હારમાં 140 – 100 = 40 એકમો બાકી રહેશે. હવે બાકીના શ્રેણીકમાં ફરીથી ગણતરી કરીશું.

	M_2	M_3	M_4	પુરવઠો	હારના તફાવત
P_1	– 300	500	100	40	(200)
P_2	– 300	400	600	180	100
P_3	[160] 100	600	200	~~360~~ 200	100
માંગ	~~160~~ 0	140	200		
સ્તંભના તફાવત	(200)	100	100		

સમજૂતિ :

ઉપરના કોષ્ટકમાં હાર અને સ્તંભમાં સૌથી મોટો તફાવત P_1 (પ્રથમ હાર) અને M_2 સ્તંભમાં 200 છે. પરંતુ P_1 હારમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક 100 છે. અને M_2 સ્તંભમાં પણ સૌથી નાનો ઘટક 100 છે, તેથી ક્યાં પ્રથમ ફાળવણી કરવી તે નક્કી થતું નથી. તેથી (1,4) ખાનામાં x_{14} = લઘુત્તમ (40, 280) = 40 એકમો, જ્યારે (3,2) ખાનામાં x_{32} = લઘુત્તમ (360, 160) = 160 એકમો ફાળવણી થાય છે. જે (1,4) ખાના કરતાં વધુ છે. તેથી આપણે સૌપ્રથમ M_2 સ્તંભ પસંદ કરી (3,2) ખાનામાં 160 એકમોની ફાળવણી કરીશું. તેથી M_2 સ્તંભ બંધ થશે અને P_3 હારમાં 360 – 160 = 200 એકમો બાકી રહેશે.

	M_3	M_4	પુરવઠો	હારના તફાવત
P_1	– 500	[40] 100	~~40~~ 0	(400)
P_2	400	600	180	200
P_3	600	200	200	(400)
માંગ	140	~~280~~ 240		
સ્તંભના તફાવત	100	100		

સમજૂતિ :

ઉપરના કોષ્ટકમાં હાર અને સ્તંભના તફાવતો જોતાં સૌથી મોટો તફાવત P_1 અને P_3 હારમાં 400 છે. પરંતુ P_1 હારમાં P_3 હાર કરતાં ખર્ચનો ઘટક નાનો છે. જે (1,4) ખાનામાં 100 એકમ છે. $\therefore x_{14}$ = લઘુત્તમ (40, 280) = 40 એકમોની ફાળવણી કરીશું. તેથી P_1 હાર બંધ થશે અને M_4 સ્તંભમાં 280 – 40 = 240 એકમો બાકી રહેશે.

	M_3	M_4	પુરવઠો	હારના તફાવત
P_2	400	600	180	200
P_3	– 600	[200] 200	~~200~~ 0	(400)
માંગ	140	~~240~~ 40		
સ્તંભના તફાવત	200	(400)		

સમજૂતિ :

ઉપરના કોષ્ટકમાં હાર અને સ્તંભના તફાવતો જોતાં સૌથી મોટો તફાવત P_3 હાર અને M_4 સ્તંભમાં 400 છે. જે હાર અને સ્તંભમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક (3,4) ખાનામાં 200 છે. તેથી x_{34} = લઘુત્તમ (200, 240) = 200 ફાળવણી કરીશું. તેથી P_3 હાર બંધ થશે. હવે ફક્ત P_2 હાર બાકી રહે છે. માટે તફાવત શોધવાની જરૂર રહેતી નથી. P_2 હારના બંને ખાનામાં ફાળવણી કરો.

	M_3	M_4	પુરવઠો
P_2	[140] 400	[40] 600	~~180~~ ~~40~~ 0
માંગ	~~140~~ 0	~~40~~ 0	

ઉકેલ : કોષ્ટક

	M_1	M_2	M_3	M_4	પુરવઠો
P_1	[100] 190	– 300	– 500	40 100	~~140~~ ~~40~~ 0
P_2	– 700	– 300	[140] 400	[40] 600	~~180~~ ~~40~~ 0
P_3	– 400	[160] 100	– 600	[200] 200	~~360~~ ~~200~~ 0
માંગ	~~100~~ 0	~~160~~ 0	~~140~~ 0	~~280~~ ~~240~~ ~~40~~ 0	680

ઉકેલ : $x_{11} = 100,\ x_{14} = 40,\ x_{23} = 140,\ x_{24} = 40,\ x_{32} = 160,\ x_{34} = 200$

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij}\ x_{ij}$

$Z = (190 \times 100) + (100 \times 40) + (400 \times 140) + (600 \times 40) + (100 \times 160) + (200 \times 200)$

$= 19000 + 4000 + 56000 + 24000 + 16000 + 40000$

$Z = 159000$

ઉદાહરણ-9 : નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વૉગેલની અંદાજી રીતથી મેળવો.

	બજાર				
ફેક્ટરી	M_1	M_2	M_3	M_4	પુરવઠો
F_1	3	2	4	1	20
F_2	2	4	5	3	15
F_3	3	5	2	6	25
F_4	4	3	1	3	40
માંગ	30	20	25	25	100

જવાબ : સૌ પ્રથમ આપેલ પ્રશ્નના ખર્ચની કિંમતો લઈ હાર અને સ્તંભના તફાવતો શોધીશું.

	M_1	M_2	M_3	M_4	પુરવઠો	હારના તફાવત
F_1	3	2	– 4	1	20	1
F_2	2	4	– 5	3	15	1
F_3	3	5	– 2	6	25	1
F_4	4	3	[25] 1	3	~~40~~ 15	(2)
માંગ	30	20	~~25~~ 0	25	100	
સ્તંભના તફાવત	1	1	1	(2)		

સમજૂતિ :

ઉપરના કોષ્ટકમાં હાર અને સ્તંભના તફાવતોમાં સૌથી મોટો તફાવત 2 ચોથી હાર અને ચોથી સ્તંભમાં છે. અને F_4 હારમાં સૌથી નાની ખર્ચની કિંમત 1 એકમ (4,3) ખાનામાં છે. તેમજ M_4 સ્તંભમાં પણ સૌથી નાની ખર્ચની કિંમત 1 એકમ (1,4) ખાનામાં છે. પરંતુ (1,4) ખાના કરતાં (4,3) ખાનામાં ફાળવણી વધુ થાય છે, તેથી આપણે ચોથી હાર પસંદ કરી x_{43} = લઘુત્તમ (40, 25) = 25 એકમોની ફાળવણી કરીશું. તેથી ત્રીજા સ્તંભની માંગ સંતોષાશે. માટે ત્રીજો સ્તંભ બંધ થશે. જ્યારે ચોથી હારમાં 40 – 25 = 15 એકમોનો પુરવઠો બાકી રહેશે. હવે બાકીના શ્રેણીક માટે ફરીથી તફાવતો શોધીશું.

	M_1	M_2	M_4	પુરવઠો	હારના તફાવત
F_1	– 3	– 2	[20] 1	~~20~~ 0	1
F_2	2	4	3	15	1
F_3	3	5	6	25	(2)
F_4	4	3	3	15	0
માંગ	30	20	~~25~~ 5		
સ્તંભના તફાવત	1	1		(2)	

સમજૂતિ :

હાર અને સ્તંભના તફાવતો જોતાં સૌથી મોટો તફાવત 2 છે. જે F_2 હાર અને F_3 સ્તંભમાં છે. પરંતુ F_3 હારમાં લઘુત્તમ ખર્ચનો ઘટક 3 એકમ છે. જ્યારે M_4 સ્તંભમાં લઘુત્તમ ખર્ચનો ઘટક 1 એકમ છે. તેથી M_4 સ્તંભ પસંદ કરી x_{14} = લઘુત્તમ (20, 25) = 20 એકમોની ફાળવણી કરીશું. તેથી F_1 હારનો પુરવઠો પૂર્ણ થશે. તેથી F_1 હાર બંધ થશે. M_4 સ્તંભમાં 25 – 20 = 5 એકમોની જરૂરીયાત (માંગ) બાકી રહેશે.

	M_1	M_2	M_4	પુરવઠો	હારના તફાવત
F_2	2	4	3	15	1
F_3	[25] 3	– 5	– 6	~~25~~ 0	(2)
F_4	4	3	3	15	(0)
માંગ	~~30~~ 5	20	5		
સ્તંભના તફાવત	1	1	0		

સમજૂતિ :

હાર અને સ્તંભના તફાવતો જોતાં સૌથી મોટો તફાવત F_3 હારમાં છે. આ હારમાં સૌથી નાનો ઘટક 3 (3,1) ખાનામાં છે. તેથી x_{31} = લઘુત્તમ (35, 30) = 25 એકમોની ફાળવણી કરતાં F_3 નો પુરવઠો પૂર્ણ થશે. તેથી F_3 હાર બંધ થશે અને M_1 સ્તંભમાં 30 – 25 = 5 એકમો બાકી રહેશે.

	M_1	M_2	M_4	પુરવઠો	હારના તફાવત
F_2	[5] 2	4	3	~~15~~ 10	1
F_4	– 4	3	3	15	0
માંગ	~~5~~ 0	20	5		
સ્તંભના તફાવત	(2)	1	0		

સમજૂતિ :

હાર અને સ્તંભના તફાવત જોતાં M_1 સ્તંભમાં સૌથી મોટો તફાવત 2 છે. તેથી M_1 સ્તંભમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક જોતાં તે 2 (2,1) ખાનામાં આવેલ છે. તેથી x_{21} = લઘુત્તમ (15,5) = 5 એકમોની ફાળવણી કરતાં M_1 સ્તંભ બંધ થશે અને F_2 હારમાં 15 – 5 = 10 એકમોનો પુરવઠો બાકી રહેશે.

	M_2	M_4	પુરવઠો	હારના તફાવત
F_2	4	3	10	(1)
F_4	[15] 3	3	~~15~~ 0	0
માંગ	~~20~~ 5	5		
સ્તંભના તફાવત	(1)	0		

સમજૂતિ :

હાર અને સ્તંભના તફાવતો જોતાં F_2 હારમાં અને M_2 સ્તંભમાં સૌથી મોટો તફાવત 1 છે અને બંનેમાં ખર્ચની કિંમત પણ સરખી છે. પરંતુ M_2 માં (4,2) ખાનામાં ફાળવણી વધુ થતી હોવાથી x_{42} = લઘુત્તમ (15, 20) = 15 એકમોની ફાળવણી કરીશું. તેથી F_2 હાર બંધ થશે. હવે એક જ હાર બાકી રહેતી હોવાથી તફાવત શોધવાની જરૂર રહેતી નથી બંને ખાનામાં ફાળવણી નીચે મુજબ થશે.

	M_2	M_4	પુરવઠો
F_2	[5] 4	[5] 3	~~10~~ 5
માંગ	~~5~~ 0	~~5~~ 0	

ઉકેલ : કોષ્ટક

	M_1	M_2	M_3	M_4	પુરવઠો
F_1	– 3	– 2	– 4	[20] 1	~~20~~ 0
F_2	[5] 2	[5] 4	– 5	[5] 3	~~15~~ ~~10~~ ~~5~~ 0
F_3	[25] 3	– 5	– 2	6	~~25~~ 0
F_4	– 4	[15] 3	[25] 1	3	~~40~~ ~~25~~ 0
માંગ	~~30~~ ~~5~~ 0	~~20~~ ~~5~~ 0	~~25~~ 0	~~25~~ ~~5~~ 0	100

ઉકેલ : $x_{14} = 20,\ x_{21} = 5,\ x_{22} = 5,\ x_{24} = 5,\ x_{31} = 25,\ x_{42} = 15,\ x_{43} = 25$

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij}\ x_{ij}$

$Z = (1 \times 20) + (2 \times 25) + (4 \times 5) + (3 \times 5) + (3 \times 25) + (3 \times 15) + (1 \times 25)$

$= 20 + 10 + 20 + 15 + 75 + 45 + 25$

$Z = 210$

ઉદાહરણ-10 : નીચે આપેલ વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વૉગેલની રીતે મેળવી કુલ ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધો.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	પ્રાપ્ય જથ્થો
O_1	5	7	6	9	10	20
O_2	11	8	10	4	12	35
O_3	12	12	9	7	8	40
O_4	8	6	7	10	8	15
જરૂરિયાત	15	10	20	30	35	110

જવાબ :

આ સમસ્યાનો ઉકેલ વૉગેલની રીતથી ઉકેલ મેળવવા માટે સૌપ્રથમ દરેક હાર તેમજ દરેક સ્તંભમાંથી સૌથી બે નાની કિંમતો વચ્ચેનો તફાવત મેળવીશું અને ફાળવણી કરતાં જઈશું. અગાઉ ગણતરી કરેલ ઉદાહરણનીજેમ અલગ અલગ કોષ્ટકમાં ફાળવણી દર્શાવી શકાય. પરંતુ આપણે અહીં એક જ કોષ્ટકમાં ફાળવણી દર્શાવેલ છે. આ રીતે પણ દાખલો ગણી શકાય છે.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	પ્રાપ્ય જથ્થો	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
O_1	[15] 5	– 7	[5] 6	– 9	10	~~20~~ ~~5~~ 0	1	1	1	(1)	–	–
O_2	– 1	[5] 8	– 10	[30] 4	12	~~35~~ ~~5~~ 0	(4)	2	(2)	–	–	–
O_3	– 12	– 12	[5] 9	– 7	[35] 8	~~40~~ ~~35~~ 0	1	1	1	1	1	1
O_4	– 8	[5] 6	[10] 7	– 10	8	~~15~~ ~~10~~ 0	1	2	1	1	1	1
જરૂરિયાત	~~15~~ 0	~~10~~ ~~50~~	~~20~~ ~~15~~ ~~50~~	~~30~~ 0	35	110						

d_1	3	1	1	3	0
d_2	(3)	1	1	–	0
d_3	–	1	1	–	0
d_4	–	1	1	–	0
d_5	–	(6)	2	–	0
d_6	–	–	2	–	0

સમજૂતિ :

ઉપરના કોષ્ટકમાં જોતાં સૌપ્રથમ તફાવત d_1 માં સૌથી મોટો તફાવત O_2 હારમાં 4 છે. તેથી O_2 હારમાં સૌથી નાના ઘટક 4 ની સામે 30 એકમો ફાળવેલ છે. જેથી D_4 બંધ થશે.

- બીજો તફાવત d_2 જોતાં સૌથી મોટો તફાવત D_1 સ્તંભમાં છે. જે સ્તંભમાં સૌથી નાની કિંમત 5 સામે 15 એકમો ફાળવેલ છે. જેથી D_1 બંધ થશે.
- તફાવત d_3 જોતાં સૌથી મોટો તફાવત O_2 હારમાં છે. આ હારમાં સૌથી નાની ખર્ચની કિંમત 8 સામે 5 એકમોની ફાળવણી કરી છે. $\therefore$ O_2 હાર બંધ થશે.
- d_4 જોતાં સૌથી મોટો તફાવત 1 છે. ન્યૂનતમ ખર્ચ 6 છે. $\therefore$ 6 ની સામે 5 એકમો ફાળવણી કરતાં O_1 હાર બંધ થશે.
- d_5 જોતાં સૌથી મોટો તફાવત 6 છે. જે સ્તંભમાં સૌથી નાની કિંમત 6 છે. $\therefore$ 6 ની સામે 5 એકમો ફાળવતાં D_2 સ્તંભ બંધ થશે.
- d_6 જોતાં સૌથી મોટો તફાવત 2 છે. જે D_3 સ્તંભમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક 7 છે. $\therefore$ 7 ની સામે 10 એકમો ફાળવતાં O_4 હાર બંધ થશે. હવે ફક્ત O_3 એક જ હાર બાકી રહે છે. માટે ત્યાં ફાળવણી ફરજીયાત થશે.

ઉકેલ : $x_{11} = 5, x_{13} = 5, x_{22} = 5, x_{24} = 30, x_{33} = 5, x_{35} = 35, x_{42} = 5, x_{43} = 10$

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij}\ x_{ij}$

$Z = (5 \times 15) + (6 \times 5) + (8 \times 5) + (4 \times 30) + (9 \times 5) + (8 \times 35) + (6 \times 5) + (7 \times 10)$

$= 75 + 30 + 40 + 120 + 45 + 280 + 30 + 70$

$Z = 690$

14.7 તમારી પ્રગતિ ચકાસો (સ્વાધ્યાય) :

14.7.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.

(1) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા એટલે શું ?

(2) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનું ગાણિતીક સ્વરૂપ લખો.

(3) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના લક્ષણો અને ધારણાઓ લખો.

(4) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના મૂળભૂત ઉકેલ માટેની રીતો જણાવો અને તેમાંથી કોઈપણ એક રીત સવિસ્તાર સમજાવો.

(5) વાહન વ્યવહારની સમસ્યાનો પ્રાથમ મૂળભૂત ઉકેલ મેળવવા માટે કઈ કઈ રીતનો ઉપયોગ થાય છે. આ રીતોમાં કઈ રીત ચઢિયાતી છે ? શા માટે ?

(6) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના પ્રાથમિક મૂળભૂત ઉકેલ મેળવવા માટેની વાયવ્ય ખૂણાની રીત સમજાવો.

(7) વાહન-વ્યવહારની પ્રારંભિક ઉકેલ માટેની ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીત વર્ણવો.

(8) વૉગેલની અંદાજી રીત સમજાવો.

(9) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાને ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

(10) વાયવ્ય ખૂણાની રીતનો ઉપયોગ કરી નીચેના વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવી કુલ ખર્ચ શોધો.

ઉદ્ભવ	પ્રાપ્તિ સ્થાન						પ્રાપ્ય
સ્થાન	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	જથ્થો
O_1	5	4	6	3	1	2	30
O_2	8	6	7	5	9	7	20
O_3	4	3	2	1	8	9	40
O_4	9	8	7	6	5	4	50
જરૂરિયાત	40	30	20	10	30	10	140

(11) નીચેની વાહન વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વાયવ્ય ખૂણાની રીતે મેળવી કુલ ખર્ચ શોધો.

	ગોડાઉન				પ્રાપ્ય
ફેક્ટરી	W_1	W_2	W_3	W_4	જથ્થો
F_1	8	10	12	18	25
F_2	6	15	9	14	35
F_3	12	8	7	10	15
F_4	20	22	10	15	25
માંગ	20	30	40	10	100

(12) નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વાયવ્ય ખૂણાથી મેળવો અને વાહન-વ્યવહારનું કુલ પરિવહન ખર્ચ શોધો.

પ્રતિ / તરફથી	P	Q	R	પુરવઠો
1	6	8	9	6
2	12	8	4	10
3	8	12	12	3
માંગ	10	4	5	19

(13) નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતે મેળવો, તેમજ કુલ ખર્ચ શોધો.

	D_1	D_2	D_3	D_4	પુરવઠો
S_1	4	8	9	7	45
S_2	3	6	5	8	20
S_3	8	7	2	8	35
જરૂરિયાત	10	30	40	20	100

(14) નીચેની સમસ્યાનો ઉકેલ ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતે મેળવો.

ગોડાઉન / તરફથી	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	પુરવઠો
P_1	4	1	3	7	4	60
P_2	2	5	2	6	3	35
P_3	5	7	2	4	5	40
જરૂરિયાત	22	45	20	10	30	135

(15) નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો પ્રારંભિક મૂળભૂત ઉકેલ ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતે મેળવી, કુલ પરિવહન ખર્ચ શોધો.

	A	B	C	D	પુરવઠો
P	1	2	1	4	20
Q	3	3	2	1	40
R	4	2	5	9	20
S	5	3	6	10	20
માંગ	20	40	30	10	100

(16) નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વૉગેલની રીતે મેળવી, કુલ પરિવહન ખર્ચ શોધો.

	D_1	D_2	D_3	D_4	પ્રાપ્ય જથ્થો
O_1	9	4	1	5	14
O_2	8	9	2	7	16
O_3	4	3	6	2	5
માંગ	6	10	15	4	35

(17) નીચેની વાહન-વ્યવહરની સમસ્યાનો ઉકેલ વૉગેલની અંદાજી રીતે (VAM) મેળવો.

ગોડાઉન / પ્લાન્ટ	I	II	III	IV	પુરવઠો
A	10	5	2	0	13
B	7	10	3	8	17
C	5	4	7	3	5
માંગ	5	11	15	4	35

(18) નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વાયવ્ય ખૂણા, ન્યૂનતમ શ્રેણીક અને વૉગેલની અંદાજી રીતે મેળવી ત્રણેયનો પરિવહન ખર્ચ શોધો. કઈ રીતે ચઢિયાતી છે, તે પણ જણાવો.

	D_1	D_2	D_3	D_4	પુરવઠો
O_1	10	4	8	3	5
O_2	2	7	1	6	15
O_3	9	10	7	10	50
O_4	5	2	4	9	30
માંગ	25	20	35	20	100

(19) નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વાયવ્ય ખૂણા, ન્યૂનતમ શ્રેણીક અને વૉગેલની અંદાજી રીતે મેળવી ત્રણેયનો પરિવહન ખર્ચ શોધો. આ ત્રણેય રીતમાં કઈ રીત ચઢિયાતી છે ? કેમ ?

	D_1	D_2	D_3	D_4	પુરવઠો
O_1	3	2	4	1	20
O_2	2	4	5	3	15
O_3	3	5	2	6	25
O_4	4	3	1	4	40
માંગ	30	20	25	25	

(20) નીચેના વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ કોઈપણ બે રીતે મેળવો. તેમજ તેમનો કુલ પરિવહન ખર્ચ પણ શોધો.

	D_1	D_2	D_3	D_4	પુરવઠો
O_1	8	9	12	2	15
O_2	3	11	6	10	50
O_3	5	1	4	7	55
માંગ	40	35	25	20	120

જવાબો :

10. $x_{11} = 30, x_{21} = 10, x_{22} = 10, x_{32} = 20, x_{33} = 20, x_{44} = 10, x_{45} = 30,$ અને $x_{46} = 10$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 640$

11. $x_{11} = 20, x_{12} = 5, x_{22} = 25, x_{23} = 10, x_{33} = 15, x_{13} = 15$ અને $x_{44} = 10$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 1080$

12. $x_{11} = 6, x_{21} = 4, x_{22} = 4, x_{23} = 2, x_{33} = 3$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 160$

13. $x_{12} = 25, x_{14} = 20, x_{21} = 10, x_{22} = 5, x_{23} = 5, x_{33} = 35$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 495$

14. $x_{12} = 45, x_{15} = 15, x_{21} = 22, x_{25} = 13, x_{33} = 20, x_{34} = 18$ અને $x_{35} = 2$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 310$

15. $x_{11} = 20, x_{23} = 30, x_{24} = 10, x_{32} = 20$ અને $x_{42} = 20$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 20$

16. $x_{12} = 10, x_{14} = 4, x_{21} = 1, x_{23} = 15$ અને $x_{31} = 5$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 118$

17. $x_{12} = 9, x_{14} = 4, x_{21} = 2, x_{23} = 15, x_{31} = 3$ અને $x_{32} = 2$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 127$

18. (1) વાયવ્ય ખૂણાની રીતે : $x_{11} = 5, x_{21} = 15, x_{31} = 5, x_{32} = 2, x_{33} = 25, x_{43} = 10,$ અને $x_{44} = 20$
$Z = 720$

(2) ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતે : $x_{14} = 5, x_{23} = 15, x_{31} = 25, x_{33} = 10, x_{34} = 15, x_{42} = 20$ અને $x_{43} = 10$

$Z = 555$

(3) વૉગેલની રીતે : $x_{14} = 5, x_{23} = 15, x_{31} = 15, x_{33} = 20, x_{34} = 15, x_{41} = 10$ અને $x_{42} = 20$

$Z = 545$

વૉગેલની અંદાજી રીત ચઢિયાતી છે. કારણ કે ત્રણેય રીતમાં કુલ પરિવહન ખર્ચ Zની કિંમત વૉગેલની રીતમાં સૌથી ઓછી છે.

19. (1) વાયવ્ય ખૂણાની રીતે : $x_{11} = 20, x_{21} = 10, x_{22} = 5, x_{32} = 15, x_{33} = 10, x_{43} = 15$ અને $x_{44} = 25$

$Z = 310$

(2) ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતે : $x_{14} = 20, x_{21} = 15, x_{31} = 15, x_{32} = 5, x_{34} = 5, x_{42} = 15$ અને $x_{43} = 25$

$Z = 220$

(3) વૉગેલની રીતે : $x_{14} = 20, x_{21} = 5, x_{22} = 5, x_{24} = 5, x_{31} = 25, x_{42} = 15$ અને $x_{43} = 25$

$Z = 210$

આ ત્રણેય રીતોમાં વૉગેલની અંદાજી રીત ચઢિયાતી છે. કારણ કે વૉગેલની રીતમાં કુલ પરિવહન Z ની કિંમત સૌથી ઓછી થાય છે.

20. (1) વાયવ્ય ખૂણાની રીતે : $x_{11} = 15, x_{21} = 25, x_{22} = 25, x_{32} = 10, x_{33} = 25$ અને $x_{34} = 20$

$Z = 720$

(2) ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતે : $x_{14} = 15, x_{21} = 40, x_{23} = 5, x_{24} = 5, x_{32} = 35$ અને $x_{33} = 20$

$Z = 345$

(3) વૉગેલની અંદાજી રીતે : $x_{14} = 15, x_{21} = 40, x_{23} = 10, x_{32} = 35, x_{33} = 15, x_{34} = 5$

$Z = 340$

14.7.2 નીચેના વિધાનો સાચા છે કે ખોટા તે જણાવો. :

(1) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલ મેળવવા માટેની વાયવ્ય ખૂણાની રીત ખર્ચાળ છે.

(2) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલ માટેની વૉગેલની અંદાજી રીત સૌથી શ્રેષ્ઠ રીત છે.

(3) વાહન-વ્યવહારના કોષ્ટકમાં હારની સંખ્યા અને સ્તંભની સંખ્યા હંમેશા સરખી હોય છે.

(4) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યામાં કોઈ એક ઉદ્‌ભવ સ્થાનેથી બધા જ પ્રાપ્તિ સ્થાનોને ઉત્પાદિત એકમો જથ્થો મોકલી શકાય છે.

(5) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો મુખ્ય હેતુ કુલ પરિવહન ખર્ચ મહત્તમ કરવાનો હોય છે.

(6) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલ માટેની ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતમાં એકમ દંડ (તફાવત) લેવામાં આવે છે.

(7) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો મુખ્ય ઉદ્દેશ ઉત્પાદિત એકમોને જુદા જુદા ઉદ્‌ભવ સ્થાનેથી જુદા જુદા પ્રાપ્તિ-સ્થાનોએ એવી રીતે મોકલવાનો હોય છે, કે જેથી કુલ પરિવહન ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય.

(8) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યામાં વૉગેલની અંદાજી રીતનું બીજું નામ એકમદંડની રીત છે.

(9) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા માટેના ઉકેલની રીતો પૈકી ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતમાં કુલ પરિવહન ખર્ચ સૌથી ઓછું આવે છે.

(10) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા એ સુરેખ આયોજનની સમસ્યાનું એક વિશિષ્ટ સ્વરૂપ છે.

(11) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાની ત્રણેય રીતો પૈકી વાયવ્ય ખૂણાની રીત સૌથી અઘરી રીત છે.

જવાબો :

(1) સાચું (2) સાચું (3) ખોટું (4) સાચું (5) ખોટું (6) ખોટું (7) સાચું

(8) સાચું (9) ખોટું (10) સાચું (11) ખોટું

14.7.3 યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલ માટેની વૉગેલની રીત .... ને ન્યૂનતમ બનાવે છે.

(a) કુલ માંગ (b) કુલ પુરવઠો (c) પ્રાપ્તિ સ્થાનોની સંખ્યા (d) કુલ પરિવહન ખર્ચ

(2) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલ માટેની ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતમાં .... ને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે.

(a) પુરવઠો (b) માંગ (c) ન્યૂનતમ ખર્ચ ઘટક (d) ઉપરના બધા જ

(3) 5×4 ક્રમના વાહન-વ્યવહારના શ્રેણીકમાં કુલ કેટલા સ્વતંત્ર ઉકેલ મળવા જોઈએ ?

(a) 20 (b) 9 (c) 8 (d) 1

(4) સામાન્ય રીતે ન્યૂનતમ પરિવહન ખર્ચ કઈ રીત દ્વારા મળે છે ?

(a) ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતે (b) વૉગેલની રીતે (c) વાયવ્ય ખૂણાની રીતે (d) એકપણ નહીં

(5) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના પ્રાપ્ય ઉકેલ માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત Σa_i __ Σb_j છે.

(a) = (b) ≠ (c) < (d) >

(6) વાહન-વ્યવહારના કોષ્ટકનો ઉપયોગ શેના માટે કરાય છે ?

(a) નજીકની ટ્રાન્સપોર્ટ ઓફિસ શોધવા માટે

(b) ન્યૂનતમ પરિવહન ખર્ચ શોધવા માટે

(c) બે શહેરો વચ્ચે પરિવહન ખર્ચ શોધવા માટે

(d) ઉપરોક્ત બધા જ

(7) વાયવ્ય ખૂણાની રીતમાં જરૂરી એકમોની ફાળવણીની શરૂઆત આપણે ક્યાંથી કરીએ છીએ ?

(a) કોષ્ટકમાં જમણી બાજુના નીચેના ખૂણાથી

(b) કોષ્ટકમાં જમણી બાજુના ઉપરના ખૂણાથી

(c) કોષ્ટકમાં ડાબી બાજુના ઉપરના ખૂણાથી

(d) કોષ્ટકમાં સૌથી મોટો ખર્ચનો ઘટક હોય તે ખાનાથી

(8) વાહન-વ્યવહારના ઉકેલ માટેની વૉગેલની રીતમાં હાર અને સ્તંભ માટે દંડનું મૂલ્ય (તફાવત) કેવી રીતે મેળવાય છે ?

(a) દરેક હાર અને સ્તંભમાંથી સૌથી નાના બે એકમ ખર્ચ વચ્ચેનો તફાવત શોધીને

(b) દરેક હાર અને સ્તંભમાંથી સૌથી મોટા બે એકમ ખર્ચ વચ્ચેનો તફાવત શોધીને

(c) દરેક હાર અથવા સ્તંભમાંથી સૌથી મોટા બે એકમ ખર્ચ વચ્ચેનો તફાવત શોધીને

(d) આપેલમાંથી એક પણ નહીં

(9) વાયવ્ય ખૂણાની રીતમાં .... ધ્યાનમાં લેવાનો નથી.

(a) ખર્ચને (b) માંગને (c) પુરવઠાને (d) એકપણ નહીં

(10) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલની રીતો પૈકી સૌથી ફાયદાકારક રીત કઈ છે ?

(a) વાયવ્ય ખૂણાની રીત (b) ન્યૂનતમ હારની રીત

(c) ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીત (d) વૉગેલની અંદાજી રીત

(11) એક સમતોલ વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા માટે $a_1 = 70$ એકમ, $a_2 = 100$ એકમ, $a_3 = 110$ એકમ અને ચાર પ્રાપ્તિ સ્થાનોની જરૂરિયાત અનુક્રમે x, $2x$, x અને $3x$ છે. તો b_1 (પ્રથમ પ્રાપ્તિ સ્થાનની જરૂરિયાત) = ...

(a) 120 (b) 100 (c) 40 (d) 80

(12) સમતોલ વાહન-વ્યવહારની સમસ્યામાં કુલ .... અને કુલ .... બંને સરખા છે.

(a) સ્તંભ, પંક્તિ (b) પુરવઠાના એકમ, જરૂરિયાતના એકમ

(c) પ્રાપ્તિ સ્થાન, ઉત્પત્તિ સ્થાન (d) આપેલમાંથી એકપણ નહીં

(13) m ઉત્પત્તિ સ્થાન અને n પ્રાપ્તિ સ્થાન વાળા એક વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના કુલ .... પ્રારંભિક ઉકેલ મળે.

(a) m + n – 1 (b) m + n (c) m – n (d) m × n એકપણ નહીં

(14) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાની વાયવ્ય ખૂણાની રીતમાં મૂળભૂત ઉકેલ મેળવવાની રીતનો એક ગેરફાયદો .... છે.

(a) તેનો ઉકેલ થોડો અઘરો પડે છે. (b) તે આપણને એક વિકૃત મૂળભૂત ઉકેલ આપે છે.

(c) પરિવહન ખર્ચને ધ્યાનમાં લેવામાં આવતો નથી.

(d) ઉપરના બધા જ

(15) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યામાં જ્યારે કુલ ફાળવણી, પુરવઠા અને જરૂરિયાત સાથે સંગત થાય છે, ત્યારે તે ઉકેલને .... ઉકેલ કહે છે.

(a) સમતોલ (b) મૂળભૂત

(c) અસમતોલ (d) આપેલમાંથી એકપણ નહીં

જવાબો :

(1) d (2) d (3) c (4) b (5) a (6) b (7) c

(8) a (9) a (10) d (11) c (12) b (13) a (14) c

(15) b

નોંધ : (11) ની સમજૂતી : કુલ જરૂરિયાત = કુલ પુરવઠો = 280 છે. હવે જરૂરિયાત $x + 2x + x + 3x = 7x$ છે. માટે $7x = 280$ થવા જોઈએ.

માટે $x = \frac{280}{7}$

માટે $x = 40$

14.8 ચાવીરૂપ શબ્દો :

વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા : પરિવહનનો પ્રશ્ન એટલે કે એક સ્થળેથી બીજા સ્થળે વસ્તુનો જથ્થો પહોંચાડવાના પ્રશ્નો.

ઉત્પત્તિસ્થાન : ઉદ્ભવસ્થાન - કોઈપણ વસ્તુનું ઉત્પાદન થતું હોય તે સ્થળ કે જ્યાં પુરવઠો ઉપલબ્ધ હોય.

પ્રાપ્તિસ્થાન : જે જગ્યા પર વસ્તુની માંગ મુજબ પુરવઠો મેળવવાનો થતો હોય તે સ્થળ.

ઈષ્ટતમ ઉકેલ : કોઈપણ પ્રશ્નમાં મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ કિંમતો પ્રાપ્ત થાય તેને ઈષ્ટતમ ઉકેલ કહેવાય.

શ્રેણીક : ગણિતમાં સંખ્યાઓની ચોરસ કે લંબચોરસ ગોઠવણી.

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) 'કાર્યાત્મક સંશોધન', અક્ષર પ્રકાશન, અમદાવાદ (2016)
લેખક : ડૉ. એમ.એચ. મૌસુરીયા, ડૉ. દિનેશભાઈ એમ. પટેલ

(2) ક્રિયાત્મક સંશોધનની ઈષ્ટતમ પદ્ધતિઓ, યુનિવર્સિટી ગ્રંથ નિર્માણ બોર્ડ, ગુજરાત રાજ્ય, અમદાવાદ-6
સ્વ. પ્રા. રમેશચંદ્ર એન. દેસાઈ, ડૉ. ભરતભાઈ બી. જાની (1990)

(3) Operation Research & Quantitative Techniques, K. Shridharee Bhat, Himalaya Publishing House. (2001)

એકમ 15	ફેરબદલીની સમસ્યા (Replacement Problem)

15.0 ઉદ્દેશો
15.1 પ્રાસ્તાવિક
15.2 ફેરબદલીની સમસ્યાનો અર્થ
15.3 ફેરબદલીની સમસ્યાના લાભો
15.4 ફેરબદલીની સમસ્યાના ઉકેલની રીત
15.4.1 સરેરાશ વાર્ષિક ખર્ચની રીત
15.5 ઉદાહરણો
15.6 તમારી પ્રગતિ ચકાસો
15.6.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.
15.6.2 નીચે આપેલા વિધાનો સાચા છે કે ખોટા તે જણાવો.
15.6.3 યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.
15.7 ચાવીરૂપ શબ્દો
● સંદર્ભસૂચિ

15.0 ઉદ્દેશો :

કોઈપણ કંપનીએ વસાવેલા યંત્રો કે વ્યક્તિઓએ ખરીદેલ યાંત્રિક વસ્તુઓ સમયાનુસાર બદલવી પડે છે. હવે આ વસ્તુઓ ક્યારે બદલવી જોઈએ જેથી વધુ ફાયદાકારક પુરવાર થાય તે અંગે યોગ્ય નિર્ણય લેવા માટે વિદ્યાર્થીઓને આ પ્રકરણ ખૂબ જ ઉપયોગી પુરવાર થશે.

15.1 પ્રાસ્તાવિક :

કોઈપણ કંપની, ઉદ્યોગ, ધંધા માટે યંત્રો, મકાનો, વાહનો વગેરે સાધનોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. સમય જતાં આ સાધનો જૂના થાય છે, તેથી તેમને ચલાવવા માટે ખર્ચ વધુ થાય છે. તેની કાર્યક્ષમતામાં પણ ઘટાડો થાય છે. જેના કારણે આ સાધનો કે યંત્રો ઘણી વખત બંધ પડી જાય છે કે ખોરવાઈ જાય છે. એવા સંજોગોમાં આ સાધનો કે યંત્રોની ફેરબદલી કરવી પડે છે. આવા યંત્રોને બદલાવ સિવાય કોઈ રસ્તો રહેતો નથી. હવે આ યંત્રો, સાધનો કે મશીનો ક્યારે બદલવા જોઈએ કે જેથી ફાયદાકારક પુરવાર થાય. આવો સમય નક્કી કરવાની નીતિનો અહીં આપણે અભ્યાસ કરીશું.

15.2 ફેરબદલીની સમસ્યાનો અર્થ :

કંપની કે ઉદ્યોગમાં વપરાતા યંત્રો, સાધનો, મશીનો વગેરે સમયાનુસાર જૂના થાય છે, તેનો સતત વપરાશના કારણે ઘસારો પહોંચે છે. તેથી તેની કાર્ય કરવાની શક્તિમાં ઘટાડો થાય છે. ઉપરાંત આવા યંત્રો સાધનો ચલાવવા માટે નિભાવ ખર્ચ વધુ પ્રમાણમાં થાય છે અને એક સમયે એવી પરિસ્થિતિ ઉદ્ભવે છે કે તેની જાળવણી આર્થિક

રીતે પરવડતી નથી ઉપરાંત તેની પુનઃ વેચાણ કિંમત દર વર્ષે ઘટતી જાય છે. એક સમય એવો આવે છે કે આવા સાધનો કે યંત્રો ચાલુ રાખવામાં આવે તો ધંધા, ઉદ્યોગમાં નુકસાન સહન કરવું પડે છે. તદ્ઉપરાંત ઉત્તરોત્તર ટેક્નોલોજીમાં થતા ફેરફારના કારણે પણ જૂના યંત્રોની કાર્યક્ષમતામાં ઘટાડો થાય છે. આમ, એક તરફ નિભાવ ખર્ચ સતત વધતા અને બીજી તરફ યંત્રના પુનઃ વેચાણ મૂલ્યમાં સતત ઘટાડો થતા તે બંને વચ્ચે સંતુલન જરૂરી છે. તેથી આર્થિક દૃષ્ટિએ લાભદાયી હોય તે સમયે યંત્રની ફેરબદલી કરવી આવશ્યક બને છે. આ સમસ્યાને ફેરબદલીની સમસ્યા કહે છે.

ફેરબદલીની સમસ્યા સમજવા માટે આપણે કેટલાક ઉદાહરણો લઈએ. દા.ત. એક ટ્રાન્સપોર્ટ કંપની પાસે ટ્રકો છે. આ બધી ટ્રકોમાંથી ધારો કે એક ટ્રક પ્રથમ ખરીદેલ છે, હવે વર્ષો બાદ આ ટ્રક જૂની થશે. તેથી આ ટ્રક માટે નિભાવ ખર્ચ વધતો જશે અને તેની પુનઃ વેચાણ કિંમત પણ ઘટતી જાય છે. તેથી કોઈ એવા વર્ષની પસંદગી કરવી જોઈએ કે જે વર્ષે આ ટ્રક વેચી બીજી નવી ટ્રક ખરીદી કરવાથી ટ્રાન્સપોર્ટ કંપનીને ફાયદાકારક રહે. હવે બીજું ઉદાહરણ જોઈએ.

એક વ્યક્તિ પાસે એક બાઈક છે. આ બાઈક નવું ખરીદવામાં આવે છે ત્યારે કેટલાક સમય સુધી તેમાં રીપેરિંગ ખર્ચ ખૂબ જ ઓછો હોય છે. પરંતુ સમય જતાં આ બાઈક જૂનું થશે, તેથી ધીરે ધીરે ખર્ચ વધતું જાય છે. પરિણામે એક સમય એવો આવે છે કે જ્યારે આ બાઈક ચલાવવા કરતાં તેને બદલી નવું બાઈક ખરીદવું વધુ લાભદાયી પુરવાર થાય છે. આ બાઈકના ઉપયોગના જુદા જુદા વર્ષો પૈકી બાઈકને બદલવું કયું વર્ષ યોગ્ય ગણી શકાય કે જેથી બાઈક બદલવાથી આર્થિક રીતે પણ ફાયદો થાય.

કંપની, ધંધા કે ઉદ્યોગની શરૂઆતના સમયે કુશળ કારીગરોની ભરતી કરવામાં આવેલ હોય છે. આવા કારીગરો એક સમયે એક સાથે નિવૃત્ત થાય તો ધંધા, ઉદ્યોગ પર તેની વિપરીત અસર પડે છે. તેથી સમયાનુસાર કુશળ કારીગરોની ભરતીની નીતિ પણ નક્કી કરવી જોઈએ.

આ પ્રમાણે યંત્રો, મશીનરીઓ, કારીગરો કે સાધનો બદલવા માટે યોગ્ય વર્ષ નક્કી કરવાની સમસ્યાને ફેરબદલીની સમસ્યા કહેવામાં આવે છે.

15.3 ફેરબદલીની સમસ્યાના લાભો :

(1) લાંબા ગાળે નાણાંનો બચાવ થાય છે.

(2) જો યંત્ર ખોટવાય જાય કે બંધ પડી જાય તો ઉત્પાદન પ્રક્રિયા પર વિપરીત અસર થાય છે એવી સમસ્યાને ટાળી શકાય છે.

(3) ફેરબદલીની સમસ્યા દ્વારા આધુનિક ટેક્નોલોજીનો ઉપયોગ કરી શકાય છે.

(4) બજારમાં હરિફાઈમાં ટકી શકાય છે.

(5) ઉચ્ચ ઉત્પાદક ક્ષમતા જાળવી શકાય છે.

(6) ફેરબદલીની સમસ્યા ઉત્પાદકીય ક્ષેત્રે, સેવાક્ષેત્રે, પરિવહન ક્ષેત્રે વગેરેમાં ખૂબ જ ઉપયોગી પદ્ધતિ છે.

15.4 ફેરબદલીની સમસ્યાના ઉકેલ માટેની રીત :

આ પ્રકરણમાં આપણે ફક્ત એક જ રીતનો અભ્યાસ કરવાનો છે.

15.4.1 સરેરાશ કુલ ખર્ચની રીત (Average Total Cost Method) :

ફેરબદલીની સમસ્યાના ઉકેલ મેળવતા પહેલાં એક ધારણા કરવામાં આવે છે કે આપેલ સમય દરમ્યાન નાણાંનું મૂલ્ય બદલાયું ન હોય. એટલે કે પડતર કિંમત સરખી રહેતી હોય.

ફેરબદલીની સમસ્યાનો ઉકેલ પહેલાં કેટલાંક પદો અને તેની સંજ્ઞા વિશે જાણી લઈએ.

– સરેરાશ કુલ વાર્ષિક ખર્ચ જેને આપણે 'TA' વડે દર્શાવીશું.
– વસ્તુની પડતર કિંમત કે યંત્રની ખરીદ કિંમત અથવા કુલ મૂડી ખર્ચને આપણે 'C' વડે દર્શાવીશું.
– વસ્તુની પુનઃ વેચાણ કિંમત અથવા વસ્તુની ભંગાર કિંમતને આપણે 'R' વડે દર્શાવીશું.
– સંચયી નિભાવ ખર્ચ એટલે કે t માં વર્ષે યંત્ર કે મશીન ચલાવવાનો ખર્ચને $C.f.$ વડે દર્શાવીશું.
– વર્ષની સંખ્યાને n વડે દર્શાવીશું.

આ સંજ્ઞાઓને એકસૂત્ર દ્વારા રજૂ કરતાં;

$$\text{સરેરાશ કુલ વાર્ષિક ખર્ચ} = \frac{\text{ખરીદ કિંમત + સંચયી નિભાવ ખર્ચ – પુનઃ વેચાણ કિંમત}}{\text{વર્ષની સંખ્યા}}$$

$$\therefore \quad T_A = \frac{C + C.f. - R}{n}$$

આ સૂત્ર બનશે. આમ, આ સૂત્ર દ્વારા દરેક વર્ષ માટે સરેરાશ કુલ વાર્ષિક ખર્ચ T_A ની કિંમત શોધવામાં આવે છે અને જે વર્ષ સરેરાશ કુલ વાર્ષિક ખર્ચની કિંમત સૌથી ઓછી હોય તે વર્ષને અંતે વસ્તુ કે યંત્રની ફેરબદલી કરવી ફાયદાકારક ગણાય.

નોંધ : આ T_A ની કિંમત શરૂઆતના વર્ષોમાં વધારે હશે પછી તેમાં ઘટાડો થતો જશે. એક વર્ષ એવું આવશે કે તે વર્ષ પછી ફરીથી T_A ની કિંમત વધતી જશે. આમ જે વર્ષે T_A ની કિંમત સૌથી ઓછી હોય તેવું વર્ષ ઈષ્ટ વર્ષ ગણાય. તે વર્ષે યંત્ર કે મશીન બદલવું જોઈએ.

15.5 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 :

એક બાઈકની કિંમત રૂ. 50,000 છે. તેના વિવિધ વર્ષો માટે નિભાવ ખર્ચ અને બાઈકની પુનઃ વેચાણ કિંમત નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે તો કેટલા વર્ષ પછી આ બાઈક બદલવું ફાયદાકારક ગણાય.

વર્ષ	1	2	3	4	5	6	7	8
નિભાવ ખર્ચ	500	2000	2500	3400	4000	5600	7500	8500
પુનઃ વેચાણ કિંમત	33000	29000	25000	23000	22000	20000	16000	12000

જવાબ :

અહીં બાઈકની ખરીદ કિંમત C = 50,000 છે. અહીં પ્રથમ કોલમમાં વર્ષ લઈશું. બીજા કોલમમાં, જે નિવભા ખર્ચ આપેલ છે તે જ લઈશું. વિવિધ વર્ષના નિભાવ ખર્ચ પરથી જે તે વર્ષ સુધી બાઈક વાપરવા માટે કરવું પડતું સંચયી નિભાવ ખર્ચ (કુલ નિભાવ ખર્ચ) $C.f.$ મેળવીશું. ચોથા કોલમમાં પુનઃ વેચાણ કિંમત R લઈશું. પાંચમાં કોલમમાં કુલ ખર્ચ $= C + C.f. - R$ મેળવીશું અને છેલ્લા છઠ્ઠા કોલમમાં સરેરાશ ખર્ચ $T_A = \frac{C + C.f. - R}{n}$ મેળવીશું.

વર્ષ n	નિભાવ ખર્ચ t	સંચયી નિભાવ ખર્ચ C.*f.*	પુનઃ વેચાણ કિંમત R	કુલ ખર્ચ T.C.	સરેરાશ કુલ ખર્ચ T_A
1	500	500	33000	17500	17500
2	2000	2500	29000	23500	11750
3	2500	5000	25000	30000	10000
4	3400	8400	23000	35400	8850
5	4000	12400	22000	40400	8080
6	5600	18000	20000	48000	8000*
7	7500	25500	16000	59500	8500
8	8500	34000	12000	72000	9000

સમજૂતિ :

ત્રીજા કોલમમાં સંચયી નિભાવ ખર્ચ C.*f.* ની ગણતરી પ્રથમ વર્ષ 1 સામે સંચયી નિભાવ ખર્ચ એ નિભાવ ખર્ચ જેટલો જ એટલે કે 500 આવશે.

હવે આ 500 + 200 (બીજા વર્ષનો નિભાવ ખર્ચ) = 2500 સંચયી નિભાવ ખર્ચ બીજા વર્ષ સામે લખેલ છે. ત્રીજા વર્ષ સામે 2500 + 2500 (ત્રીજા વર્ષનો નિભાવ ખર્ચ) = 5000 લખેલ છે. ચોથા વર્ષ સામે 5000 + 3400 (ચોથા વર્ષનો નિભાવ ખર્ચ) = 8400 લખેલ છે. પાંચમાં વર્ષ માટે 8400 + 4000 (પાંચમાં વર્ષનો નિભાવ ખર્ચ) = 12400 લખેલ છે. તે જ રીતે છઠ્ઠા વર્ષ માટે 12400 + 5600 = 18000, સાતમા વર્ષ માટે 18000 + 7500 = 25500 અને આઠમા વર્ષ માટે 25500 + 8500 = 34000 લખેલ છે.

આમ સંચયી નિભાવ ખર્ચ મેળવવા માટે આગળના વર્ષનો C.*f.* + જે તે વર્ષ સામેનો નિભાવ ખર્ચ કરતાં સંચયી નિભાવ ખર્ચ મળશે.

કુલ ખર્ચ T.C. = C + C.*f.* – R સૂત્રની મદદથી ગણતરી કરેલ છે.

પ્રથમ વર્ષ માટે કુલ ખર્ચ = 50000 + 500 – 33000 = 17500

બીજા વર્ષ માટે કુલ ખર્ચ = 50000 + 2500 – 29000 = 23500

ત્રીજા વર્ષ માટે કુલ ખર્ચ = 50000 + 5000 – 25000 = 30000

ચોથા વર્ષ માટે કુલ ખર્ચ = 50000 + 8400 – 23000 = 35400

પાંચમાં વર્ષ માટે કુલ ખર્ચ = 50000 + 12400 – 22000 = 40400

છઠ્ઠા વર્ષ માટે કુલ ખર્ચ = 50000 + 18000 – 20000 = 48000

સાતમા વર્ષ માટે કુલ ખર્ચ = 50000 + 25500 – 16000 = 59500

આઠમા વર્ષ માટે કુલ ખર્ચ = 50000 + 34000 – 12000 = 72000

સરેરાશ કુલ ખર્ચ $T_A = \frac{C + C.f. - R}{n}$

અથવા

અહીં $T_A = \frac{\text{કુલ ખર્ચ}}{\text{વર્ષ}}$ દ્વારા મેળવેલ છે.

પ્રથમ વર્ષ માટે $T_A = \frac{17000}{1} = 17500$

બીજા વર્ષ માટે $T_A = \frac{23500}{2} = 11750$

ત્રીજા વર્ષ માટે $T_A = \frac{30000}{3} = 10000$

ચોથા વર્ષ માટે $T_A = \frac{35400}{4} = 8850$

પાંચમાં વર્ષ માટે $T_A = \frac{40400}{5} = 8080$

છઠ્ઠા વર્ષ માટે $T_A = \frac{48000}{6} = 8000$

સાતમા વર્ષ માટે $T_A = \frac{59500}{7} = 8500$

આઠમા વર્ષ માટે $T_A = \frac{72000}{8} = 9000$

ઉપરોક્ત કોષ્ટક પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે સરેરાશ કુલ વાર્ષિક ખર્ચ છઠ્ઠા વર્ષ માટે સૌથી ઓછું મળે છે. તેથી બાઈક 6 વર્ષના અંતે બદલવું ફાયદાકારક ગણાય ?

ઉદાહરણ-2 :

એક ઘર ઘંટીની કિંમત રૂ. 15000 છે. જુદા જુદા વર્ષ દરમ્યાન તેને ચલાવવાનો ખર્ચ અને તેની પુનઃ વેચાણ કિંમત નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. તો ઘરઘંટી કેટલા વર્ષ પછી બદલવી નફાકારક ગણાય.

વર્ષ	1	2	3	4	5	6	7
નિભાવ ખર્ચ	600	800	1200	1900	2500	3000	3200
પુનઃ વેચાણ ખર્ચ	8000	7000	6500	5500	5000	4000	3000

જવાબ :

અહીં સરેરાશ ખર્ચ T_A શોવા માટે આપણે 6 કોલમ બનાવીશું.

વર્ષ n	નિભાવ ખર્ચ t	સંચયી નિભાવ ખર્ચ C.f.	પુનઃ વેચાણ કિંમત R	કુલ ખર્ચ T.C.	સરેરાશ કુલ ખર્ચ T_A
1	600	600	8000	7600	7600
2	800	1400	7000	9400	4700
3	1200	2600	6500	11100	3700
4	1900	4500	5500	14000	3500
5	2500	7000	5000	17000	3400*
6	3000	10000	4000	21000	3500
7	3200	13200	3000	25200	3600

સમજૂતિ :

અહીં ખરીદ કિંમત C = રૂ. 15000 આપેલ છે. પ્રથમ કોલમમાં વર્ષ, બીજા કોલમમાં નિભાવ ખર્ચ, ચોથા કોલમમાં પુનઃ વેચાણ કિંમત જે દાખલમાં આવેલ છે તે જ સીધી લખેલ છે. જ્યારે ત્રીજા કોલમમાં સંચયી નિભાવ ખર્ચ મેળવવા માટે આગળના વર્ષનો C.f. + જે તે વર્ષ સામેનો નિભાવ ખર્ચ કરવાથી સંચયી નિભાવ ખર્ચ મેળવેલ છે.

કોલમ પાંચમાં કોલમમાં કુલ ખર્ચ = C + C.f. – R સૂત્રની મદદથી મેળવેલ છે.

છઠ્ઠા કોલમમાં સરેરાશ કુલ ખર્ચ $T_A = \frac{\text{કુલ ખર્ચ}}{\text{વર્ષ}}$ દ્વારા મેળવેલ છે.

ઉપરોક્ત કોષ્ટકમાં જોતાં સરેરાશ વાર્ષિક ખર્ચ T_A પાંચમાં વર્ષ માટે સૌથી ઓછો છે. તેથી ઘરઘંટી પાંચ વર્ષના અંતે બદલવી ફાયદાકારક ગણાય.

ઉદાહરણ-3 :

એક યંત્રની ખરીદી કિંમત રૂ. 95000 છે.જેની ભંગાર કિંમત રૂ. 5000 છે. તેનો નિભાવ ખર્ચ નીચે મુજબ છે તો યંત્ર ક્યારે બદલવું ફાયદાકારક ગણાય.

વર્ષ	1	2	3	4	5	6	7	8
નિભાવ ખર્ચ	3000	4500	6000	9000	11000	23500	24150	28850

જવાબ :

અહીં સરેરાશ કુલ વર્ષિક ખર્ચ શોધવા માટે નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક તૈયાર કરીશું.

વર્ષ n	નિભાવ ખર્ચ t	સંચયી નિભાવ ખર્ચ C.f.	ભંગાર કિંમત R	કુલ ખર્ચ T.C.	સરેરાશ કુલ વાર્ષિક ખર્ચ T_A
1	3000	3000	5000	93000	93000
2	4500	7500	5000	97500	48750
3	6000	13500	5000	103500	34500
4	9000	22500	5000	112500	28125
5	11000	33500	5000	123500	24700
6	23500	57000	5000	147000	24500
7	24150	81150	5000	171150	24450*
8	28850	110000	5000	200000	25000

સમજૂતિ :

અહીં ખરીદ કિંમત C = રૂ. 95000 આપેલ છે. પ્રથમ અને બીજા કોલમમાં દાખલામાં આપેલ રકમ લખેલ છે.

જ્યારે ત્રીજા કોલમમાં સંચયી નિભાવ ખર્ચ = અગાઉ વર્ષનો સંચયી નિભાવ ખર્ચમાં ચાલુ વર્ષનો નિભાવ ખર્ચ ઉમેરતાં *C.f.* મળે છે.

ચોથા કોલમમાં પુનઃ વેચાણ કિંમત એ સરખી છે એટલે કે ભંગાર કિંમત રૂ. 5000 આપેલ છે જે દરેક વર્ષે સામે લખેલ છે.

પાંચમાં કોલમમાં કુલ ખર્ચ = C + C.*f.* – R અને છઠ્ઠા કોલમમાં $T_A = \frac{\text{કુલ ખર્ચ}}{\text{વર્ષ}}$ દ્વારા મેળવેલ છે.

ઉપરોક્ત કોષ્ટક પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે સરેરાશ વાર્ષિક ખર્ચ T_A સાતમા વર્ષ માટે સૌથી ઓછું મળે છે. તેથી યંત્ર સાત વર્ષના અંતે બદલવું વધુ લાભદાયી પુરવાર થશે.

ઉદાહરણ-4 :

એક મશીનની ખરીદ કિંમત રૂ. 10,000 છે. તે યંત્ર ચલાવવા પાછળનો ખર્ચ પહેલા વર્ષ રૂ. 500 આવે છે. અને ત્યારબાદ દરેક વર્ષે તે રૂ. 500 વધતો જાય છે. પ્રથમ વર્ષ માટેની પુનઃ વેચાણ કિંમત રૂ. 5000 છે ત્યાર પછી દરેક વર્ષ માટે તે રૂ. 600 ઘટતી જાય છે. તો મશીનની ફેરબદલી કેટલા વર્ષ બાદ કરવી ફાયદાકારક ગણાય.

જવાબ :

અહીં ખરીદ કિંમત C = રૂ. 10,000 આપેલ છે. ઉપરાંત દરેક વર્ષનો નિભાવ ખર્ચ અલગથી આપેલ નથી પરંતુ પહેલા વર્ષ માટે રૂ. 500 આપેલ છે. તેમાં દરેક વર્ષે રૂ. 500 વધતો જાય છે તે આપણે ગણતરી કરીશું.

તે જ પ્રમાણે પુનઃ વેચાણ કિંમત પ્રથમ વર્ષે રૂ. 5000 આપેલ છે. ત્યારબાદ એક વર્ષે તેમાં રૂ. 600 ઘટાડો થાય છે તેની ગણતરી કરી કોલમ બનાવીશું.

અહીં કેટલા વર્ષની ગણતરી કરવી તે આપેલ નથી. પરંતુ આપણે પ્રથમ 6 વર્ષની ગણતરી કરીશું. પછી પણ સરેરાશ ખર્ચ ઘટતો જતો હોય તો આગળના વર્ષની ગણતરી કરવી પડે છે.

વર્ષ *n*	નિભાવ ખર્ચ *t*	સંચયી નિભાવ ખર્ચ C.*f.*	પુનઃ વેચાણ કિંમત R	કુલ ખર્ચ T.C.	સરેરાશ કુલ ખર્ચ T_A
1	500	500	5000	5500	5500
2	1000	1500	4400	7100	3550
3	1500	3000	3800	9200	3066.67
4	2000	5000	3200	11800	2950*
5	2500	7500	2600	14900	2980
6	3000	10500	2000	18500	3083.33

સમજૂતિ :

અગાઉના ઉદાહરણમાં દર્શાવેલ પ્રમાણે દરેક કોલમની ગણતરી કરેલ છે.

ઉપરોક્ત કોષ્ટકમાં જોતાં સરેરાશ વાર્ષિક T_A ચોથા વર્ષે સૌથી ઓછો છે. તેથી ચાર વર્ષના અંતે આ મશીન બદલવું હિતાવહ રહેશે.

ઉદાહરણ-5 :

એક યંત્રની ખરીદ કિંમત રૂ. 20000 છે. તેનો નિભાવ ખર્ચ પ્રથમ વર્ષ માટે રૂ. 800 છે અને પછી દરેક વર્ષે તે રૂ. 700 વધતો જાય છે તો કેટલા વર્ષ પછી યંત્રની ફેરબદલી કરવી જોઈએ ?

જવાબ :

અહીં ખરીદ કિંમત C = 20,000 આપેલ છે. નિભાવ ખર્ચ ફક્ત પ્રથમ વર્ષે રૂ. 800 આપેલ છે અને પછી દરેક વર્ષે તે રૂ. 700 વધતો જાય છે તો દરેક વર્ષે જે નિભાવ ખર્ચ આવે તેમાં રૂ. 700 ઉમેરવાથી અગાઉના વર્ષનો નિભાવ ખર્ચ મળશે.

અહીં પુનઃ વેચાણ કિંમત કે ભંગાર કિંમત (R) આપેલ નથી તેથી તે શૂન્ય છે એમ ધારી ગણતરી કરીશું.

વર્ષ *n*	નિભાવ ખર્ચ *t*	સંચયી નિભાવ ખર્ચ C.*f*.	કુલ ખર્ચ T.C.	સરેરાશ કુલ ખર્ચ T_A
1	800	800	20800	20800
2	1500	2300	22300	11150
3	2200	4500	24500	8166.67
4	2900	7400	27400	6850
5	3600	11000	31000	6200
6	4300	15300	35300	5883.33
7	5000	20300	40300	5757
8	5700	26000	46000	5750*
9	6400	32400	52400	5822.22

સમજૂતિ :

આ દાખલામાં વર્ષની સંખ્યા આપેલ નથી તેથી પ્રથમ છ કે સાત વર્ષની ગણતરી કરી હતી. પરંતુ સરેરાશ વાર્ષિક ખર્ચ T_A ની કિંમત ઘટતી જતી હતી તેથી જ્યાં સુધી T_A ની કિંમત વધવાની શરૂ ન થાય ત્યાં સુધી ગણતરી ચાલુ રાખવી પડે છે. તેથી આ દાખલામાં 9 વર્ષ સુધી ગણતરી કરેલ છે.

આમ, ઉપરોક્ત કોષ્ટકમાં જોતાં સરેરાશ વાર્ષિક ખર્ચ T_A આઠમાં વર્ષે સૌથી ઓછો છે પછી નવમાં વર્ષથી તે વધતો જાય છે. તેથી આ યંત્ર આઠમા વર્ષને અંતે ફેરબદલી કરવી વધુ ફાયદાકારક ગણાય.

ઉદાહરણ-6 :

એક મશીન પ્રથમ 6 વર્ષ સુધી વાપરવા જે તે વર્ષ સુધી કરવા પડતાં કુલ ખર્ચની રકમ અનુક્રમે રૂ. 3000, રૂ. 5600, રૂ. 8100, રૂ. 10600, રૂ. 13700 અને રૂ. 16800 છે. કયા વર્ષે યંત્રની ફેરબદલી કરવી જોઈએ.

જવાબ :

આ દાખલામાં ખરીદ કિંમત, નિભાવ ખર્ચ કે પુનઃ વેચાણ કિંમત આપેલ નથી પરંતુ ફક્ત કુલ ખર્ચ આપેલ છે તેના પરથી સરેરાશ ખર્ચ T_A શોધી ગણતરી કરીશું.

વર્ષ	કુલ ખર્ચ	સરેરાશ ખર્ચ
n	T.C.	T_A
1	3000	3000
2	5600	2800
3	8100	2700
4	10600	2650*
5	13700	2740
6	16800	2800

આમ, ઉપરોક્ત કોષ્ટકમાં જોતાં સરેરાશ વાર્ષિક ખર્ચ T_A ચોથા વર્ષે સૌથી ઓછો છે. તેથી ચાર વર્ષના અંતે મશીનની ફેરબદલી કરવી ફાયદાકારક ગણાય.

ઉદાહરણ-7 :

એક યંત્રની ખરીદ કિંમત રૂ. 32000 છે. તેનું નિભાવ ખર્ચ પ્રથમ ત્રણ વર્ષ માટે ખરીદ કિંમતના 5% જેટલું અને ત્યારપછી દર વર્ષે તે ખરીદ કિંમતના 10% જેટલું વધતું જાય છે. તો યંત્ર કેટલા વર્ષ પછી બદલવું ફાયદાકારક ગણાય ?

જવાબ :

અહીં ખરીદ કિંમત C = રૂ. 32000 આપેલ છે.

નિભાવ ખર્ચનું કોષ્ટક આપેલ નથી. પરંતુ તે આપેલ માહિતી પરથી શરૂઆતના સાત વર્ષ માટે બનાવી તે પરથી સરેરાશ વાર્ષિક ખર્ચ T_A ની ગણતરી કરીશું. જો આ સમયગાળા દરમ્યાન T_A નું વલણ શરૂઆતમાં વધે છે ત્યારબાદ અમુક ચોક્કસ વર્ષ બાદ ક્રમશઃ ઘટતું જાય તો જવાબ મળી જશે. જો બનાવેલ કોષ્ટકના સમયગાળા દરમ્યાન T_A સતત ઘટતું જણાય તો બીજા કેટલાંક વર્ષ માટે તે વધવાની શરૂઆત ન થાય ત્યાં સુધી ગણતરી કરવી પડે.

અહીં આપણે સરેરાશ કુલ ખર્ચ T_A શોધવાનું કોષ્ટક બનાવીશું.

વર્ષ *n*	નિભાવ ખર્ચ *t*	સંચયી નિભાવ ખર્ચ C.*f*.	કુલ ખર્ચ T.C	સરેરાશ ખર્ચ T.A.
1	1600	1600	33600	33600
2	1600	3200	35200	17600
3	1600	4800	36800	12266.67
4	4800	9600	41600	10400
5	8000	17600	49600	9920*
6	11200	28800	60800	10133

સમજૂતિ :

અહીં સંચયી નિભાવ ખર્ચ પ્રથમ ત્રણ વર્ષ માટે ખરીદ કિંમતને 5% એટલે $32000 \times \frac{5}{10} = 1600$ છે.

ત્યારબાદ દર વર્ષે ખરીદ કિંમતના 10% એટલે $32000 \times \frac{10}{100} = 3200$ વધતો જાય છે. આ પ્રમાણે ગણતરી કરેલ છે.

આમ ઉપરોક્ત કોષ્ટક જોતાં T_A નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય (9920) પાંચમાં વર્ષ માટે મળે છે. તેથી યંત્ર 5 વર્ષને અંતે બદલવું જોઈએ.

15.6 તમારી પ્રગતિ ચકાસો :

15.6.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો. :

(1) ફેરબદલીની સમસ્યા પર નોંધ લખો.

(2) ફેરબદલીની સમસ્યા શું છે ? તેના ઉકેલની રીત સમજાવો.

(3) ફેરબદલીની સમસ્યા ઉદાહરણ આપી સમજાવો.

(4) ફેરબદલીની સમસ્યાની ધારણા અને તેના લાભો જણાવો.

(5) એક યંત્રની ખરીદ કિંમત રૂ. 9000 છે. તેનો નિભાવ ખર્ચ પ્રથમ વર્ષ માટે રૂ. 400 છે પછી દરેક વર્ષે તે રૂ. 1200 વધતો જાય છે. તો યંત્ર ક્યારે બદલવું નફાકારક છે તે નક્કી કરો.

(6) એક મશીનની કિંમત રૂ. 10,000 છે. તેના પ્રથમ વર્ષનો નિભાવ ખર્ચ રૂ. 300 છે પછી દરેક વર્ષે નિભાવ ખર્ચ રૂ. 1000 વધતો જાય છે. તો કેટલા વર્ષ બાદ મશીનની ફેરબદલી કરવી જોઈએ ?

(7) એક યંત્ર પ્રથમ સાત વર્ષ સુધી વાપરવા જે તે વર્ષ સુધી કરવા પડતાં કુલ ખર્ચની રકમ અનુક્રમે રૂ. 12200, રૂ. 12700, રૂ. 13500, રૂ. 14700, રૂ. 16500, રૂ. 19000, રૂ. 22200 અને રૂ. 26200 છે. કયા વર્ષે યંત્રની ફેરબદલી કરવી જોઈએ તે નક્કી કરો.

(8) એક મશીન પ્રથમ છ વર્ષ સુધી વાપરવા જે તે વર્ષે સુધી કરવા પડતાં કુલ ખર્ચની રકમ અનુક્રમે રૂ. 9800, રૂ. 10700, રૂ. 12200, રૂ. 13900, રૂ. 16000 અને રૂ. 19600 છે. તો કયા વર્ષે આ મશીનની ફેરબદલી કરવી નફાકારક ગણાય ?

(9) એક વૉશિંગ મશીન રૂ. 18000માં ખરીદવામાં આવે છે. ભૂતકાળના અનુભવોના આધારે તેનો નિભાવ ખર્ચ અને પુનઃ વેચાણ કિંમત નીચે પ્રમાણે મળે છે. તો તેને કેટલા વર્ષે ફેરબદલી કરવી જોઈએ ?

વર્ષ	1	2	3	4	5	6	7	8
નિભાવ ખર્ચ	500	700	1100	1500	2000	2500	2900	4000
પુનઃ વેચાણ કિંમત	12000	10000	8000	7000	6000	5000	4000	4000

(10) એક રેફ્રિજરેટર રૂ. 15000માં ખરીદવામાં આવે છે. ભૂતકાળના અનુભવોના આધારે તેનો વાર્ષિક નિભાવ ખર્ચ અને પુનઃ વેચાણ કિંમત નીચે પ્રમાણે છે, તો તેની કેટલા વર્ષે ફેરબદલી કરવી ફાયદાકારક ગણાય ?

વર્ષ	1	2	3	4	5	6	7	8
નિભાવ ખર્ચ	300	450	650	900	1200	1350	1400	2250
પુનઃ વેચાણ કિંમત	10000	9000	8000	7000	6000	5000	4100	3500

(11) એક યંત્રની ખરીદ કિંમત રૂ. 16000 છે. તેના વિવિધ વર્ષો માટે નિભાવ ખર્ચ અને પુનઃ વેચાણ કિંમત ક્રમશઃ નીચે પ્રમાણે છે. તો કેટલા વર્ષ પછી એ યંત્ર બદલવું લાભદાયી પુરવાર થશે ?

વર્ષ	1	2	3	4	5	6	7
નિભાવ ખર્ચ	800	900	1050	1300	1500	2000	2500
પુનઃ વેચાણ કિંમત	14500	13200	12210	11410	10900	9000	7000

(12) એક યંત્રની ખરીદ કિંમત રૂ. 11500 છે અને તેની ભંગાર કિંમત રૂ. 1500 છે, તેનો નિભાવ ખર્ચ નીચે મુજબ હોય તો યંત્રની ફેરબદલી કેટલા વર્ષ પછી કરવી જોઈએ ?

વર્ષ	1	2	3	4	5	6	7
નિભાવ ખર્ચ (રૂમાં)	300	900	1550	1850	2150	3560	4340

(13) એક કંપની પાસે રૂ. 14000ની કિંમતનું એક મશીન છે. જેની પુનઃ વેચાણ કિંમત માત્ર રૂ. 2000 છે. ભૂતકાળના અનુભવને આધારે તેનો નિભાવ ખર્ચ નીચે મુજબ છે. તેણે નવું યંત્ર ક્યારે ખરીદવું જોઈએ.

વર્ષ	1	2	3	4	5	6	7
નિભાવ ખર્ચ	200	500	800	1200	1800	2460	3265

(14) એક કંપનીમાં વપરાતા બોઈલરની કિંમત રૂ. 75000 છે. આ બોઈલરની ભંગાર કિંમત રૂ. 15000 છે. જૂના વર્ષોના અનુભવના આધારે જુદા જુદા વર્ષ માટે તેનો નિભાવ ખર્ચ નીચે પ્રમાણે છે. તો કંપનીએ આ બોઈલર ક્યારે બદલવું નફાકારક ગણાય ?

વર્ષ	1	2	3	4	5	6
નિભાવ ખર્ચ	5000	8600	13500	20600	30500	47000

(15) એક યંત્રની ખરીદ કિંમત રૂ. 80000 ગોઠવણી ખર્ચ સાથે છે. આ યંત્રની પુનઃ વેચાણ કિંમત અને જુદા જુદા વર્ષ માટે નિભાવ ખર્ચ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. તો આ યંત્રની ફેરબદલી ક્યારે કરવી ફાયદાકારક ગણાય ?

વર્ષ	1	2	3	4	5	6	7	8
પુનઃ વેચાણ કિંમત	50000	30000	20000	12000	8000	5000	5000	5000
નિભાવ ખર્ચ	10000	15000	20000	25000	30000	35000	40000	45000

(16) એક નાના ટેમ્પાની ખરીદ કિંમત રૂ. 1,00,000 છે. આ ટેમ્પાની એક વર્ષના અંતે પુનઃ વેચાણ કિંમત રૂ. 50,000 છે. ત્યાર બાદ વર્ષે તેમાં રૂ. 5000નો ઘટાડો થતો જાય છે. જ્યારે ટેમ્પાનો પ્રથમ વર્ષનો નિભાવ ખર્ચ રૂ. 20000 છે, તે પછી દર વર્ષે રૂ. 4000 વધતો જાય છે તો આ નાનો ટેમ્પો કેટલા વર્ષે બદલવો ફાયદાકારક ગણાય ?

(17) એક યંત્ર પ્રથમ 6 વર્ષ સુધી વાપરતા જે વર્ષ સુધી કરવા પડતાં કુલ ખર્ચની રકમ અનુક્રમે રૂ. 3000, રૂ. 5600, રૂ. 8200, રૂ. 10,800, રૂ. 13375 અને રૂ. 16800 છે. તો કયા વર્ષના અંતે આ યંત્રની ફેરબદલી કરવી ફાયદાકારક ગણાય.

જવાબો :

(5) યંત્ર ચોથા વર્ષને અંતે બદલવું નફાકારક છે. ન્યૂનતમ વાર્ષિક ખર્ચ રૂ. 4456

(6) મશીન પાંચમાં વર્ષના અંતે બદલવું જોઈએ ન્યૂનતમ વાર્ષિક કુલ ખર્ચ રૂ. 4300

(7) યંત્ર છઠ્ઠા વર્ષને અંતે બદલવું જોઈએ. ન્યૂનતમ વાર્ષિક કુલ ખર્ચ રૂ. 3166.67

(8) મશીન પાંચમાં વર્ષના અંતે બદલવું નફાકારક ગણાય. ન્યૂનતમ વાર્ષિક કુલ ખર્ચ રૂ. 3200

(9) વૉશિંગ મશીન છ વર્ષના અંતે બદલવું જોઈએ ન્યૂનતમ વાર્ષિક કુલ ખર્ચ = રૂ. 3550

(10) રેફ્રિજરેટર સાતમા વર્ષના અંતે બદલવું ફાયદાકારક ગણાય. ન્યૂનતમ વાર્ષિક કુલ ખર્ચ = રૂ. 2450

(11) યંત્ર પાંચમા વર્ષના અંતે બદલવું લાભદાયી પુરવાર થાય. લઘુત્તમ વાર્ષિક કુલ ખર્ચ = રૂ. 2130

(12) યંત્ર પાંચમાં વર્ષના અંતે બદલવું જોઈએ. લઘુત્તમ વાર્ષિક કુલ ખર્ચ રૂ. 3320.

(13) મશીન છઠ્ઠા વર્ષના અંતે નવું ખરીદવું જોઈએ. લઘુત્તમ વાર્ષિક કુલ ખર્ચ રૂ. 3160.

(14) બોઈલર ચોથા વર્ષને અંતે બદલવું નફાકારક ગણાય. ન્યૂનતમ વાર્ષિક કુલ ખર્ચ રૂ. 26925.

(15) યંત્ર પાંચમાં વર્ષને અંતે બદલવું ફાયદાકારક ગણાય. લઘુત્તમ વાર્ષિક કુલ ખર્ચ રૂ. 34400.

(16) નાનો ટેમ્પો પાંચમાં વર્ષને અંતે બદલવો ફાયદાકારક ગણાય. લઘુત્તમ વાર્ષિક કુલ ખર્ચ = રૂ. 42000

(17) યંત્ર પાંચમા વર્ષને અંતે બદલવું ફાયદાકારક ગણાય. ન્યૂનતમ ખર્ચ = રૂ. 2675.

15.6.2 નીચે આપેલા વિધાનો સાચા છે કે ખોટા તે જણાવો. :

(1) જ્યારે મશીન કે યંત્ર બંધ પડે (ખોટવાઈ જાય) ત્યારે જ યંત્રની ફેરબદલી કરવી જોઈએ.

(2) જે તે સમય દરમ્યાન નાણાંનું મૂલ્ય બદલાયું ન હોય આ ધારણાને આધારે જ ફેરબદલીની સમસ્યાનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે.

(3) જે વર્ષે સરેરાશ કુલ ખર્ચ લઘુત્તમ (ઓછામાં ઓછું) હોય તે વર્ષના અંતે યંત્રની ફેરબદલી કરવી ફાયદાકારક ગણાય.

(4) જે વર્ષે નિભાવ ખર્ચ સૌથી વધુ હોય તે વર્ષે યંત્રની ફેરબદલી કરવી યોગ્ય ગણાય.

(5) ફેરબદલીની સમસ્યામાં યંત્રની પુનઃ વેચાણ વધતી જાય છે.

(6) ફેરબદલીની સમસ્યામાં યંત્રનું આયુષ્ય વધતાની સાથે નિભાવ ખર્ચ પણ વધતો જાય છે.

જવાબો :

(1) ખોટું (2) સાચું (3) સાચું(4) ખોટું (5) ખોટું (6) સાચું

15.6.3 યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો :

(1) ફેરબદલીની સમસ્યાના સંદર્ભમાં યંત્રની પુનઃ વેચાણ કિંમત સમય સાથે મોટાભાગે .... છે.

(a) ઘટે (b) વધે (c) સ્થિર રહે (d) એકપણ નહીં

(2) ફેરબદલીની સમસ્યા સાથે યંત્રનો નિભાવ ખર્ચ મોટેભાગે .... છે.

(a) ઘટે (b) વધે (c) સ્થિર રહે (d) એકપણ નહીં

(3) "આપેલ સમયગાળા દરમ્યાન .... નું મૂલ્ય બદલાયું નથી." એ ધારણા હેઠળ ફેરબદલીની સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવાય છે.

(a) ખરીદ કિંમત (b) નિભાવ ખર્ચ (c) નાણાં (d) પુનઃ વેચાણ કિંમત

(4) એ વર્ષ કે જેના માટે .... લઘુત્તમ (ઓછામાં ઓછું) હોય તે વર્ષે ફેરબદલી માટેનો શ્રેષ્ઠ સમય ગણાય.

(a) કુલ ખર્ચ (b) નિભાવ ખર્ચ (c) પુનઃ વેચાણ કિંમત (d) સરેરાશ વાર્ષિક ખર્ચ

(5) એક યંત્ર પાંચમાં વર્ષના અંતે બદલવું ફાયદાકારક છે અને પાંચમાં વર્ષે કુલ ખર્ચ રૂ. 2,10,000 હોય તો તે વર્ષે સરેરાશ ખર્ચ કેટલો હશે ?

(a) 2,10,000 (b) 52,500 (c) 35,000 (d) 42,000

(6) ફેરબદલીની સમસ્યામાં કયું વર્ષ ફેરબદલી માટે શ્રેષ્ઠ ગણાય ?

(a) જે વર્ષે સરેરાશ વાર્ષિક ખર્ચ મહત્તમ (વધુમાં વધુ) હોય તે વર્ષ

(b) જે વર્ષે કુલ ખર્ચ લઘુત્તમ (ઓછામાં ઓછો) હોય તે વર્ષ

(c) જે વર્ષે સરેરાશ વાર્ષિક ખર્ચ લઘુત્તમ (ઓછામાં ઓછો) હોય તે વર્ષ

(d) ઉપરનામાંથી એકપણ નહીં.

(7) એક યંત્રનો પાંચમા, છઠ્ઠા અને સાતમાં વર્ષ સરેરાશ વાર્ષિક ખર્ચ અનુક્રમે રૂ. 3300, રૂ. 3160 અને રૂ. 3175 હોય તો કયા વર્ષે યંત્રની ફેરબદલી કરવી ફાયદાકારક ગણાય ?

(a) પાંચમાં વર્ષના અંતે (b) છઠ્ઠા વર્ષના અંતે

(c) સાતમા વર્ષના અંતે (d) આપેલમાંથી એકપણ નહીં.

(8) એક મશીનનો સરેરાશ વાર્ષિક ખર્ચ T_A પ્રથમ સાત વર્ષમાં અનુક્રમે રૂ. 7600, રૂ. 4700, રૂ. 3700, રૂ. 3500, રૂ. 3400, રૂ. 3500 અને રૂ. 3600 હોય તો કયા વર્ષે મશીનની ફેરબદલી કરવી ફાયદાકારક ગણાય ?

(a) પાંચમા વર્ષના અંતે (b) છઠ્ઠા વર્ષના અંતે

(c) સાતમા વર્ષના અંતે (d) ચોથા વર્ષના અંતે

જવાબો :

(1) – a (2) – b (3) – c (4) – d (5) – d (6) – c (7) – b (8) – a

15.7 ચાવીરૂપ શબ્દો :

ફેરબદલી : વસ્તુ અમુક સમય પછી જૂનું થતાં તેની જગ્યાએ નવી વસ્તુ ખરીદવી તે.

નિભાવ ખર્ચ : યંત્ર કે મશીન ચલાવવા માટે વર્ષ દરમ્યાન થતું ખર્ચ.

પુનઃ વેચાણ કિંમત : વસ્તુ જુની થતાં તેનું વેચાણ કરવામાં આવે ત્યારે જે કિંમત મળે છે તેને પુનઃ વેચાણ કિંમત કહે છે.

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) Operation Research & Quantitative Techniques, K. Shridhara Bhat, Himalaya Publishing House. 2011

(2) ક્રિયાત્મક સંશોધન, હિમાલયા પબ્લિશીંગ હાઉસ. - 2000

એકમ 16 નિયુક્તિની સમસ્યા
[Assignment Problem]

16.0 ઉદ્દેશો

16.1 પ્રાસ્તાવિક

16.2 નિયુક્તિની સમસ્યાનો અર્થ

16.3 નિયુક્તિની સમસ્યાના લક્ષણો

16.4 નિયુક્તિની સમસ્યાની ધારણાઓ

16.5 નિયુક્તિની સમસ્યાનું ગાણિતિક સ્વરૂપ

16.6 નિયુક્તિની સમસ્યાના ઉકેલની રીત

- **16.6.1** હંગેરિયન રીત

16.7 ઉદાહરણો

16.8 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

- **16.8.1** નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.
- **16.8.2** યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.

16.9 ચાવીરૂપ શબ્દો

● સંદર્ભસૂચિ

16.0 ઉદ્દેશો :

એક સમાન સંખ્યામાં આપેલા ઉત્પત્તિ સ્થાનો અને પ્રાપ્તિસ્થાનોને એક પ્રાપ્તિસ્થાન દીઠ એક ઉત્પત્તિ સ્થાનોને એવી રીતે સાંકળવાનો છે કે જેથી કાર્યો પૂર્ણ કરવા માટે થતો ખર્ચ કે લાગતો સમય લઘુત્તમ થાય. આવી સમસ્યાનો અહીં અભ્યાસ કર્યો છે, જેના કારણે વિદ્યાર્થીઓની નિર્ણયશક્તિ વિકસે છે અને જ્યારે પણ વ્યક્તિની યોગ્ય કાર્યશક્તિ મુજબ એને કાર્યની સોંપણી કરી શકાય તેથી કાર્યો ઝડપથી પૂર્ણ કરી શકાય.

16.1 પ્રાસ્તાવિક :

નિયુક્તિની સમસ્યા એક વિશિષ્ટ પ્રકારની વાહનવ્યવહારની સમસ્યા છે. આ સમસ્યામાં જેટલાં પ્રાપ્તિસ્થાનો હોય તેટલા જ ઉત્પત્તિ સ્થાનો હોવાથી દરેક પ્રાપ્તિસ્થાનોને એક અને ફક્ત એક જ ઉત્પત્તિ સ્થાન સાથે સાંકળવામાં આવે છે. જેથી કાર્ય વહેંચણીથી લાગતો કુલ સમય અથવા કુલ ખર્ચ લઘુત્તમ થાય. આમ નિયુક્તિની સમસ્યાને કાર્યવહેંચણીની સમસ્યા પણ કહે છે.

16.2 નિયુક્તિની સમસ્યાનો અર્થ :

જુદા જુદા ઉત્પત્તિ સ્થાનો જેવા કે, યંત્રો, માણસો, વેચાણ પ્રતિનિધિઓ, ક્રિકેટની રમતમાં બેટ્સમેનો વગેરે. જ્યારે પ્રાપ્તિસ્થાનો અનુક્રમે કારીગરો, કરારબદ્ધ કાર્યો, વેચાણ વિસ્તારો, બેટિંગ સ્થાન વગેરે આપેલા હોય. આ ઉત્પત્તિ સ્થાનોથી કાર્યક્ષમતાનું સ્તર જુદું જુદું હોવાથી નિયુક્તિની સમસ્યા ઉદ્‌ભવે છે. એટલે કે જુદા જુદા યંત્રો

હોય તે યંત્રો ચલાવવા માટે કારીગરોની જરૂર પડે છે. હવે આ યંત્રો પર એવી રીતે કારીગરોની પસંદગી કરો કે ઓછામાં ઓછા સમય કે ખર્ચમાં બધા જ કાર્યો પૂર્ણ થાય. આવી સમસ્યાને નિયુક્તિની કે કાર્યવહેંચણીની સમસ્યા તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

દા.ત. એક ઓફિસમાં પાંચ કર્મચારીઓને જુદા જુદા પાંચ કાર્યો સોંપવાના છે. હવે કયા કર્મચારીને કયું કાર્ય સોંપવું એ ઓફિસ મેનેજરનો પ્રશ્ન છે. મેનેજરે એ જોવાનું છે કે દરેક કર્મચારીને માત્ર એક જ કામ મળે અને જરૂરી તમામ કાર્યો ઓછામાં ઓછા સમયમાં કે ઓછામાં ઓછા ખર્ચે પૂરા થાય. આ માટે મેનેજરને દરેક કર્મચારીની કાર્યક્ષમતાની જાણકારી છે. વળી કોઈને પણ એકથી વધુ કાર્ય સોંપવાનું નથી અને દરેક કાર્ય માત્ર એક જ કર્મચારી પાસેથી પૂરું કરાવવાનું છે. આ સમસ્યાને નિયુક્તિની સમસ્યા કહે છે.

ધારો કે એક કંપનીમાં ચાર કારીગરો અને ચાર યંત્રો છે. દરેક કારીગરને બધા જ યંત્રો પર કાર્ય કરવા માટે લાગતો સમય જો જાણતા હોઈએ તો કયા કારીગરને કયા યંત્ર પર કાર્ય સોંપવું કે જેથી સમગ્ર કાર્યનો કુલ સમય લઘુત્તમ થાય, આવી સમસ્યાઓને નિયુક્તિની સમસ્યા કહે છે.

16.3 નિયુક્તિની સમસ્યાના લક્ષણો :

(1) આ સમસ્યામાં યંત્રો, કાર્યો, કર્મચારીઓ અથવા પ્રોજેક્ટની સંખ્યા જાણતા હોઈએ છીએ.

(2) દરેક કારીગરોને યંત્રો પર થતો સમય કે ખર્ચ શ્રેણીકની માહિતી હોય છે.

(3) આ સમસ્યાનો મુખ્ય ઉદ્દેશ કુલ સમય કે ખર્ચને લઘુત્તમ અથવા નફો વેચાણ, ક્રિકેટની રમતમાં રન મહત્તમ બનાવવાનો હોય છે.

16.4 નિયુક્તિની સમસ્યાની ધારણાઓ :

(1) નિયુક્તિની સમસયામાં ઉત્પત્તિ સ્થાનોની સંખ્યા અને પ્રાપ્તિસ્થાનોની સંખ્યા સરખી હોય છે.

(2) દરેક પ્રાપ્તિસ્થાનમાં ફક્ત એક જ નિયુક્તિ આપવામાં આવે છે.

(3) દરેક ઉદ્ભવસ્થાનનો પુરવઠો અને દરેક પ્રાપ્તિસ્થાનની માંગ ફક્ત 1 (એક) એકમ હોય છે.

(4) i માં ઉત્પત્તિ સ્થાનો ($i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$) j માં પ્રાપ્તિસ્થાન (જ્યાં $j = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$) સાથે સાંકળવાનું ખર્ચ C_{i_j} છે.

(5) નિયુક્તિની સમસ્યાનો મુખ્ય હેતુ બધા જ કાર્યોમાં એવી રીતે નિયુક્તિ આપવી કે જેથી ખર્ચ કે સમય લઘુત્તમ થાય.

16.5 નિયુક્તિની સમસ્યાનું ગાણિતિક સ્વરૂપ :

ધારો કે n ઉત્પત્તિ સ્થાનો $O_1, O_2, O_3 \ldots\ldots\ldots O_n$ છે. અને n પ્રાપ્તિસ્થાનો $D_1, D_2, D_3 \ldots\ldots\ldots D_n$ પર નિયુક્તિ આપવાની છે. વળી i માં ઉત્પત્તિ સ્થાનને j માં પ્રાપ્તિસ્થાન સાથે સાંકળવાનો ખર્ચ C_{i_j} વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જો x_{i_j} એ i માં ઉત્પત્તિ સ્થાનની j માં પ્રાપ્તિસ્થાન સાથેની નિયુક્તિ દર્શાવે તો તેને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

$x_{i_j} = 1$ લઈએ તો i માં ઉત્પત્તિ સ્થાનને j માં પ્રાપ્તિસ્થાન સાથે સાંકળવામાં આવે છે.

$x_{i_j} = 0$ લઈએ તો i માં ઉત્પત્તિ સ્થાનને j માં પ્રાપ્તિસ્થાન સાથે ન સાંકળવામાં આવે.

એક ઉત્પત્તિ સ્થાનને કોઈ એક જ પ્રાપ્તિસ્થાન સાથે સાંકળી શકાય છે, તે જ રીતે દરેક પ્રાપ્તિસ્થાન કોઈ એક જ ઉત્પત્તિ સ્થાન સાથે સાંકળી શકાય છે. તેથી દરેક હાર અને સ્તંભમાં અનુક્રમે પુરવઠો અને માંગ બરાબર 1 જ થાય છે. તેથી નિયુક્તિની સમસ્યાનો ખર્ચ-શ્રેણીક નીચે મુજબ બનશે.

ઉત્પત્તિ સ્થાનોપ્રાપ્તિ સ્થાનો પુરવઠો

	D_1	D_2	....	D_j	....	D_{2n}	
O_1	C_{11}	C_{12}	....	C_{ij}	....	C_{1n}	1
O_2	C_{21}	C_{22}	....	C_{2j}	....	C_{2n}	1
.	।	।		।		।	।
.	।	।		।		।	।
.	।	।		।		।	।
O_i	C_{i1}	C_{i2}	....	C_{ij}	....	C_{in}	1
.	।	।		।		।	।
.	।	।		।		।	।
.	।	।		।		।	।
O_n	C_{n1}	C_{n2}	....	C_{nj}	....	C_{nn}	1
માંગ	1	1	....	1	....	1	

ટૂંકમાં નિયુક્તિની સમસ્યાને નીચે મુજબ ગાણિતીય સ્વરૂપમાં રજૂ કરી શકાય.

કુલ ખર્ચ $Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{i_j} \; x_{i_j}$ ને નીચેની શરતોને આધીન રહી લઘુત્તમ બનાવો.

(1) દરેક ઉત્પત્તિ સ્થાનને એક અને માત્ર એક જ પ્રાપ્તિસ્થાન સાથે સાંકળવામાં આવે છે.

$\therefore \sum_{i=1}^{n} x_{i_j} = 1$ (જ્યાં $i = 1, 2 \, ... \, n$)

(2) દરેક પ્રાપ્તિસ્થાન એક અને માત્ર એક જ ઉત્પત્તિ સ્થાન સાથે સાંકળવામાં આવે છે.

$\therefore \sum x_{i_j} = 1$ (જ્યાં $j = 1, 2 \, ... \, n$)

(3) $x_{i_j} = 0$ અથવા $x_{i_j} = 1$ i અને j ની બધી જ કિંમતો માટે.

16.6 નિયુક્તિની સમસ્યાના ઉકેલની રીત :

નિયુક્તિની સમસ્યા એ વિશિષ્ટ પ્રકારની વાહનવ્યવહારની સમસ્યા હોવાથી વાહન વ્યવહારની રીતો દ્વારા પણ ઉકેલ મેળવી શકાય છે. પરંતુ હંગેરીના ગણિતશાસ્ત્રી ડૉ. કૉનિંગે (Dr. Konig) મેળવેલ હંગેરિયન રીત એ નિયુક્તિની સમસ્યાના ઉકેલ માટેની ઈષ્ટતમ રીત છે.

16.6.1 હંગેરિયન રીત (The Hungerian Method) :

કુલ સમય અથવા કુલ ખર્ચ લઘુત્તમ (ઓછામાં ઓછો) થાય તે માટેની હંગેરીયન રીત નીચે મુજબ છે.

પગથિયું-1 :

આપેલ ખર્ચ શ્રેણિકની પ્રથમ હારમાંથી સૌથી નાનો ઘટક શોધો અને તે ઘટક પ્રથમ હારના બધા જ ઘટકોમાંથી બાદ કરો. બીજી હારમાંથી સૌથી નાનો ઘટક શોધો અને તે ઘટક બીજી હારના બધા જ ઘટકમાંથી બાદ કરો. તે જ રીતે બાકીની બધી જ હાર માટે આ પ્રમાણે ગણતરી કરો.

પગથિયું-2 :

પગથિયું-1 કરવાથી મળતા શ્રેણિકના પ્રથમ સ્તંભમાંથી સૌથી નાનો ઘટક શોધો અને તે ઘટકને પ્રથમ સ્તંભના બધા જ ઘટકોમાંથી બાદ કરો. તે જ રીતે બાકીના સ્તંભ માટે ગણતરી કરો.

પગથિયું-3 :

પગથિયું-1 અને 2 કર્યા બાદ ઈષ્ટ નિયુક્તિ મળી શકે કે નહિ તે નીચે મુજબ તપાસો.

(a) શ્રેણિકના જે ઘટકો શૂન્ય હોય તે બધા શૂન્યોમાંથી પસાર થતી શક્ય તેટલી ઓછામાં ઓછી આડી અથવા ઊભી રેખાઓ (લીટીઓ) દોરો.

(b) જો આવી રેખાઓની કુલ સંખ્યા હાર અથવા સ્તંભની સંખ્યા જેટલી હોય તો ઈષ્ટ ઉકેલ મળે છે. તેથી સીધા જ પગથિયા નંબર 6 પ્રમાણે નિયુક્તિ આપો અને ઉકેલ મેળવો.

પગથિયું-4 :

બધા જ શૂન્યોને ઢાંકતી આડી અથવા ઊભી રેખાઓની સંખ્યા હાર કે સ્તંભ કરતાં ઓછી હોય તો આ તબક્કે ઈષ્ટ ઉકેલ મળતો નથી આવા સમયે નીચે મુજબ ગણતરી કરો.

(a) આડી અથવા ઊભી રેખાઓ વડે ઢંકાયેલ ન હોય તેવા ઘટકોમાંથી સૌથી નાનો ઘટક શોધો. આ સૌથી નાના ઘટકને તે ઘટકોમાંથી બાદ કરો.

(b) જે ખાનામાં આડી અને ઊભી રેખાઓ એકબીજાને છેદતી હોય તે ખાનાના ઘટકોમાં આ સૌથી નાનો ઘટક ઉમેરો.

(c) આ સિવાયના બાકીના ઘટકો યથાવત રાખો.

પગથિયું-5 :

હવે શૂન્યોમાંથી પસાર થતી શક્ય તેટલી ઓછી આડી અથવા ઊભી રેખાઓ દોરો. જ્યાં સુધી આવી રેખાઓની સંખ્યા હાર અથવા સ્તંભની સંખ્યા જેટલી ન થાય ત્યાં સુધી આ પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરો.

પગથિયું-6 :

(a) ઈષ્ટ ઉકેલ માટે પ્રથમ દરેક હારમાં જોતા જાવો અને જે હારમાં ફક્ત એક જ શૂન્ય હોય તે શૂન્ય દર્શાવતા ખાનાને એક નિયુક્તિ આપો. તેને (*) સંજ્ઞા વડે દર્શાવો અને તે શૂન્ય જે હાર અને સ્તંભમાં હોય તેમની અવગણના કરો.

(b) જો દરેક હારમાં એકથી વધુ શૂન્ય હોયતો સ્તંભમાં જોતા જાઓ અને જે સ્તંભમાં ફક્ત એક જ શૂન્ય હોય તે શૂન્ય દર્શાવતાં ખાનાને એક નિયુક્તિ આપો અને તેને (*) સંજ્ઞા વડે દર્શાવો અને તે શૂન્ય જે હાર અને સ્તંભમાં હોય તેમની અવગણના કરો. બાકી રહેલા શ્રેણિક માટે આ પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરો.

(c) જો કોઈ પણ હાર અથવા સ્તંભ બે કે વધુ શૂન્ય હોય તો આપેલી સમસ્યા માટે એકથી વધુ ઈષ્ટ ઉકેલો શક્ય છે. અહીં ગમે તે એક શૂન્ય ઘટક હોય તે શૂન્ય દર્શાવતા ખાનાને એક નિયુક્તિ આપો.

આમ કરવાથી દરેક હારમાં અને દરેક સ્તંભમાં એક અને ફક્ત એક જ નિયુક્તિ (*) મળે છે. આ નિશાનીવાળા ખાનાઓની કિંમતોનો સરવાળો લઘુત્તમ ખર્ચ કે લઘુત્તમ સમય દર્શાવે છે.

મહત્તમ આવક, નફો, વેચાણ વગેરે મેળવવા માટે;

જ્યારે નિયુક્તિની સમસ્યામાં હેતુ ખર્ચ કે સમયને લઘુત્તમ બનાવવાને બદલે આવક, નફો, વેચાણ વગેરે મહત્તમ મેળવવાનો હોય ત્યારે આપેલ શ્રેણિકમાંથી સૌપ્રથમ સૌથી મોટો ઘટક શોધી તેમાંથી શ્રેણિકના બધા જ ઘટકો બાદ કરો. આમ કરવાથી મહત્તમીકરણની સમસ્યા એ ન્યૂનતમીકરણની સમસ્યામાં રૂપાંતર થાય છે. આ રીતે મળતા શ્રેણિક માટે ઉપર દર્શાવેલ હંગેરિયન રીતના પગથિયાં 1થી 6 મુજબ અનુસરવા તેથી તેનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

16.7 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 :

એક કંપનીમાં ચાર કાર્યો ચાર યંત્રો પર કરવાની સમસ્યા છે. વિવિધ કાર્યો વિવિધ યંત્રો પર કરવા માટે કરવા પડતા ખર્ચ (રૂપિયા હજારમાં) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. કુલ ખર્ચ લઘુત્તમ થાય તે રીતે ચાર કાર્યોની ચાર યંત્રો પર નિયુક્તિ કરો.

યંત્રો કાર્યો	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	9	10	11	16
J_2	15	12	11	16
J_3	12	14	17	15
J_4	14	17	20	10

જવાબ :

પગથિયું-1 : સૌ પ્રથમ દરેક હારમાંથી તે હારનો સૌથી નાનો ઘટક બાદ કરતાં નીચે પ્રમાણે શ્રેણિક મળશે.

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	0	1	2	7
J_2	4	1	0	5
J_3	0	2	5	3
J_4	4	7	10	0

સમજૂતિ :

પ્રથમ હારમાં સૌથી નાનો ઘટક 9 છે. તે દરેક ઘટકમાંથી બાદ કરતાં $9 - 9 = 0$, $10 - 9 = 1$, $11 - 9 = 2$ અને $16 - 9 = 7$ પ્રથમ હાર મળશે. તે જ રીતે બીજી હારમાં સૌથી નાનો ઘટક 11 છે. જે બીજી હારના ઘટકમાંથી બાદ કરી નવી બીજી હાર મેળવેલ છે. તે જ રીતે ત્રીજી અને ચોથી હાર મેળવેલ છે.

પગથિયું-2 : નવા શ્રેણિકના દરેક સ્તંભમાંથી તે સ્તંભનો સૌથી નાનો ઘટક બાદ કરતાં નીચે મુજબ શ્રેણિક મળશે.

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	0	0	2	7
J_2	4	0	0	5
J_3	0	1	5	3
J_4	4	6	10	0

સમજૂતિ :

પ્રથમ, ત્રીજા અને ચોથા સ્તંભમાં સૌથી નાનો ઘટક શૂન્ય છે તેથી તે સ્તંભો બદલાશે નહીં. જ્યારે બીજા સ્તંભમાં નાનો ઘટક 1 છે. જે બધા જ ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં 1 – 1 = 0, 1 – 1 = 0, 2 – 1 = 1 અને 7 – 1 = 6 સ્તંભ મળશે. જે ઉપર દર્શાવેલ છે.

પગથિયું-3 : આ શ્રેણિકમાં બધા જ શૂન્યોને આવરી લેતી શક્ય તેટલી ઓછામાં ઓછી આડી અથવા ઊભી રેખાઓ દોરો.

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	0 – –	– – 0 – –	– – 2 – –	– – 7
J_2	4 – –	– – 0 – –	– – 0 – –	– – 5
J_3	0 – –	– – 1 – –	– – 5 – –	– – 3
J_4	4 – –	– – 6 – –	– – 10 –	– – 0

સમજૂતિ :

અહીં પ્રથમ અને બીજી હારમાં બે-બે શૂન્યો છે તેને જોડતી આડી રેખાઓ દોરેલ છે. તે જ પ્રમાણે પ્રથમ અને ચોથા સ્તંભમાં એક-એક શૂન્ય બાકી રહે છે તેથી બંને સ્તંભોનો શૂન્યોને રેખાઓ દ્વારા આવરી લીધા છે. આમ કરવાથી આડી અને ઊભી રેખાઓની સંખ્યા (4) હાર કે સ્તંભ જેટલી થાય છે. માટે ઈષ્ટ ઉકેલ મળે છે.

પગથિયું-4 : હાર અથવા સ્તંભમાં ફક્ત એક જ શૂન્ય હોય ત્યાં નિયુક્તિ આપો અને તે ખાનાને * વડે દર્શાવો.

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	-	*	-	-
J_2	-	-	*	-
J_3	*	-	-	-
J_4	-	-	-	*

સમજૂતિ :

પ્રથમ અને બીજી હારમાં બે શૂન્યો છે. તેથી સૌપ્રથમ ત્રીજી હારમાં એક શૂન્ય સામે * ફાળવણી કરો. ત્યારબાદ ચોથી હાર પણ એક જ શૂન્ય છે. ત્યાં * ફાળવણી કરો. આમ કરવાથી પ્રથમ સ્તંભ, ચોથો સ્તંભ તેમજ ત્રીજી હાર, ચોથી હાર બંધ થશે. તેથી હવે પ્રથમ હારના બીજા સ્તંભમાં ફાળવણી થશે. તે જ રીતે બીજી હારમાં પણ શૂન્ય સામે ફાળવણી થશે.

ઉકેલ : J_1 કાર્ય M_2 યંત્ર પર કરો.

J_2 કાર્ય M_3 યંત્ર પર કરો.

J_3 કાર્ય M_1 યંત્ર પર કરો.

J_4 કાર્ય M_4 યંત્ર પર કરો.

ઉપર પ્રમાણે કાર્યની વહેંચણી કરીએ તો ઓછામાં ઓછો ખર્ચ -

$Z = 10 + 11 + 12 + 10$

$\therefore$ $Z = 43$ હજાર રૂપિયા થશે.

ઉદાહરણ-2 :

એક કોમ્પ્યૂટર કંપની પાસે ત્રણ નિષ્ણાંત પ્રોગ્રામરો છે. ત્રણ પ્રોગ્રામો A, B, C બનાવવા નિષ્ણાંતો દ્વારા લાગતો સરેરાશ સમય મિનિટમાં નીચે પ્રમાણે છે તો ત્રણેય પ્રોગ્રામરોને એવા પ્રોગ્રામની સોંપણી કરો કે જેથી પ્રોગ્રામ પૂર્ણ કરવામાં લાગતો સમય લઘુત્તમ થાય.

	પ્રોગ્રામ		
પ્રોગ્રામર	A	B	C
1	140	120	100
2	130	160	140
3	100	110	130

જવાબ :

પગથિયું-1 : સૌપ્રથમ દરેક હારમાંથી જે તે હારનો નાનો ઘટક જે તે હારના બધા જ ઘટકોમાંથી બાદ કરો.

	A	B	C
1	40	20	0
2	0	30	10
3	0	10	30

સમજૂતિ :

પ્રથમ હારમાં સૌથી નાનો ઘટક 100 છે, તેથી 140 – 100 = 40, 120 – 100 = 20 અને 100 – 100 = 0 પ્રમાણે પ્રમ હાર મળશે. તે જ રીતે બીજી અને ત્રીજી હાર મેળવેલ છે.

પગથિયું-2 : નવા શ્રેણીકમાં દરેક સ્તંભમાંથી જે તે સ્તંભનો સૌથી નાનો ઘટક શોધી જે તે સ્તંભના બધા જ ઘટકોમાંથી બાદ કરો.

	A	B	C
1	40	10	0
2	0	20	10
3	0	0	30

સમજૂતિ :

પ્રથમ અને ત્રીજા સ્તંભમાં સૌથી નાનો ઘટક 0 (શૂન્ય) છે. તે બાદ કરતાં પ્રથમ અને ત્રીજા સ્તંભના ઘટકો

બદલાશે નહિ. બીજા સ્તંભમાં સૌથી નાનો ઘટક 10 છે. તેથી બીજો સ્તંભ 20 – 10 = 10, 30 – 10 = 20 અને 10 – 10 = 0 મળશે.

પગથિયું-3 : આ શ્રેણિકમાં બધા જ શૂન્યોને આવરી લેતી શક્ય તેટલી ઓછામાં ઓછી અથવા ઊભી રેખાઓ દોરો.

	A	B	C
1	40	10	0
2	0	20	10
3	0	0	30

સમજૂતિ :

પ્રથમ સ્તંભમાં બે શૂન્યોને જોડતી ઊભી રેખા દોરો ત્યાર બાદ ત્રીજી હારમાં શૂન્યોને જોડતી આડી રેખા દોરો. હજુ ત્રીજી સ્તંભમાં એક શૂન્ય રહે છે, તેથી ત્રીજા સ્તંભમાં ઊભી રેખા દોરો.

પગથિયું-4 : હવે આ રેખાઓની સંખ્યા ત્રણ છે, જે હાર અથવા સ્તંભની સંખ્યા જેટલી થાય છે. તેથી ઈષ્ટ ઉકેલ મળશે. માટે હારમાં ફક્ત એક જ શૂન્ય હોય ત્યાં પ્રથમ નિયુક્તિ આપો.

	A	B	C
1	-	-	*
2	*	-	-
3	-	*	-

સમજૂતિ :

પ્રથમ હારમાં ત્રીજા સ્તંભમાં ફક્ત એક જ શૂન્ય છે. ત્યાં પ્રથમ નિયુક્તિ આપેલ છે. ત્યારબાદ બીજી હારમાં પણ એક જ શૂન્ય છે, ત્યાં નિયુક્તિ આપતા બીજી હાર અને પ્રથમ સ્તંભ બંધ થશે. તેથી ત્રીજી હારમાં ફક્ત એક જ શૂન્ય બાકી રહેશે ત્યાં નિયુક્તિ આપો.

ઉકેલ :

પ્રોગ્રામર 1 ને C પ્રોગ્રામની સોંપણી કરો.

પ્રોગ્રામર 2 ને A પ્રોગ્રામની સોંપણી કરો.

પ્રોગ્રામર 3 ને B પ્રોગ્રામની સોંપણી કરો.

આમ કરવાથી લઘુત્તમ સમય Z = 100 + 130 + 110 = 340 મિનિટ થશે.

ઉદાહરણ-3 :

પાંચ કારીગરો P, Q, R, S અને T ને પાંચ કાર્યો I, II, III, IV અને V એવી રીતે સોંપો કે જેથી કુલ સમય લઘુત્તમ થાય.

કાર્યો કારીગરો	I	II	III	IV	V
P	20	20	25	35	10
Q	18	30	44	35	33
R	15	17	25	5	15
S	40	41	40	42	35
T	17	15	16	20	22

જવાબ :

પગથિયું-1 : દરેક હારમાં નાનો ઘટક શોધી જે તે હારના તમામ ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં;

	I	II	III	IV	V
P	10	10	15	25	0
Q	0	12	26	17	15
R	10	12	20	0	10
S	5	6	5	7	0
T	2	0	1	5	7

સમજૂતિ :

પ્રથમ હારમાં સૌથી નાનો ઘટક 10 છે. તેથી પ્રથમ હાર 20 – 10 = 10, 20 – 10 = 10, 25 – 10 = 15, 35 – 10 = 25 અને 10 – 10 = 0 થશે તેવી જ રીતે બાકીની હારોની ગણતરી કરેલ છે.

પગથિયું-2 : નવા શ્રેણીકના દરેક સ્તંભમાંથી સૌથી નાનો ઘટક જે તે સ્તંભના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં;

	I	II	III	IV	V
P	10	10	14	25	0
Q	0	12	25	17	15
R	10	12	19	0	10
S	5	6	4	7	0
T	2	0	0	5	7

સમજૂતિ :

પ્રથમ, બીજા, ચોથા અને પાંચમાં સ્તંભમાં નાનો ઘટક શૂન્ય છે. તેથી તે સ્તંભો બદલાશે નહિ. જ્યારે ત્રીજા સ્તંભના બધા જ ઘટકોમાંથી બાદ કરેલ છે.

પગથિયું-3 : આ શ્રેણીકમાં બધા જ શૂન્યોને આવરી લેતી શક્ય તેટલી ઓછામાં ઓછી આડી અથવા ઊભી રેખાઓ દોરો.

	I	II	III	IV	V
P	10	10	14	25	0
Q	0 – –	– – 12 – –	– 25 – –	– 17 –	–15
R	10 – –	– 12 – –	– 19 – –	– 0 –	– 10
S	5	6	4	7	0
T	2 – –	– 0 – –	– 0 – –	– 5 –	– 7

સમજૂતિ :

આ શ્રેણીકમાં પાંચમી હાર અને પાંચમાં સ્તંભમાં બે શૂન્યો છે તેથી પ્રથમ પાંચમી હાર અને પાંચમાં સ્તંભમાં અનુક્રમે આડી અને ઊભી રેખા દોરેલ છે. હજુ બીજી અને ત્રીજી હારમાં એક-એક શૂન્ય બાકી રહે છે. તેથી બીજી અને ત્રીજી હારમાં આડી રેખાઓ દોરેલ છે.

અહીં શૂન્યોને જોડતી આડી કે ઊભી રેખાઓની સંખ્યા ચાર થાય છે, જે હાર કે સ્તંભની સંખ્યા કરતાં ઓછી છે તેથી ઈષ્ટ નિયુક્તિ મળતી નથી. તેથી આગળના પગથિયા કરવા પડશે.

પગથિયું-4 : બાકી રહેલા શ્રેણીકમાં (આડી અથવા ઊભી હાર સિવાયના) સૌથી નાનો ઘટક 4 છે. તે બાકી રહેલા ઘટકોમાંથી બાદ કરી જ્યાં બે રેખાઓ ભેગી થતી હોય ત્યાં ઉમેરતાં નવો શ્રેણીક મળશે. તેમાં શૂન્યોને જોડતી ઓછામાં ઓછી આડી કે ઊભી રેખાઓ દોરો.

	I	II	III	IV	V
P	6	6	10	21	0
Q	0	12	25	17	19
R	10	12	19	0	14
S	1	2	0	3	0
T	2	0	0	5	11

સમજૂતિ :

સૌપ્રથમ પાંચમી હાર અને પાંચમાં સ્તંભમાં બે શૂન્યોને આવરી લેતી રેખાઓ દોરેલ છે. પછી ત્રીજા સ્તંભમાં અને બીજી તેમજ ત્રીજી હારમાં રેખાઓ દોરેલ છે.

અહીં શૂન્યને જોડતી આડી કે ઊભી રેખાઓની સંખ્યા 5 છે. જે હાર અથવા સ્તંભની સંખ્યા જેટલી થાય છે. તેથી ઈષ્ટ નિયુક્તિ મળશે.

પગથિયું-5 : જે હાર કે સ્તંભમાં ફક્ત એક જ શૂન્ય હોય ત્યાં પ્રથમ નિયુક્તિ આપો, તે જ રીતે બાકીની નિયુક્તિ આપો.

	I	II	III	IV	V
P	-	-	-	-	*
Q	*	-	-	-	-
R	-	-	-	*	-
S	-	-	*	-	-
T	-	*	-	-	-

ઉકેલ : કારીગર P ને V મું કાર્ય સોંપો.

કારીગર Q ને I લું કાર્ય સોંપો.

કારીગર R ને IV થું કાર્ય સોંપો.

કારીગર S ને III જુ કાર્ય સોંપો.

કારીગર T ને II જુ કાર્ય સોંપો.

કુલ સમય Z = 10 + 18 + 5 + 40 + 15 = 88 કલાક

ઉદાહરણ-4 :

નીચે આપેલ શ્રેણીક ઉપરથી કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે પ્રમાણે નિયુક્તિ કરો. કુલ ન્યૂનતમ ખર્ચ પણ શોધો.

	વ્યક્તિ				
કાર્ય	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
W_1	10	14	20	14	6
W_2	4	22	18	18	12
W_3	16	18	4	8	8
W_4	14	10	12	16	10
W_5	6	16	20	12	20

જવાબ :

પગથિયું-1 : દરેક હારમાંથી નાનો ઘટક લઈ બાકીના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં;

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
W_1	4	8	12	8	0
W_2	0	18	14	14	8
W_3	12	14	0	4	4
W_4	4	0	2	6	0
W_5	0	10	14	6	14

પગથિયું-2 : નવા શ્રેણીકના દરેક સ્તંભામાંથી સૌથી નાનો ઘટક જે સ્તંભના ઘટકોમાં બાદ કરતાં મળેલ શ્રેણીકમાં શૂન્યને જોડતી ઓછામાં ઓછી આડી અથવા ઊભી રેખાઓ દોરતાં;

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
W_1	4	8	12	4	0
W_2	0	18	14	10	8
W_3	12	14	0	0	4
W_4	4	0	2	2	0
W_5	0	10	14	2	14

અહીં શૂન્યોને જોડતી આડી અને ઊભી રેખાઓની સંખ્યા 4 છે. જ્યારે હાર કે સ્તંભની સંખ્યા 5 છે. તેથી ઈષ્ટક ઉકેલ મળતો નથી તેથી આગળનું પગથિયું કરવું પડશે.

પગથિયું-3 : આ શ્રેણિકમાં રેખાઓને આવરી લેતાં ઘટક સિવાયના બાકીના ઘટકોમાં સૌથી નાનો ઘટક 2 છે. જે બાકીના શ્રેણીકના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં અને જ્યાં બે રેખાઓ ભેગી થતી હોય તેમાં ઉમેરતાં,

નોંધ : જે ઘટક પર એક રેખા હોય તે ઘટક બદલાશે નહિ.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
W_1	6	8	12	4	0
W_2	0	16	12	8	6
W_3	14	14	0	0	4
W_4	6	0	2	2	0
W_5	0	8	12	0	12

અહીં શૂન્યોને જોડતી આડી અને ઊભી રેખાઓની સંખ્યા 5 છે. જે હાર કે સ્તંભ જેટલી થાય છે. માટે ઈષ્ટ ઉકેલ શક્ય છે.

પગથિયું-4 : નિયુક્તિ આપો.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
W_1	-	-	-	-	*
W_2	*	-	-	-	-
W_3	-	-	*	-	-
W_4	-	*	-	-	-
W_5	-	-	-	*	-

ઉકેલ : W_1 કાર્ય P_5 વ્યક્તિને સોંપો.

W_2 કાર્ય P_1 વ્યક્તિને સોંપો.

W_3 કાર્ય P_3 વ્યક્તિને સોંપો.

W_4 કાર્ય P_2 વ્યક્તિને સોંપો.

W_5 કાર્ય P_4 વ્યક્તિને સોંપો.

કુલ ન્યૂનતમ ખર્ચ $Z = 6 + 4 + 4 + 10 + 12$

$\therefore Z = 36$

ઉદાહરણ-5 :

એક કંપનીના ચાર મશીનો પર ચાર કાર્યો કરવાના છે. દરેક કાર્ય કોઈપણ મશીન પર થઈ શકે છે. પરંતુ વિવિધ મશીન પર વિવિધ કાર્ય કરવા માટેનું ખર્ચ ભિન્ન છે. જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. તે પરથી ચારેય કાર્ય કરવાનું કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે રીતે કાર્યની મશીનો પર નિયુક્તિ આપો.

કાર્યો / મશીનો	J_1	J_2	J_3	J_4
M_1	10	9	7	8
M_2	5	8	7	7
M_3	5	4	6	5
M_4	2	3	4	5

જવાબ :

પગથિયું-1 : દરેક હારમાંથી નાનો ઘટક શોધી જે તે હારના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં;

	J_1	J_2	J_3	J_4
M_1	3	2	0	1
M_2	0	3	2	2
M_3	1	0	2	1
M_4	0	1	2	3

પગથિયું-2 : નવા શ્રેણીકના દરેક સ્તંભમાંથી સૌથી નાનો ઘટક શોધી જે તે સ્તંભના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં મળતા શ્રેણીકમાં શૂન્યોને જોડતી ઓછામાં ઓછી આડી અથવા ઊભી રેખાઓ દોરો.

	J_1	J_2	J_3	J_4
M_1	3	2	0	0
M_2	0	3	2	1
M_3	1	0	2	0
M_4	0	1	2	2

અહીં રેખાઓની સંખ્યા 3 છે જે હાર કે સ્તંભ (4) કરતાં ઓછી છે માટે ઈષ્ટ ઉકેલ મળતો નથી. તેથી આગળના પગથિયા કરો.

પગથિયું-3 : આ શ્રેણીકમાં રેખાઓ વડે આવરી લેવાયેલા ઘટક સિવાયના ઘટકોના શ્રેણીકમાં સૌથી નાનો ઘટક 1 છે. જે બાકીના શ્રેણીકના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં અને જે ઘટક પર રેખાઓ છેડતી હોય ત્યાં ઉમેરતાં;

	J_1	J_2	J_3	J_4
M_1	4	2	0	0
M_2	0	2	1	0
M_3	2	0	2	0
M_4	0	0	1	1

અહીં રેખાઓની સંખ્યા 4 છે જે હાર કે સ્તંભની સંખ્યા જેટલી થાય છે માટે ઈષ્ટ ઉકેલ મળશે.

પગથિયું-4 : નિયુક્તિ આપો.

	J_1	J_2	J_3	J_4
M_1	-	-	*	-
M_2	*	-	-	-
M_3	-	-	-	*
M_4	-	*	-	-

સમજૂતિ :

અહીં સૌપ્રથમ ત્રીજા સ્તંભમાં એક શૂન્ય છે. ત્યાં નિયુક્તિ * આપેલ છે. ત્યારબાદ હાર અને સ્તંભમાં એકથી વધુ શૂન્યો છે. તેથી એકથી વધુ ઉકેલ મળે છે. એવી પરિસ્થિતિમાં જે હારમાં બે શૂન્ય હોય ત્યાં કોઈપણ એક શૂન્ય સામે નિયુક્તિ આપો અને બાકીના ખાનાની નિયુક્તિ પૂર્ણ કરો. તે જ રીતે અહીં બીજી હારમાં બે શૂન્ય છે પરંતુ પ્રથમ બીજી હાર પ્રથમ સ્તંભમાં નિયુક્તિ * આપેલ છે. તેથી ચોથા સ્તંભમાં એક જ શૂન્ય બાકી રહે છે. ત્યાં નિયુક્તિ આપેલ છે અને છેલ્લે ચોથી હારમાં નિયુક્તિ આપેલ છે.

ઉકેલ-1 : $M_1 - J_3$
$M_2 - J_1$
$M_3 - J_4$
$M_4 - J_2$

કુલ ખર્ચ $Z = 20$

અથવા

ઉકેલ-2 $M_1 - J_3$

$M_2 - J_4$

$M_3 - J_2$

$M_4 - J_1$

કુલ ખર્ચ $Z = 20$

આમ એકથી વધુ ઉકેલ શક્ય છે. પરંતુ આપણે એક જ ઉકેલ દર્શાવવાનો છે.

ઉદાહરણ-6 :

ચાર કાર્યો જુદા જુદા ચાર યંત્રો પર કરવાથી થતો એકમ દીઠ નફો નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. તે પરથી દરેક કાર્યની જુદા જુદા યંત્ર પર એ રીતે નિયુક્તિ કરો કે જેથી કુલ નફો મહત્તમ થાય. મહત્તમ નફો પણ મેળવો.

યંત્ર કાર્ય	W	X	Y	Z
A	11	12	13	14
B	19	18	17	16
C	17	18	19	20
D	15	16	13	14

જવાબ :

અહીં સમસ્યાનો હેતુ મહત્તમ નફો કરવાનો છે. તેથી સૌપ્રથમ શ્રેણીકના સૌથી મોટા ઘટક (અહીં 20 છે)માંથી બધા જ ઘટકો બાદ કરીને નવો શ્રેણીક બનાવી પછી હંગેરિયન રીતનો ઉપયોગ કરીશું.

	W	X	Y	Z
A	9	8	7	6
B	1	2	3	4
C	3	2	1	0
D	5	4	7	6

પગથિયું-1 : આ શ્રેણીકમાં દરેક હારમાંથી સૌથી નાનો ઘટક શોધી જે તે હારના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં;

	W	X	Y	Z
A	3	2	1	0
B	0	1	2	3
C	3	2	1	0
D	1	0	3	2

પગથિયું-2 : નવા શ્રેણીકના દરેક સ્તંભમાંથી સૌથી નાનો ઘટક લઈ જે તે સ્તંભના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં

તેમજ શૂન્યને જોડતી આડી તથા ઊભી રેખાઓ દોરતાં;

	W	X	Y	Z
A	3	2	0	0
B	0	1	1	3
C	3	2	0	0
D	1	0	2	2

અહીં રેખાઓની સંખ્યા 4 છે જે હાર કે સ્તંભની સંખ્યા (4) જેટલી થાય છે માટે ઈષ્ટ ઉકેલ મળશે.

	W	X	Y	Z
A	-	-	*	-
B	*	-	-	-
C	-	-	-	*
D	-	*	-	-

સમજૂતિ :

સૌપ્રથમ પ્રથમ અને ચોથી હારમાં એક શૂન્ય છે. ત્યાં નિયુક્તિ * આપેલ છે. તેથી પ્રથમ અને બીજો સ્તંભ બંધ થશે. હવે બીજા ત્રીજા સ્તંભમાં બે-બે શૂન્યો છે. તેથી એકથી વધુ ઉકેલ શક્ય છે. આપણે યાદચ્છિક રીતે કોઈપણ શૂન્ય પસંદ કરી નિયુક્તિ આપી શકીએ છીએ તેથી અહીં પ્રથમ હારમાં ત્રીજા સ્તંભમાં * નિયુક્તિ આપેલ છે. તે જ પ્રમાણે બાકીની નિયુક્તિ આપેલ છે.

ઉકેલ : A – Y

B – W

C – Z

D – X

કુલ મહત્તમ નફો Z = 13 + 19 + 20 + 16

... Z = 68

16.8 તમારી પ્રગતિ ચકાસો :

16.8.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) નિયુક્તિની સમસ્યા ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

(2) નિયુક્તિની સમસ્યા એટલે શું ? નિયુક્તિની સમસ્યાના લક્ષણો જણાવો.

(3) નિયુક્તિની સમસ્યાના ઉકેલની હંગેરિયન પદ્ધતિ સવિસ્તાર સમજાવો.

(4) નિયુક્તિની સમસ્યાનો અર્થ સમજાવી તેની ધારણાઓ લખો.

(5) નિયુક્તિની સમસ્યાનું ગાણિતીય સ્વરૂપ સમજાવો.

(6) "નિયુક્તિની સમસ્યા એ એક વિશિષ્ટ પ્રકારની વાહનવ્યવહારની સમસ્યા છે" આ વિધાનની ચર્ચા કરો.

(7) એક કંપનીના ત્રણ યંત્રો પર ત્રણ કાર્યો કરવાના છે. દરેક કાર્ય કોઈપણ યંત્ર પર થઈ શકે છે. પરંતુ વિવિધ યંત્ર પર વિવિધ કાર્ય કરવા માટેનું ખર્ચ જુદું જુદું છે, જે નીચે કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. તે પરથી ત્રણેય કાર્ય

કરવાનું કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય એ રીતે કાર્યની યંત્ર પર નિયુક્તિ આપો.

	યંત્રો		
કાર્યો	M_1	M_2	M_3
W_1	6	3	5
W_2	5	9	2
W_3	5	7	8

(8) નીચેની નિયુક્તિની સમસ્યાનો કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે રીતે ઈષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

	P	Q	R	S	T
A	10	5	13	15	16
B	3	9	18	13	6
C	10	7	2	2	2
D	7	11	9	7	12
E	7	9	10	4	12

(9) ચાર યંત્રો P, Q, R અને S ઉપર ચાર કાર્યો W, X, Y અને Z એવી રીતે કરવામાં આવે છે કે દરેક કાર્ય દરેક યંત્ર પર લઈ શકાય છે. દરેક યંત્ર પર જુદા જુદા કાર્ય માટે થતું ખર્ચ રૂપિયામાં નીચેના શ્રેણીક દ્વારા દર્શાવેલ છે. કુલ ખર્ચ ઓછામાં ઓછું થાય તે મુજબ નિયુક્તિ કરો.

યંત્રો કાર્યો	W	X	Y	Z
P	9	14	19	15
Q	7	17	20	19
R	9	18	21	18
S	10	15	21	16

(10) નીચેની નિયુક્તિની સમસ્યાનો કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે રીતે ઈષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

	1	2	3	4	5
I	11	16	9	21	24
II	17	12	10	14	18
III	16	9	15	20	13
IV	18	14	12	11	10
V	12	13	11	15	11

(11) નીચે આપેલા શ્રેણીક ઉપરથી કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે પ્રમાણે નિયુક્તિ કરો. કુલ ન્યૂનતમ ખર્ચ પણ શોધો.

	f	g	h	i	j
a	2	1	2	3	0
b	4	1	0	7	0
c	0	0	2	0	2
d	0	1	0	1	0
e	3	0	3	0	3

(12) નીચે આપેલા શ્રેણીક ઉપરથી કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે પ્રમાણે નિયુક્તિ કરો. કુલ ન્યૂનતમ પણ શોધો.

મશીન કાર્ય	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	11	10	9	8
J_2	3	4	5	6
J_3	5	4	3	2
J_4	7	6	9	8

(13) નીચેની નિયુક્તિની સમસ્યાનો કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે રીતે ઈષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

	P	Q	R	S
A	6	9	11	8
B	14	12	15	14
C	9	10	16	12
D	13	12	13	10

(14) લઘુત્તમ ખર્ચ આવે તે પ્રમાણે નિયુક્તિ કરો. લઘુત્તમ ખર્ચ શોધો.

	I	II	III	IV
A	32	20	25	30
B	12	10	20	15
C	20	10	15	25
D	30	25	35	30

(15) નીચે આપેલ નિયુક્તિની સમસ્યાનો ઉકેલ કુલ સમય લઘુત્તમ આવે તે રીતે મેળવો.

યંત્રો કાર્ય	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	20	22	29	21
J_2	15	20	17	18
J_3	22	24	23	21
J_4	18	25	21	19

(16) નીચેની નિયુક્તિની સમસ્યાનો કુલ સમય ન્યૂનતમ થાય તે રીતે ઈષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

	સેલ્સમેન			
કાઉન્ટર	A	B	C	D
P	31	62	29	42
Q	12	19	39	55
R	17	29	50	41
S	35	40	38	42

(17) ક્રિકેટ ટીમના એક કેપ્ટનને પાંચ બેટ્સમેનોને બેટિંગ માટે વચ્ચેના સ્થાનો (ક્રમ) નક્કી કરવાના છે. પાંચ બેટ્સમેનો દ્વારા જુદા જુદા ક્રમે આવીને બેટીંગમાં નીચે મુજબ સરેરાશ રન કરેલા છે. તો અપેક્ષિત કુલ રન મહત્તમ થાય તે રીતે નીચેની નિયુક્તિની સમસ્યા ઉકેલો.

બેટિંગ ક્રમ બેટ્સમેન	III	IV	V	VI	VII
A	32	38	40	28	40
B	40	24	28	21	36
C	41	27	33	30	37
D	22	38	41	36	36
E	29	33	40	35	39

(18)નફો મહત્તમ થાય તે રીતે નીચેની નિયુક્તિ સમસ્યા ઉકેલો.

	A	B	C	D
1	42	35	28	21
2	30	25	20	15
3	30	25	20	15
4	24	20	16	12

(19) એક કંપની પાસે પાંચ વેચાણ વિસ્તાર માટે પાંચ સેલ્સમેનો છે. તેઓનું જુદા જુદા વેચાણ વિસ્તારમાં સરેરાશ માસિક વેચાણ (હજાર રૂ.માં) નીચે મુજબ થયું હતું. આ માહિતી પરથી વેચાણ મહત્તમ થાય તે રીતે નિયુક્તિની સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવો.

	સેલ્સમેન				
વિસ્તાર	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	85	75	65	125	75
A_2	90	78	66	132	78
A_3	75	66	57	114	69
A_4	80	72	60	120	72
A_5	76	64	56	112	68

(20) નફો મહત્તમ થાય તે રીતે નીચેની નિયુક્તિની સમસ્યા ઉકેલો.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
A	38	43	45	35	45
B	44	29	35	26	41
C	45	33	39	36	42
D	48	43	46	41	41
E	33	38	45	40	44

જવાબો :

(7) $W_1 \rightarrow M_2$, $W_2 \rightarrow M_3$ અને $W_3 \rightarrow M_1$
$Z = 10$

(8) $A \rightarrow Q$, $B \rightarrow P$, $C \rightarrow T$, $D \rightarrow R$, $E \rightarrow S$
$Z = 23$

(9) $P \rightarrow Z$, $Q \rightarrow W$, $R \rightarrow Y$, $S \rightarrow X$
$Z = 58$

(10) $I \rightarrow 1$, $II \rightarrow 3$, $III \rightarrow 2$, $IV \rightarrow 4$, $V \rightarrow 5$
$Z = 52$

(11) $I \rightarrow 5$, $II \rightarrow 3$, $III \rightarrow 4$, $IV \rightarrow 1$, $V \rightarrow 2$
$Z = 0$

(12) $J_1 \rightarrow M_4$, $J_2 \rightarrow M_1$, $J_3 \rightarrow M_3$, $J_4 \rightarrow M_2$
$Z = 20$

(13) $A \rightarrow P$, $B \rightarrow R$, $C \rightarrow Q$, $D \rightarrow S$
$Z = 41$

(14) $A \rightarrow II$, $B \rightarrow I$, $C \rightarrow III$, $D \rightarrow IV$
$Z = 77$

(15) $J_1 \rightarrow M_2$, $J_2 \rightarrow M_3$, $J_3 \rightarrow M_4$, $J_4 \rightarrow M_1$
$Z = 78$

(16) $P \rightarrow C$, $Q \rightarrow B$, $R \rightarrow A$, $S \rightarrow D$
$Z = 107$

(17) $1 \rightarrow II$, $2 \rightarrow V$, $3 \rightarrow I$, $4 \rightarrow III$, $5 \rightarrow IV$
$Z = 191$

(18) $1 \rightarrow A$, $2 \rightarrow C$, $3 \rightarrow B$, $4 \rightarrow D$
$Z = 99$

(19) $M_1 \rightarrow S_3$, $M_2 \rightarrow S_4$, $M_3 \rightarrow S_5$, $M_4 \rightarrow S_2$, $M_5 \rightarrow S_1$
$Z = 414$

(20) $A \rightarrow (2)$, $B \rightarrow (1)$, $C \rightarrow (5)$, $D \rightarrow (3)$, $E \rightarrow (4)$
$Z = 215$

16.8.2 યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો :

(1) નિયુક્તિની સમસ્યા એ .... ની સમસ્યાનો વિશિષ્ટ પ્રકાર છે.

(a) વાહનવ્યવહાર (b) ફેરબદલી (c) સહસંબંધ (d) નિયતસંબંધ

(2) નિયુક્તિની સમસ્યામાં દરેક ઉત્પત્તિસ્થાનનો પુરવઠો .... હોય છે.

(a) જુદો જુદો (b) 1 (c) 0 (d) એકપણ નહીં

(3) નિયુક્તિની સમસ્યમાં દરેક હાર અને દરેક સ્તંભમાં કેટલી નિયુક્તિ હોય છે ?

(a) એકથી વધુ (b) નિશ્ચિત નથી

(c) બરાબર એક (d) એકપણ નહીં

(4) નિયુક્તિની સમસ્યાના ઉકેલની હંગેરિયન પદ્ધતિ .... દ્વારા વિકસાવવામાં આવેલ છે.

(a) વૉગેલ (b) ન્યૂટન (c) ફિશર (d) એમ. હંગેરી

(5) નિયુક્તિની સમસ્યાના ઉકેલની હંગેરિયન પદ્ધતિથી સમસ્યાનો .... ઉકેલ મળે છે.

(a) વિકૃત (b) મૂળભૂત (c) અઋણ (d) ઈષ્ટતમ

(6) નિયુક્તિની સમસ્યાના ઈષ્ટ ઉકેલ માટે મેળવેલા શ્રેણીકમાં મળતાં શૂન્યોને આવરી લેવા માટે દોરવી પડતી આડી અને ઊભી રેખાઓની સંખ્યા એ હાર કે સ્તંભની સંખ્યા .... હોય છે.

(a) થી ઓછી (b) થી વધુ

(c) જેટલી (બરાબર) (d) આપેલમાંથી એકપણ નહીં

(7) નિયુક્તિની સમસ્યામાં જ્યારે નિયુક્તિની સંખ્યા .... શ્રેણીકના હાર અથવા સ્તંભની સંખ્યા થાય ત્યારે જ તેનો ઈષ્ટ ઉકેલ મળે છે.

(a) < (b) = (c) > (d) આપેલમાંથી એકપણ નહીં.

(8) નિયુક્તિની સમસ્યામાં હેતુલક્ષી વિધેયને મહત્તમ બનાવવાના પ્રશ્નને લઘુત્તમ બનાવવાની સમસ્યામાં કેવી રીતે રૂપાંતરિત કરી શકાય છે ?

(a) શ્રેણીકના મહત્તમ ઘટકમાંથી બધા જ ઘટકોને બાદ કરીને

(b) શ્રેણીકનો ન્યૂનતમ ઘટક બધાં જ ઘટકોમાંથી બાદ કરીને

(c) શ્રેણીકનો ન્યૂનતમ ઘટક બધા જ ઘટકોમાંથી ઉમેરીને

(d) આપેલમાંથી એકપણ નહીં

(9) 6×6 ક્રમની એક નિયુક્તિની સમસ્યા શક્ય કેટલા ઉકેલ મળે ?

(a) 6 (b) 11 (c) 12 (d) 36

(10) નિયુક્તિ સમસ્યામાં નિયુક્તિ એકમો x_{i_j} ની કિંમત .... હોય છે.

(a) 0 અથવા 1 (b) 0 (c) 1 (d) 10

(11) ઈષ્ટ નિયુક્તિ મળી છે કે નહીં તે તપાસવા મળતા શ્રેણીકમાં દરેક શૂન્યમાંથી પસાર થતી .... આડી ઊભી રેખા દોરો.

(a) વધુમાં વધુ (b) ઓછામાં ઓછી

(c) દસ (d) આપેલમાંથી એકપણ નહીં

(12) જો નિયુક્તિ સમસ્યામાં હેતુલક્ષી વિધેય મહત્તમ બનાવવાનું હોય, ત્યારે શ્રેણીકના સૌથી .... ઘટકમાંથી દરેક .... કરીને નવો શ્રેણીક મેળવવામાં આવે છે.

(a) નાનામાં નાનો, ઉમેરો (b) મોટામાં મોટો, ઉમેરો

(c) નાનામાં નાનો, બાદ (d) મોટામાં મોટો, બાદ

જવાબો :

(1) – a (2) – b (3) – c (4) – d (5) – d (6) – c

(7) – b (8) – a (9) – a (10) – a (11) – b (12) – d

16.9 ચાવીરૂપ શબ્દો :

નિયુક્તિ : પસંદગી એટલે કે કોઈપણ યંત્ર કે ટેબલ પર વ્યક્તિને સોંપવામાં આવતું કાર્ય.

ઈષ્ટતમ ઉકેલ : કોઈપણ પ્રશ્નમાં મહત્તમ અથવા લઘુત્તમ કિંમતો પ્રાપ્ત થાય તેને ઈષ્ટતમ ઉકેલ કહેવાય.

કાર : આડી રેખા

સ્તંભ : ઊભી રેખા

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) કાર્યાત્મક સંશોધન, અક્ષર પ્રકાશન, અમદાવાદ (2015)
લેખક : ડૉ. એમ.એચ. મૈસુરીયા, ડૉ. દિનેશભાઈ એમ. પટેલ

(2) ક્રિયાત્મક સંશોધનની ઈષ્ટતમ પદ્ધતિઓ, યુનિવર્સિટી ગ્રંથ નિમાર્ણ બોર્ડ, ગુજરાત રાજ્ય, અમદાવાદ-6 (1996)
સ્વ. પ્રા. રમેશચંદ્ર એન. દેસાઈ, ડૉ. ભરતભાઈ બી. જાની

(3) Operation Research & Quantitative Techniques, (2008)
K. Shridharee Bhat, Himalaya Publishing House.

★ ★ ★

એકમ 17	રમતનો સિદ્ધાંત [Theory of Games]

17.0 ઉદ્દેશો

17.1 પ્રસ્તાવના

17.2 રમતના સિદ્ધાંતનો અર્થ

17.3 રમતના સિદ્ધાંતની ધારણાઓ

17.4 રમતના પ્રકારો

17.5 વળતર શ્રેણિક

17.6 રમતના સિદ્ધાંતની મર્યાદાઓ

17.7 રમતની સમસ્યાના વ્યૂહો

17.8 ગુરૂ-લઘુ અને લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત

17.9 પલાણ્ય બિંદુ

17.9.1 પલાણ્ય બિંદુના લક્ષણો

17.9.2 પલાણ્ય બિંદુ શોધવાની રીત

17.9.3 ઉદાહરણો

17.10 પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતો મેળવવાની રીતો

17.10.1 બીજગણિતની રીત

17.10.2 સરસાઈનો સિદ્ધાંત

17.10.3 ઉદાહરણો

17.11 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

17.11.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.

17.11.2 યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.

17.12 ચાવીરૂપ શબ્દો

● સંદર્ભસૂચિ

17.0 ઉદ્દેશો :

જ્યારે કોઈ બે કે તેથી વધુ વ્યક્તિઓ કે સમૂહો વચ્ચે પરસ્પર લાભ અંગેની હરિફાઈ થતી હોય છે, જેવી કે વસ્તુની કિંમત નક્કી કરવાની સ્પર્ધા, બે મોટા ઉદ્યોગો પોતે ઉત્પાદિત કરેલ વસ્તુઓના વેચાણ માટેની સ્પર્ધા, નવા નવા કરારો મેળવવાની સ્પર્ધા, કોઈપણ ખેલ (ક્રિકેટ, હૉકી, ફૂટબોલ વગેરે)માં આગળ રહેવાની સ્પર્ધા, ચૂંટણી દરમિયાન બે કે વધારે રાજકીય પક્ષો વચ્ચે સ્પર્ધા વગેરે હરિફાઈમાં ટકી રહેવા જુદી જુદી વ્યૂહરચનાઓ અપનાવવી પડે છે. આવી વ્યૂહરચનાઓમાંથી કઈ વ્યૂહરચનાની પસંદગી કરવી ફાયદાકારક ગણાય. આવા નિર્ણયો લેવા માટે વિદ્યાર્થીઓને આ પ્રકરણ ખૂબ જ ઉપયોગી પુરવાર થશે.

17.1 પ્રસ્તાવના :

આધુનિક યુગમાં સ્પર્ધા કોઈપણ વ્યક્તિ, સંસ્થા કે પક્ષ માટે રોજબરોજના વ્યવહારોમાં બની રહે છે. આપણે એમ કહી શકીએ કે બે કે તેથી વધુ વ્યક્તિગત નિર્ણયો કોઈ ચોક્કસ સ્થિતિમાં લેવાય કે જેમાં રસપૂર્ણ સ્પર્ધા થતી હોય અને તેના પરિણામોમાં બંને જોડાયેલા પક્ષ દ્વારા નિર્ણય લેવાનો હોય ત્યારે સ્પર્ધાત્મક પરિણામ અસ્તિત્વમાં આવે છે. આ સ્પર્ધાત્મક પરિસ્થિતિને રમત કહે છે. રમત શબ્દ બે કે તેથી વધુ પક્ષો વચ્ચેની સ્પર્ધાનું પ્રતિનિધિત્વ કરે છે.

17.2 રમત સિદ્ધાંતનો અર્થ :

વ્યૂહાત્મક શબ્દ દર્શાવે છે કે દરેક સ્પર્ધકે રમત દરમ્યાન એક ચોક્કસ સંપૂર્ણ આયોજનથી નક્કી કરેલ વ્યૂહોના ગણને દરેક રમત દરમ્યાન ભવિષ્યમાં થનારી શક્યતામાં તેનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરવો. દા.ત. સ્પર્ધક તેણે પસંદ કરેલ વ્યૂહોની યાદીમાંથી રમત દરમ્યાન રમતના નિયમ અનુસાર કોઈપણ વ્યૂહ લેવાનો નિર્ણય લઈ શકે છે.

આમ અમુક નિયમોને આધીન દરેક વ્યક્તિ વ્યૂહ અપનાવે છે અને આ વ્યૂહના અંતે કંઈક વળતર મેળવે છે. તેવા બે કે તેથી વધારે વ્યક્તિઓ વચ્ચે રમાતા ખેલને રમત કહે છે. આ રમતનો ખ્યાલ વધુ સ્પષ્ટ કરવા માટે કેટલીક વ્યાખ્યાઓ જોઈએ.

(i) રમત (Game) : રમવા માટેના નિશ્ચિત નિયમોના ગણને રમત કહી શકાય. અહીં રમત એ જુદી જુદી રીતે રમવા માટેની સંપૂર્ણ શ્રેણી દર્શાવે છે. (દા.ત. હોકીની રમત, ક્રિકેટની રમત, ટેનિસની રમત વગેરે)

(ii) દાવ અથવા ચાલ (Play) : ખેલાડી દ્વારા પસંદ કરાયેલ ક્રિયાને તે ખેલાડીની ચાલ કહે છે.

(iii) ખેલાડી (Player) : રમત કે સ્પર્ધામાં રોકાયેલી પ્રત્યેક વ્યક્તિને તે રમત માટેનો ખેલાડી કહે છે.

17.3 રમતના સિદ્ધાંતની ધારણાઓ :

(i) રમતમાં ખેલાડીઓની સંખ્યા પરિમિત હોય છે.

(ii) સ્પર્ધકો વચ્ચે સ્પર્ધા કરવાનો રસ હોય છે.

(iii) દરેક સ્પર્ધકને વ્યૂહ (દાવ) પસંદ કરવા માટે વ્યૂહોની સંખ્યા પરિમિત હોય છે. આ વ્યૂહોની યાદી સ્પર્ધક માટે જુદી જુદી હોઈ શકે, પરંતુ તે દરેક સ્પર્ધક જાણતો હોય છે.

(iv) દરેક ખેલાડી સ્વતંત્ર રીતે નિર્ણય લઈ શકે છે.

(v) દરેક સ્પર્ધક વ્યૂહ અપનાવે અથવા ચાલ ચાલે ત્યારે રમત શરૂ થઈ છે, એમ કહેવામાં આવે છે.

(vi) બધા જ દાવો એક સાથે ચાલવામાં આવે છે અને દરેક ખેલાડી બીજા ખેલાડી કયો દાવ રમશે તેનાથી અજાણ હોય છે.

(vii) તમામ વ્યૂહ પૂરા થયા બાદ (એટલે કે રમતના અંતે) દરેકને કંઈક વળતર મળે છે.

(viii) બધા જ સ્પર્ધક દ્વારા પસંદ કરાયેલ ક્રિયાને લાભકારક પરિણામો આવે છે.

17.4 રમતના પ્રકારો (Types of Games) :

(i) દ્વિવ્યક્તિ રમતો અને n-વ્યક્તિ રમતો :

દ્વિવ્યક્તિ રમતોમાં ખેલાડીઓ પાસે દરેક રમત માટે ઘણા બધા વ્યૂહો હોય છે. પરંતુ ખેલાડીઓ ફક્ત બે જ હોય છે અને જો બેથી વધુ ખેલાડીઓ હોય તો તેવી રમતને n-વ્યક્તિ રમત કહે છે.

(ii) શૂન્ય યોગ રમત :

શૂન્ય યોગ રમત એવી રમત છે કે દરેક ખેલાડીઓને મળતા વળતરનો સરવાળો શૂન્ય રહે છે. એટલે કે અમુક ખેલાડીઓ જે વળતર મેળવશે તેટલું જ વળતર બીજા ખેલાડીઓ ગુમાવશે. આવી રમતોને શૂન્ય યોગ રમત કહે છે.

(iii) દ્વિ-વ્યક્તિ શૂન્ય યોગ રમત (Two Person Zero Sum Game) :

જે રમતમાં ફક્ત બે વ્યક્તિઓ ભાગ લેતી હોય તે રમતને દ્વિ-વ્યક્તિ રમત કહે છે. જ્યાં કોઈ એક ખેલાડી જેટલી રકમ મેળવે તેટલી રકમ બીજો ખેલાડી ગુમાવે તો તેવી રમતને દ્વિ-વ્યક્તિ શૂન્યયોગ રમત કહે છે. તેને સમચોરસ રમત પણ કહે છે. કારણ કે તેના વળતર શ્રેણીક સમચોરસ આકારનો હોય છે. તેના કેટલાક લક્ષણો નીચે મુજબ છે.

(1) આ રમતમાં ફક્ત બે ખેલાડીઓ ભાગ લઈ શકે છે.

(2) દરેક ખેલાડી પરિમિત સંખ્યામાં વ્યૂહોનો ઉપયોગ કરી શકે છે.

(3) દરેક વ્યૂહના અંતે વળતર મળે છે.

(4) ખેલાડી A-ના વળતર અને ખેલાડી-Bના વળતરનો સરવાળો શૂન્ય થાય છે. એટલે કે $a_{i_j} + b_{i_j} = 0$ થાય છે.

17.5 વળતર શ્રેણિક (Payoff Matrix) :

દરેક રમતના અંતે સ્પર્ધક (ખેલાડી) કંઈક મેળવે છે. હવે તે દરેક ચાલના અંતે જે મેળવે છે તેવા માપને વળતર શ્રેણિક કહેવામાં આવે છે.

જો ખેલાડી-Aની પાસે m વ્યૂહો અને ખેલાડી-Bની પાસે n વ્યૂહો હોય તો ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક મેળવવા માટેના પગથિયાં લઈશું.

(i) દરેક શ્રેણિકની હારની સંજ્ઞાઓ ખેલાડી-Aના વ્યૂહો દર્શાવે છે.

(ii) દરેક શ્રેણિકની સ્તંભની સંજ્ઞાઓ ખેલાડી-Bના વ્યૂહો દર્શાવે છે.

(iii) દ્વિ-વ્યક્તિ શૂન્યયોગ રમતમાં ખેલાડી-Aના વળતર શ્રેણિકના ઘટકોના ચિહ્ન બદલવાથી Bનો વળતર શ્રેણિક મળે છે. એટલે કે જો ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક a_{i_j} હોય તો ખેલાડી-Bનો વળતર શ્રેણિક $-a_{i_j}$ મળે છે.

ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક

ખેલાડી-B

ખેલાડી-A

	B_1	B_2	....	B_j	....	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1j}	....	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2j}	....	a_{2n}
..						
.						
a_i	a_{i1}	a_{i2}	....	a_{ij}	....	a_{in}
..						
a_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}	....	a_{mn}

આજ રીતે ખેલાડી-Bનો વળતર શ્રેણિક $b_{i_j} = -a_{i_j}$ હોય છે.

17.6 રમતના સિદ્ધાંતની મર્યાદાઓ :

(1) આ રમતના સિદ્ધાંતમાં જોખમ અને અનિશ્ચિતતાની ગણતરી થતી નથી.

(2) રમતમાં સ્પર્ધકોની સંખ્યા નક્કી હોય છે. પરંતુ ખરેખર એવું બનતું નથી. બજારમાં ઘણા બધા સ્પર્ધકો હોય છે.

(3) દરેક સ્પર્ધકના વ્યૂહ (દાવ)ની સંખ્યા પરિમિત હોય છે, એવી ધારણા કરવામાં આવે છે. પરંતુ જુદી-જુદી પરિસ્થિતિમાં તે અનંત હોઈ શકે છે.

(4) શૂન્યયોગ રમત એ વાસ્તવિક નથી.

(5) વળતર શ્રેણિકની અગાઉથી જાણકારી હોવી એ પણ વાસ્તવિક નથી.

(6) એક સ્પર્ધકની વ્યૂહોની યાદી બીજો સ્પર્ધક જાણતો હોય એવી ધારણા કરવામાં આવે છે. પરંતુ તેવું શક્ય ન પણ બને.

(7) બજારમાં માંગની પરિસ્થિતિ બદલાય છે. તેને ધ્યાનમાં લેવામાં આવતી નથી.

17.7 રમતની સમસ્યાના વ્યૂહો :

રમતની સમસ્યામાં બે પ્રકારના વ્યૂહોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. (1) સાદો વ્યૂહ (2) મિશ્ર વ્યૂહ

(1) સાદો વ્યૂહ :

જો ખેલાડી A કોઈ ચોક્કસ *i* મો વ્યૂહ સંભાવના 1 સાથે પસંદ કરે અને બાકીના વ્યૂહની સંભાવના શૂન્ય (0) તો *i* મો વ્યૂહ ખેલાડી A માટે સાદો વ્યૂહ બને છે. આવા સાદા વ્યૂહ માટે ગુરૂ-લઘુ કે લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત દ્વારા પલાણ્ય બિંદુવાળી રમતોનો પલાણ્ય બિંદુ દ્વારા ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

(2) મિશ્ર વ્યૂહ :

ધારો કે ખેલાડી A અને ખેલાડી B માટે અનુક્રમે m અને n વ્યૂહો ઉપલબ્ધ છે. હવે ખેલાડી A, i મો વ્યૂહ પસંદ કરે તેની સંભાવના P_i છે. એમ ધારો જ્યાં $i = 1, 2 \ldots\ldots m$ છે અને તેથી સંભાવના $P_1, P_2 \ldots\ldots P_m$ અને $\Sigma P_i = 1$ થાય. આમ ખેલાડી A જુદા જુદા વ્યૂહો જુદી જુદી સંભાવના સાથે પસંદ કરે છે. આવા વ્યૂહોને મિશ્ર વ્યૂહો કહે છે.

તેવી જ રીતે ખેલાડી B, j મો વ્યૂહ P_j સંભાવના સાથે પસંદ કરે છે. જ્યાં $j = 1, 2, \ldots\ldots n$ છે. તેથી સંભાવના $q_1, q_2, \ldots\ldots q_n$ અને $\Sigma q_j = 1$ થાય. આમ ખેલાડી B જુદા જુદા વ્યૂહો જુદી જુદી સંભાવના સાથે પસંદ કરે તેને ખેલાડી Bનો મિશ્ર વ્યૂહ કહે છે.

આમ ખેલાડી A અને ખેલાડી B જુદા જદા એક કે તેથી વધુ વ્યૂહો જુદી જુદી સંભાવનાઓ સાથે પસંદ કરી રમત રમે તેવા વ્યૂહોને મિશ્ર વ્યૂહ કહેવામાં આવે છે.

17.8 ગુરૂ-લઘુ અને લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત (Maxi-Min and Mini-Max Principle) :

આ સિદ્ધાંતમાં બે ખેલાડીઓ દ્વારા ઈષ્ટતમ વ્યૂહ પસંદ કરી તેનો ઉપયોગ કરે છે. ધારો કે ખેલાડી A અને ખેલાડી B છે. ખેલાડી A, ખેલાડી Bના કોઈપણ વ્યૂહ માટે પોતાને મળતા ન્યૂનતમ વળતરને મહત્તમ બનાવે તે રીતે ખેલાડી A પોતાનો વ્યૂહ અપનાવે છે. તો આવા સિદ્ધાંતને ગુરૂ-લઘુ સિદ્ધાંત કહે છે.

બીજી તરફ ખેલાડી B, ખેલાડી Aના કોઈપણ વ્યૂહને લીધે થતાં મહત્તમ નુકસાનને ન્યૂનતમ બનાવે તેવા વ્યૂહ ખેલાડી B અપનાવે છે. તો આવા સિદ્ધાંતને લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત કહે છે.

આમ, જો A નો વળતર શ્રેણિક $A = a_{ij}$ હોય તો ગુરૂ-લઘુ સિદ્ધાંત મુજબ ખેલાડી A ન્યૂનતમ a_{ij} ને મહત્તમ બનાવે તેવો વ્યૂહ પસંદ કરશે. જ્યારે લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત અનુસાર ખેલાડી B મહત્તમ a_{ij} ને લઘુત્તમ બનાવે તેવો વ્યૂહ અપનાવશે.

દા.ત. ખેલાડી Aનો વળતર શ્રેણિક નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. તે પરથી ગુરૂ-લઘુ અને લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત મુજબ બંને ખેલાડીઓના વ્યૂહ નક્કી કરો.

ખેલાડી A નો વળતર શ્રેણિક

ખેલાડી B

		B_1	B_2	B_3
	A_1	3	4	1
ખેલાડી A	A_2	0	–6	–4
	A_3	2	8	–1

ઉકેલ :

		ખેલાડી B			
		B_1	B_2	B_3	**હારમાં** ન્યૂનતમ
ખેલાડી A	A_1	3	4	1	1
	A_2	0	–6	–4	–6
	A_3	2	8	–1	–1
સ્તંભમાં મહત્તમ		3	8	1	

અહીં દરેક હાર માટે ન્યૂનતમ (લઘુત્તમ) ઘટક 1, –6, –1 છે. તેમાં મહત્તમ 1 છે. જે પ્રથમ હારને આનુષંગિક છે. આથી ગુરૂ-લઘુ સિદ્ધાંત મુજબ ખેલાડી A પ્રથમ વ્યૂહ (A_1) અપનાવશે.

જ્યારે દરેક સ્તંભમાં મહત્તમ ઘટકો 3, 8, 1 છે. તેમાં ન્યૂનતમ ઘટક 1 છે. જે ત્રીજા સ્તંભને આનુષંગિક છે. તેથી લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત અનુસાર ખેલાડી B ત્રીજો વ્યૂહ (B_3) અપનાવશે.

17.9 પલાણ્ય બિંદુ અથવા જીન બિંદુ (Saddle Point) :

દ્વિ-વ્યક્તિ શૂન્યયોગ રમતના વળતર શ્રેણિકમાં જે સ્થાન ઉપરનો ઘટક તેની હારમાં ન્યૂનતમ હોય અને તેના સ્તંભમાં મહત્તમ હોય તે સ્થાન બિંદુને પલાણ્યબિંદુ કહે છે. પલાણ્ય બિંદુ ઉપરના ઘટકને રમતની કિંમત કહે છે.

ધારો કે ગુરૂ-લઘુ (a_{i_j}) = લઘુ-ગુરૂ $(a_{i_j}) = a_{r_s}$ હોય તો (r, s) રમતનું પલાણ્ય બિંદુ છે અને a_{r_s} રમતની કિંમત છે અને તેને v વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

17.9.1 પલાણ્ય બિંદુના લક્ષણો :

(i) જો રમતને પલાણ્ય બિંદુ હોય તો દરેક ખેલાડીનો શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ અને રમતની કિંમત આપે છે અને તેને રમતનો ઉકેલ કહેવામાં આવે છે.

(ii) દ્વિ-વ્યક્તિ શૂન્યયોગ રમતમાં એક કરતાં વધારે પલાણ્ય બિંદુઓ હોઈ શકે, પરંતુ રમતની કિંમત એક સરખી રહે છે.

(iii) રમતને પલાણ્ય બિંદુ હોય જ એવું જરૂરી નથી.

(iv) જો રમત સમતોલ હોય તો ગુરૂ-લઘુની કિંમત = લઘુ-ગુરૂની કિંમત = 0 થાય છે.

(v) જો રમત નિર્ણયાત્મક (Determinables) હોય તો લઘુ-ગુરૂ $(a_{i_j}) \le v \le$ ગુરૂ-લઘુ (a_{i_j}) થાય છે.

17.9.2 પલાણ્ય બિંદુ શોધવાની રીત :

પલાણ્ય બિંદુ શોધવા માટે નીચે મુજબ પગથિયાને અનુસરવામાં આવે છે. આ રીતે ગુરૂ-લઘુ કે લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત મુજબ રમતનો ઉકેલ આપે છે.

પગથિયું-1 : ખેલાડી-Aના વળતર શ્રેણિકમાં દરેક હારમાં ન્યૂનતમ ઘટક પસંદ કરો અને તેની ફરતે વર્તુળ ○ કરો.

પગથિયું-2 : ખેલાડી-Aના વળતર શ્રેણિકમાં દરેક સ્તંભમાં મહત્તમ ઘટક પસંદ કરો અને તેના પર ચોરસ □ દોરો.

પગથિયું-3 : જે ઘટક પર વર્તુળ અને ચોરસ [O] એક બીજા પર આવે તે ઘટકનું સ્થાનબિંદુ પલાણ્ય બિંદુ છે અને તે ઘટક રમતની કિંમત આપે છે. આ રમતની કિંમતને v વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

17.9.3 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 :

નીચે આપેલ રમતનું પલાણ્ય બિંદુ અને રમતની કિંમત મેળવો.

ખેલાડી B

ખેલાડી A	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	–3	0	1	7
A_2	4	3	2	6
A_3	–3	–2	0	5
A_4	2	4	–4	–2

ઉકેલ :

આ રમતનો ઉકેલ મેળવવા માટે સૌપ્રથમ આપણે પલાણ્ય બિંદુ મેળવવાના પગથિયા અનુસરીશું.

ખેલાડી B

ખેલાડી A	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	(–3)	0	1	[7]
A_2	[4]	3	[(2)]	6
A_3	(–3)	–2	0	5
A_4	2	[4]	(–4)	–2

સમજૂતી :

પગથિયું-1 મુજબ સૌપ્રથમ દરેક હારમાં સૌથી નાની કિંમત ઉપર વર્તુળ ○ દોરવું. જે અહીં આપણે દરેક હારમાં અનુક્રમે –3, 2, –3 અને –4 પર દોરેલ છે.

નોંધ : ત્રીજી હારમાં –3, –2 અને 5 છે. તેમાં સૌથી નાની કિંમત –3 છે. તે જ રીતે ચોથી હારમાં –4 અને –2 માં –4 નાની કિંમત ગણાય.

પગથિયાં-2 મુજબ દરેક સ્તંભમાં સૌથી મોટી કિંમત ઉપર ચોરસ □ દોરવું. અહીં દરેક સ્તંભમાં અનુક્રમે 4, 4, 2 અને 7 ઉપર દોરેલ છે.

પગથિયાં-3 મુજબ જે ઘટક પર વર્તુળ અને ચોરસ આવે [O] તે ઘટકનું સ્થાનબિંદુ પલાણ્ય બિંદુ છે. માટે અહીં પલાણ્ય બિંદુ (A_2, B_3) છે અને તે ઘટકની રમતની કિંમત છે. માટે અહીં રમતની કિંમત $v = 2$ છે.

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુ (A_2, B_3) રમતની કિંમત $v = 2$

ઉદાહરણ-2 : નીચેની રમતનો ઉકેલ મેળવો.

ખેલાડી B

		B_1	B_2	B_3
	A_1	–7	–8	–3
ખેલાડી A	A_2	–6	22	–9
	A_3	–2	17	–2

ઉકેલ :

આ રમતનો ઉકેલ મેળવવા માટે પલાણ્ય બિંદુ મેળવવાના પગથિયા અનુસરીશું.

ખેલાડી B

		B_1	B_2	B_3
	A_1	–7	–8	–3
ખેલાડી A	A_2	–6	22	–9
	A_3	–2	17	–2

સમજૂતી :

આ રમતમાં દરેક હારમાં સૌથી નાની કિંમત પર વર્તુળ ◯ દોરેલ છે, જે અહીં અનુક્રમે –8, –9 અને –2, –2 પર છે. નોંધ એક સરખી બે કે વધારે કિંમતો હોય તો બધી જ કિંમત પર ◯ કે ☐ દોરો.

ત્યારબાદ દરેક સ્તંભમાં સૌથી મોટી કિંમત પર ચોરસ ☐ દોરેલ છે, જે અહીં અનુક્રમે –2, 22 અને –2 છે.

નોંધ : પ્રથમ સ્તંભમાં –7, –6 અને –2 છે. જેમાં –2 મોટી રકમ છે જે ધ્યાન રાખવું.

જે ઘટક પર $\boxed{O}$ હોય તે ઘટકનું સ્થાન બિંદુ પલાણ્ય બિંદુ બને છે અને તે ઘટકની કિંમત રમતની કિંમત છે. અહીં બે ઘટક પર $\boxed{O}$ છે. માટે બે પલાણ્ય બિંદુઓ મળશે.

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુ (A_3, B_1) અને (A_3, B_3) છે.

જ્યારે રમતની કિંમત $v = –2$ છે.

ઉદાહરણ-3 :

નીચે આપેલ શ્રેણીક ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણીક દર્શાવે છે. તેના ઉપરથી પલાણ્ય બિંદુ શોધી રમતની કિંમત મેળવો.

ખેલાડી Aનો વળતર શ્રેણીક

ખેલાડી B

		B_1	B_2	B_3	B_4
ખેલાડી A	A_1	40	20	10	50
	A_2	–40	–30	0	60
	A_3	50	10	–50	–60

ઉકેલ :

પલાણ્ય બિંદુના પગથિયા અનુસરતાં;

		B_1	B_2	B_3	B_4
ખેલાડી A	A_1	40	20	⊡(10)	50
	A_2	○(–40)	□(–30)	0	□(60)
	A_3	□(50)	10	–50	–60

સમજૂતી :

અહીં દરેક હારમાં નાની કિંમત પર ○ અને દરેક સ્તંભની મોટી કિંમત પર □ દોરેલ છે. જે ઘટક પર ⊡ આવે તેનું સ્થાનબિંદુ પલાણ્ય બિંદુ છે અને તે ઘટક રમતની કિંમત દર્શાવે છે.

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુ (A_1, B_3)

રમતની કિંમત $v = 10$

ઉદાહરણ-4 : નીચે આપેલ રમતનો ઉકેલ મેળવો.

ખેલાડી-A	**ખેલાડી-B**	
	B_1	B_2
A_1	–10	0
A_2	0	5

ઉકેલ : પલાણ્ય બિંદુના પગથિયા અનુસરીશું.

ખેલાડી-A	**ખેલાડી-B**	
	B_1	B_2
A_1	○(–10)	0
A_2	⊡(0)	□(5)

સમજૂતિ : હારમાં અનુક્રમે –10 અને 0 નાની કિંમતો છે. તેના ઉપર ○ કરેલ છે. જ્યારે સ્તંભમાં અનુક્રમે 0 (શૂન્ય) અને 5 મોટી કિંમતો છે તેના ઉપર □ દોરેલ છે.

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુ (A_2, B_1)

રમતની કિંમત $v = 0$

અહીં $v = 0$ છે, માટે રમત સમતોલ છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ-5 : નીચે આપેલ રમતનો ઉકેલ મેળવો.

ખેલાડી-A	**ખેલાડી-B**				
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	5	3	2	4	2
A_2	2	4	3	8	4
A_3	5	6	3	7	8
A_4	6	7	9	8	7
A_5	4	2	8	4	3

ઉકેલ : પલાણ્ય બિંદુ મેળવવાના પગથિયા મુજબ;

ખેલાડી-A	**ખેલાડી-B**				
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	5	3	(2)	4	(2)
A_2	(2)	4	3	[8]	4
A_3	5	6	(3)	7	[8]
A_4	[(6)]	[7]	[9]	[8]	7
A_5	4	(2)	8	4	3

સમજૂતી :

હારમાં અનુક્રમે 2, 2, 3, 6 અને 2 નાની કિંમતો છે. તેના ઉપર ○ કરેલ છે. જ્યારે સ્તંભમાં અનુક્રમે 6, 7, 9, 8 અને 8 છે. જેના ઉપર □ દોરેલ છે.

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુ (A_4, B_1)

રમતની કિંમત $v = 6$

ઉદાહરણ-6 : નીચેની રમતની સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવો.

ખેલાડી-B

		P	Q
	a	–6	4
ખેલાડી-A	b	–8	6
	c	5	8

ઉકેલ : પલાણ્ય બિંદુ મેળવવાના પગથિયાં મુજબ;

ખેલાડી-B

		P	Q
	a	–6	4
ખેલાડી-A	b	–8	6
	c	5	8

સમજૂતી :

દરેક હારમાં સૌથી નાની કિંમતો અનુક્રમે –6, –8 અને 5 છે. જ્યારે દરેક સ્તંભમાં સૌથી મોટી કિંમતો 5 અને 8 છે.

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુ (C, P)

રમતની કિંમત $v = 5$

ઉદાહરણ-7 :

નીચે આપેલ ખેલાડી-Aના વળતર શ્રેણિક ઉપરથી પલાણ્ય બિંદુની રીતનો ઉપયોગ કરી રમતનો ઉકેલ મેળવો.

ખેલાડી B

		I	II	III
	I	–3	16	–3
ખેલાડી A	II	–6	–7	–5
	III	–4	21	–9

ઉકેલ : પલાણ્ય બિંદુની રીતના પગથિયા મુજબ;

ખેલાડી B

ખેલાડી A		I	II	III
	I	–3	16	–3
	II	–6	–7	–5
	III	–4	21	–9

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુઓ (I, I) અને (I, III) છે. જ્યારે રમતની કિંમત $v = –3$ છે.

ઉદાહરણ-8 :

નીચેની રમતનો ઉકેલ મેળવો અને કેવા પ્રકારની છે તે જણાવો.

ખેલાડી B

ખેલાડી A		W	X	Y	Z
	P	–2	0	0	3
	Q	3	2	–1	2
	R	4	2	0	6
	S	5	3	–4	2

ઉકેલ : પલાણ્ય બિંદુની રીતના પગથિયા મુજબ

ખેલાડી B

ખેલાડી A		W	X	Y	Z
	P	–2	0	0	3
	Q	3	2	–1	2
	R	4	2	0	6
	S	5	3	–4	2

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુ (R, Y)   રમતની કિંમત $v = 0$

અહીં રમતની કિંમત 0 (શૂન્ય) થતી હોવાથી આ રમત સમતોલ રમત છે. એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ-9 : નીચે આપેલ રમતનો ઉકેલ મેળવો.

ખેલાડી-A નો વળતર શ્રેણિક

ખેલાડી B

		B_1	B_2	B_3
ખેલાડી A	A_1	2	1	2
	A_2	0	–4	–1
	A_3	1	2	1

ઉકેલ : પલાણ્ય બિંદુ મેળવવાના પગથિયાને અનુસરતાં;

ખેલાડી B

		B_1	B_2	B_3
ખેલાડી A	A_1	[2]	(1)	[2]
	A_2	0	(–4)	–1
	A_3	(1)	[2]	(1)

સમજૂતી :

અહીં હારમાં નાનામાં નાની કિંમત અનુક્રમે 1, –4 અને 1 છે, જેના પર ○ કરેલ છે. જ્યારે સ્તંભમાં મોટામાં મોટી કિંમત અનુક્રમે 2, 2 અને 2 છે, જેના પર □ દોરેલ છે. પરંતુ અહીં કોઈ એક ઘટક પર વર્તુળ અને ચોરસ [O] આવતું નથી તેથી આ રમતને પલાણ્ય બિંદુ નથી. આવી રમતનો ઉકેલ પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતોના ઉકેલની રીતોથી મેળવી શકાય છે. તેથી હવે આપણે પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતોનો ઉકેલ કેવી રીતે મેળવી શકાય છે, તેનો અભ્યાસ કરીશું.

17.10 પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતો મેળવવાની રીતો :

જ્યારે રમતના પ્રશ્નમાં પલાણ્ય બિંદુવાળી રમત દ્વારા ઉકેલ મળતો ન હોય એટલે કે રમતને પલાણ્ય બિંદુ ન હોય ત્યારે પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતનો ઉકેલ જુદી જુદી રીતો દ્વારા મેળવી શકાય છે અને તેમાં મિશ્ર વ્યૂહનો ઉપયોગ થાય છે.

પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતો (મિશ્ર વ્યૂહવાળી રમતો)નો ઉકેલ મેળવવાની જુદી જુદી રીતો નીચે મુજબ છે.

(1) બીજગણિતની રીત

(2) આલેખની રીત

(3) સુરેખ આયોજનની રીત

17.10.1 બીજગણિતની રીત :

આ પ્રકરણમાં આપણે ફક્ત એક જ રીત બીજગણિતની રીતની મદદથી રમતના સિદ્ધાંતનો ઉકેલ મેળવતા શીખવાનું છે. આ રીતની સૌથી મોટી મર્યાદા એ છે કે આ રીત દ્વારા ફક્ત 2×2 ક્રમની રમત હોય ત્યારે જ ઉકેલ મેળવી શકાય છે. તેથી આપણે રમતના કદ ઘટાડવા માટેના સરસાઈના સિદ્ધાંતનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

બીજગણિતની રીતમાં બે રીતે ઉકેલ મળે છે જે બંને રીતો આપણે જોઈશું.

(A) ખેલાડી-A અને ખેલાડી-B જુદા જુદા વ્યૂહો દ્વારા સંભાવનાની કિંમતો મેળવી રમતનો ઉકેલ મેળવવા માટે આ રીતનો ઉપયોગ કરે છે.

ધારો કે પલાણ્ય બિંદુ વગરની 2×2 શૂન્યયોગ રમત માટે ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક નીચે મુજબ છે.

ખેલાડી B ⟶

ખેલાડી A		B_1	B_2
	A_1	a	b
	A_2	c	d

આ રમતના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહો $S_A = \{P_1, P_2\}$ અને $S_B = \{q_1, q_2\}$ છે.

જ્યાં, $P_1 = \dfrac{d-c}{(a+d)-(b+c)}$

અને $P_1 + P_2 = 1$ થાય છે. તેથી $P_2 = 1 - P_1$ થશે.

$$q_1 = \frac{d-b}{(a+b)-(b+c)}$$

અને $q_1 + q_2 = 1$ તેથી $q_2 = 1 - q_1$ થશે. તેમજ
રમતની કિંમત

$$v = \frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)}$$

આ સૂત્રોનો ઉપયોગ કરી રમતની કિંમત મેળવી શકાય છે.

અથવા

(B) નીચે આપેલ પગથિયાં દ્વારા પણ પલાણ્ય વગરની રમતનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

પગથિયાં :

(1) પ્રથમ હારની સામે બીજી હારના ઘટકોનો ઘન તફાવત શોધી લખો.

(2) બીજી હારની સામે પ્રથમ હારના ઘટકોનો ઘન તફાવત શોધો અને લખો.

(3) પ્રથમ સ્તંભની નીચે બીજા સ્તંભનો ઘન ધફાવત લખો.

(4) બીજા સ્તંભની નીચે પ્રથમ સ્તંભનો ઘન તફાવત લખો.

(5) હારો અથવા સ્તંભોના તફાવતોનો સરવાળો કરો.

(6) ખેલાડી-Aના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહો માટે હારો સામેના તફાવતોને, તેમના સરવાળા વડે ભાગવાથી મળશે.

(7) ખેલાડી-Bના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહો માટે સ્તંભો સામેના તફાવતોને, તેમના સરવાળા વડે ભાગવાથી મળશે.

(8) રમતની કિંમત $v = \dfrac{ad - bc}{(a + d) - (b + c)}$ સૂત્રની મદદથી મળશે.

17.10.2 સરસાઈનો સિદ્ધાંત (Principle of Dominance) :

આ સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ રમતનું કદ ઘટાડવા માટે થાય છે. કેટલીક વખત આપણે અવલોકન દ્વારા જાણી શકીએ છીએ કે કોઈપણ ખેલાડીઓના કોઈ એક વ્યૂહ દ્વારા મળતા વળતર પર બીજા વ્યૂહ દ્વારા મળતા વળતર ઉપર પ્રભુત્વ મેળવે છે. આવા પ્રભુત્વવાળા વ્યૂહને ચાલુ રાખી બીજા વ્યૂહને ખેલાડી દૂર કરશે. આમ વળતર શ્રેણિકનું કદ ઘટાડશે. ખેલાડીના આવા નિર્ણયને સરસાઈનો સિદ્ધાંત કહે છે. આપણે આ સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને વળતર શ્રેણિકનું કદ ઘટાડીશું.

સરસાઈના સિદ્ધાંતના સામાન્ય નિયમો નીચે મુજબ છે.

ધારો કે, ખેલાડી-A પાસે m વ્યૂહો છે અને ખેલાડી-B પાસે n વ્યૂહો છે. આમ, આ રમત $m \times n$ કદની છે. ખેલાડી-Aના વ્યૂહોને હારોમાં અને ખેલાડી-Bના વ્યૂહોને સ્તંભોમાં દર્શાવવામાં આવે છે.

(1) જો કોઈ એક હારના તમામ ઘટકો અન્ય કોઈ હારના તમામ અનુવર્તી ઘટકો કરતાં ઓછા અથવા તેમના જેટલા હોય તો આવી પ્રભાવી હાર (dominated row) કહેવાય છે અને તેને દૂર કરી શકાય છે. એટલે કે બે હારોની સરખામણી કરતાં કોઈ એક હારના ઘટકો બીજી હારના ઘટકો કરતાં નાના કે સમાન હોય તો મોટા ઘટકોવાળી હાર પર સરસાઈ મેળવે છે તેથી નાના ઘટકોવાળી હારને દૂર કરવામાં આવે છે.

(2) જો કોઈ એક સ્તંભના તમામ ઘટકો અન્ય કોઈ સ્તંભના તમામ અનુવર્તી ઘટકો કરતાં વધુ અથવા તેમના જેટલા હોય તો આવો સ્તંભ પ્રભાવી સ્તંભ (dominated column) કહેવાય છે અને તેને દૂર કરી શકાય છે. એટલે કે બે સ્તંભોની સરખામણી કરતાં કોઈ એક સ્તંભના ઘટકો બીજા સ્તંભના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા કે સમાન હોય તો નાના ઘટકોવાળો સ્તંભ મોટા ઘટકોવાળા સ્તંભ પર સરસાઈ મેળવે છે. તેથી મોટા ઘટકોવાળા સ્તંભને દૂર કરવામાં આવે છે.

(3) જો કોઈ હાર કે સ્તંભને અન્ય કેટલીક હારો કે સ્તંભોનું રૈખીય જોડાણ (સંયોજન) કરવાથી કોઈ એક હાર કે સ્તંભ પર સરસાઈ મેળવે તો તેવી હાર કે સ્તંભને દૂર કરવામાં આવે છે.

(4) આમ, વળતર શ્રેણિકનું કદ ઘટે છે અને જે હાર કે સ્તંભ રદ (દૂર) કરવામાં આવે છે. તેની આનુષંગિક સંભાવના શૂન્ય (0) લેવામાં આવે છે.

17.10.3 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-10 : નીચે આપેલ રમતનો ઉકેલ મેળવો.

ખેલાડી B

ખેલાડી A		B_1	B_2
	A_1	7	3
	A_2	5	6

ઉકેલ :

જો આ રમત પલાણ્ય બિંદુવાળી છે કે પલાણ્ય બિંદુ વગરની છે એમ કહેવામાં આવ્યું નથી તેથી આપણે આ રમતને પલાણ્ય બિંદુ છે કે નહીં તે જોઈશું.

ખેલાડી B

ખેલાડી A		B_1	B_2
	A_1	$\boxed{7}$	③
	A_2	⑤	$\boxed{6}$

આ રમતને પલાણ્ય બિંદુ નથી તેથી પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતને બીજગણિતીય રીતે ઉકેલ મેળવીશું. આ રમતનો ઉકેલ મેળવવાની બે પદ્ધતિ છે. આપણે બંને જોઈશું પછી તમને જે યોગ્ય લાગે તે પદ્ધતિથી તમે ગણતરી કરી શકો છો.

રીત-1 : આ રીતમાં આપણે સૂત્રોનો ઉપયોગ કરી રમતનો ઉકેલ મેળવીશું.

ખેલાડી B

$$\text{ખેલાડી A}\quad \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(સ્તંભ: B_1, B_2) કરતાં

$\therefore$ $a = 7$, $b = 3$, $c = 5$ અને $d = 6$ થશે.

$$P_1 = \frac{d - c}{(a + b) - (b + c)}$$

$$\therefore \; P_1 = \frac{6 - 5}{(7 + 6) - (3 + 5)} = \frac{1}{13 - 8} = \frac{1}{5}$$

તેથી $P_2 = 1 - P_1$

$$\therefore \; P_2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{5 - 1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$q_1 = \frac{d-b}{(a+d)-(b+c)}$$

$$\therefore\ q_1 = \frac{6-3}{(7+6)-(3+5)} = \frac{3}{13-8} = \frac{3}{5}$$

તેથી $q_2 = 1 - q_1 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{5-3}{5} = 2/5$

રમતની કિંમત $v = \frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)}$

$$\therefore\ v = \frac{(7\times 6)-(3\times 5)}{(7+6)-(3+5)}$$

$$= \frac{42-15}{13-8}$$

$$= \frac{27}{5} = 5.4$$

ખેલાડી-Aનો ઈષ્ટતમ ઉકેલ

જવાબ : $S_A = \left\{1/5, 4/5\right\}$

ખેલાડી-Bનો ઈષ્ટતમ ઉકેલ $S_B = \left\{3/5, 2/5\right\}$

રમતની કિંમત $v = 5.4$

રીત-2 :

આ રીતમાં તફાવતો દ્વારા રમતનો ઉકેલ મેળવીશું.

		ખેલાડી-B		
		B_1	B_2	તફાવત
ખેલાડી-A	A_1	7	3	1
	A_2	5	6	4
	તફાવત	3	2	5

સમજૂતી :

પ્રથમ હારની સામે બીજી હારનો ધન તફાવત લખો. એટલે કે 5 – 6 = –1 થાય છે. પરંતુ આપણે 1 લખેલ છે. તે જ રીતે બીજી હારની સામે પ્રથમ હારનો ધન તફાવત (7 – 3 = 4) લખેલ છે.

પ્રથમ સ્તંભની નીચે બીજા સ્તંભનો ઘન તફાવત (3 – 6 = –3 થાય છે પરંતુ (ઘન) + 3) લખેલ છે. તે જ રીતે બીજા સ્તંભની નીચે પ્રથમ સ્તંભનો ઘન તફાવત (7 – 5 = 2) લખેલ છે.

પછી હાર કે સ્તંભનો સરવાળો $\boxed{5}$ લખેલ છે.

હવે ખેલાડી-A નો ઈષ્ટતમ ઉકેલ માટે હારની સામેની કિંમતને સરવાળા વડે ભાગતાં મળે છે. તે જ રીતે ખેલાડી-Bનો ઈષ્ટતમ ઉકેલ માટે સ્તંભની નીચેની કિંમતને સરવાળા વડે ભાગતાં મળે છે.

જવાબ :

ખેલાડી-Aનો ઈષ્ટતમ ઉકેલ $S_A = \left\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}$

ખેલાડી-Bનો ઈષ્ટતમ ઉકેલ $S_B = \left\{\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right\}$

રમતની કિંમત $v = \dfrac{ad - bc}{(a+d) - (b+c)}$

$$= \frac{(7 \times 6) - (3 \times 5)}{(7 + 6) - (3 + 5)}$$

$$= \frac{42 - 15}{13 - 8} = \frac{27}{5} = 4.5$$

તમે બેમાંથી કોઈપણ એક રીતનો ઉપયોગ કરી દાખલો ગણી શકો છો.

ઉદાહરણ-11 :

નીચે આપેલ રમતનો ઉકેલ પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતના ઉકેલ દ્વારા મેળવો.

ખેલાડી-B

ખેલાડી-A		B_1	B_2
	A_1	8	–4
	A_2	–3	1

ઉકેલ : આ રમતનો ઉકેલ તફાવતવાળી રીતે મેળવીશું.

ખેલાડી-B

ખેલાડી-A		B_1	B_2	તફાવત
	A_1	8	–4	4
	A_2	–3	1	12
	તફાવત	5	11	$\boxed{16}$

સમજૂતી :

પ્રથમ હારની સામે બીજી હારનો ઘન તફાવત = (–3) – (–1) = –3 –1 = –4 પરંતુ (ઘન તફાવત) = 4 લખેલ છે. તે જ રીતે બીજી હાર સામે પ્રથમ હારનો ઘન તફાવત = (8) – (–4) = 8 + 4 = 12 લખેલ છે. પ્રથમ સ્તંભની નીચે બીજા સ્તંભનો ઘન તફાવત = (–4) – (–1) = –4 –1 = –5 પરંતુ 5 લખેલ છે. બીજા સ્તંભની નીચે પ્રથમ સ્તંભનો ઘન તફાવત = (8) – (–3) = 8 + 3 = 11 લખેલ છે. અહીં સરવાળો 16 થાય છે.

હવે ખેલાડી-A અને Bના ઈષ્ટતમ વ્યૂહો માટે જે તે હાર કે સ્તંભ સામેની કિંમતને સરવાળા વડે ભાગતાં;

જવાબ :

ખેલાડી-Aનો ઈષ્ટતમ વ્યૂહ $S_A = \left\{\frac{4}{16}, \frac{12}{16}\right\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$ છે.

ખેલાડી-Bનો ઈષ્ટતમ વ્યૂહ $S_B = \left\{\frac{5}{16}, \frac{11}{16}\right\}$ છે.

રમતની કિંમત

$$v = \frac{ad - bc}{(a + d) - (b + c)}$$

$$= \frac{(8 \times 1) - (-4 \times -3)}{(8 + 1) - (-4 - 3)}$$

$$= \frac{8 - 12}{9 + 7}$$

$$= \frac{-4}{16}$$

$$= -\frac{1}{4} = -0.25$$

ઉદાહરણ-12 :

નીચેની રમતનો ઉકેલ પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમત દ્વારા મેળવો.

ખેલાડી B

ખેલાડી A		B_1	B_2	B_3
	A_1	–4	6	3
	A_2	–3	–3	4
	A_3	2	–3	4

ઉકેલ :

આ રમત 3 × 3 ક્રમની છે. તેથી સૌપ્રથમ આ રમતને 2 × 2 ક્રમની બનાવવા માટે સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરવો પડશે. સરસાઈના સિદ્ધાંત મુજબ અહીં બીજી હારના તમામ ઘટકો ત્રીજી હારના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં નાના કે સમાન છે. આથી બીજી હાર દૂર કરવામાં આવે છે. માટે નીચે પ્રમાણે શ્રેણિક મળશે.

ખેલાડી B

ખેલાડી A		B_1	B_2	B_3
	A_1	–4	6	3
	A_3	2	–3	4

હવે ત્રીજી સ્તંભના ઘટકો પ્રથમ સ્તંભના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા છે. તેથી ત્રીજો સ્તંભ દૂર કરવામાં આવે છે. તેથી નવો શ્રેણિક નીચે મુજબ મળશે.

ખેલાડી B

ખેલાડી A		B_1	B_2
	A_1	–4	6
	A_3	2	–3

હવે આ શ્રેણિક 2 × 2 ક્રમનો છે તેથી બીજગણિતીય રીતે ઉકેલ મળશે.

ખેલાડી-B

ખેલાડી-A		B_1	B_2	તફાવત
	A_1	–4	6	5
	A_2	2	–3	10
	તફાવત	9	6	15

સમજૂતી :

પ્રથમ હારની સામે બીજી હારનો ઘન તફાવત = (2) – (–3) = 2 + 3 = 5 લખેલ છે. તે જ રીતે બીજી હારની સામે પ્રથમ હારનો ઘન તફાવત = –4 –6 = –10 માટે 10 લખેલ છે. પ્રથમ સ્તંભની નીચે બીજા સ્તંભનો ઘન તફાવત = (6) – (–3) = 6 + 3 = 9 અને બીજા સ્તંભની નીચે પ્રથમ સ્તંભનો ઘન તફાવત = –4 –2 = –6 = 6 લખેલ છે. તફાવતનો સરવાળો 15 છે.

જવાબ :

ખેલાડી-Aના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_A = \left\{\frac{5}{15}, \frac{10}{15}, 0\right\} = \left\{1/3, 2/3, 0\right\}$

ખેલાડી-Bના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_B = \left\{\frac{9}{15}, 0, \frac{6}{15}\right\} = \left\{3/5, 0, 2/5\right\}$

રમતની કિંમત

$$v = \frac{ad - bc}{(a + d) - (b + c)}$$

$$= \frac{(-4 \times -3) - (6 \times -2)}{(-4 -3) - (6 + 2)}$$

$$= \frac{12 - 12}{-7 - 8}$$

$$= \frac{0}{-15} = 0$$

ઉદાહરણ-13 : નીચેની રમતનો ઉકેલ મેળવો.

ખેલાડી B

		B_1	B_2	B_3
ખેલાડી A	A_1	30	40	–80
	A_2	0	15	–20
	A_3	90	20	50

ઉકેલ :

દાખલામાં કઈ રીતે ઉકેલ મેળવવો તે સ્પષ્ટ ન હોય ત્યારે સૌપ્રથમ પલાણ્ય બિંદુ છે કે નહિ તે ચેક કરવું. તે મુજબ હારમાં નાની કિંમત પર ○ અને સ્તંભની મોટી કિંમત પર □ કરતાં.

ખેલાડી B

		B_1	B_2	B_3
ખેલાડી A	A_1	30	[40]	(–80)
	A_2	0	15	(–20)
	A_3	[90]	(20)	[50]

અહીં કોઈ ઘટક પર [O] આવતું નથી તેથી આ રમતને પલાણ્ય બિંદુ નથી તેથી પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમત દ્વારા ઉકેલ મેળવવો પડશે.

આ રમત 3 × 3 ક્રમની છે, તેને 2 × 2 ક્રમની બનાવવા માટે સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરવો પડશે.

સરસાઈના સિદ્ધાંત મુજબ બીજી હારના ઘટકો ત્રીજી હારના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં નાના હોવાથી ત્રીજી હાર બીજી પર સરસાઈ મેળવે છે. ∴ બીજી હાર દૂર કરીશું.

ખેલાડી B

		B_1	B_2	B_3
ખેલાડી A	A_1	30	40	–80
	A_3	90	20	50

પ્રથમ સ્તંભના ઘટકો ત્રીજા સ્તંભના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા હોવાથી, ત્રીજો સ્તંભ પ્રથમ સ્તંભ પર સરસાઈ મેળવે છે માટે પ્રથમ સ્તંભ દૂર કરીશું.

ખેલાડી B

		B_2	B_3
ખેલાડી A	A_1	40	–80
	A_3	20	50

અહીં રમત 2 × 2 ક્રમની થાય છે તેથી બીજગણિતીય રીતે ઉકેલ મળશે.

ખેલાડી-B

		B_2	B_3	તફાવત
ખેલાડી-A	A_1	40	–80	30
	A_2	20	50	120
	તફાવત	130	20	150

સમજૂતી :

પ્રથમ હારની સામે બીજી હારનો ઘનફળ (20 – 50 = 30) 30 લખેલ છે. તે જ રીતે બીજી હારની સામે પ્રથમ હારનો ઘન તફાવત {(40) – (–80)} = 40 + 80 = 120 લખેલ છે.

પ્રથમ સ્તંભની નીચે બીજા સ્તંભનો ઘન તફાવત {(–80) – (50) = –80 – 50 = –130} = 130 લખેલ છે. તે જ રીતે બીજા સ્તંભની નીચે પ્રથમ સ્તંભનો ઘન તફાવત 40 – 20 = 20 લખેલ છે. આ તફાવતોનો સરવાળો 150 થાય છે.

જવાબ :

ખેલાડી-Aના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_A = \left\{\frac{30}{150}, 0, \frac{120}{150}\right\} = \left\{\frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5}\right\}$

ખેલાડી-Bના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_B = \left\{0, \frac{130}{150}, \frac{20}{150}\right\} = \left\{0, \frac{13}{15}, \frac{2}{5}\right\}$

નોંધ : મિશ્ર વ્યૂહ માટે હાર કે સ્તંભની સામેના તફાવતને સરવાળા વડે ભાગવાથી મળે છે અને જે હાર કે સ્તંભ રદ થઈ હોય તેની સંભાવના 0 લેવામાં આવે છે તેથી આ દાખલામાં $A_2 = 0$ અને $B_1 = 0$ લીધા છે.

રમતની કિંમત

$$v = \frac{ad - bc}{(a+d)-(b+c)}$$

$$= \frac{(40 \times 50) - (-80 \times 20)}{(40 + 50) - (-80 + 20)}$$

$$= \frac{2000 + 1600}{90 + 60}$$

$$= \frac{3600}{150}$$

$$\therefore\ v = 24$$

ઉદાહરણ-14 : નીચેની રમતનો ઉકેલ મેળવો.

ખેલાડી B

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : પલાણ્ય બિંદુ તપાસતાં

ખેલાડી B

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \textcircled{1} & \boxed{7} & 2 \\ \boxed{6} & \textcircled{2} & \boxed{7} \end{bmatrix}$$

પલાણ્ય બિંદુ નથી તેથી પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતથી ઉકેલ મળશે તે માટે 2×3 ક્રમની રમતને 2×2 ક્રમમાં ફેરવવા માટે સરસાઈના સિદ્ધાંત મુજબ સ્તંભ 3ના તમામ ઘટકો સ્તંભ 1ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા છે તેથી સ્તંભ 3 પર સ્તંભ 1 સરસાઈ મેળવે છે. તેથી સ્તંભ 3 દૂર થશે.

ખેલાડી B

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

આ રમત 2×2 ક્રમની થઈ છે તેથી હવે બીજગણિતીય રીતે ઉકેલ મળશે.

		ખેલાડી-B		
		B_2	B_3	તફાવત
ખેલાડી-A	A_1	1	7	4
	A_2	6	2	6
	તફાવત	5	5	10

સમજૂતી :

પ્રથમ હારની સામે બીજી હારનો ઘન તફાવત (6 – 2) = 4 લખેલ છે. બીજી હારની સામે પ્રથમ હારનો ઘન તફાવત (1 – 7 = 6) 6 લખેલ છે. પ્રથમ સ્તંભની નીચે બીજા સ્તંભનો ઘન તફાવત 7 – 2 = 5 લખેલ છે અને બીજા સ્તંભની નીચે પ્રથમ સ્તંભનો ઘન તફાવત (1 – 6 = –5) = 5 લખેલ છે. તફાવતનો સરવાળો 10 થાય છે.

જવાબ :

ખેલાડી-Aના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_A = \left\{\frac{4}{10}, \frac{6}{10}\right\} = \left\{2/5,\ 3/5\right\}$

ખેલાડી-Bના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_B = \left\{\frac{5}{10}, 5/10, 0\right\} = \left\{1/2,\ 1/2, 0\right\}$

રમતની કિંમત

$$v = \frac{ad - bc}{(a+d)-(b+c)}$$

$$= \frac{(1 \times 2) - (7 \times 6)}{(1 + 2) - (7 + 6)}$$

$$= \frac{2 - 42}{3 - 13}$$

$$= \frac{-40}{-10} = 4$$

ઉદાહરણ-15 :

નીચેની રમતમાં સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી રમતનું કદ ઘટાડો અને આ રમતને 2×2 ક્રમમાં ફેરવો.

ખેલાડી B

ખેલાડી A		B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	3	5	4	2
	A_2	5	6	2	4
	A_3	2	1	4	0
	A_4	3	3	5	2

ઉકેલ :

સરસાઈના સિદ્ધાંત મુજબ હાર 3ના તમામ ઘટકો હાર 4ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં નાના છે તેથી હાર 3 પર હાર 4 સરસાઈ મેળવે છે માટે હાર 3 રદ થશે.

ખેલાડી B

ખેલાડી A		B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	3	5	4	2
	A_2	5	6	2	4
	A_4	3	3	5	2

હારમાં સરસાઈ ન મળે તો સ્તંભ ચેક કરો. અહીં સ્તંભ 2ના તમામ ઘટકો સ્તંભ 4ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા છે તેથી સ્તંભ 2 રદ થશે.

ખેલાડી B

ખેલાડી A		B_1	B_3	B_4
	A_1	3	4	2
	A_2	5	2	4
	A_4	3	5	2

સ્તંભ-1ના તમામ ઘટકો સ્તંભ 3(B_4)ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા છે તેથી સ્તંભ-1 દૂર થશે.

ખેલાડી B

ખેલાડી A		B_3	B_4
	A_1	4	2
	A_2	2	4
	A_3	5	2

હાર-1ના તમામ ઘટકો હાર 3(A_4)ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં નાના કે સમાન છે. તેથી હાર 1 રદ થશે.

ખેલાડી B

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{matrix} & B_3 & B_4 \\ A_2 & 2 & 4 \\ A_4 & 5 & 2 \end{matrix}$$

આમ સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી રમતને 2×2 ક્રમમાં ફેરવેલ છે.

ઉદાહરણ-16 : નીચેની રમતનો ઉકેલ પાલણ્ય બિંદુ વગરની રીતથી મેળવો.

	ખેલાડી-B					
ખેલાડી-A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	1	3	–1	4	2	–5
A_2	–3	5	6	1	2	0

ઉકેલ :

સરસાઈના સિદ્ધાંત મુજબ બીજા સ્તંભના ઘટકો પ્રથમ સ્તંભના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા છે તેથી બીજો સ્તંભ રદ થશે.

સ્તંભ-4ના ઘટકો સ્તંભ-1ના ઘટકો કરતાં મોટા છે તેથી સ્તંભ-4 રદ થશે.

સ્તંભ-5 ના ઘટકો સ્તંભ-1ના ઘટકો કરતાં મોટા છે તેથી સ્તંભ-5 રદ થશે.

સ્તંભ-3 ના ઘટકો સ્તંભ-6ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા છે તેથી સ્તંભ-3 રદ થશે.

ખેલાડી-A	**ખેલાડી- B**	
	B_1	**B_6**
A_1	1	–3
A_2	–5	0

આ રમત 2×2 ક્રમની થઈ છે તેથી ગણિતીય રીતે ઉકેલ મેળવીશું.

	ખેલાડી-B		
ખેલાડી-A	**B_1**	**B_6**	**તફાવત**
A_1	1	–3	5
A_2	–5	0	4
તફાવત	3	6	9

જવાબ :

ખેલાડી-Aના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_A = \left\{ 5/9, 4/9 \right\}$

ખેલાડી-Bના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_B = \left\{ \frac{3}{9}, 0, 0, 0, 0, 6/9 \right\} = \left\{ 1/3, 0, 0, 0, 0, 2/3 \right\}$

રમતની કિંમત

$$v = \frac{ad - bc}{(a+d) - (b+c)}$$

$$= \frac{0 - 15}{1 - 8}$$

$$= -\frac{15}{9}$$

$$= -5/3$$

ઉદાહરણ-17 : નીચેની રમતનો ઉકેલ પલાણ્ય બિંદુ વગરની રીતથી મેળવો.

	ખેલાડી-B	
ખેલાડી-A	B_1	B_2
A_1	1	2
A_2	5	4
A_3	–7	9
A_4	–4	–3
A_5	2	1

ઉકેલ :

અહીં પાંચ હારો અને બે સ્તંભો છે તેથી સૌપ્રથમ આપણે ત્રણ હારો ઓછી કરી રમતનું કદ ઘટાડવું પડશે. તે માટે સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીશું.

હાર-1, હાર-4 અને હાર-5ના તમામ ઘટકો હાર-2ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં નાના છે તેથી હાર-1, હાર-4 અને હાર-5 રદ થશે.

	ખેલાડી-B	
ખેલાડી-A	B_1	B_2
A_2	5	4
A_3	–7	9

હવે બીજગણિતીય રીત મુજબ

ખેલાડી-A	ખેલાડી-B		
	B_1	B_2	તફાવત
A_2	5	4	16
A_3	–7	9	1
તફાવત	5	12	17

જવાબ :

$$S_A = \left\{0, \frac{16}{17}, \frac{1}{17}, 0\right\}$$

$$S_B = \left\{\frac{5}{17}, \frac{12}{17}\right\}$$

રમતની કિંમત $v = \dfrac{ad - bc}{(a + d) - (b + c)}$

$$= \frac{45 + 28}{14 + 3}$$

$$= \frac{73}{17}$$

ઉદાહરણ-18 :

ખેલાડી-A અને ખેલાડી-B એક રમત રમે છે. જેમાં બંને ખેલાડીઓ પાસે રૂપિયા 2, રૂપિયા 5 અને રૂપિયા 10 વાળા એમ ત્રણ સિક્કાઓ છે. દરેક ખેલાડી બીજા ખેલાડીના સિક્કાની પસંદગીની જાણ વગર પોતે એક સિક્કો બતાવે છે.

જો બંને એ બતાવેલા સિક્કાઓની કિંમતનો સરવાળો એકી સંખ્યા થાય. તો ખેલાડી-A, ખેલાડી-Bનો સિક્કો જીતી લે છે.

જો બંનેએ બતાવેલા સિક્કાઓની કિંમતનો સરવાળો બેકી સંખ્યા થાય તો ખેલાડી-B, ખેલાડી-Aનો સિક્કો જીતી લે છે.

ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક લખો અને દરેક ખેલાડીનો ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ શોધી રમતની કિંમત મેળવો.

ઉકેલ :

જો ખેલાડી-A અને ખેલાડી-B બંને રૂ. 2 નો સિક્કો બતાવે તો બંનેના સિક્કાઓનો સરવાળો (2 + 2) = 4 થશે. જે બેકી સંખ્યા છે. તેથી ખેલાડી-B, ખેલાડી-Aનો સિક્કો જીતી લે છે. આથી ખેલાડી-A રૂ. 2 ગુમાવે છે. માટે ખેલાડી-Aના વળતર શ્રેણીકના ખાનું (1, 1)માં –2 લખીશું.

જો ખેલાડી-A રૂ. 2 અને ખેલાડી-B રૂ. 5નો સિક્કો બતાવે તો બંનેના સિક્કાઓનો સરવાળો

(2 + 5 = 7) થશે. જે એકી સંખ્યા છે. તેથી ખેલાડી-A, ખેલાડી-B એ બતાવેલ રૂ. 5 નો સિક્કો જીતી લે છે. આથી ખેલાડી-Aના વળતર શ્રેણિકના ખાનું (1, 2) માં 5 લખીશું.

જો ખેલાડી-A રૂ. 2 અને ખેલાડી-B રૂ. 10 નો સિક્કો બતાવે તો બંનેના સિક્કાનો સરવાળો (2 + 10 = 12) બેકી સંખ્યા થાય છે તેથી ખેલાડી-B, ખેલાડી-Aનો રૂ. 2 નો સિક્કો જીતી લે છે. તેથી વળતર શ્રેણિકના (1,3) ખાનામાં –2 લખીશું.

જો ખેલાડી - A રૂ. 5 નો અને ખેલાડી - B રૂ. 2નો સિક્કો બતાવે તો બંનેના સિક્કાઓનો સરવાળો 7 એટલે કે એકી સંખ્યા થશે તેથી ખેલાડી-A, ખેલાડી-B નો સિક્કો જીતી લે છે. માટે વળતર શ્રેણીકના (2, 1) ખાનામાં 2 લખીશું.

આજ રીતે વળતર શ્રેણિકના બીજા ઘટકો લખેલ છે.

ખેલાડી-A નો વળતર શ્રેણિક

	ખેલાડી-B			
	સિક્કો બતાવે	**રૂ. 2**	**રૂ. 5**	**રૂ. 10**
	રૂ. 2	–2	5	–2
ખેલાડી-A	રૂ. 5	2	–5	10
	રૂ. 10	–10	5	–10

આ રમતને પલાણ્ય બિંદુ નથી માટે પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમત દ્વારા ઉકેલ મેળવીશું.

સૌપ્રથમ સરસાઈના સિદ્ધાંત મુજબ હાર-3ના ઘટકો હાર-1ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં નાના કે સમાન છે. તેથી હાર-3 રદ કરીશું.

	ખેલાડી-B			
		રૂ. 2	**રૂ. 5**	**રૂ. 10**
ખેલાડી-A	રૂ. 2	–2	5	–2
	રૂ. 5	2	–5	10

સ્તંભ-3ના ઘટકો સ્તંભ-1ના ઘટકો કરતાં મોટા કે સમાન છે તેથી સ્તંભ-3 પર સ્તંભ-1 સરસાઈ મોટો છે માટે સ્તંભ-3 દૂર કરતાં;

	ખેલાડી-B	
ખેલાડી-A	**રૂ. 2**	**રૂ. 5**
રૂ. 2	–2	5
રૂ. 5	2	–5

હવે બીજગણિતીય રીત મુજબ;

	ખેલાડી-B		
ખેલાડી-A	**રૂ. 2**	**રૂ. 5**	**રૂ. 10**
રૂ. 2	–2	5	7
રૂ. 5	2	–5	7
તફાવત	10	4	14

ખેલાડી-Aના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_A = \left\{\frac{7}{14}, \frac{7}{14}, 0\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}$

ખેલાડી-Bના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_B = \left\{\frac{10}{14}, \frac{4}{14}, 0\right\} = \left\{\frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0\right\}$

રમતની કિંમત

$$v = \frac{ad - bc}{(a+d) - (b+c)}$$

$$= \frac{(-2 \times -5) - (5 \times 2)}{(-2 - 5) - (5 + 2)}$$

$$= \frac{10 - 10}{-7 - 7}$$

$$= \frac{0}{14}$$

$$= 0$$

∴ રમત સમતોલ છે એમ કહેવાય.

17.11 તમારી પ્રગતિ ચકાસો :

17.11.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) રમતના સિદ્ધાંતનો અર્થ સમજાવી રમતના સિદ્ધાંતની ધારણાઓ જણાવો.

(2) રમતના પ્રકારો સમજાવો.

(3) રમતના સિદ્ધાંત માટે વળતર શ્રેણિક લખો.

(4) રમતનો સિદ્ધાંત એટલે શું ? તેની મર્યાદાઓ જણાવો.

(5) રમતની સમસ્યાના વ્યૂહો સમજાવો.

(6) ગુરૂ-લઘુ અને લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત સમજાવો.

(7) પલાણ્ય બિંદુ એટલે શું ? પલાણ્ય બિંદુ શોધવાની રીત સમજાવો.

(8) પલાણ્ય બિંદુ વગરની બીજગણિતની રીત સમજાવો.

(9) સરસાઈના સિદ્ધાંત પર ટૂંકનોંધ લખો.

(10) સરસાઈનો સિદ્ધાંત એટલે શું ? તેના સામાન્ય નિયમો લખો.

(11) નીચે આપેલ રમતોમાં પલાણ્ય બિંદુ શોધી તેમનો ઉકેલ મેળવો.

(i)

		ખેલાડી B		
		B_1	B_2	B_3
ખેલાડી A	A_1	1	2	1
	A_2	0	–4	–1
	A_3	1	3	–2

(ii)

ખેલાડી A	ખેલાડી B		
	I	II	III
1	6	8	6
2	4	12	3

(iii)

ખેલાડી A	ખેલાડી B	
	B_1	B_2
A_1	–1	2
A_2	–1	3
A_3	1	2

(iv)

		ખેલાડી B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
ખેલાડી A	A_1	20	0	0	50	30
	A_2	40	20	10	20	50
	A_3	–40	–30	0	–30	60
	A_4	50	10	–50	–20	–60

(v)

	ખેલાડી B					
ખેલાડી A		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	2	4	3	8	4
	A_2	5	6	3	7	8
	A_3	6	7	9	8	7
	A_4	4	2	8	4	3

(vi)

ખેલાડી B / ખેલાડી A	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	20	15	12	35
A_2	25	14	8	10
A_3	40	2	10	5
A_4	–5	4	11	0

(vii)

ખેલાડી B / ખેલાડી A	B_1	B_2	B_3
A_1	–2	14	–2
A_2	–5	–6	–4
A_3	–6	20	–8

(viii)

ખેલાડી B / ખેલાડી A	1	2	3
I	–1	2	–4
II	6	4	–6

(12) નીચેની રમતોમાં સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી રમતનું કદ 2×2 ક્રમમાં ફેરવો.

(i)

ખેલાડી B / ખેલાડી A	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	6	4	2
A_2	5	8	2	4
A_3	3	2	4	0
A_4	3	3	5	2

(ii)

ખેલાડી x \ ખેલાડી y	y_1	y_2	y_3
x_1	10	5	–2
x_2	13	12	15
x_3	16	14	10

(iii)

ખેલાડી Q

ખેલાડી P	**Q_1**	**Q_2**	**Q_3**
P_1	3	–4	2
P_2	1	–7	–3
P_3	–2	4	7

(iv)

ખેલાડી *y*

ખેલાડી *x*	y_1	y_2	y_3
x_1	–50	100	200
x_2	50	–100	–100
x_3	50	–200	–200.

(13) નીચેની રમતોનો ઉકેલ પલાણ્ય બિંદુ વગરની બીજગણિતીય રીતે મેળવો.

(i)

ખેલાડી B

ખેલાડી A	B_1	B_2
A_1	8	1
A_2	3	9

(ii)

ખેલાડી B

ખેલાડી A	B_1	B_2
A_1	1	4
A_2	3	8

(iii)

ખેલાડી P	ખેલાડી Q		
	Q_1	Q_2	Q_3
P_1	1	7	2
P_2	5	1	6
P_3	6	2	7

(iv)

ખેલાડી y

ખેલાડી x

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 14 & 12 & 15 \\ 18 & 14 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

(v)

	ખેલાડી B	
ખેલાડી A	B_1	B_2
A_1	2	–1
A_2	–1	1

(vi)

	ખેલાડી B	
ખેલાડી A	B_1	B_2
A_1	1	3
A_2	5	2

(14) નીચેની રમતોનો ઉકેલ મેળવો.

(i) ખેલાડી B

ખેલાડી A	B_1	B_2
A_1	1	8
A_2	6	2

(ii) ખેલાડી B

ખેલાડી A	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	4	1

(iii)

ખેલાડી **B**

ખેલાડી A	B_1	B_2	B_3
A_1	2	–1	3
A_2	4	5	6

(iv)

ખેલાડી y

ખેલાડી x	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	–3	4	2	9
x_2	7	8	6	10
x_3	6	2	4	–1

(v)

ખેલાડી Q

ખેલાડી P	**Q_1**	**Q_2**
P_1	1	4
P_2	–1	–4
P_3	–3	–2

(vi)

ખેલાડી B

	I	II	III
I	–5	10	20
II	5	–10	–10
III	–5	–20	–20

(vii)

ખેલાડી B

ખેલાડી A	B_1	B_2
A_1	8	–3
A_2	–3	1

(viii) ખેલાડી A

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	4	2	9	1
A_2	7	6	5	7	8
A_3	3	5	4	4	9
A_4	6	7	3	3	2

(ખેલાડી B)

(15) બે ખેલાડીઓ x અને y પાસે એક એક સિક્કો છે. બંને ખેલાડીઓ એક બીજાની જાણ કર્યા વગર ટેબલ પર છાપ (H) અથવા કાંટો (T) ઉપર બાજુ પર રહે તે પ્રમાણે સિક્કો મૂકે છે.

જો બંને સિક્કાઓ H બતાવે તો ખેલાડી x ને ખેલાડી y પાસેથી રૂ. 20 મળે છે અને જો બંને સિક્કાઓ T બતાવે તો ખેલાડી x ને ખેલાડી y પાસેથી રૂ. 8 મળે છે. જો એક સિક્કો H અને બીજા સિક્કો T હોય તો ખેલાડી y ને ખેલાડી x પાસેથી રૂ. 10 મળે છે.

ખેલાડી x નો વળતર શ્રેણિક લખો. તેમજ ખેલાડી x અને yના ઈષ્ટતમ વ્યૂહો શોધી. રમતની કિંમત મેળવો.

(16) ખેલાડી-A અને ખેલાડી-B પાસે એક એક સમઘન પાસો છે. બંને ખેલાડીઓ એક સાથે બંને પાસાઓ ઉછાળે છે, જો બંને પાસા પરના અંક એકી સંખ્યા હોય તો ખેલાડી-A, ખેલાડી-B પાસેથી રૂ. 15 જીતે છે અને બંને પાસાઓ પરના અંક બેકી સંખ્યા હોય તો ખેલાડી-A, ખેલાડી-B પાસેથી રૂ. 10 જીતે છે અને જો એક પાસા પર એકી સંખ્યા અને બીજા પાસા પર બેકી સંખ્યા હોય તો ખેલાડી-B, ખેલાડી-A પાસેથી રૂ. 12 જીતે છે. ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક લખી રમતનો ઉકેલ મેળવો.

(17) બે કંપનીઓ એક જ પ્રકારની વસ્તુઓ માટે હરિફાઈ કરે છે. તેમના જુદા જુદા વ્યૂહ અને કંપની-Aનો વળતર (રૂપિયા કરોડમાં) નીચે આપેલ છે. આ રમતનો ઉકેલ મેળવો.

કંપની-Aનો વળતર શ્રેણિક

કંપની-A	**કંપની-B**		
	જાહેરાત કરતી નથી	**મધ્યમસર જાહેરાત કરાય છે.**	**વિશાળ પાયા પર જાહેરાત કરાય છે.**
જાહેરાત કરતી નથી.	60	50	40
મધ્યમ સર જાહેરાત કરાય છે.	70	70	50
વિશાળ પાયા પર જાહેરાત કરાય છે.	60	60	75

જવાબો :

(11) (i) પલાણ્ય બિંદુ (A_1, B_1) અને (A_1, B_3)

રમતની કિંમત $v = 1$

(ii) પલાણ્ય બિંદુ (1, I) અને (1, III)

રમતની કિંમત $v = 6$

(iii) પલાણ્ય બિંદુ (A_3, B_1) રમતની કિંમત $v = 1$

(iv) પલાણ્ય બિંદુ (A_2, B_3) રમતની કિંમત $v = 10$

(v) પલાણ્ય બિંદુ (A_3, B_1) રમતની કિંમત $v = 6$

(vi) પલાણ્ય બિંદુ (A_1, B_3) રમતની કિંમત $v = 12$

(vii) પલાણ્ય બિંદુ (A_1, B_1) રમતની કિંમત $v = -2$

(viii) પલાણ્ય બિંદુ (I, 3) રમતની કિંમત $v = -4$

(12) (i)

$$\begin{array}{c} \\ A_2 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{c} \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 14 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Q_1 & Q_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

(iv)

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -50 & 100 \\ -50 & -100 \end{bmatrix} \end{array}$$

(13) (i) $S_A = \left\{\frac{6}{13}, \frac{7}{13}\right\}, S_B = \left\{\frac{8}{13}, \frac{5}{13}\right\}, v = \frac{69}{13}$

(ii) $S_A = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}, S_B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, v = \frac{5}{2}$

(iii) $S_A = \left\{\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}\right\}, S_B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}, v = 4$

(iv) $S_A = \{0, 4/7, 3/7\}, S_B = \{0, 5/7, 2/7\}, v = \frac{90}{7}$

(v) $S_A = \{2/5, 3/5\}, S_B = \{2/5, 3/5\}, v = 15$

(vi) $S_A = \{3/5, 2/5\}, S_B = \{1/5, 4/5\}, v = \frac{13}{5}$

(14) (i) $S_A = \left\{\frac{4}{11}, \frac{7}{11}\right\}, S_B = \left\{\frac{6}{11}, 5/11\right\}, v = \frac{46}{11}$

(ii) $S_A = \{1/2, 1/2\}, S_B = \{2/3, 1/3\}, v = 3$

(iii) પલાણ્ય બિંદુ (A_2, B_1), $v = 4$

(iv) પલાણ્ય બિંદુ (x_2, y_3), $v = 6$

(v) પલાણ્ય બિંદુ (P_1, Q_1), $v = 1$

(vi) $S_A = \{1/2, 1/2, 0\}, S_B = \{2/3, 1/3, 0\}, v = 0$

(vii) $S_A = \left\{\frac{4}{15}, \frac{11}{15}\right\}, S_B = \left\{\frac{4}{15}, \frac{11}{15}\right\}, v = 1/15$

(viii) પલાણ્ય બિંદુ (A_2, B_3), $v = 5$

(15) ખેલાડી-xનો વળતર શ્રેણિક

ખેલાડી y

ખેલાડી x	y_1	y_2
x_1	20	–10
x_2	–10	8

$S_A = \{3/8, 5/8\}, S_B = \{3/8, 5/8\}, v = 5/4$

(16) ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક

ખેલાડી B

	એકી સંખ્યા	બેકી સંખ્યા
એકી સંખ્યા	15	–12
બેકી સંખ્યા	–12	10

$S_A = \left\{\frac{22}{49}, {}^{27}\!/_{49}\right\}, S_B = \left\{\frac{22}{49}, {}^{27}\!/_{49}\right\}, v = \frac{6}{49}$

(17) $S_A = \left\{0, {}^{1}\!/_{3}, {}^{2}\!/_{3}\right\}, S_B = \left\{0, \frac{7}{9}, {}^{2}\!/_{9}\right\}, v = 63.33$

17.11.2 યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો :

(1) રમતનું મૂલ્ય $v =$ .... હોય ત્યારે રમતને સમતોલ રમત કહેવાય.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) –1

(2) રમતનું મૂલ્ય .... સમીકરણને સંતોષે છે.

(a) લઘુ-ગુરૂ $\leq v \leq$ ગુરૂ લઘુ (b) લઘુ-ગુરૂ $> v >$ ગુરૂ લઘુ

(c) લઘુ-ગુરૂ $\geq v \geq$ ગુરૂ લઘુ (d) આપેલમાંથી એક પણ નહીં

(3) જ્યારે ગુરૂ-લઘુ = લઘુ-ગુરૂ હોય ત્યારે -

(a) પલાણ્ય બિંદુ મળતું નથી. (b) પલાણ્ય બિંદુ મળે છે.

(c) પલાણ્ય બિંદુ શૂન્ય થાય છે. (d) પલાણ્ય બિંદુ એક થાય છે.

(4) ખેલાડી-A અને ખેલાડી-B દ્વારા વિવિધ વ્યૂહરચનાનો ઉપયોગ કરીને સંભાવનાની કિંમત નક્કી કરવા માટે .... પદ્ધતિનો ઉપયોગ થાય છે.

(a) હંગેરિયન(b) જહોન્સન

(c) બીજ ગણિતીય (d) આપેલમાંથી એક પણ નહીં

(5) પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતનું નિરાકરણ .... થાય છે.

(a) સાદા વ્યૂહથી (b) પલાણ્ય બિંદુના વ્યૂહથી

(c) મિશ્ર વ્યૂહથી (d) આપેલમાંથી એક પણ નહીં

(6) નીચે આપેલ રમતની સમસ્યાનો ઉકેલ માટે પલાણ્ય બિંદુ અનુરૂપ ઈષ્ટતમ વ્યૂહ જણાવો.

ખેલાડી B

		B_1	B_2	B_3
	A_1	5	6	3
ખેલાડી A	A_2	0	–8	–6
	A_3	2	10	–2

(a) (A_1, B_2) (b) (A_2, B_1) (c) (A_3, B_3) (d) (A_1, B_3)

(7) નીચે આપેલ સમસ્યાનો ઉકેલ માટે પલાણ્ય બિંદુને અનુરૂપ રમતનું મૂલ્ય જણાવો.

ખેલાડી B

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	–2	0	1	9	5
A_2	5	4	3	4	4
A_3	–4	–3	0	–2	6
A_4	5	3	–4	4	–6

(a) –6 (b) 4 (c) 5 (d) 3

(8) …….. માટે સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ થાય છે.

(a) રમતનું કદ વધારવા (b) રમતનું કદ ઘટાડવા

(c) કિંમત ઘટાડવા (d) કિંમત વધારવા

(9) જો ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક a_{i_j} હોય તો ખેલાડી-Bનો વળતર શ્રેણિક = ……..

(a) 0 (b) 1 (c) a_{i_j} (d) $-a_{i_j}$

(10) નીચેની રમતની કિંમત v = …….. છે.

ખેલાડી Q

ખેલાડી P		Q_1	Q_2
	P_1	5	7
	P_2	–6	–2

(a) –2 (b) –6 (c) 5 (d) 7

(11) નીચે આપેલ રમત …….. છે.

ખેલાડી y

ખેલાડી x		y_1	y_2
	x_1	–9	0
	x_2	0	5

(a) અસમતોલ (b) સમતોલ

(c) પલાણ્ય બિંદુ વગરની (d) ઉપરના બધા જ

(12) જો ખેલાડી-A સરસાઈના સિદ્ધાંત મુજબ તેનો પહેલો વ્યૂહ એટલે કે A_1 રદ કરે છે તો તેના પહેલા વ્યૂહ (A_1)ની સંભાવના .... થાય.

(a) 0 (b) 1 (c) –1 (d) 2

જવાબો :

(1) – a	(2) – a	(3) – b	(4) – c	(5) – c	(6) – d
(7) – d	(8) – b	(9) – d	(10) – c	(11) – b	(12) – a

17.12 ચાવીરૂપ શબ્દો :

V = **રમતની કિંમત**

રમત – નિશ્ચિત નિયમોનો ગણ

દાવ – ચાલ, રમતનો વારો, વ્યૂહ

ખેલાડી – સ્પર્ધામા રોકાયેલી વ્યક્તિ

પરિમિતિ – ગણતરી કરી શકાય તેવી ઘન સંખ્યા

શૂન્ય યોગ – શૂન્ય સરવાળો

પલાણ્ય બિંદુ : (હારનો ન્યૂનત્તમ પૈકી મહત્તમ અને સ્તંભમાં મહત્તમ પૈકી લઘુત્તમ ઘટક ધરાવતુ સ્થાન બિંદું)

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) ક્રિયાત્મક સંશોધનની ઈષ્ટતમ પદ્ધતિઓ, યુનિવર્સિટી ગ્રંથ નિર્માણ બોર્ડ, ગુજરાત રાજ્ય, અમદાવાદ-6 (1990)
સ્વ. પ્રા. રમેશચંદ્ર એન. દેસાઈ, ડૉ. ભરતભાઈ બી. જાની

(2) કાર્યાત્મક સંશોધન, અક્ષર પબ્લિકેશન, અમદાવાદ (2016)
લેખક : ડૉ. મહેન્દ્ર એચ. મૈસુરીયા
ડૉ. દિનેશ એમ. પટેલ
પ્રા. ધર્મેન્દ્ર એમ. પ્રજાપતિ

★ ★ ★

NOTE

યુનિવર્સિટી ગીત

સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ
સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ
સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ

શિક્ષણ, સંસ્કૃતિ, સદ્‌ભાવ, દિવ્યબોધનું ધામ
ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી નામ;
સૌને સૌની પાંખ મળે, ને સૌને સૌનું આભ,
દશે દિશામાં સ્મિત વહે હો દશે દિશે શુભ-લાભ.

અભણ રહી અજ્ઞાનના શાને, અંધકારને પીવો ?
કહે બુદ્ધ આંબેડકર કહે, તું થા તારો દીવો;
શારદીય અજવાળા પહોંચ્યાં ગુર્જર ગામે ગામ
ધ્રુવ તારકની જેમ ઝળહળે એકલવ્યની શાન.

સરસ્વતીના મયૂર તમારે ફળિયે આવી ગહેકે
અંધકારને હડસેલીને ઉજાસના ફૂલ મહેંકે;
બંધન નહીં કો સ્થાન સમયના જવું ન ઘરથી દૂર
ઘર આવી મા હરે શારદા દૈન્ય તિમિરના પૂર.

સંસ્કારોની સુગંધ મહેંકે, મન મંદિરને ધામે
સુખની ટપાલ પહોંચે સૌને પોતાને સરનામે;
સમાજ કેરે દરિયે હાંકી શિક્ષણ કેરું વહાણ,
આવો કરીયે આપણ સૌ
ભવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ...
દિવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ...
ભવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ

DR. BABASAHEB AMBEDKAR OPEN UNIVERSITY
(Established by Government of Gujarat)
'Jyotirmay' Parisar,
Sarkhej-Gandhinagar Highway, Chharodi, Ahmedabad-382 481
Website : www.baou.edu.in