BAOU
Education
for All

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી

(ગુજરાત સરકાર દ્વારા સ્થાપિત)

તૃતીય વર્ષ બી.કોમ.

BCSTAN306

આંકડાશાસ્ત્ર

બ્લોક-૧

સ્વાધ્યાયનું અજવાળું

ભારતના સંવિધાનના સર્જક, ભારતરત્ન ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકરની પાવન સ્મૃતિમાં ગરવી ગુજરાતમાં, ગુજરાત સરકારશ્રીએ ઈ.સ. 1994માં યુનિવર્સિટી ગ્રાન્ટ્સ કમિશન અને ડિસ્ટન્સ એજ્યુકેશન કાઉન્સિલની માન્યતા મેળવી અમદાવાદમાં ગુજરાતના એકમાત્ર મુક્ત વિશ્વવિદ્યાલય ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટીની સ્થાપના કરી છે.

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકરની 125મી જન્મજયંતીના અવસરે જ ગુજરાત સરકાર દ્વારા યુનિવર્સિટી માટે અદ્યતન સગવડતા સાથે, શાંત જગ્યા મેળવી, જ્યોતિર્મય પરિસરનું નિર્માણ કરી આપ્યું. BAOUના સત્તામંડળે પણ યુનિવર્સિટીના આગવા ભવિષ્ય માટે ખૂબ સહયોગ આપ્યો, આપતા રહે છે.

શિક્ષણ એટલે માનવમાં થતું મૂડીરોકાણ, શિક્ષણ લોકસમાજની ગુણવત્તા સુધારવામાં અધિક ફાળો આપી શકે છે. અહીં મને સ્વામી વિવેકાનંદનું શિક્ષણ વિષયક દર્શન યાદ આવે છે:
'જેનાથી ચારિત્ર્યનું ઘડતર થાય, જેનાથી માનસિક ક્ષમતાનું નિર્માણ થાય, જેનાથી બૌદ્ધિક વિકાસ સાધી શકાય અને જેના થકી વ્યક્તિ પગભર બની શકે તેને શિક્ષણ કહેવાય'

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી શિક્ષણમાં આવા ઉમદા વિચારને વરેલી છે. તેથી વિદ્યાર્થીઓને ગુણવત્તાયુક્ત, વ્યવસાયલક્ષી, જીવનલક્ષી શિક્ષણની સગવડ ઘરે બેઠાં મળી રહે એવા પ્રયત્નો મક્કમ બની કરે છે. બહોળા સમાજના લોકોને ઉચ્ચશિક્ષણ પ્રાપ્ત થાય, છેવાડાના માણસોને ઉત્તમ કેળવણી એમનાં રોજિંદાં કામો કરતાં પ્રાપ્ત થતી રહે. વ્યાવસાયિક લોકોને આગળ ભણતરની ઉત્તમ તક સાંપડે અને જીવનમાં પોતાની ક્ષમતાઓ, કૌશલ્યોને પ્રગટ કરી સારી કારકિર્દી ઘડે, સ્વાવલંબી બની ઉત્તમ જીવન જીવતાં સમાજ અને રાષ્ટ્રનિર્માણમાં પોતાનું યોગદાન આપે, એ માટે પ્રયાસરત છે.

'સ્વાધ્યાય: પરમં તપ:' સૂત્રને ઓપન યુનિવર્સિટી કેન્દ્રમાં રાખીને અહીં પ્રવેશ કરતા છાત્રોને સ્વઅધ્યયન માટે સરળતાથી સમજાય એવો ગુણવત્તાલક્ષી શૈક્ષણિક અભ્યાસક્રમ ઉપલબ્ધ કરાવી આપે છે. દરેક વિષયની પાયાની સમજણ મળે તેની કાળજી રાખવામાં આવે છે. વિદ્યાર્થીઓને રસ પડે અને રુચિ કેળવાય તેવાં પાઠ્યપુસ્તકો નિષ્ણાત અધ્યાપકો દ્વારા તૈયાર કરવામાં આવે છે. દૂરવર્તી શિક્ષણ પ્રાપ્ત કરવા ખેવના રાખતા કોઈ પણ ઉંમરના છાત્રોને માટે અભ્યાસસામગ્રી તૈયાર કરવા માટે શિક્ષણવિદો સાથે પરામર્શ કરવામાં આવે છે. એ પછી જ માળખું રચી, અભ્યાસસામગ્રી તૈયાર કરી પુસ્તક સ્વરૂપે છાત્રોનાં કરકમળોમાં આપે છે. જેનો ઉપયોગ કરીને વિદ્યાર્થીઓ સંતોષપ્રદ અનુભવ કરી શકે છે.

યુનિવર્સિટીના તજજ્ઞ અધ્યાપકો ખૂબ કાળજીથી આ અભ્યાસસામગ્રીનું લેખન કરે છે. વિષયનિષ્ણાત પ્રોફેસરો દ્વારા એમનું પરામર્શન થયા પછી જ પરિણામલક્ષી અભ્યાસસામગ્રી યુનિવર્સિટીના વિદ્યાર્થીઓને પહોંચે છે. ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી જ્ઞાનનું કેન્દ્રબિંદુ બની રહી છે. વિદ્યાર્થીઓને 'સ્વાધ્યાય ટેલિવિઝન', 'સ્વાધ્યાય રેડિયો' જેવા દૂરવર્તી ઉપાદાનો થકી પણ એમના ઘરમાં શિક્ષણ પહોંચાડવાનો પુરુષાર્થ થઇ રહ્યો છે. ઉમદા હેતુ, શ્રેષ્ઠ ધ્યેયને આંબવા પરિશ્રમરત યુનિવર્સિટીના જ્ઞાનની પરબ સમા અધ્યાપકો તેમજ કર્મઠ કર્મચારીગણને અભિનંદન અને અમારી યુનિવર્સિટીના વિદ્યાર્થીઓ સફળ થવા ખૂબ મહેનત કરી, જીવન સફળ કરવાની સાથે જીવન સાર્થક કરે એવી પરમેશ્વરને પ્રાથના કરું છું.

પ્રો. (ડૉ.) અમીબહેન ઉપાધ્યાય
કુલપતિશ્રી,
ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી,
જ્યોતિર્મય પરિસર,સરખેજ-ગાંધીનગર હાઈવે, છારોડી, અમદાવાદ

લેખન :	ડૉ. મિતેશ શાહ	એસોસિયેટ પ્રોફેસર, એસ. વી. વાણિજ્ય મહાવિદ્યાલય, અમદાવાદ.
	ડૉ. સુહાગ મહેરિયા	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, શ્રી કે.કા.શાસ્ત્રી ગવર્મેન્ટ કોમર્સ કોલેજ, અમદાવાદ.
	ડૉ. લલીતા સોલંકી	એસોસિયેટ પ્રોફેસર, સમર્પણ આર્ટસ એન્ડ કોમર્સ કોલેજ, ગાંધીનગર.
પરામર્શક(વિષય) :	પ્રો. (ડૉ.) મનોજ શાહ	પ્રોફેસર & નિયામક, સ્કૂલ ઓફ કોમર્સ એન્ડ મેનેજમેન્ટ, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ.
	ડૉ. મૌલિક દેસાઈ	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, કે.એસ. સ્કૂલ ઓફ બિઝનેસ મેનેજમેન્ટ, અમદાવાદ.
	ડૉ. કલ્પેશ વાંકાણી	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, ક્રાઈસ્ટ કોલેજ, રાજકોટ.
પરામર્શક(ભાષા) :	ધનશ્યામ કે ગઢવી	નિવૃત આચાર્ય, સાર્વજનિક કોલેજ, મહેસાણા.
	ડૉ. દિનુ ચુડાસમા	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, (ગુજરાતી) ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ.
	શ્રી ઉર્વિકા પટેલ	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, (ગુજરાતી) ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ.
સંપાદન :	પ્રો. (ડૉ.) મનોજ શાહ	પ્રોફેસર & નિયામક, સ્કૂલ ઓફ કોમર્સ એન્ડ મૅનેજમૅન્ટ, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ.

પ્રકાશક :	ડૉ. ભાવિન ત્રિવેદી	કાર્યકારી કુલસચિવ, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ.
આવૃત્તિ :	સુધારેલ પુનઃ આવૃત્તિ (નવો અભ્યાસક્રમ-2022)	
ISBN :	978-93-5598-206-3	

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી
(ગુજરાત સરકાર દ્વારા સ્થાપિત)

તૃતીય વર્ષ, **B.Com.**

BCSTAN-306

આંકડાશાસ્ત્ર

આંકડાશાસ્ત્ર

PART - 1

એકમ
1

માહિતી એકત્રીકરણ અને પ્રાપ્તિસ્થાનો

-: રૂપરેખા :-

1.1 પ્રસ્તાવના

1.2 પ્રાથમિક અને ગૌણ માહિતી વચ્ચે તફાવત

1.3 પ્રાથમિક માહિતી એકત્રીકરણની પદ્ધતિઓ

1.4 આદર્શ પ્રશ્નાવલીની રીત

1.5 ગૌણ માહિતીના પ્રાપ્તિસ્થાનો

1.6 વર્ગીકરણ

● **સ્વાધ્યાય**

1.1 પ્રસ્તાવના

એકવીસમી સદી એ ઈન્ફોર્મેશન ટેક્નોલોજી (IT)ની સદી છે અને Information એટલે માહિતી. આમ બીજા અર્થમાં કહીએ તો આ સદી માહિતીની સદી છે. એટલે કે જે વ્યક્તિ/ સંસ્થા/ દેશ પાસે વધુ, વહેલી અને સચોટ માહિતી હોય અને જો તેનો યોગ્ય ઉપયોગ કરવામાં આવે તો સરળતાથી યોગ્ય નિર્ણય લઈ શકાય છે.

માહિતીની ઉપયોગિતા પહેલાના જમાનામાં પણ હતી અને એટલે જ આરંભમાં રાજ્યની વસ્તી, લશ્કરી તાકાત (જેમકે હાથી, ઘોડા, સૈનિકો), વેપારમાં મહેસૂલ (કયાંથી કેટલો કર લીધો), જન્મ મૃત્યુનાં આંકડા આમ વિવિધ વિષયોની માહિતી મેળવવામાં આવતી હતી. સમય જતાં ટેક્નોલોજીકલ ડેવલપમેન્ટ (તકનીકી વિકાસ)ને લીધે હવે ઉપરના વિષયો ઉપરાંત આપણે જુદા-જુદા સ્થળનું વાતાવરણ અથવા ચવેવિધ વસ્તુઓ વિશે પ્રમાણમાં સરળતાથી માહિતી મળી રહે છે.

દા.ત. કોઈ એક સ્થળનાં વાતાવરણની માહિતી મેળવવી હોય તો તે જગ્યાએ યોગ્ય સેન્સર મૂકીને. (તાપમાનની / ભેજનાં પ્રમાણની) જરૂરી માહિતી મેળવી શકાય છે. આપણે જયારે વાહન લઈને એક જગ્યાથી બીજી જગ્યાએ મુસાફરી કરતાં હોઈએ છીએ અને રસ્તા પર કેટલો ટ્રાફિક જામ છે તેની માહિતી આપણે ગુગલ મેપ પરથી મેળવી શકીએ છીએ. આમ ટેક્નોલોજીની મદદથી આપણે ખૂબ જ ટૂંક સમયમાં સચોટ માહિતી મેળવી શકીએ છીએ અને આપણો સમય બચાવી શકીએ છીએ. આમ માહિતી એ આજના યુગનો પ્રાણ છે અને જાણે અજાણે આપણે એક યા બીજા પ્રકારે માહિતીનો ઉપયોગ કરીને નિર્ણય લેતા હોઈએ છીએ. આંકડાશાસ્ત્રનો આધાર માહિતી પર છે તેથી માહિતી કોને કહેવાય તે સમજવું ખૂબ જ જરૂરી છે.

કોઈ પણ વિષય-વસ્તુનો અભ્યાસ કરવા માટે તેના જુદા-જુદા પરિમાણોને ધ્યાનમાં રાખીને જે તથ્યો કે હકીકતો કે આંકડાઓ મેળવવામાં આવે છે તેને માહિતી કહે છે. દા.ત. ધારો કે આપણે ફોન ખરીદવો હોય તો કોનના વિવિધ લક્ષણો કે ગુણધર્મો જેવા કે કઈ કંપનીનો ફોન છે, ડિસ્પ્લે સ્ક્રીનની સાઈઝ (માપ) શું છે, કેટલી મેમરી છે, કેટલી કિંમત છે વગેરે માહિતી મેળવીએ છીએ અતે પછી તેના આધારે યોગ્ય નિર્ણય લઈએ છીએ અને ફાયદો મેળવી શકીએ છીએ.

આમ, અભ્યાસ હેઠળના એકમોનો સમૂહ (સમષ્ટિ) અથવા સમષ્ટિમાંથી યદચ્છ રીતે પસંદ કરેલ એકમોનો સમૂહ (નિદર્શ)ના તમામ એકમોના એક અથવા વધારે ચલ લક્ષણો (પરિમાણો) વિશે જે તથ્યો અથવા આંકડા મેળવવામાં આવે છે તેને માહિતી કહે છે. દા.ત. T.Y.B.Com.ના વિદ્યાર્થીઓની જાતિ (છોકરો/છોકરી), તેમની ઊંચાઈ, તેમના ઘરના સભ્યોની સંખ્યા, તેમના આંક્ડાશાસ્ત્રના ગુણ વગેરેને માહિતી કહે છે. આમ આંકડાશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં માહિતી પાયાનું સ્થાન ધરાવે છે અને તેથી જ મેળવેલી માહિતી, વર્ગીકરણ અને પૃથકકરણનું કામ કાળજી પૂર્વકનો અભ્યાસ માંગી લે છે. આ માટે જે શાસ્ત્રનો વિકાસ થયો તે આંકડાશાસ્ત્ર.

માહિતીના અભ્યાસમાં જો અભ્યાસ હેઠળના એકમનું લક્ષણ માપી શકાય તેવું હોય તો તેને ચલનાત્મક/સંખ્યાત્મક માહિતી કહે છે. ઉપરના ઉદાહરણમાં વિદ્યાર્થની ઊંચાઈ, ગુણ વગેરે ચલનાત્મક માહિતી છે. જ્યારે તેમની જાતિ એ એક ગુણધર્મ થયો આથી તેને ગુણાત્મક માહિતી કહે છે. કોઈ વ્યક્તિની પ્રમાણિકતા, ફૂલની સુગંધ, વાળનો રંગ વગેરે ગુણધર્મ હોવાથી તેને ગુણાત્મક માહિતી કહે છે.

આંકડાશાસ્ત્રીય માહિતીને મુખ્યત્વે બે પ્રકારમાં વહેંચી શકાય. પ્રાથમિક માહિતી અને ગૌણ માહિતી.

પ્રાથમિક માહિતી : જ્યારે કોઈ ‘વ્યક્તિ કે સંસ્થા પોતાની જાતે અથવા અન્ય કોઈ વ્યક્તિ કે સંસ્થાની મદદ લઈને પ્રથમવાર માહિતી મેળવે તો તેને પ્રાથમિક માહિતી કહેવામાં આવે છે.

દા.ત. દર 10 વર્ષે થતી વસ્તી ગણતરી એ પ્રાથમિક માહિતીનું ઉદાહરણ છે. આ ઉપરાંત એક શિક્ષક વિદ્યાર્થનિ તેનાં કુટુંબનાં સભ્યોની સંખ્યા, વિદ્યાર્થી કેટલે દૂરથી આવે છે, કઈ રીતે આવે છે, આ બધી માહિતી વિદ્યાર્થીને પ્રથમ વખત પૂછીને મેળવે તો તે માહિતી શિક્ષક માટે પ્રાથમિક માહિતી થાય.

ગૌણ માહિતી : જ્યારે અન્ય વ્યક્તિ કે સંસ્થાએ મેળવેલ માહિતીનો ઉપયોગ કોઈ વ્યક્તિ કે સંસ્થા કરે તો તે માહિતી તે વ્યક્તિ કે સંસ્થા માટે ગૌણ માહિતી કહેવાય છે.

દા.ત. ભારત સરકાર વસ્તી ગણતરીના આંકડા પ્રકાશિત કરે અને અન્ય વ્યક્તિ તેનો ઉપયોગ કરે તો તે વ્યક્તિ ગૌણ માહિતીનો ઉપયોગ કરે છે. આ ઉપરાંત આપણે છાપું વાંચીએ, ટી.વી. જોઈએ, ઈન્ટરનેટનો ઉપયોગ કરીને માહિતી મેળવીએ છીએ ત્યારે તે માહિતી બીજા કોઈએ પહેલેથી એકઠી કરેલ હોય છે અને આપણે તેનો ઉપયોગ કરીએ છીએ આથી તે માહિતી પણ આપણા માટે ગૌણ માહિતી કહેવાયઃ

આમ, આપણે જાતે માહિતી મેળવીએ (કે કોઈના દ્વારા મેળવાઈ હોય) તો તે માહિતી આપણા માટે પ્રાથમિક માહિતી બને. જ્યારે બીજાએ પોતાને માટે મેળવેલ માહિતીનો આપણે ઉપયોગ કરીએ તો તે આપણા માટે ગૌણ માહિતી બને.

1.2 પ્રાથમિક અને ગૌણ માહિતી વચ્ચે તફાવત :

	પ્રાથમિક માહિતી		ગૌણ માહિતી
1.	પ્રાથમિક માહિતી હેતુ અનુરૂપ નવેસરથી (પ્રથમ વખત) મેળવવામાં આવે છે.	1.	ગૌણ માહિતી બીજી વ્યક્તિએ અન્ય અથવા એ જ હેતુ માટે એકઠી કરેલી હોય છે.

2. તેને સંગૃહીત કરવાનો અને ઉપયોગ કરવાનો હેતુ સમાન હોય છે.	2. ગૌણ માહિતીને એકઠી કરવાનો અને ઉપયોગ કરવાનો હેતુ જુદો હોઈ શકે છે.
3. માહિતી એકઠી કરનાર વ્યક્તિ તેની ખૂબી-ખામીથી પરિચિત હોય છે.	3. બીજા દ્વારા એકઠી કરેલી હોવાથી ખૂબી-ખામી (લક્ષણો/મર્યાદાઓ)ની જાણકારી (ઓછી હોય છે) હોતી નથી.
4. વિસ્તૃત સ્વરૂપે હોય છે.	4. સંક્ષિપ્તમાં - કુલ આંકડા, ટકાવારી સ્વરૂપે હોય છે.
5. સમય, શ્રમ, નાણાંનો વધારે વપરાશ થાય છે.	5. સમય, શ્રમ, નાણાંનો બચાવ થાય છે.
6. વધુ ચોક્કસ અને વિશ્વાસપાત્ર હોય છે.	6. પ્રમાણમાં ઓછી ચોકસાઈ અને વિશ્વાસપાત્રતા ધરાવે છે.
7. મૂળ માહિતી હોવાથી સામયિકો, પ્રકાશનોમાંથી મેળવી શકાતી નથી.	7. સામયિકો કે અન્ય પ્રકાશનોમાંથી મેળવી શકાય છે.
8. પ્રાથમિક માહિતીનો ફરીથી ઉપયોગ થાય તો તે ગોણ માહિતી બની જાય છે.	8. ગૌણ માહિતીનો ગમે તેટલી વખત ઉપયોગ કરતાં તે ગૌણ માહિતી જ રહે છે.

1.3 પ્રાથમિક માહિતી એકત્રીકરણની પદ્ધતિઓ :

પ્રાથમિક માહિતી મેળવવા માટે પ્રત્યક્ષ તપાસ, પરોક્ષ તપાસ અને પ્રશ્નાવલીની રીતનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

પ્રત્યક્ષ તપાસ (રૂબરૂ મુલાકાત દ્વાર સીધી તપાસ) : જે વ્યક્તિને માહિતી મેળવવાની છે તે વ્યક્તિ અથવા તેણે નીમેલ આગણકો જેની પાસેથી માહિતી મેળવવાની છે તેને પ્રત્યક્ષ (જાતે) જઈને પ્રશ્નો પૂછી જોઈતી માહિતી મેળવે તો તે. રીતને પ્રત્યક્ષ તપાસની રીત કહે છે.

દા.ત. કામદારોની સ્થિતિ અંગેની માહિતી મેળવવા માટે જો સંશોધક પોતે (અથવા તેણે નીમેલા માણસો / આગણકો) કામદારો. પાસે જાય, તેમને યોગ્ય પ્રશ્નો કરી માહિતી મેળવે તેણે પ્રત્યક્ષ તપાસ કહે છે.

ફાયદા :

(1) સંશોધક કે આગણક પોતે જઈને માહિતી મેળવતા હોવાથી સત્યતા અને વિશ્વસનીયતા વધુ હોય છે.

(2) સંશોધક અભ્યાસનો હેતુ સ્પષ્ટ કરી તપાસ દરમ્યાન ઉદ્ભવતા પ્રશ્નો કે મૂંઝવણોનો ઉકેલ લાવીને માહિતી આપનારના મનમાં વિશ્વાસ પેદા કરી શકે છે. આમ પૂર્ણ માહિતી મેળવી શકાય છે.

(3) ઘણી વખત તપાસ દરમ્યાન (અથવા પછી) અન્ય પૂરક પ્રશ્નો (અથવા વાર્તાલાપ) દ્વારા ઘણી બધી અન્ય જરૂરી માહિતી મેળવી શકાય છે. જેમાંથી અભ્યાસ વધુ વિસ્તૃત અને સારી રીતે કરી શકાય છે.

(4) કોઈક વખત કોઈક પ્રશ્નનો જવાબ આપવામાં માહિતી આપનાર સંકોચ અનુભવતો

હોય તો તે પ્રશ્નને હોશિયારીપૂર્વક વધુ સ્પષ્ટ કરીને નાજુક પરિસ્થિતિમાં પણ જરૂરી માહિતી મેળવી શકે છે.

(5) તપાસનું ક્ષેત્ર નાનું હોય અને પ્રશ્નો જાટેલ કે લાગણી દુભાય તેવા હોય ત્યારે આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ થાય છે.

મર્યાદા :

(1) આગણકે અથવા સંશોધકે જાતે તપાસ માટે જવાનું હોવાથી વધુ સમય, શ્રમ અને નાણાં વપરાય છે.

(2) આગણકોજો કુશળ ન હોય તો તપાસ દરમ્યાન તેમના પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાતની અસર માહિતી પર પડે છે અને માહિતીની વિશ્વસનીયતા ઘટે છે.

પરોક્ષ તપાસ :

આ રીતમાં જે વ્યક્તિએ માહિતી મેળવવાની છે તે (સંશોધક) જેની પાસેથી માહિતી મેળવવાની છે તેને ન પૂછતા તેના સગાસંબંધીઓ મિત્રો કે આડોશપાડોશ પાસેથી માહિતી મેળવે છે, આવી તપાસને પરોક્ષ તપાસ કહે છે. આમ આ રીતમાં ત્રાહિત વ્યક્તિ પાસેથી માહિતી મેળવવામાં આવે છે.

કોઈ જગ્યાએ ચોરી કે લૂંટનાં કિસ્સામાં પોલીસ પરોક્ષ તપાસ કરીને આરોપી સુધી પહોંચે છે. આ ઉપરાંત છોકરા કે છોકરીનાં લગ્ન નક્કી કરવાનાં હોય ત્યારે પણ છોકરો/છોકરી અથવા તેમના પરિવાર વિશે અન્ય સગા-સંબંધીને પૂછીને માહિતી મેળવાય છે. આમ આવા કિસ્સામાં પરોક્ષ તપાસ કરવામાં આવે છે.

આ પદ્ધતિમાં માહિતી આપનારની મમાણિકતા, નિષ્પક્ષતા અને માહિતી અંગેની જાણકારી અગત્યનો ભાગ ભજવે છે. સાથે સાથે સંશોધકે પણ ચોક્કસ માહિતી મેળવવા માટે યોગ્ય પ્રશ્નો પૂછી કુનેહપૂર્વક જરૂરી માહિતી એકઠી કરવી જોઈએ.

ફાયદા :

(1) વિશાળક્ષેત્રમાંથી માહિતી મેળવવી હોય અને માહિતી ગૂંચવણ ભરેલી હોય ત્યારે આ પદ્ધતિ ઉપયોગી છે.

(2) સમય, શ્રમ, નાણાંનો બચાવ થાય છે.

(3) પ્રશ્નો પૂછવામાં કાળજી રાખવામાં આવે તો માહિતીની ચોકસાઈ જાળવી શકાય છે.

(4) અન્ય પદ્ધતિથી મેળવેલ માહિતીને ચકાસી શકાય છે.

મર્યાદાઓ :

(1) આ રીતની સફળતાનો આધાર માહિતી આપનારની તટસ્થતા, તેની પાસેની સાચી માહિતી અને સંશોધકની પ્રશ્નો પૂછવાની કાબેલિયત પર રહેલો છે.

(2) જો માહિતી આપનાર પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાતી વલણ દાખવે અથવા તેની પાસે પૂરતી માહિતી ન હોય તો તેની અસર માહિતીની યુણવત્તા પર થાય છે. તપાસ સમિતિઓ, કોર્ટ વગેરે આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરે છે.

આગણકો દ્વારા તપાસ :

જયારે વિશાળ ક્ષેત્રમાંથી સચોટ માહિતી મેળવવાની હોય ત્યારે આગણકોની નિમણૂક કરી તેમના દ્વારા માહિતી મેળવવામાં આવે છે. આ પદ્ધતિમાં સંશોધક દ્વારા એક માહિતી પત્રક (પ્રશ્નાવલી) તૈયાર કરવામાં આવે છે અને આગણકો માહિતી આપનાર વ્યક્તિઓનો વ્યક્તિગત સંપર્ક કરીને માહિતી મેળવે છે. ત્યાર બાદ સંશોધક દ્વારા બધા આગણકો પાસેથી માહિતી પત્રકો એકઠા કરતાં સમગ્ર ક્ષેત્રની માહિતી ઝડપથી મળી જાય છે.

આ પદ્ધતિમાં આગણકોની પસંદગી અને તાલીમ ખૂબ અગત્યનો ભાગ ભજવે છે. કેવા પ્રકારની માહિતી મેળવવાની છે તેની સ્પષ્ટ સમજણ, સ્થાનિક ભાષા અને રીત-રિવાજોની જાણકારી, આગણકની પ્રમાણિકતા, મળતાવડો સ્વભાવ અને કુનેહ માહિતી મેળવવામાં ઉપયોગી બને છે.

ફાયદા :

(1) આગણકો જાતે જઈ માહિતી મેળવતા હોવાથી સાચી અને પૂરી માહિતી મળે છે.

(2) કોઈપ્રશ્ન વિશે અસ્પષ્ટતા હોય તો તેને આગણક સ્પષ્ટ કરી સાચી માહિતી મેળવી શકે છે.

(3) ભૂલ થવાનો સંભવ ઓછો રહે છે.

(4) અશિક્ષિત વ્યક્તિ પાસેથી માહિતી મેળવી શકાય છે.

(5) જો આગણકો કેળવાયેલા/અનુભવી હોય તો માહિતીની ચોકસાઈ જળવાય છે.

મર્યાદાઓ :

(1) આગણકોને વેતન આપવાનું હોવાથી ખર્ચાળ છે.

(2) જરૂરી સંખ્યામાં કુશળ આગણકો મળવા મુશ્કેલ બને છે.

(3) આગણકોએ માહિતી આપનારના સમયે અને સ્થળે જઈને માહિતી મેળવવી પડે છે. પરિણામે ઘણીવાર તપાસમાં મોડું થાય છે.

(4) આગણકની જિક્તગત કુશળતાની અસર તપાસ પર થાય છે.

(5) કોઈક વખત આગણકો પોતાના અનુમાનથી માહિતી ભરી દે છે.

ટપાલ દ્વારા તપાસ :

આ પદ્ધતિમાં જેમની પાસેથી માહિતી મેળવવાની હોય તેમને એક પ્રશ્નાવલી ટપાલ દ્વારા મોકલવામાં આવે છે. જેમાં દરેક પ્રશ્નની સામે તેના જવાબ લખવા માટેખાલી જગ્યા અથવા વિકલ્પો આપવામાં આવે છે. તેની સાથે ટૂંકમાં તપ સનો હેતુ, માહિતીની ગુપ્તતા, પ્રશ્નાવલી ભરીને મોકલવા માટેનો વિનંતી પત્ર, આ માહિતીથી સમાજને થતાં ફાયદા વગેરેની જાણકારી આપવામાં આવે છે. આ ઉપરાંત માહિતી આપનારને ભરેલી પ્રશ્નાવલી મોકલવાનો ખર્ચ ન થાય તેવી નામ, સરનામા અને ટિકિટચોટાડેલું કવર પણ સાથે મોકલવામાં આવે છે. ઘણી વખત પ્રશ્નાવલી ભરીને મોકલે તેના માટે પ્રશ્નાવલીનાં પૃથ્થકકરણનો અહેવાલ અથવા અન્ય ભેટ પણ આપવામાં આવે છે.

ફાયદા :

(1) સંશોધનનાં વિશાળ ક્ષેત્રમાંથી માહિતી મેળવી શકાય છે.

(2) જો માહિતી આપનારનો સહકાર મળે તો આ રીતથી વિશાળ ક્ષેત્રમાં ઝડપી અને સરળતાથી ઓછા ખર્ચે માહિતી મેળવી શકાય છે.

(3) જો પ્રશ્નાવલી સરળ અને ટૂંકી હોય ત્યારે આ રીતથી સરળતાથી માહિતી મેળવી શકાય છે.

(4) જ્યારે કોઈ માહિતી આપવાનું કાયદાકીય રીતે ફરજિયાત બનાવ્યું હોય ત્યારે પણ આ રીત વધુ ઉપયોગી નીવડે છે.

મર્યાદાઓ :

(1) અશિક્ષિત લોકો આ ભરી શકતા નથી.

(2) પ્રશ્નાવલી સદંતર ભરાય જ નહિ અથવા અધૂરી ભરાય તે પણ શક્ય છે.

(3) આ રીતમાં લેખિતમાં જવાબ આપવાના હોવાથી એક પ્રકારનો ડર રહે છે જ્યારે મૌખિક માહિતી પ્રમાણમાં સરળતાથી મળે છે.

(4) આપેલ માહિતી સાચી છે કે નહિ તેની ચકાસણી કરવી મુશ્કેલ છે.

આ રીતની સફળતાનો આધાર પ્રશ્નાવલી બનાવનારના કુનેહ અને જવાબ આપનારના યોગ્ય સહકાર પર રહેલો છે.

અન્ય પદ્ધતિઓ :

ઉપરની પદ્ધતિઓની સાથે હવે વેબસાઈટ પર એક પ્રશ્નાવલી બનાવવામાં આવે છે અને તેની લીંક મોબાઈલ, મેઈલ અથવા સોશિયલ મીડિયામાં મૂકવામાં આવે છે. તેની સાથે તપાસનો હેતુ, માહિતીની ગુપ્તતા અને તપાસનો અહેવાલ આપવામાં આવશે તેવી નોંધ મૂકવામાં આવે છે. માહિતી આપનાર આ લીંક પર. ક્લીક કરીને માહિતી ભરી શકે છે. ટેક્નોલોજીનાં ઉપયોગથી વિશાળક્ષેત્રમાંથી ઝડપથી અને સચોટ માહિતી મેળવી શકાય છે.

તમારા Gmail Accountનાં (ના હોય તો A/C બનાવીને પણ) Google form દ્વારા તમને ગમતા વિષય પર એક પ્રશ્નાવલી બનાવી, તેને અન્ય લોકોને મોકલી અને તે વિષય પર અન્ય લોકોનો મત જાણી શકો છો.

આ ઉપરાંત અવલોકન દ્વારા Focus Groups (કોઈ વિષયમાં જાણકાર લોકોનો સમૂહ) દ્વારા પણ માહિતી મેળવી શકાય છે.

1.4 પ્રશ્નાવલીની રીત :

ઉપરની દરેક રીતમાં જુદા-જુદા વ્યક્તિઓ પાસેથી એક સરખી અને એક જ સ્વરૂપે માહિતી મળી રહે તે માટે જે વિષયનો અભ્યાસ કરવા માંગતા હોઈએ તેને અનુરૂપ પ્રશ્નોની યાદી બનાવીને આગણકને આપવામાં આવે છે. આ પ્રશ્નોની યાદીને પ્રશ્નાવલી કહે છે. સંશોધનની સફળતાનો સમગ્ર આધાર આ પ્રશ્નાવલી પર હોય છે. આથી પ્રશ્નાવલી તૈયાર કરવા માટે જે-તે વિષયના અનુભવીની મદદ લેવામાં આવે છે. પ્રશ્નાવલી બનાવવા માટેના કોઈ ચોક્કસ નિયમો નથી પણ નીચેની બાબતોનું ધ્યાન રાખવાથી એક સારી પ્રશ્નાવલી બનાવી શકાય છે.

આદર્શ પ્રશ્નાવલીના ગુણધર્મો :

(1) પ્રશ્નો બને તેટલા ઓછા, ટૂંકા અને સ્પષ્ટ હોવા જોઈએ.

(2) શક્ય હોય ત્યાં સુધી હા અથવા ના (વિકલ્પો વાળા) પ્રશ્નો હોવા જોઈએ, વર્ણનાત્મક

(Open ended) નહિ.

(3) તપાસંના હેતુને અનુરૂપ પ્રશ્નો હોવા જોઈએ, બિનજરૂરી નહિ.

(4) પ્રશ્નો તાર્કિક ક્રમમાં ગોઠવેલા હોવા જોઈએ. (દા.ત. નોકરી-ધંધો કરો છો આ પ્રશ્ન પછી આવક કેટલી છે ? તેવો પ્રશ્ન પૂછવો જોઈએ.)

(5) બને ત્યાં સુધી અંગત જીવનનાં, ગણતરી કરવી પડે કે લાગણી દુભાય તેવા પ્રશ્નો ન પૂછવા જોઈએ.

(6) બહુ યાદ કરવું પડે તેવા ભૂતકાળના પ્રશ્નો ન પૂછવા જોઈએ.

(7) હકીકતના આધારિત પ્રશ્નો પૂછવા જોઈએ, માન્યતાઓના આધારિત નહિ.

(8) જ્યારે વધુ પ્રશ્નો હોય ત્યારે પ્રશ્નાવલીને બે કે તેથી વધુ ભાગમાં વહેંચવી જોઈએ.

(9) પ્રશ્નાવલી તૈયાર થયા બાદ થોડી પસંદ કરેલી વ્યક્તિઓ પાસેથી તે ભરાવી લેવી જોઈએ.

આથી પ્રશ્નાવલીમાં ખામી અથવા સુંધારાનો અંદાજ આવે છે. આને પાયલોટ સર્વે કહે છે અને ત્યારબાદ સુધારાવાળી (ફાઈનલ) પ્રશ્નાવલી તપાસ હેઠળનાં સમૂહને આપવી જોઈએ.

1.5 ગૌણ માહિતીનાં પ્રાપ્તિસ્થાનો :

બીજા દ્વારા મેળવેલ માહિતીનો જ્યારે કોઈ અન્ય વ્યક્તિ અથવા સંસ્થા ઉપયોગ કરે તો તેને ગૌણ માહિતી કહે છે. આ માહિતી મેળવવાનાં મુખ્ય બે સ્રોત છે.

(i) પ્રકાશિત ઉદ્‌ગમસ્થાન

(ii) બિન પ્રકાશિત ઉદ્‌ભવસ્થાનો

પ્રકાશિત ઉદ્‌ગમસ્થાનો (Published Sources)

(1) સરકારી પ્રકાશનો : કેન્દ્ર અને રાજય સરકારો દ્વારા નિયમિત સમયે વસ્તીની માહિતી, ફુગાવાની માહિતી, આરોગ્યને લગતા આંકડા, વિવિધ ઉદ્યોગોની માહિતી, જન્મમરણના આંકડા વાહનવ્યવહારના આંકડા, આયાત-નિકાસના આંકડા, આંકડાકીય બ્યુરો દ્વારા પ્રકાશિત થતાં આંકડાઓ જેવા વિવિધ પ્રકારની માહિતી નિયમિત રીતે પ્રકાશિત થતી હોય છે. જેમાંથી ગૌણ માહિતી મળી શકે છે.

(2) અર્ધ-સરકારી પ્રકાશનો : મ્યુનિસિપલ કોર્પોરેશન, નગર પાલિકા, ગ્રામ પંચાયતો દ્વારા નિયમિતપણે જાહેર વિતરણને લગતા આંકડાઓ પ્રકાશિત થાય છે.

(3) આંતરરાષ્ટ્રીય પ્રકાશન : U.N.O. (United Nations Organization), IMF (International Monetary Fund), વર્લ્ડ બેંક, W.H.O. (World Health Organization), UNESCO (United Nations Educational Scientific and Cultural Organization). વગેરે દ્વારા નિયમિત રીતે વિવિધ વિષયો સંબંધી આંકડાઓ પ્રકાશિત થાય છે.

(4) વેપારી અને વ્યવસાયી પ્રકાશનો : વિવિધ ઉદ્યોગોના મંડળો, ચેમ્બર ઓફ કૉમર્સ, બેંકો, સ્ટોક એક્ષચેંજ તથા અન્ય વ્યાપારી સંગઠનો પોતાના વ્યાપારને લગતા આંકડાઓ/

માહેતી નિયમિત રીતે પ્રકાશિત કરે છે.

(5) **ખાનગી સંસ્થાનાં પ્રકાશનો :** ઘણી ખાનગી સંસ્થાઓ પોતાના સંશોધનને લગતા વિવિધ લેખો, માહિતી નિયમિતપણે પ્રકાશિત કરે છે જેમકે સંશોધન-અહેવાલ, વિવિધ શૈક્ષણિક, આરોગ્ય તથા અન્ય સંસ્થાએ પ્રકાશિત કરેલા પોતાના પ્રકાશનો.

(6) **સામયિકો, સમાચાર પત્રો અને અન્ય સ્રોત :** જુદા-જુદા સમાચાર પત્રો અને સામયિકો કે જે નિયમિત પ્રકાશિત થાય છે તેમાંથી પણ ગૌણ માહિતી મળે છે.

દા.ત. બિઝનેસ ઇન્ડિયા, ફાઇનાન્સિયલ એક્ષપ્રેસ, આર.બી.આઈ. બુલેટિન, વિવિધ કમિશનોના અહેવાલો વગેરેમાંથી ઉપયોગી માહિતી મળે છે.

બિન પ્રકાશિત ઉદ્ગમ સ્થાનો : ઘણી માહિતી સંસ્થા પોતાના સંદર્ભ માટે પોતાની પાસે રાખે છે. આવી માહિતી, સંશોધન કર્તા વિનંતી કરીને મેળવી શકે છે અને તેનો ઉપયોગ કરી શકે છે. દા.ત. IIM કે IIT જેવી સંસ્થાનાં ખાનગી પ્રકાશનો.

ગૌણ માહિતીનો ઉપયોગ કરતી, વખતે રાખવાની તકેદારી :

ગૌણ માહિતીનો ઉપયોગ કરવાથી સમય, શ્રમ અને નાણાંનો બચાવ થાય છે પણ સાથે-સાથે તે માહિતી કયા હેતુ માટે, કયા સમયે અને કેટલા વિસ્તારમાંથી લેવામાં આવી છે તેનો ખ્યાલ રાખીને ગૌણ માહિતીનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ. બાઉલીએ કહ્યું છે કે, "પ્રકાશિત આંકડાઓને તેમની દર્શનીય કિંમત (Face Value) પ્રમાણે કદીય ન સ્વીકારવા જોઈએ."

(1) પ્રાથમિક સંશોધનનો હેતુ અને ગૌણ માહિતીનો હેતુ સુસંગત હોવા જોઈએ.

(2) માહિતી પર્યાપ્ત હોવી જોઈએ એટલે કે પ્રાથમિક માહિતીના હેતુ પ્રમાણેનો પ્રદેશ અને ચલો તેમાં હોવા જોઈએ.

(3) માહિતી મેળવનારની વિશ્વાસપાત્રતા, કુનેહ અને કાળજી વગેરે માહિતીની ચોકસાઈ પર અસર કરે છે. આથી તેનું પણ ધ્યાન રાખવું જોઈએ.

(4) માહિતી મેળવવામાં કયા પ્રશ્નો, કઈ પદ્ધતિઓ અને પૃથકકરણની કઈ રીતનો ઉપયોગ કરવામાં આવ્યો છે તે જાણી લેવું જરૂરી છે.

(5) માહિતી કેટલા સમય પહેલાં એકઠી કરવામાં આવી છે તે જાણવું જરૂરી છે. કારણ કે, ખૂબ જૂની માહિતીના ભલે હેતુ સમાન હોય તોપણ તે માહિતી સાચો ખ્યાલ આપતી નથી.

1.6 વર્ગીકરણ :

આપણે માહિતી એકઠી કરવાની જુદી-જુદી રીતો જોઈ. તેના દ્વારા જે માહિતી મેળવીએ છીએ તે વિસ્તૃત સ્વરૂપે હોય છે. આથી માહિતી પરથી તારણો મેળવવા માટે તેના ચલ લક્ષણના આધારે તેનું વર્ગીકરણ કરવામાં આવે છે. જો માહિતીને સંખ્યામાં દર્શાવી શકાતી હોય તો તેને સંખ્યાત્મક માહિતી કહે છે જયારે જો માહિતીને તેના ગુણધર્મ પ્રમાણે દર્શાવી શકાતી હોય તેને ગુણાત્મક માહિતી કહે છે. કોઈ વ્યક્તિ શિક્ષિત છે કે અશિક્ષિત એ ગુણાત્મક માહિતી છે જયારે તે વ્યક્તિ કેટલું કમાય છે તેને સંખ્યામાં દર્શાવી શકાય છે તેથી તે સંખ્યાત્મક માહિતી છે.

ગુણાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ તેના એક અથવા વધુ ગુણધર્મોને આધારે થાય છે. જયારે સંખ્યાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ કરવા માટે તેને તેના ચલને આધારે જુદા-જુદા વર્ગોમાં વહેંચવામાં આવે છે તેને આવૃત્તિ વિતરણ કહે છે. ચલના બે પ્રકાર છે.

અસતત ચલ : જે ચલ અમુક ચોક્કસ કિંમતો ધારણ કરતો હોંય (ઘણા સંજોગોમાં પૂર્ણાંક સંખ્યા જ) તેને અસતત ચલ કહે છે. દા.ત. ક્રિકેટમાં રનની સંખ્યા, વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા, મોબાઈલમાં એપની સંખ્યા વગેરે. તથા અસતત ચલ દ્વારા બનતી શ્રેણીને અસતત શ્રેણી કહે છે. 40 મોબાઈલ તપાસતા તેમા ડાઉનલોડ કરેલ એપની સંખ્યા નીચે મુજબ જોવા મળી. આને અસતત ચલનું આવૃત્તિ વિતરણ કહે છે.

એપની સંખ્યા	8	9	10	11	12
મોબાઈલની સંખ્યા	4	9	12	8	7

સતત ચલ : જો કોઈ ચલ કોઈ એક અંતરાલમાંની બધી જ કિંમતો ધારણ કરતાં હોય તો તે ચલને સતત ચલ કહે છે. દા.ત. કોઈ સ્થળનું તાપમાન, વજન વગેરે સતત ચલના ઉદાહરણ છે અને સતત ચલથી બનતી શ્રેણીને સતત શ્રેણી કહે છે.

દા.ત. કોઈ સ્થળનું તાપમાન, વજન વગેરે સતત ચલના ઉદાહરણ છે અને સતત ચલથી બનતી શ્રેણીને સતત શ્રેણી કહે છે. સતત શ્રેણીને બે ભાગમાં વહેંચી શકાય છે.

નિવારક શ્રેણી અને અનિવારક શ્રેણી

નિવારક શ્રેણી : જો કોઈ શ્રેણીમાં કોઈ પણ વર્ગની ઉપલી સીમા અને તેના પછીના વર્ગની નીચલી સીમા બંને એક જ હોય તો તેવી કોણીને નિવારક શ્રેણી કહે છે.

દા.ત.

ગુણ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
વિધ્યાર્થીની સંખ્યા	5	8	14	7	6

અહીં પ્રથમ વર્ગ 0-10 છે. જેમાં 10 એ ઉપરની સીમા છે જે તેના પછીના વર્ગ 10-20ની નીચેની સીમા બને છે અને આવું દરેક વર્ગ માટે બને છે આથી આ શ્રેણીને નિવારક શ્રેણી કહે છે.

અનિવારક શ્રેણી : જ્યારે કોઈ પણ વર્ગની ઉપરની સીમા અન તેનાં પછીની વર્ગની નીચેના સીમા જુદી હોય તો તે શ્રેણીને અનિવારક શ્રેણી કહે છે.

દા.ત.

ગુણ	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49
વિદ્યાર્થીની સંખ્યા	5	8	14	7	6

અહીં પ્રથમ વર્ગ 0-9 છે અને બીજો વર્ગ 10-19 છે. આમ પ્રથમ વર્ગની ઉપરની સીમા 9 એ ત્યાર પછીના વર્ગની નીચેની સીમા 10 બનતી નથી. આથી આ શ્રેણીને અનિવારક શ્રેણી કહે છે.

- **સ્વાધ્યાય**

1. સવિસ્તાર પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

1. પ્રાથમિક માહિતીનો અર્થ તેના ફાયદા અને નુકશાન સમજાવો.
2. પ્રાથમિક માહિતી મેળવવા માટેની પદ્ધતિ સમજાવો.
3. પ્રાથમિક માહિતી નું મહત્ત્વ અને ઉપયોગીતા સમજાવો.
4. ગૌણ માહિતીનો અર્થ તેના ફાયદા અને ગેરફાયદા સમજાવો.
5. ગૌણ માહિતી મેળવવા માટે ના સ્ત્રોત સમજાવો.
6. ગૌણ માહિતીનો ઉપયોગ કરતી વખતે કઈ તકેદારીઓ રાખવી પડે છે ?
7. ગૌણ માહિતીના ઉપયોગ સમજાવો.
8. ગૌણ માહિતીએ પ્રાથમિક માહિતીથી કઈ રીતે અલગ પડે છે ? સમજાવો.

2. ટૂંક નોંધ લખો

1. પ્રત્યક્ષ તપાસ
2. પરોક્ષ તપાસ
3. આગણકો દ્વારા તપાસ
4. પ્રશ્નાવલીની રીત
5. ગૌણ માહિતી મેળવવા માટે ના પ્રકાશીત ઉદ્‌ગમ સ્થાન

3. ટૂંકમાં જવાબ આપો.

1. પ્રાથમિક માહિતી એટલે શું ?
2. ગૌણ માહિતી એટલે શું ?
3. પ્રાથમિક માહિતી મેળવવા માટેના સ્ત્રોતો ક્યા છે ?
4. ગૌણ માહિતી મેળવવા માટેના સ્ત્રોતો નામ આપો.
5. ગૌણ માહિતી કેટલા પ્રકારની હોઈ શકે ? તેના નામ આપો.

MCQ

1. નીચેનામાંથી કઈ પ્રાથમિક માહિતી નથી ?

   A. પ્રત્યક્ષ તપાસ દ્વારા મળતી માહિતી B. પરોક્ષ તપાસ દ્વારા મળતી માહિતી

   C. સરકારી પ્રકાશન દ્વારા મળતી માહિતી D. ખબરપત્રી દ્વારા મળતી માહિતી

2. નીચેનામાંથી કઈ ગૌણ માહિતી નથી.

   A. ખાનગી સંસ્થાના પ્રકાશનો દ્વારા મળતી માહિતી

   B. સમાચાર પત્રો દ્વારા મળતી માહિતી

   C. બિન પ્રચલિત ઉદ્‌ગમ સ્થાનો દ્વારા મળતી માહિતી

   D. ટપાલ દ્વારા મળતી માહિતી

3. પ્રાથમિક માહિતી મેળવવા નીચેનામાંથી કઈ રીતે અપનાવાય.

   A. નિરીક્ષણ   B. ઈ-મેઈલ

   C. રૂબરૂ મુલાકાત   D. ઉપરોક્ત બધા જ

4. ગૌણ માહિતીના પ્રાપ્તિ સ્થાનોમાં ક્યા સ્ત્રોતનો સમાવેશ થાય છે ?

   A. આંતર રાષ્ટ્રિય   B. સંશોધન અહેવાલ

   C. અર્ધ સરકારી સંસ્થાઓ   D. ઉપરોક્ત બધા જ

5. ગૌણ માહિતી મેળવવા માટે ક્યા પ્રકારની માહિતી મેળવવામાં આવે છે ?

   A. કાચી માહિતી   B. બિન પ્રકાશીત માહિતી

   C. પ્રકાશીત માહિતી   D. (B) અને (C) બંન્ને

જવાબ : (1) C (2) D (3) D (4) D (5) D

-------------×-------------

એકમ
2

મધ્યવર્તી સ્થિતિ અને પ્રસારમાન માપ

-: રૂપરેખા :-

2.1 પ્રસ્તાવના :

વિદ્યાર્થી મિત્રો, તમે માહિતીના એકત્રીકરણ અને માહિતીના નિરૂપણથી માહિતગાર છો, પરંતુ યાદ રાખો કે માહિતીને ગમે તેટલી સારી રીતે કોષ્ટકમાં દર્શાવવામાં આવે અથવા તેને આકૃતિ સ્વરૂપે રજૂ કરવામાં આવે પણ પ્રસ્તુત માહિતીના ઘણા બધા ઉપયોગ શક્ય બને છે. આ કારણોસર મનુષ્યને હમેશાં માહિતીના વિશ્લેષણની નવીન પદ્ધતિઓની જરૂરિયાત ઊભી થાય છે. વધારે આંકડાકીય વિશ્લેષણ માટે આપણને વધુ સંક્ષિપ્ત અને સંખ્યાત્મક પ્રતિનિધિત્વની જરૂર પડે છે. આ પ્રકરણમાં આપણે સંખ્યાત્મક માહિતીને સંક્ષિપ્તમાં સમજવાની એક ખાસ પદ્ધતિ મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપનો અભ્યાસ કરીશું.

તમે રોજબરોજની વાતચીતમાં વારંવાર ઉપયોગમાં લેવાતા શબ્દ ''સરેરાશ'' થી પરિચિત છો જેમ કે સરેરાશ આવક, સરેરાશ કામ, સરેરાશ ઝડપ, સરેરાશ ગુણ વગેરે... સામાન્ય શબ્દોમાં કહીએ તો સરેરાશ એ એક મૂલ્ય છે જે આપેલ માહિતી માટે સૌથી વધારે પ્રતિનિધિત્વ ધરાવે છે. આ મૂલ્ય સૌથી નાનું નથી કે સૌથી મોટું પણ નથી આ એક એવી સંખ્યા છે જે સમગ્ર માહિતીની મધ્યમાં ક્યાંય પણ હોઈ શકે છે. આપણે એમ પણ કહી

શકીએ કે ''જ્યાં કેન્દ્રીય કિંમતની આસપાસ ચલની કિંમતો સંકલિત થાય છે તે કિંમતને મધ્યવર્તી સ્થિતિનું માપ અથવા સરેરાશ કહેવાય છે.'' આમ સરેરાશને સમગ્ર માહિતી સમૂહના પ્રતિનિધિ તરીકે લઈ શકાય છે. એકઠી કરેલ માહિતી માટે મધ્યવર્તી સ્થિતિના જુદાં જુદાં માપ મેળવી શકાય છે. માહિતીના પ્રકાર, સરેરાશનો હેતુ અને તેના ઉપયોગો પર સરેરાશની પસંદગી આધારિત હોય છે.

- **સરેરાશના હેતુઓ :**

  સરેરાશના મુખ્યરૂપથી ફક્ત બે જ હેતુ છે.

  1. એક મૂલ્ય મેળવવા માટેનો હેતુ... જે સમગ્ર જૂથની લાક્ષણિકતાઓનું વર્ણન કરે.
  2. તુલના કરવાની સુવિધા માટે

- **આદર્શ સરેરાશના લક્ષણો :**

  1. સમજવા માટે તેમજ ગણતરીમાં સરળ હોવી જોઈએ.
  2. તે સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત અને ચોક્કસ હોવી જોઈએ.
  3. માહિતીના બધા જ અવલોકનો પર આધારિત હોવી જોઈએ.
  4. આત્યંતિક અવલોકન (અતિ મોટા કે અતિ નાના અવલોકન) ની અસર સરેરાશ પર ન થવી જોઈએ.
  5. તે સ્થિર માપ હોવું જોઈએ.

- **સરેરાશના પ્રકારો :**

  1. સમાંતર મધ્યક : સાદો અને ભારિત
  2. મધ્યસ્થ
  3. બહુલક

     આ ઉપરાંત સરેરાશના બીજા ઘણા બધા પ્રકાર છે જેનો ઉપયોગ ખુબ જ મર્યાદિત પ્રમાણમાં થતો હોવાથી તે પ્રચલિત નથી, અહીં તેની ચર્ચા કરવામાં આવી નથી.

2.2 સમાંતર મધ્યક

આપણે અગાઉ જોઈ ગયા કે સમગ્ર માહિતીને મૂલ્ય દ્વારા રજૂ કરવા માટેનું સૌથી લોકપ્રિય અને વ્યાપકપણે ઉપયોગમાં લેવાતું માપ સરેરાશ કહેવાય છે. આંકડાશાસ્ત્રીઓ આ મૂલ્ય ને ''સમાંતર મધ્યક'' કહે છે તેનું મૂલ્ય બધા અવલોકનોને એકસાથે ઉમેરીને અને આ કુલને અવલોકનોની સંખ્યા વડે ભાગીને મેળવવામાં આવે છે. સમાંતર મધ્યક સાદો અથવા ભારીત હોઈ શકે છે.

2.2.1 સાદા સમાંતર મધ્યકની ગણતરી - વ્યક્તિગત અવલોકન

વ્યક્તિગત અવલોકનોના કિસ્સામાં ગણતરીની પ્રક્રિયા સરળ છે અહીં આવર્તન આપવામાં આવતું નથી. અવલોકનોના વિવિધ મૂલ્યોને એક સાથે ઉમેરી કુલ સરવાળાને વસ્તુઓની સંખ્યા દ્વારા વિભાજીત કરવામાં આવે છે.

$$\overline{X} = \frac{x1 + x2 + x3 + ... + xn}{N} \text{ અથવા } \overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

અહીં $\overline{X}$ સમાંતર મધ્યક.

ΣX બધાં અવલોકનનો સરવાળો

N અવલોકનની સંખ્યા

ઉદાહરણ : 1 નીચેના કોષ્ટકમાં એક કચેરીમાં કાર્ય કરતાં 10 કર્મચારીઓની માસિક આવકની માહિતી આપેલ છે જેના પરથી આવકોના સમાંતર મધ્યકની ગણતરી કરો.

આવક (રૂા.માં)	1780	1760	1690	1750	1840	1920	1100	1810	1050	1950

જવાબ :

સમાંતર મધ્યકની ગણતરી

કર્મચારી	**માસિક આવક**
1	1780
2	1760
3	1690
4	1750
5	1840
6	1920
7	1100
8	1810
9	1950
N = 10	ΣX **=16650**

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

ΣX =16650, N = 10

$\overline{X}$ =16650/10 = 1665.

જેથી સરેરાશ આવક રૂપિયા 1665 છે.

- **ટૂંકી રીતથી ગણતરી**

જ્યારે અવલોકનનોની કિંમત ખૂબ જ મોટી હોય ત્યારે ગણતરીની સરળતા ખાતર મધ્યકની ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ થાય છે. અહીં A એ ધારેલો મધ્યક છે. જ્યારે d એ દરેક અવલોકનમાંથી ધારેલ મધ્યકનો તફાવત છે.

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma d}{N}$$

અહીં $\overline{X}$ સમાંતર મધ્યક

A ધારેલો મધ્યક

Σd દરેક અવલોકનમાંથી ધારેલ મધ્યકનો તફાવત

N અવલોકનની સંખ્યા

પગલાં ......

1. સૌ પ્રથમ ધારેલા મધ્યકની પસંદગી કરો.
2. ધારેલા મધ્યક અને અવલોકન વચ્ચેનો તફાવત મેળવો, તેને d વડે દર્શાવવામાં આવે છે.
3. આ તફાવતોનો સરવાળો મેળવો.
4. ત્યારબાદ $\overline{X} = A + \frac{\Sigma d}{N}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરો.

વિદ્યાર્થી મિત્રો, ઉપરના ઉદાહરણ 1 માં ધારેલા મધ્યક તરીકે 1800 ને લઈને આપણે ગણતરી આગળ વધારીશું.

જવાબ :

કર્મચારી	**આવક**	**(X - 1800)**
1	1780	− 20
2	1760	− 40
3	1690	− 110
4	1750	− 50
5	1840	+ 40

કર્મચારી	આવક	(X - 1800)
6	1920	+ 120
7	1100	− 700
8	1810	+ 10
9	1050	− 750
10	1950	+ 150
N = 10		$\Sigma d = -1350$

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma d}{N}$$

A = 1800 Σd = − 1350, N = 10

$$\overline{X} = 1800 - \frac{1350}{10}$$

= 1800 − 135 = **1665**

જેથી સરેરાશ આવક રૂપિયા 1665 છે.

2.2.2 સાદા સમાંતર મધ્યકની ગણતરી - વર્ગીકૃત માહિતી

જ્યારે માહિતીમાં અવલોકનની સંખ્યા વધારે હોય ત્યારે માહિતીને વર્ગીકૃત કરવામાં આવે છે અને આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરવામાં આવે છે. ત્યારબાદ મધ્યક શોધવામાં આવે છે, જેના માટે નીચે જણાવેલા સૂત્રનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

$$\overline{X} = \frac{\Sigma f\,X}{N}$$

અહીં $\overline{X}$ = સમાંતર મધ્યક.

f = આવૃત્તિ

X = અવલોકનની વિગત

$\Sigma f\,X$ = આવૃત્તિ અને અવલોકનની વિગતના ગુણાકારનો સરવાળો

N = અવલોકનની સંખ્યા

વધારે સમજણ મેળવવા માટે નીચે મુજબ એક ઉદાહરણ સમજીએ.

ઉદાહરણ 2 : એક વર્ગના 60 વિદ્યાર્થીઓના ગુણ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે જેના પરથી સમાંતર મધ્યકની ગણતરી કરો.

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
20	8
30	12
40	20
50	10
60	6
70	4

વિદ્યાર્થીઓના ગુણ X અને વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા f થી દર્શાવવું.

જવાબ :

ગુણ (X)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f)	fX
20	8	160
30	12	360
40	20	800
50	10	500
60	6	360
70	4	280
	N = 60	$\Sigma f\ X = 2460$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma f\ X}{N}$$

$$\overline{X} = \frac{2460}{60} = 41$$

ટૂંકી રીતથી ગણતરી

ટૂંકી રીતથી ગણતરી કરવા માટે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરવો.

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma f\ d}{N}$$

f = આવૃત્તિ

A = ધારેલો મધ્યક

X = અવલોકનની વિગત

d = (X – A)

$\Sigma f\, d$ = આવૃત્તિ અને d ગુણાકારનો સરવાળો

પગલાં . . .

1. સૌ પ્રથમ ધારેલા મધ્યકની પસંદગી કરો.
2. ધારેલા મધ્યક અને અવલોકન વચ્ચેનો તફાવત મેળવો, તેને d વડે દર્શાવવામાં આવે છે.
3. આ તફાવતોનો સંબંધિત આવર્તન સાથે ગુણાકાર કરો અને તેમનો સરવાળો મેળવો જેને $\Sigma f\, d$ થી દર્શાવવું.
4. ત્રીજા પગલામાં શોધેલ કુલ સરવાળાને કૂલ અવલોકનની સંખ્યાથી ભાગાકાર કરી સમાંતર મધ્યક મેળવો.

ઉદાહરણ 3 : ઉદાહરણ ૨ માં ધારેલા મધ્યક તરીકે 40 ને લઈને ટૂંકી રીતથી સમાંતર મધ્યક મેળવીશું.

ગુણ (X)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f)	d = (X - 40)	fd
20	8	-20	-160
30	12	-10	-120
40	20	0	0
50	10	+10	100
60	6	+20	120
70	4	+30	120
	N = 60		$\Sigma f\, d$ = 60

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma f\, d}{N}$$

$$\overline{X} = 40 + \frac{60}{60}$$

$$= 40 + 1 = 41$$

2.2.3 સાદા સમાંતર મધ્યકની ગણતરી - સતત આવૃત્તિ વિતરણ

સતત આવૃત્તિ વિતરણમાં જ્યારે આપણે સીધી રીતે મધ્યક શોધવા માંગીએ ત્યારે નીચે દર્શાવેલ સૂત્રનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

$$\overline{X} = \frac{\Sigma f\,m}{N}$$

અહિંયાં, ગણતરી માટે m ની જરૂર પડે છે. m = મધ્યકિંમત

f = દરેક વર્ગની આવૃત્તિ

N = આવૃત્તિઓનો સરવાળો

પગલાં...

1. દરેક વર્ગની મધ્યકિંમત મેળવીને તેને m વડે દર્શાવો.
2. આ મધ્યકિંમતને સંબંધિત આવૃત્તિ સાથે ગુણીને કુલ સરવાળો મેળવો જેને આપણે $\Sigma f\,m$ થી દર્શાવીશું.
3. બીજા પગલામાં મેળવેલ કુલ સરવાળાને આપણે કુલ અવલોકનોની સંખ્યા એટલે કે N વડે ભાગીને સમાંતર મધ્યક મેળવીશું.

ઉપરોક્ત સમજૂતીને આપને એક ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ 4 : નીચેની માહિતી પરથી સીધી પદ્ધતિથી સમાંતર મધ્યક મેળવો.

ગુણ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	5	10	25	30	20	10

જવાબ : સમાંતર મધ્યકની ગણતરી

ગુણ	મધ્યકિંમત	કુલ વિદ્યાર્થીઓ	fm
0-10	5	5	25
10-20	15	10	150
20-30	25	25	625
30-40	35	30	1050
40-50	45	20	900
50-60	55	10	550
		N = 100	$\Sigma f\,m = 3300$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma f\, m}{N}$$

$$\overline{X} = \frac{3300}{100} = 33$$

ઘણીવાર લાંબી અને જટિલ ગણતરીને સરળ બનાવવા માટે આપણે તફાવતને વર્ગ અંતરાલ વડે ભાગી શકીએ છીએ, જેમ કે (m – A) / i ઉપરોક્ત ઉદાહરણમાં આપને ગણતરી કરી જોઈએ.

ગુણ	મધ્યકિંમત (m)	(f) વિદ્યાર્થીઓ	d = (m - 35)	(m - 35) / 10	fd
0-10	5	5	-30	-3	-15
10-20	15	10	-20	-2	-20
20-30	25	25	-10	-1	-25
30-40	35	30	0	0	0
40-50	45	20	+10	+1	+20
50-60	55	10	+20	+2	+20
		N = 100			$\Sigma f\, d = -20$

અહીંયા $\overline{X} = A + \frac{\Sigma f\, d}{N} \times i$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું. અહીંયા i = વર્ગ અંતરાલ જે આપણા ઉદાહરણમાં 10 છે તેમજ A = ધારેલો મધ્યક જે 35 લઈશું.

$$\overline{X} = 35 + \frac{-20}{100} \times 10$$

$$\overline{X} = 35 - \frac{20}{100} \times 10$$

$$= 35 - 2 = 33$$

વધારે એક ઉદાહરણથી આપણે સમાંતર મધ્યકની ગણતરી સમજીએ.

ઉદાહરણ 5 : નીચેની માહિતી પરથી સમાંતર મધ્યકની ગણતરી કરો.

ગુણ	0-10	10-30	30-60	60-100
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	5	12	25	8

જવાબ : વિદ્યાર્થીમિત્રો અહીં ધ્યાનથી અભ્યાસ કરશો તો તમને જણાશે કે વર્ગ અંતરાલ અસમાન છે છતા આપણે ગણતરીને સરળ બનાવવા માટે 5 ને સામાન્ય પરિબળ તરીકે પસંદ કરીશું.

ગુણ	મધ્યકિંમત (m)	f	(m-45) / 5 = d	*fd*
0-10	5	5	− 8	− 40
10-30	20	12	− 5	− 60
30-60	45	25	0	0
60-100	80	8	+ 7	+ 56
		N = 50		$\Sigma f\ d = -44$

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma f\ d}{N} \times C$$

$$\overline{X} = 45 + \frac{-44}{50} \times 5$$

$$45 - 4.4 = 40.6$$

2.2.4 સમાંતર મધ્યકમાં ખોટી વિગતો સુધારવી.

મધ્યકની ગણતરીમાં ઘણી વખત એવું બને છે કે માહિતી કૉપી કરવામાં, લખવામાં કે જોવામાં ક્ષતિ રહી જાય તો મધ્યક ખોટો મળે છે. અહીયાં સમસ્યા એ છે કે સાચો મધ્યક કેવી રીતે મેળવવો, આ પ્રક્રિયા એકદમ સરળ છે. આપણે ΣX માંથી ખોટી વિગતો બાદ કરવી પડે છે અને સાચી વિગતો ઉમેરવી પડે છે. ત્યારબાદ કુલ અવલોકનો દ્વારા ΣX ને ભાગી નાખવામાં આવે છે. જે પરિણામ મળે છે તે મધ્યકની સાચી કિંમત હોય છે. નીચેના ઉદાહરણો દ્વારા આપણે ઊંડાણ પૂર્વક સમજીએ.

ઉદાહરણ 6 : એક શાળાના 100 વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો મધ્યક 40 છે. ગણતરી બાદ જાણ થઈ કે એક અવલોકનને 53 ની જગ્યા એ 83 વાંચી લેવામાં આવેલ છે. તો સાચા મધ્યકની ગણતરી કરો.

જવાબ :

આપણન $\overline{X}$ = 40 અને N = 100 આપવામાં આવેલ છે.

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

$\Sigma X = N\overline{X} = 100 \times 40 = 4000$

પરંતુ યાદ રાખો કે ઉપરોક્ત ΣX સાચી નથી.

સાચી ΣX = ખોટી ΣX − ખોટુ અવલોકન + સાચું અવલોકન

$= 4000 - 83 + 53 = 3970$

સાચો મધ્યક = $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{3970}{100} = 39.7$

ઉદાહરણ 7 : 100 અવલોકનનો મધ્યક 40 છે. પરંતુ ગણતરીના સમયે બે અવલોકનો 3 અને 72 ની જગ્યાએ 27 લઈ લેવામાં આવ્યા છે, તો સાચો મધ્યક શોધો.

જવાબ :

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

$\Sigma X = N\overline{X} = 100 \times 40 = 4000$

પરંતુ યાદ રાખો કે ઉપરોક્ત ΣX એ સાચી નથી.

સાચી ΣX = ખોટી ΣX − ખોટુ અવલોકન + સાચું અવલોકન

$= 4000 - 30 - 27 + 3 + 72 = 4018$

સાચો મધ્યક $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{4018}{100} = 40.18$

2.2.5 મિશ્ર મધ્યક (Combined Mean)

જ્યારે આપણી પાસે માહિતીના એક જ ગુણ ધર્મના બે કે તેથી વધુ સમૂહ હોય અને તેમનો સંયુક્ત મધ્યક શોધીએ તો તેને મિશ્ર મધ્યક કહે છે તેને $\overline{X_C}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

મિશ્ર મધ્યક શોધવા માટે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

$$\overline{X_{12}} = \frac{N1\overline{X1} + N2\overline{X2}}{N1 + N2}$$

અહીં $\overline{X_{12}}$ = બે સમૂહનો મિશ્ર મધ્યક

$\overline{X_1}$ = પ્રથમ સમૂહનો સમાંતર મધ્યક

$\overline{X_2}$ = બીજા સમૂહનો સમાંતર મધ્યક

N_1 = પ્રથમ સમૂહના કુલ અવલોકનો

N_2 = બીજા સમૂહના કુલ અવલોકનો

એક ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ 8 : એક ફેકટરીમાં કાર્યકરતા 25 પુરુષ કર્મચારીઓની ઊંચાઈનો મધ્યક 61 સેમી છે. અને તે જ ફેકટરીમાં કાર્ય કરતી 35 મહિલાઓની ઊંચાઈનો મધ્યક 58 સેમી. છે. તો તમામ 60 કર્મચારીઓની ઊંચાઈનો મિશ્ર મધ્યક શોધો.

$$\overline{X_{12}} = \frac{N1\overline{X1} + N2\overline{X2}}{N1 + N2}$$

$N_1 = 25, N_2 = 35, \overline{X_1} = 61, \overline{X_2} = 58$

$$\overline{X_{12}} = \frac{(25 \times 61) + (35 \times 58)}{25 + 35}$$

$$= \frac{1525 + 2030}{60} = \frac{3555}{60} = 59.25$$

2.2.6 સમાંતર મધ્યકનાં ફાયદા અને મર્યાદાઓ

- **ફાયદા**

  1. સમાંતર મધ્યકની ગણતરી એકદમ સરળ અને સાદી છે. તે સરળતાથી સમજી શકાય છે.
  2. સમાંતર મધ્યકની ગણતરીમાં તમામ અવલોકનનો ઉપયોગ થાય છે.
  3. મધ્યકની ગણતરીનું સૂત્ર એકદમ સચોટ છે જેના નિયમો ચુસ્ત છે. જેથી હંમેશા મધ્યક એક સમાન મળે છે.
  4. એક જ સમષ્ટિમાંથી યોગ્ય કદના જો એક થી વધુ નિર્દર્શ લેવામાં આવે તો મધ્યકની કિંમતમાં બહુ ફેરફાર પડતો નથી. સામાન્ય શબ્દોમાં મધ્યક એ સ્થિર માપ છે.
  5. તેની ઉપર અન્ય આંકડાશાસ્ત્રીય પ્રક્રિયા કરી શકાય છે તેથી સંશોધન ક્ષેત્રે ખુબ જ ઉપયોગી છે.

- **મર્યાદાઓ :**

  1. મધ્યકમાં તમામ અવલોકનોને આવરી લેવામાં આવતા હોવાથી ખુબ નાના અને ખૂબ મોટા અવલોકનો મધ્યકને પ્રભાવિત કરે છે.
  2. મધ્યકની કિંમત અપુર્ણાંકમાં આવે તો અવાસ્તવિક લાગે છે.
  3. મધ્યકની ગણતરીમાં એક પણ અવલોકન ન હોય તો મધ્યક શોધી શકાતો નથી.
  4. ફક્ત નિરીક્ષણ દ્વારા શોધી શકાતો નથી.

2.2.7 ભારિત મધ્યક :

સમાંતર મધ્યકની ગણતરીમાં બધા જ અવલોકનોને એક સમાન ભાર આપવામાં આવે છે, તેથી આપને બધા અવલોકનનો સરવાળો કરી તેને કુલ અવલોકનો વડે ભાગીએ છીએ. પરંતુ રોજીંદા જીવનમાં એવું ઘણીવાર બને કે આપણા માટે જુદાં જુદાં અવલોકનોનું

મહત્ત્વ જુદું જુદું હોય આવા સંજોગોમાં ભારીત મધ્યકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

એક ઉદાહરણથી આપણે ઉંડાણપૂર્વક સમજીએ.

ઉદાહરણ 9 : એક કોન્ટ્રાક્ટર ત્રણ પ્રકારના મજૂરોને મજૂરી પર રાખે છે જેમાં સ્ત્રી, પુરુષ અને બાળકોનો સમાવેશ થાય છે,પુરુષોને તે 40 રૂપિયા, સ્ત્રીઓને 32 રૂપિયા અને બાળકોને 15 રૂપિયા દિવસ દીઠ મજુરી ચુકવે છે. તો કોન્ટ્રાક્ટર દ્વારા ચુકવવામાં આવેલ સરેરાશ મજુરી શોધો ?

જવાબ :

અહીંયા આપણે સરળ રીતે સમાંતર મધ્યક ન શોધી શકીએ જેમ કે $\frac{40+32+15}{2}=29$ રૂપિયા, કેમકે અહીંયા એવું માની લેવામાં આવ્યું છે કે પુરુષો, સ્ત્રીઓ અને બાળકોની સંખ્યા એક સમાન છે જે મધ્યકની ગણતરી ખોટી આપશે દાખલા તરીકે 10 મજૂર તમામ વર્ગીકરણમાં હોય તો ગણતરી નીચે મુજબ થાય.

$$\frac{(40\times10)+(32\times10)+(15\times10)}{10+10+10}=\frac{400+320+150}{10+10+10}=29 \text{ રૂપિયા}$$

અહીં આપણે જોયું કે તમામ વર્ગીકરણમાં એકસમાન મજૂર છે તે શક્ય નથી. હંમેશા તેમની સંખ્યા અલગ અલગ જોવા મળે છે. આપણા ઉદાહરણમાં આપણને તેમની સંખ્યા આપવામાં આવેલ નથી તો આપણે તેમની સંખ્યા ધારીને જવાબ મેળવવાનો પ્રયત્ન કરીશું. માની લઈએ કે પુરુષો 20 છે., સ્ત્રીઓ 15 છે અને બાળકો 5 છે, તો ભારિત મધ્યકની ગણતરી નીચે મુજબ થશે...

દિવસ દીઠ મજુરી (X)	મજુરોની સંખ્યા (W)	XW
40	20	800
32	15	480
15	5	75
	$\Sigma W = 40$	$\Sigma WX = 1355$

$$\overline{X}W=\frac{\Sigma WX}{\Sigma W}$$

$$\overline{X}W=\frac{1355}{40}=33.875 \text{ અથવા } 33.88$$

2.3 મધ્યસ્થ :

આંકડાશાસ્ત્ર અને સંભાવના અભ્યાસમાં, મધ્યસ્થ એ કોઈ માહિતીના નમૂના, વસ્તી અથવા સંભાવના વિતરણના નીચલા અડધા ભાગથી અને ઉપરના અડધા ભાગને અલગ

કરતું મૂલ્ય છે. કોઈ પણ ઓપલ માહિતીમાં તેને ''મધ્યમ'' મૂલ્ય તરીકે માનવામાં આવે છે. સરેરાશ જેને આપણે મધ્યક કહીએ છીએ તેની તુલનામાં માહિતીનું વર્ણન મધ્યસ્થ અમુક ખાસ વિશેષતાથી કરી શકે છે જેમ કે અહીં અત્યંત મોટા અથવા નાના મૂલ્યોના અવલોકનોની અસર થતી નથી.

એક ઉદાહરણથી આપણે સમજીએ જેમ કે પાંચ કર્મચારીઓની આવક અનુક્રમે રૂપિયા 900, 950, 1020, 1200 અને 1280 તો મધ્યસ્થ 1020 થાય.

900	
950	
1020	અહીં કુલ પાંચ મૂલ્ય આપેલ છે જેથી વચ્ચે રહેલ મૂલ્ય એ મધ્યસ્થ બનશે.
1200	
1280	

ઉપર આપણે જોઈ ગયા કે જ્યારે એકી સંખ્યામાં અવલોકનો આપેલા હોય ત્યારે મધ્યસ્થની ગણતરી એકદમ સરળ બને છે. પરંતુ બેકી સંખ્યામાં અવલોકનો આપેલ હોય ત્યારે વચ્ચે રહેલ મૂલ્ય માત્ર નિરીક્ષણથી મેળવી શકાતું નથી. નીચે આપેલ ઉદાહરણ જુઓ.

900	
950	
1020	(અહીં કુલ છ મૂલ્ય આપેલ છે જેથી વચ્ચે રહેલ મૂલ્ય એ મધ્યસ્થ બનશે જે નિરીક્ષણથી મેળવી શકાતું નથી જેથી આપણે નીચે મુજબ ગણતરી કરીશું)
1200	
1280	
1300	

$$\text{મધ્યસ્થ} = \frac{1020+1200}{2} = \frac{2220}{2} = 1110$$

પગલાં...

1. માહિતીને ચઢતા કે ઉતરતા ક્રમમાં ગોઠવણી જરૂરી છે (બંને ગોઠવણીમાં જવાબમાં કોઈ ફેર પડતો નથી.)

2. જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા એકી સંખ્યા હોય ત્યારે, તેમાં 1 ઉમેરીને 2 વડે ભાગવાથી મધ્યસ્થ મળે છે.

ઉદાહરણ 10 : એક ફેક્ટરીમાં કાર્ય કરતાં 7 કર્મચારીઅનો વેતનની વિગત નીચે મુજબ છે. જેના પરથી મધ્યસ્થની ગણતરી કરો.

વેતન (રૂપિયામાં)	1100	1150	1080	1120	1200	1160	1400

મધ્યસ્થની ગણતરી

ક્રમ નં.	વેતનની ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવણી
1	1080
2	1100
3	1120
4	1150
5	1160
6	1200
7	1400

મધ્યસ્થ $= \frac{N+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$ થી વિગત

$= 4$ થી વિગત $=1150$, જેથી મધ્યસ્થ વેતન 1150 રૂપિયા છે.

ઉદાહરણ 11 : નીચેની માહિતી પરથી મધ્યસ્થ મેળવો.

391	384	591	407	672	522	777	753	2488	1490

મધ્યસ્થની ગણતરી

ક્રમ નં.	ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલ માહિતી
1	384
2	391
3	405
4	522
5	591
6	672
7	753
8	777
9	1490
10	2488

મધ્યસ્થ $= \frac{N+1}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$ મી વિગત

$= 5.5$ મી વિગત $= \frac{\text{5 મી વિગત + 6ઠ્ઠી વિગત}}{2}$

$= \frac{591+672}{2} = 631.5$

વર્ગીકૃત સતત માહિતી માટે મધ્યસ્થની ગણતરી નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા સમજ મેળવીશું.

ઉદાહરણ 12 : 75 કુટુંબોના પેટ્રોલના માસિક ખર્ચની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. આ કુટુંબોમાં પેટ્રોલના ખર્ચનો મધ્યસ્થ શોધો.

પેટ્રોલનો ખર્ચ (રૂપિયામાં)	**200 સુધી**	**400 સુધી**	**600 સુધી**	**800 સુધી**	**1000 સુધી**	**1200 સુધી**
કુટુંબોની સંખ્યા	2	8	17	32	57	75

અહીં સંચયી આવૃત્તિઓ આપેલ છે. આપણે આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવીશું.

ખર્ચ (રૂપિયામાં)	**200 સુધી**	**200-400**	**400-600**	**600-800**	**800-1000**	**1000-1200**
કુટુંબોની સંખ્યા	2	6	9	15	25	18
સંચયી આવૃત્તિ cf	2	8	17	32	57	75

અહીં n = $\sum f = 75$

મધ્યસ્થ વર્ગ $= \left(\frac{n}{2}\right)$ માં અવલોકનનો વર્ગ

$= \left(\frac{75}{2}\right)$ માં અવલોકનનો વર્ગ

= 37.5માં અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે, 37મું અને 38મું એવાં બંને અવલોકનો વર્ગ 800-1000માં સમાયેલા છે. તેથી મધ્યસ્થા વર્ગ 800-1000 થશે.

હવે, L = 800, $cf = 32$, $f = 25$, $c = 200$ લેતાં

$$\text{મધ્યસ્થ M} = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$$

$$= 800 + \frac{37.5 - 32}{25} \times 200$$

$$= 800 + \frac{5.5}{25} \times 200$$

$$= 800 + \frac{1100}{25}$$

$$= 800 + 44$$

$$= 844$$

આમ, આ કુટુંબોના માસિક પેટ્રોલના ખર્ચનો મધ્યસ્થ રૂપિયા 844 છે.

❖ મધ્યસ્થના ફાયદા તથા મર્યાદાઓ :

- **ફાયદા :**

1. મધ્યસ્થ ફક્ત નિરીક્ષણ કરવાથી શોધી શકાય છે.
2. મધ્યસ્થની ગણતરી સમજવામાં સરળ છે.
3. અતિમોટાં કે અતિ નાનાં અવલોકનોની તેના પર અસર થતી નથી.
4. કેટલાક અવલોકનો ખૂટતા હોય તેમ છતાં મધ્યસ્થ શોધી શકાય છે.

- **મર્યાદા :**
  1. મધ્યસ્થમાં બધા જ અવલોકનોનું પ્રતિનિધિત્વ થતું નથી.
  2. મધ્યકના પ્રમાણમાં તે ઓછું સ્થિર છે.
  3. મધ્યસ્થની ગણતરી માટે અવલોકનોની હંમેશાં ગોઠવણી કરવી પડે છે.
  4. સામાન્ય ક્રિયાઓ માટે ઉપયોગી નથી.

2.4 બહુલક

માહિતી સમૂહમાં વધુ વખત આવતા મૂલ્યને ''બહુલક'' કહે છે. માત્ર નિરીક્ષણ કરવાથી આપણે સતત પરિવર્તિત થતા મૂલ્યને શોધી શકીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે 3,5,8,5,4,5,9,3 શ્રેણીમાં બહુલક 5 છે કારણ કે બીજા બધા મૂલ્યો કરતા તે વધારે વખત પરિવર્તિત થાય છે. વિવિધ ઉદાહરણોની ચર્ચા કરી આપણે બહુલકનો વિસ્તૃત ખ્યાલ મેળવીએ.

ઉદાહરણ 13 : 10 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ નીચે મુજબ છે, જે પરથી બહુલકની ગણતરી કરો.

ક્રમ નં.	**મેળવેલ ગુણ**
1	10
2	27
3	24
4	12
5	27
6	27
7	20
8	18
9	15
10	30

- **બહુલકની ગણતરી**

મેળવેલ ગુણ	પરિવર્તિત થવાની સંખ્યા
10	1
12	1
15	1
18	1
20	1
24	1
27	3
30	1
	કુલ - 10

અહીંયા 27 ગુણ 3 વખત પરિવર્તિત થતા હોવાથી બહુલકના ગુણ 27 છે.

સતત આવૃત્તિ વિતરણ માટે બહુલકની ગણતરી માટે સૌ પ્રથમ બહુલકનો વર્ગ શોધવામાં આવે છે. ત્યારબાદ તેના આધારે બહુલકની કિંમત શોધવામાં આવે છે. જે ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ઉત્પાદન-એકમ	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200	200-210	210-220	220-230
કારીગરની સંખ્યા	4	5	19	33	48	22	12	6

અહીં નીરીક્ષણથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે વર્ગ 190-200 માટે મહત્તમ આવૃત્તિ 48 છે. તેથી બહુલકનો વર્ગ 190-200 છે.

હવે આપને નીચે મુજબના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને ઉત્પાદનનો એકમનો બહુલક મેળવીશું.

L = 190, fm = 48, f1 = 33, f2 = 22, c = 10 લેતા

$$Mo = L + \frac{fm - f1}{2fm - f1 - f2} \times C$$

$$Mo = 190 + \frac{48-33}{2(48)-33-22} \times 10$$

$$Mo = 190 + \frac{15}{96-33-22} \times 10$$

$$Mo = 190 + \frac{150}{40}$$

$$M_0 = 190 + 3.6585$$

$$M_0 = 193.9585$$

- **ફાયદા :**

  1. સમજવા તેમજ ગણતરીમાં સરળ છે.
  2. માત્ર નિરીક્ષણથી મેળવી શકાય છે.
  3. અતિ મોટાં અને અતિ નાનાં અવલોકનની અસર પડતી નથી.
  4. ગુણાત્મક તત્ત્વને દર્શાવવામાં ઉપયોગી છે.

- **મર્યાદા :**

  1. બહુલકનું મૂલ્ય હંમેશાં મળે તેવું જરૂરી નથી ઘણી વખત એક કરતા વધારે બહુલક પણ હોઈ શકે છે.
  2. બધા અવલોકનો પર આધારિત હોતો નથી.
  3. તે સામાન્ય ક્રિયાઓ માટે અનુકૂળ નથી.

2.5 પ્રસારમાનનાં માપ :

પ્રસારમાન એ વિખેરાઈ જવાની અથવા ફેલાઈ જવાની સ્થિતિ છે. આંકડાશાસ્ત્રમાં પ્રસારમાનનો અર્થ એ છે કે આંકડાકીય માહિતી સરેરાશ મૂલ્યથી કેટલી હદે બદલાય તેવી શક્યતા છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, ફેલાવોએ માહિતીના વિતરણને સમજવામાં મદદ કરે છે. મધ્યવર્તી સ્થિતિ અથવા સરેરાશનું કોઈ પણ માપ માહિતીનો સારાંશ અથવા કેન્દ્રવર્તી સ્થિતિ રજૂ કરતું માપ છે પણ એવું બની શકે કે ઘણા અવલોકનો સરેરાશના માપથી ઘણા દૂર હોય અને ઘણા સરેરાશના માપની નજીક પણ હોઈ શકે છે. ઉપરના તમામ ઉદાહરણમાં ચર્ચા કરેલ મધ્યવર્તી સ્થીતિના માપ આંકડાશાસ્ત્રમાં ખુબ જ ઉપયોગી બને છે પરંતુ આ માપો પૂરતા નથી.

વિદ્યાર્થી મિત્રો યાદ રાખો કે ફક્ત સરેરાશનો ઉપયોગ કરીને સાચો નિર્ણય લઈ શકાતો નથી, આથી માહિતીની સાથે તેનો પ્રસાર પણ જાણવો જરૂરી બને છે. માહિતીના અવલોકનો તેની સરેરાશથી કેટલા દુર સુધી વિસ્તરેલા છે તેના સંખ્યાત્મક માપને પ્રસારમાન કહે છે. નીચેના ઉદાહરણથી વધુ અભ્યાસ કરીએ.

- **નીચેના કોષ્ટકમાં ખેલાડીઓ દ્વારા પાંચ દિવસ દરમિયાન હાંસલ કરેલ રનની માહિતી આપેલ છે.**

વિગત	સહેવાગ	સચિન	વિજયન
દિવસ-1	100	100	1
દિવસ-2	100	105	489
દિવસ-3	100	102	2
દિવસ-4	100	103	3
દિવસ-5	100	90	5
કુલ	500	500	500
સરેરાશ	100	100	100

ઉપરોક્ત ઉદાહરણ માં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે ત્રણેય ખેલાડીઓની સરેરાશ એકસમાન હોવા છતાં તેમના દિવસદીઠ બનાવેલા રનમાં ખુબ જ મોટો પ્રસાર જોવા મળે છે. સહેવાગ દ્વારા બનાવેલા રન સંપૂર્ણપણે સરેરાશનું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવે છે. અહિંયાં પ્રસાર જોવા મળતો નથી. સચિન દ્વારા દિવસ-1 ના રોજ બનાવેલા રન જ સંપૂર્ણપણે પ્રતિનિધિત્વ ધરાવે છે. બીજા દિવસોમાં થોડો પ્રસાર જોવા મળે છે. વિજયન દ્વારા બનાવેલા રન કોઈપણ દિવસે સરેરાશનું પ્રતિનિધીત્વ ધરાવતા નથી અહીંયા પ્રસાર ખુબ જ મોટાં પ્રમાણમાં છે, તો નિર્ણય લેવા માટે આ માહિતીનો અભ્યાસ જરૂરી છે. પ્રસારનો અભ્યાસ પણ જરૂરી છે.

- **આદર્શ પ્રસારમાનના લક્ષણો :**

1. પ્રસારમાનની વ્યાખ્યા સ્પષ્ટ અને ચોક્કસ હોવી જોઈએ.
2. તેની ગણતરી સહેલી અને સમજવામાં સરળ હોવી જોઈએ.
3. માહિતીના બધા જ અવલોકનનું પ્રતિનિધિત્વ હોવું જોઈએ.
4. તે સ્થિર માપ હોવું જોઈએ, એક જ સમષ્ટિમાંથી લેવામાં આવતા જુદાં જુદાં નિદર્શ માટે પ્રસારનું માપલગભગ એક સરખું હોવું જોઈએ.
5. તેના પર બીજી બૈજીક પ્રક્રિયાઓ અને સાપેક્ષ માપના ખ્યાલ

- **નિરપેક્ષ માપ**

જે પ્રસારના માપને માહિતીના અવલોકનોના એકમ વડે દર્શાવવામાં આવે તે માપને પ્રસારનું નિરપેક્ષ માપ કહેવામાં આવે છે. દા.ત. કિલોગ્રામ, સે.મી. જ્યારે એકમ જુદાં હોય ત્યારે સરખામણી શક્ય બનતી નથી.

- **સાપેક્ષ માપ**

  પ્રસારનું જે માપ એકમથી મુક્ત હોય તેને પ્રસારનું સાપેક્ષ માપ કહે છે. એકમો ભિન્ન હોય ત્યારે ફક્ત સાપેક્ષ માપથી જ સરખામણી શક્ય બને છે.

- **પ્રસારના માપ**

  1. વિસ્તાર (Range)
  2. ચતુર્થક વિચલન (Quartile Deviations)
  3. સરેરાશ વિચલન (Mean Deviation)
  4. પ્રમાણિત વિચલન (Standard Deviation)

- **વિસ્તાર (Range)**

  વિસ્તાર એ પ્રસારના અભ્યાસ માટેની સૌથી સરળ પદ્ધતિ છે. વિસ્તારની ગણતરી નીચે મુજબ થાય છે.

  Range (વિસ્તાર) $R = L - S$

  L = Largest item, and

  S = Smallest item

  હવે ઉપરના સૂત્રથી કરી શકાય કે માહિતીના સૌથી મોટા અને સૌથી નાના અવલોકનોના તફાવત વિસ્તાર કહેવામાં આવે છે. તેને સંકેત R વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

  માહિતીના વિસ્તાર R ને $L + S$ વડે ભાગવાથી સાપેક્ષ વિસ્તાર મળે છે જેને વિસ્તારાંક પણ કહેવામાં આવે છે. ચિન્હસ્વરૂપે જેની ગણતરી નીચે મુજબ થાય છે.

  વિસ્તારાંક $= \frac{L-S}{L+S}$

ઉદાહરણ 14 : નીચેના કોષ્ટકમાં AB કંપનીના સોમવાર થી શનિવાર સુધીના શે રના ભાવની વિગત આપેલી છે.

દિવસ	**ભાવ (રૂપિયા)**
સોમવાર	200
મંગળવાર	210
બુધવાર	208
ગુરુવાર	160
શુક્રવાર	220
શનિવાર	250

ઉપરની માહિતી પરથી વિસ્તાર અને વિસ્તારાંકની ગણતરી કરો.

વિસ્તાર (R) = L – S

$= 250 - 160$

$= 90$

$$\text{વિસ્તારાંક} = \frac{L-S}{L+S}$$

$$= \frac{250-160}{250+160}$$

$$= \frac{90}{410} = 0.22$$

2.6 ચતુર્થક વિચલન (Quartile Deviations)

ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણે વિસ્તારની ગણતરી કરી જેમાં અંતિમ અવલોકનો એટલે કે સૌથી મોટાં અને સૌથી નાનાં અવલોકનોનો ઉપયોગ કર્યો, તેવી જ રીતે સ્થાનીય સરેરાશના માપો પ્રથમ ચતુર્થક Q_1 અને તૃતીય ચતુર્થક Q_3 નો ઉપયોગ કરીને પણ પ્રસારમાનનું માપ મેળવવામાં આવે છે, જેને ચતુર્થક વિચલન તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. માહિતીના ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલા અવલોકનોમાં વચ્ચેના 50 % અવલોકનોના ચલન કે પ્રસારનો ઉપયોગ કરી વ્યાખ્યાયિત કરેલા માપને ચતુર્થક વિચલન (Quartile Deviation) કહે છે.

Quartile Deviation (ચતુર્થક વિચલન) or $Q.D. = \frac{Q3-Q1}{2}$

ચતુર્થક વિચલન Q.D. ને Q_1 અને Q_3 ની સરેરાશ વડે ભાગવાથી આપણને ચતુર્થક વિચલનનું સાપેક્ષ માપ મળે છે. જેની ગણતરી નીચે મુજબ થાય છે.

Coefficient of Q.D. (ચતુર્થક વિચલનાંક) $= \frac{(Q3-Q1)/2}{(Q3+Q1)/2} = \frac{Q3-Q1}{Q3+Q1}$

ઉદાહરણ 15 : નીચેની માહિતી પરથી ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલાંક મેળવો.

રોલ નં.	1	2	3	4	5	6	7
મેળવેલ ગુણ	20	28	40	12	30	15	50

જવાબ :

સૌ પ્રથમ ગુણને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવો : 12, 15, 20, 28, 30, 40, 50

પ્રથમ ચતુર્થક $(Q1) = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ માં અવલોકનની કિંમત

$$=\left(\frac{7+1}{4}\right) \text{ માં અવલોકનની કિંમત}$$

$$= 2\text{જાં અવલોકનની કિંમત} = 15$$

$$\text{તૃતીય ચતુર્થક } Q3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{માં અવલોકનની કિંમત}$$

$$= 3\left(\frac{7+1}{4}\right) \text{માં અવલોકનની કિંમત}$$

$$= 6\text{ઠ્ઠા અવલોકનની કિંમત} = 40$$

Quartile Deviation (ચતુર્થક વિચલન) or $Q.D. = \frac{Q3-Q1}{2}$

$$= \frac{40-15}{2} = 12.5$$

Coefficient of Q.D. (ચતુર્થક વિચલનાંક) $= \frac{Q3-Q1}{Q3+Q1}$

$$= \frac{40-15}{40+15}$$

$$= \frac{25}{55} = 0.455$$

ઉદાહરણ 16 : નીચેની માહિતી પરથી ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલાંક શોધો

ગુણો	10	20	30	40	50	60
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	4	7	15	8	7	2

ગણતરી :

ગુણ	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
10	4	4
20	7	11
30	15	26
40	8	34
50	7	41
60	2	43

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = \left(\dfrac{43+1}{4}\right)$ માં અવલોકનની કિંમત

$= \left(\dfrac{43+1}{4}\right)$ માં અવલોકનની કિંમત

$= 11$ માં અવલોકનની કિંમત $= 20$

તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = 3\left(\dfrac{n+1}{4}\right)$ માં અવલોકનની કિંમત

$= 3\left(\dfrac{43+1}{4}\right)$ માં અવલોકનની કિંમત

$= 33$ માં અવલોકનની કિંમત $= 40$

Quartile Deviation (ચતુર્થક વિચલન) or Q.D. $= \dfrac{Q3 - Q1}{2}$

$$= \frac{40 - 20}{2} = 10$$

Coefficient of Q.D. (ચતુર્થક વિચલાંન) $= \dfrac{Q3 - Q1}{Q3 + Q1} = \dfrac{40 - 20}{40 + 20} = 0.333$

ઉદાહરણ 17 : નીચેની માહિતી પરથી ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલાંક શોધો

અઠવાડિયાની મજુરી (રૂપિયામાં)	**35 થી ઓછી**	**35-37**	**38-40**	**41-43**	**43થી વધારે**
મજૂરોની સંખ્યા	14	62	99	18	7

મજુરી	**આવૃત્તિ**	**સંચયી આવૃત્તિ**
35થી ઓછી	14	14
35-37	62	76
38-40	99	179
41-43	18	193
43થી વધારે	7	200

Quartile Deviation (ચતુર્થક વિચલન) or Q.D. = $\frac{Q3 - Q1}{2}$

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n}{2}\right)$ માં અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{200}{4}\right)$ માં અવલોકનની કિંમત

= 150 માં અવલોકનની કિંમત

પ્રથમ ચતુર્થક એ 35-37 વર્ગમાં સમાયેલ છે,

$Q1 = L + = 3 \times i$

$L = 33$, $N/4 = 50$, $cf = 14$, $f = 62$, i = 2

$$Q1 \quad = 35 + \frac{50 - 14}{62} \times 2$$

$= 35 + 1.16$

$= 36.16$

તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = 3\left(\frac{n}{4}\right)$ માં અવલોકનની કિંમત

$= 3\left(\frac{200}{4}\right)$ માં અવલોકનની કિંમત

= 150 માં અવલોકનની કિંમત

$$Q_3 \quad = L + \frac{\frac{3n}{4} - cf}{f} \times i$$

$$= 38 + \frac{150 - 76}{99} \times 2$$

$= 38 + 1.49$

$= 39.49$

Quartile Deviation (ચતુર્થક વિચલન) or Q.D. = $\frac{Q3 - Q1}{2}$

$$= \frac{39.49 - 36.16}{22} = 1.67$$

Coefficient of Q.D. (ચતુર્થક વિચલાંન) $= \frac{Q3 - Q1}{Q3 + Q1} = \frac{39.49 - 36.16}{39.49 + 36.16} =$

$$\frac{3.33}{75.65} = 0.044$$

2.7 સરેરાશ વિચલન (Mean Deviation)

પ્રસારમાનના બે માપ વિસ્તાર અને ચતુર્થક વિચલનની ગણતરીમાં બધા જ અવલોકનોનો ઉપયોગ થતો નથી અને આ બંને માપ અવલોકનોનું કોઈ પણ સરેરાશની સાપેક્ષ ચલન દર્શાવતા નથી. પ્રસારમાનનું એવું માપ કે જેમાં બધા જ અવલોકનનો ઉપયોગ થાય અને અવલોકનોનું તેની સરેરાશની સાપેક્ષ ચલન પણ ધ્યાનમાં લેવાય તેવા માપથી આ ખામી દુર કરી શકાય છે. સરેરાશ વિચલનમાં આ બાબતોની પુર્તિ થાય છે. અવલોકનોની કિંમત અને તેના મધ્યક વચ્ચેના તફાવતને વિચલન કહે છે. આ વિચલનો ઋણ, ધન અથવા તો શૂન્ય હોઈ શકે છે અને આવા વિચલનોનો સરવાળો શૂન્ય થાય છે. આ પરિસ્થિતિના નિવારણ માટે આ વિચલનોના માનાંક લેવામાં આવે છે. એટલે કે ઋણ વિચલનોના ઋણ ચિન્હની અવગણના કરવામાં આવે છે. આ વિચલનોના માનાંકોને આધારે માહિતીના પ્રસારનું માપ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

''આમ સરેરાશ વિચલન એટલે માહિતીના અવલોકનોના તેમના મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના માંનાંકોની સરેરાશ કિંમત. તેને સંકેતમાં M.D. (Mean Deviation) વડે દર્શાવવામાં આવે છે.''

M.D. (Mean Deviation) ને મધ્યક $\overline{X}$ વડે ભાગવાથી મળતા સાપેક્ષ માપ $\frac{Md}{X}$ ને માહિતીનો સરેરાશ વિચલનાંક (Coefficient of Mean Deviation) કહેવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 18 : કુલ 32 ટાઈપિસ્ટને એક રીપોર્ટ ટાઈપ કરતા લાગતા સમય મિનિટમાં નીચે દર્શાવેલ છે. આ માહિતી પરથી સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલાંક ગણો.

ટાઈપ કરતા લાગતો સમય	10	11	12	13	14
ટાઈપિસ્ટની સંખ્યા	2	8	12	8	2

ટાઈપ કરતા લાગતો સમય મિનિટમાં (x)	ટાઈપિસ્ટની સંખ્યા (f)	fx	વિચલન $X-\overline{X}$ (x – 12)	વિચલનનો માનાંક $\lvert X-\overline{X}\rvert$	$f\lvert X-\overline{X}\rvert$
10	2	20	-2	2	4
11	8	88	-1	1	8
12	12	144	0	0	0
13	8	104	1	1	8
14	2	28	2	2	4
કુલ	32	384	-	-	24

$$\overline{X}=\frac{\Sigma f X}{n}$$

$$=\frac{384}{32}=12$$

$$M.D.=\frac{24}{32}=0.75$$

સરેરાશ વિચલનાંક $=\frac{0.75}{12}=0.0625$

2.8 પ્રમાણિત વિચલન (Standard Devation)

માહિતીના દરેક અવલોકનમાંથી તેના મધ્યકને બાદ કરી મળતી કિંમતના વર્ગોનો સરવાળો કરી તેને કુલ સંખ્યા વડે ભાગતા મળતા માપને વિચરણ કહે છે. તેને S^2 વડે દર્શાવાય છે. વિચરણના ઘન વર્ગમૂળને પ્રમાણિત વિચલન કહે છે. તેને S વડે દર્શાવાય છે. માહિતીના પ્રમાણિત વિચલનને તેના મધ્યક વડે ભાગતા મળતા સાપેક્ષ માપને પ્રમાણિત વિચલાંક કહે છે.

એક માહિતીના n અવલોકનો $X_1, X_2, X_3,............X_n$ હોય અને તેનો મધ્યક $\overline{X}$ હોય તો તે માહિતીનું વિચરણ નીચે મુજબના સૂત્રથી આપી શકાય છે.

$$S2=\frac{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)2}{N}$$

વિચરણનું ઘન વર્ગમૂળ લેવાથી પ્રમાણિત વિચલન મળે છે. $\sqrt{S2}$

ઉદાહરણ 19 : એક બેટ્સમેનના છેલ્લી સાત મેચના રન નીચે મુજબ છે.

52, 58, 40, 60, 54, 38, 48

આ માહિતી પરથી બેટ્સમેનના રનનું વિચરણ શોધો તથા પ્રમાણિત વિચલન પણ શોધો.

રન (X)	**X - $\overline{X}$**	**(X - $\overline{X}$)²** **(X - 50)²**
52	2	4
58	8	64
40	-10	100
60	10	100
54	4	16
38	-12	144
48	-2	4
350		**432**

(મધ્યક) $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{350}{7} = 50$

(વિચરણ) $S2 = \frac{\Sigma\left(x - \overline{x}\right)2}{N} = \frac{432}{7} = 61.71$

(પ્રમાણિત વિચલન) $S = \sqrt{61.71} = 7.8555$

ઉદાહરણ 20 : અકે કંપનીમાં નોકરી કરતાં કર્મચારીઓનો વાર્ષિક પગાર નીચે મુજબ છે. જેના પરથી પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી કરો.

પગાર (રૂા.‘‘000’’ માં)	45	50	55	60	65	70	75	80
કર્મચારીઓની સંખ્યા	3	5	8	7	9	7	4	7

જવાબ :

પગાર	**કર્મચારી સંખ્યા**	**(x - 60)/5 = d**	**fd**	**f(d)²**
45	3	-3	-9	27
50	5	-2	-10	20
55	8	-1	-8	8

60	7	0	0	0
65	9	1	+9	9
70	7	2	+14	28
75	4	3	+12	36
80	7	4	+28	112
	N = 50		$\Sigma fd = 36$	$\Sigma fd^2 = 240$

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma fd2}{N} - \left[\frac{\Sigma fd}{N}\right]^2} \times 5$$

$$S = \sqrt{\frac{240}{50} - \left[\frac{36}{50}\right]^2} \times 5$$

$$S = \sqrt{4.8 - 0.5184} \times 5$$

$$S = 10.35$$

ઉદાહરણ 21 : નીચે દર્શાવેલી માહિતી પરથી પ્રમાણિત વિચલન મેળવો

ઉંમર (થી ઓછી)	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**
મૃત્યુ પામેલ વ્યક્તિ	15	30	53	75	100	110	115	125

ગણતરી :

ઉંમર	f	મધ્યકિંમત	(m-35)/10 = *d*	fd	fd^2
0-10	15	5	-3	-45	135
10-20	15	15	-2	-30	60
20-30	23	25	-1	-23	23
30-40	22	35	0	0	0
40-50	25	45	1	25	25
50-60	10	55	2	20	40
60-70	5	65	3	15	45
70-80	10	75	4	40	160
	N = 125			**Σfd = 2**	**$\Sigma fd^2 = 488$**

$$S = \sqrt{\frac{\sum fd2}{N} - \left[\frac{\sum fd}{N}\right] 2 \times i}$$

$$= \sqrt{\frac{488}{125} - \left[\frac{2}{125}\right] 2 \times 10}$$

$= \sqrt{}3.904 - 0.000.\ 10$

$= 19.76$

- **પ્રમાણિત વિચલનના ફાયદા તથા મર્યાદાઓ**

- **ફાયદા**

1. તેની વ્યાખ્યા સચોટ છે.
2. માહિતીના તમામ અવલોકનોનો ઉપયોગ થાય છે.
3. તેની ચોક્કસ કિંમત મળે છે.
4. અન્ય આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓમાં તેનો ઉપયોગ થાય છે.

- **મર્યાદાઓ :**

1. પ્રસારમાનના અન્ય માપોની સરખામણીમાં તેની ગણતરી અઘરી છે પરંતુ આને મર્યાદા ગણવી ઉચિત નથી પ્રમાણિત વિચલનમાં સચોટતા હોવાથી ગણતરી અઘરી બને છે.
2. પ્રમાણિત વિચલન શોધવામાં extreme end (અંતના અવલોકનોને) વધુ મહત્ત્વ આપવામાં આવે છે.

2.9 સ્વાધ્યાય

1. આદર્શ સરેરાશનાં લક્ષણો જણાવો.
2. સરેરાશનાં માપોમાં આદર્શ માપ કોને કહે છે ? શા માટે ?
3. મધ્યકની વ્યાખ્યા આપી તેના ગુણ-દોષ જણાવો.
4. મિશ્ર મધ્યકની વ્યાખ્યા સમજાવો.
5. ભારિત મધ્યક સમજાવો.
6. મિશ્ર મધ્યક ભારિત મધ્યકથી કઈ રીતે જુદો પડે છે.
7. મધ્યસ્થની વ્યાખ્યા આપી તેના ફાયદા તથા મર્યાદાઓ જણાવો.
8. બહુલકની વ્યાખ્યા આપો અને તેના ફાયદા તથા મર્યાદાઓ જણાવો.
9. પ્રસારનો અર્થ સમજાવી તેના જુદા-જુદા માપો જણાવો.

10. નિરપેક્ષ પ્રસાર અને સાપેક્ષ પ્રસાર સમજાવો.
11. પ્રમાણિત વિચલનની વ્યાખ્યા આપી તેના ફાયદા તથા મર્યાદા જણાવો.
12. ચતુર્થક વિચલન સમજાવો.
13. સરેરાશ વિચલન સમજાવો.

ટૂંકા દાખલા

14. એક સમૂહનાં બધા જ અવલોકનો 40 હોય તો તેનો મધ્યક કેટલો થાય. (40)
15. 25 અવલોકનોનો સરવાળો 287.5 હોય તો તેનો મધ્યક શોધો. (11.5)
16. 10 અવલોકનોનો મધ્યક 20 હોય અને એક સંખ્યા ભૂલથી 15ને બદલે 25 લેવાઈ ગઈ હોય તો તેનો સાચો મધ્યક શોધો. (19)
17. એક શ્રેણીનાં 22 અવલોકનોનો મધ્યક 27 છે. હવે જો દરેક અવલોકનમાં 3 ઉમેરવામાં આવે તો નવો મધ્યક કેટલો થાય. (30)
18. જો 10 અવલોકનોનો મધ્યક 30 અને 20 અવલોકનોનો મધ્યક 35 હોય તો તેનો મિશ્ર મધ્યક શોધો. (33.33)
19. એક સમૂહનાં 8 અવલોકનો 48, 50, 54, 45, 47, 55, 58, 54 હોય તો તે સમૂહનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો. (મધ્યક 51.375 પ્રમાણિત વિચલન 4.24)
20. નીચેની માહિતી માટે મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

x_p	0	1	2	3	4	5
f_i	5	8	18	16	10	3

(મધ્યક- 2.45 પ્રમાણિત વિચલન- 1.28)

21. નીચેની માહિતી માટે મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

x_i	10	20	30	40	50
fi	43	75	67	72	63

(મધ્યક- 31.16 પ્રમાણિત વિચલન- 3.31)

22. નીચેની માહિતી માટે મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
આવૃત્તિ	4	8	10	24	32	16	8

(મધ્યક- 39.90 પ્રમાણિત વિચલન- 1.47)

23. નીચેની માહિતી માટે મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

વર્ગ	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
આવૃત્તિ	5	10	20	40	35	8	2

(મધ્યક- 34.67 પ્રમાણિત વિચલન- 12.58)

24. નીચેની માહિતી પરથી મધ્યક શોધો.

વર્ગ	0-99	100-199	200-299	300-399	400-499	500-599	600-699
આવૃત્તિ	10	15	30	20	15	8	2

(મધ્યક- 292.5 પ્રમાણિત વિચલન- 145.78)

25. નીચેની માહિતી માટે ભારિત મધ્યક શોધો.

xi	20	60	80	120	160
wi	4	2	5	4	5

(ભારિત મધ્યક- 94)

26. જો $n_1 = 30, n_2 = 30$, અને $\overline{x_1} = 60$ અને $\overline{x_2} = 40$ હોય તો બે સમૂહનો મિશ્ર મધ્યક શોધો.

(મિશ્ર મધ્યક-50)

27. જો $n = 225,\ \overline{x} = 25.4, \sum(x_1 - \overline{x})^2 = 441$ હોય તો આ સમૂહનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો. (પ્રમાણિત વિચલન 1.4)

28. નીચેની માહિતી પરથી બે સમૂહોનું મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

$n_1 = 30$ $\quad$ $n_2 = 25$

$\overline{x_1} = 85.3$ $\quad$ $\overline{x_2} = 98.5$

$S_1 = 2.8$ $\quad$ $S_2 = 3.2$

(મિશ્ર મધ્યક-91.13, મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન 7.22)

29. જો શ્રેણીનો મધ્યક 20.4 અને પ્રમાણિત વિચલન 5.1 હોય તો ચલનાંક શોધો.

(ચલનાંક 25)

30. નીચે આપેલ માહિતી પરથી કઈ કંપનીનાં શેરનાં ભાવ વધુ સ્થિર છે તે નક્કી કરો.

	કંપની A	**કંપની B**
મધ્યક	1000 રૂ.	1050 રૂ.
પ્ર.વિ.	50 રૂ.	42 રૂ.

(કંપની A માટે ચલનાંક 5, કંપની B માટે ચલનાંક 4, કંપની ના શેરનો ભાવ વધુ સ્થિર છે.)

31. નીચેની માહિતી પરથી ચતુર્થક વિચલનાંકની ગણતરી કરો.

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
આવૃત્તિ	8	16	22	30	24	12	6

(જવાબ :- ચતુર્થક વિચલનાંક = 11.35)

32. નીચેની માહિતી પરથી સરેરાશ વિચલનાંકની ગણતરી કરો.

વર્ગ	5	7	9	11	13	15	17
આવૃત્તિ	2	4	6	8	10	12	8

(જવાબ :- ચતુર્થક વિચલનાંક = 2.816)

- **બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો (MCQ)**

1. સામાન્ય રીતે સરેરાશના ક્યા માપનો ઉપયોગ થાય છે ?

(i) મધ્યક (ii) મધ્યસ્થ (iii) બહુલક (iv) ગુણોત્તર મધ્યક

2. એક શ્રેણીના 15 અવલોકનોનો સરવાળો 330 હોય તો તેનો મધ્યક ?

(i) 20 (ii) 25 (iii) 22 (iv) 24

3. એક શ્રેણી માટે મધ્યક 27 છે. જો તેના દરેક અવલોકનમાં 3 ઉમેરવામાં આવે તો તેનો મધ્યક ?

(i) 24 (ii) 27 (iii) 30 (iv) 26

4. એક શ્રેણીના બધા જ અવલોકનો 18 હોય તો તેનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન ?

(i) 18. 18 (ii) 0.18 (iii) 18.0 (iv) 0.0

5. એક શ્રેણીના 7 અવલોકનો છે. 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14 તો તેનો પ્રસાર શોધો.

(i) 7 (ii) 14 (iii) 1 (iv) 0

6. એક શ્રેણીનો મધ્યક 18 અને પ્રમાણિત વિચલન 9 હોય તો તેનો ચલનાંક ?

(i) 50 (ii) 200 (iii) 18 (iv) 25

જવાબ :

1. (i), 2. (iii), 3. (iii), 4. (iii), 5. (iv), 6 (i)

****

એકમ
3

નિદર્શન પદ્ધતિઓ

-: રૂપરેખા :-

3.1 સમષ્ટિ અને નિદર્શનનો અર્થ

સમષ્ટિનો અર્થ :

આંકડાશાસ્ત્રીય તપાસ, સંશોધન કે ચકાસણી હેઠળ સમાવવામાં આવતાં, સમગ્ર એકમોનાં સમુદાયને 'સમષ્ટિ' કહેવામાં આવે છે. અન્ય રીતે સમષ્ટિનાં અર્થને રજૂ કરીએ તો, 'એવાં બધાં જ સંભવિત એકમોનું જૂથ કે જેનાં પર સંશોધન, તપાસ કે ચકાસણી કરવાની હોય.'

દા.ત. કોઈ એક યુનિવર્સિટી, કૉલેજ કે શાળામાં ભણતાં વિદ્યાર્થીઓ, કોઈ એક દેશની આયાત-નિકાસનું પ્રમાણ, કોઈ મહાવિદ્યાલયની પુસ્તકાલયનાં બધાં જ પુસ્તકો, ગામ અથવા શહેરમાં આવેલા કુલ મકાનોની સંખ્યા, કોઈ એક રાજ્ય, શહેર, કૉલેજનાં કુલ મતદારોની સંખ્યા વગેરે.

ઘણીવાર સમષ્ટિનાં બધાં જ એકમોનું પરીક્ષણ કરવાનું શક્ય હોય છે. આમ જ્યારે સમગ્ર સમષ્ટિનાં જથ્થાનું સંશોધન કે ચકાસણી કરવામાં આવે ત્યારે તેને સમષ્ટિ તપાસ કે સમષ્ટિ પરીક્ષણ કહેવામાં આવે છે.

સાન્ત સમષ્ટિ અને અનંત સમષ્ટિ (Finit Population and Infinite Population) :

જો સમષ્ટિમાં મર્યાદિત કે સીમિત સંખ્યામાં એકમો આવેલા હોય, તો તે સમષ્ટિને સાન્ત (સઃ + અન્ત) સમષ્ટિ કહેવામાં આવે છે. સાન્ત સમષ્ટિનાં કુલ એકમોની સંખ્યા 'N' વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

દા.ત. કારખાનામાં કામ કરતાં કારીગરોની સંખ્યા, કોઈ ચોક્કસ દિવસમાં ચોક્કસ કંપનીમાં ઉત્પાદિત થતા એકમોની સંખ્યા, કોઈ એક ચોક્કસ વર્ગમાં અભ્યાસ કરતાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા વગેરે સાન્ત સમષ્ટિના ઉદાહરણો છે. આ સમષ્ટિનાં એકમોની સંખ્યાને સમષ્ટિનું કદ કહેવામાં આવે છે.

જો સમષ્ટિનાં એકમોની સંખ્યા અનંત હોય કે ગણી ન શકાય તેવી અસંખ્ય કે અગણિત હોય તો તેને અનંત સમષ્ટિ કહેવામાં આવે છે.

દા.ત. દરિયામાં પાણીનાં ટીપાની સંખ્યા, આકાશમાં રહેલા તારાઓની સંખ્યા, પૃથ્વી પર વસતા જીવજંતુઓની સંખ્યા વગેરે અનંત સમષ્ટિનાં ઉદાહરણો છે.

- **નિદર્શનનો અર્થ :**

જ્યારે સમષ્ટિનાં દરેક એકમોની તપાસ કે ચકાસણી કરવાનું અશક્ય હોય, ત્યારે સમષ્ટિમાંથી કેટલાંક એકમો પસંદ કરી તેની ચકાસણી કે તપાસ કરવામાં આવે છે, જેને નિદર્શન તપાસ કહેવામાં આવે છે.

આમ સમષ્ટિમાંથી પસંદ કરવામાં આવેલ ભાગ માટે આંકડાશાસ્ત્રીઓ દ્વારા નિદર્શન (Sample) શબ્દનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. કોઈપણ માહિતીની ચકાસણી કે તપાસ માટે ઘણી વખત પ્રત્યેક એકમની તપાસ કરવી શક્ય ન હોય ત્યારે સમગ્ર સમષ્ટિ નહીં પરંતુ તેમાંથી અમુક જ એકમોની પસંદગી કરી ચકાસણી કાર્ય હાથ ધરવામાં આવે છે અને આવી તપાસ કે ચકાસણી કાર્ય માટે પસંદગી પામેલ એકમોને 'નિદર્શન' કહેવામાં આવે છે.

આમ, "સમષ્ટિમાંથી પ્રતિનિધિરૂપ પસંદ કરાયેલ ચોક્કસ એકમોને નિદર્શન કહેવામાં આવે છે" અને આ નિદર્શનની કુલ સંખ્યાને નિદર્શનનું કદ કહેવામાં આવે છે.

- **નિદર્શનનો ખ્યાલની પ્રસ્તુતા (Relvance of Concept of Sampling) :**

નિદર્શનનો ખ્યાલ હાલમાં જ વિકાસ પામ્યો છે, પરંતુ તે એકદમ નવો નથી. આપણાં રોજિંદા જીવનમાં જાણે અજાણ્યે નિદર્શનનો ઉપયોગ વારંવાર કરવામાં આવે છે.

દા.ત. રાંધવા મૂકેલા ચોખા ચઢી ગયા છે કે નહિ તે જાણવા માટે બધાં જ ચોખા નહિ પણ તેમાંથી અમુક ચોખાને તપાસીએ છીએ, તેવી જ રીતે ઘઉં સારા છે કે નહિ તે જોવા બધાં જ ઘઉંના દાણા નહિ પરંતુ મુઠ્ઠીભર ઘઉં હાથમાં લઈ ગુણવત્તા ચકાસીએ છીએ, લોહીની ગુણવત્તા જાણવા માનવ શરીરનું બધું જ લોહી નહીં. પરંતુ થોડું નમૂનારૂપ લોહી લઈએ છીએ વગેરે. આ બધાં જ કિસ્સામાં આપણે નિદર્શન ચકાસણી દ્વારા, સમષ્ટિ વિશે ચોક્કસ અનુમાન મેળવીએ છીએ. આમ, આપણે મહદઅંશના નિર્ણયો નિદર્શન તપાસ દ્વારા કરીએ છીએ.

- **નિદર્શન એકમ (Sampling Unit) :**

સમષ્ટિનાં ઘટકો કે જેને નિદર્શન તરીકે પસંદ કરવામાં આવે છે, કે જેનું વધુ વિભાગીકરણ પેટા નિદર્શન માટે શક્ય હોતું નથી તો તેને નિદર્શન એકમો કહેવામાં આવે છે. દા.ત. એક વિસ્તારનાં કુટુંબોની સરેરાશ આવક જાણવા માટે કુટુંબનાં વડાને નિદર્શન એકમ કહેવામાં આવે છે, તેવી જ રીતે ચોખાનું સરેરાશ ઉત્પાદન માટે દરેક ખેતરને નિદર્શન એકમ તરીકે ગણવામાં આવે છે.

- **નિદર્શન યાદી (Sampling Frame) :**

દરેક નિદર્શન પદ્ધતિમાં નિદર્શન પસંદ કરતાં પહેલાં સમષ્ટિનાં પ્રત્યેક એકમોની યાદી બનાવવી જરૂરી છે. આ સમગ્ર સમષ્ટિનાં એકમોને ઓળખીને બનાવેલી યાદીને 'નિદર્શન યાદી' કહેવામાં આવે છે.

દા.ત. વિદ્યાર્થીઓની યુનિ. પરીક્ષા સમયે બનાવાતી બેઠક વ્યવસ્થાની યાદી, ચૂંટણી સમયે બનાવાતી મતદાર યાદી, જિલ્લામાં આવેલા ગામડાઓની યાદી વગેરે.

આ યાદી તૈયાર થયા બાદ, જે સમય દરમિયાન નિદર્શન ચકાસણી/તપાસ હાથ ધરવામાં આવે તે સમયને નિદર્શન ચકાસણીનો સંદર્ભ સમય કહેવામાં આવે છે.

3.2 સમષ્ટિ તપાસ અને નિદર્શન તપાસ

સમષ્ટિ તપાસ અને નિદર્શન તપાસ સમજવા માટે, આપણે સરકાર દ્વારા દર વખતે હાથ ધરાતી વસ્તી મોજણીનું ઉદાહરણ લઈએ.

વસ્તી વિષયક માહિતી બે પદ્ધતિઓથી મેળવી શકાય છે : (i) સમષ્ટિ તપાસ અને (ii) નિદર્શન તપાસ.

સમષ્ટિ તપાસમાં વસ્તીનાં બધાં જ એકમોની જાત તપાસ કરવામાં આવે છે, દા.ત. કોઈ એક વિસ્તારમાં રહેતા કુટુંબોની સરેરાશ આવક (વાર્ષિક)ની માહિતી મેળવવી હોય તો તે વિસ્તારમાં રહેતાં બધાં જ કુટુંબો વિષે માહિતી એકત્ર કરવામાં આવે છે, જેમ કે, કોઈ એક વિસ્તારમાં 1500 કુટુંબ આવેલાં હોય તો તે પ્રત્યેક 1500 કુટુંબો પાસેથી તેમની વાર્ષિક આવકની માહિતી એકત્ર કરવામાં આવશે.

ભારતની વસ્તી ગણતરી (Population Census of India) : ભારત સરકાર દર દસ વર્ષનાં અંતરાલમાં વસ્તી ગણતરી કરે છે. હાલમાં છેલ્લી વસ્તી ગણતરી 2021 માં કરવામાં આવી હતી. સૌપ્રથમ વસ્તી ગણતરી વર્ષ 1871-72 માં કરવામાં આવી હતી.

સમષ્ટિ તપાસનાં ફાયદા-મર્યાદા :

ફાયદા :

(1) સમષ્ટિનાં પ્રત્યેક એકમ પાસેથી માહિતી એકત્ર કરવામાં આવે છે.

(2) સમષ્ટિનાં બધાં જ એકમોની તપાસણીથી માહિતી મેળવવામાં આવતી હોવાથી તે વધુ ચોક્કસ અને વિશ્વાસપાત્ર હોય છે.

(3) સમષ્ટિ તપાસ દ્વારા ઘનિષ્ઠ તપાસ શક્ય બને છે.

(4) સમષ્ટિ તપાસથી એકત્રિત થયેલી માહિતી વિવિધ સર્વેક્ષણ માટે ઉપયોગમાં લઈ શકાય છે.

મર્યાદાઓ :

(1) બધાં જ એકમોની તપાસ કરવામાં આવતી હોવાથી મોટી સંખ્યામાં આગણકોની જરૂર પડે છે.

(2) સમષ્ટિ તપાસ માટે વધુ સમય, શક્તિ અને નાણાંની જરૂર પડે છે.

(3) જ્યારે તપાસ હેઠળનાં એકમો નાશ પામતાં હોય ત્યારે સમષ્ટિ તપાસ કરવામાં આવતી નથી.

(4) અનંત સમષ્ટિ માટે સમષ્ટિ તપાસ શક્ય બની શકતી નથી.

નિદર્શન પદ્ધતિનાં ફાયદા-મર્યાદા :

ફાયદા :

(1) સમષ્ટિનાં એકમો અનંત હોય ત્યારે નિદર્શન તપાસ કરવી પડે છે.

(2) તપાસનાં એકમો ટૂંક સમયમાં મેળવવા જરૂરી હોય.

(3) તપાસ હેઠળનો વિસ્તાર ખૂબ જ વિશાળ હોય ત્યારે નિદર્શન પદ્ધતિ ઉપયોગી નીવડે છે.

(4) જ્યારે સંશોધન કે તપાસ માટે જરૂરી સંશાધનો જેવા કે આગણકોની સંખ્યા, નાણાં, સમય વગેરેની ઉપલબ્ધિ મર્યાદિત માત્રામાં જ મળી શકતી હોય.

(5) જ્યારે તપાસ દરમિયાન, તપાસ હેઠળનાં એકમોનો નાશ થતો હોય ત્યારે માત્ર નિદર્શન પદ્ધતિ જ શક્ય બને છે.

મર્યાદા :

(1) ખોટી નિદર્શન પદ્ધતિ પસંદ થવાની શક્યતા રહેલી છે.

(2) કોઈપણ નિદર્શન પદ્ધતિનાં અમલ દરમિયાન માહિતીનાં એકત્રીકરણ તેની માવજત કોષ્ટકીકરણ, કે વર્ગીકરણ જેવી પ્રક્રિયાઓ દરમિયાન ખામીઓ રહી જવા પામે છે.

(3) જથ્થા અનુમાનમાં ભૂલો થવાની શક્યતા વધુ રહે છે.

(4) પૂર્વગ્રહ યુક્ત નિદર્શન એ કોઈપણ નિદર્શન તપાસને નબળું પાડી શકે છે.

3.3 નિદર્શનની જરૂરિયાત

નીચેનાં કારણોસર નિદર્શન સંશોધન માટે અનિવાર્ય બને છે.

(1) સમષ્ટિનાં એકમો અનંત હોય, તેની ગણતરી શક્ય ન હોય ત્યારે નિદર્શન પદ્ધતિ જરૂરી બની જાય છે.

(2) તપાસ કે ચકાસણી માટે નક્કી કરેલો વિસ્તાર ખૂબ જ વિશાળ હોય, એકમનું કદ નક્કી ન કરી શકાતું હોય ત્યારે નિદર્શન વડે આ સમસ્યા હલ કરી શકાય છે.

(3) તપાસ કાર્ય માટે નક્કી કરાયેલ એકમોની માહિતી ખૂબ જ ટૂંક સમયમાં મેળવવાની હોય.

(4) સર્વેક્ષણ, તપાસ કે ચકાસણી કાર્ય દરમિયાન, તપાસ માટે નિયત કરાયેલ એકમો જ્યારે નાશ પામતાં હોય ત્યારે નિદર્શન તપાસ જ એક માત્ર શક્ય ઉકેલ બને છે. જેથી નિદર્શન તપાસ જરૂરી બની જાય છે.

(5) તપાસ માટેનાં જરૂરી સંસાધનો જેવા કે, નાણાં, સમય, આગણકોની સંખ્યા, એકમો વિ.ની મળવાપાત્ર શક્યતાઓ નહિવત હોય કે સીમિત હોય કે અસંભવિત હોય ત્યારે નિદર્શન પદ્ધતિ જરૂરી બને છે.

3.4 આદર્શ નિદર્શનનાં લક્ષણો

કોઈપણ નિદર્શન તપાસનો આધાર સારા નિદર્શનની પસંદગી પર હોય છે. નિદર્શનનાં એકમોને પસંદ કરવામાં થયેલી નાની ભૂલ નિદર્શન તપાસને નિષ્ફળ બનાવી શકે છે. તેથી જ જે નિદર્શન નીચે મુજબની ખાસિયતો ધરાવતા હોય તો તેને આદર્શ નિદર્શન અથવા સારો નિદર્શન કહેવાય.

(1) સમષ્ટિમાંથી તપાસ અર્થે પસંદગી પામેલો નિદર્શન, સમગ્ર સમષ્ટિનું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવી શકે તેવો હોવો જોઈએ. જેનાં પરથી તારવેલું અનુમાન, સમગ્ર સમષ્ટિને લાગુ પાડી શકાય.

(2) સમષ્ટિનો પ્રત્યેક એકમ નિદર્શનમાં પ્રવેશવા માટે એક સ્વતંત્ર ઘટક તરીકેનું અસ્તિત્વ ધરાવતો હોવો જોઈએ.

(3) સમષ્ટિમાં દરેક એકમને નિદર્શનમાં પસંદગી પામવાની તક સમાન રીતે મળતી હોવી જોઈએ.

(4) નિદર્શનનાં પ્રત્યેક એકમો, એક જ સમયગાળામાં અને એક સમાન પરિસ્થિતિમાં પસંદ થયેલાં હોવા જોઈએ.

(5) નિદર્શનમાં સમાવિટ એકમોની સંખ્યા પર્યાપ્ત માત્રામાં હોવી જોઈએ, જેથી તેના પરથી મેળવેલ આનુમાનિક તારણો સત્ય બને.

દા.ત. કોઈ એક યુનિવર્સિટીનાં વિદ્યાર્થીઓની બૌદ્ધિક ક્ષમતાની મોજણી માટે માત્ર 5 વિદ્યાર્થી જ પસંદગી કરવામાં આવે તો તે નિદર્શન તરીકે યોગ્ય નથી.

(6) જો સમષ્ટિનાં એકમો વિષમાંગ હોય ત્યારે સમષ્ટિને યોગ્ય સ્તરોમાં વહેંચ્યા પછી બધાં જ સ્તરોનું યોગ્ય પ્રતિનિધિત્વ જળવાય તે રીતે નિદર્શન પસંદ થયેલો હોવો જોઈએ.

(7) નિદર્શનની પસંદગી કોઈપણ પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાતી વલણ વગરની હોવી જોઈએ.

(8) સંશોધકે નિયત કરેલ ખર્ચ અને સમયમર્યાદામાં યોગ્ય નિદર્શન પદ્ધતિ વડે નિદર્શન પસંદ કરાયેલ હોવો જોઈએ.

(9) (a) નિદર્શન એકમ (b) નિદર્શન યાદી (c) નિદર્શન પસંદ કરવાની પદ્ધતિનું નામ (d) માહિતીનો સ્ત્રોત (e) નિદર્શન પસંદ કરવા માટે જરૂરી સંશોધનોની યાદી અને (*f*) નિદર્શન પસંદ કરવાનો સંદર્ભ સમય આ પ્રત્યેક બાબતોનો સમાવેશ કરીને સંશોધક કે આગણકે યોગ્ય નિદર્શન યોજના તૈયાર કરવી જોઈએ.

3.5 નિદર્શનનું કદ નક્કી કરવા માટેનાં મુદ્દાઓ

સમષ્ટિ જ્યારે અનંત એકમો ધરાવતી હોય ત્યારે તેમાંથી પ્રતિનિધિરૂપ એકમો પસંદ કરવાનું કાર્ય જરૂરી બની જાય છે. સારા નિદર્શન પસંદ થાય, નિદર્શનનું કદ યોગ્ય રીતે નક્કી થાય તે બાબત નીચેના પરિબળો ઉપર આધારિત હોય છે.

મુદ્દા નંબર-1 : જે સમષ્ટિમાં સંપૂર્ણ સમાનગુણી એકમો હોય, તો એક નિદર્શન પણ હેતુ પૂર્ણ કરી શકે છે. દા.ત. વ્યક્તિનું લોહી; જે સમગ્ર શરીરમાં સમાન ગુણી છે તેથી લોહીનું માત્ર એક ટીપું પણ તપાસવામાં આવે તો પણ સાચું પરિણામ મળી શકે છે. જો સમષ્ટિનાં એકમો વિજાતીય કે વિષમાંગ હોય તો ચોક્કસ પરિણામ મેળવવા માટે મોટા કદનાં નિદર્શનનો અભ્યાસ કરવો જરૂરી બની જાય છે.

મુદ્દા નંબર-2 : જે ચકાસણી કાર્ય કે તપાસ કાર્ય માટે નિદર્શન લેવાનો છે, તેનો હેતુ સ્પષ્ટ હોવો જરૂરી છે.

મુદ્દા નંબર-3 : નિદર્શનનું કદ નક્કી કરતી વખતે સમષ્ટિનાં એકમોની સંખ્યા અને તેનો વિસ્તાર જાણવો જરૂરી હોય છે.

મુદ્દા નંબર-4 : નિદર્શનનું કદ નક્કી કરવાનાં સમયે, નાણાંકીય સાધનો, તથા નિષ્ણાંત તજ્જ્ઞોની હાજરી ખૂબ જ અગત્યની અને જરૂરી હોય છે.

મુદ્દા નંબર-5 : નિદર્શનનું કદ નક્કી કરતી વખતે, નિદર્શન પરિણામોમાં ચોકસાઈનું અપેક્ષિત ધોરણ જાણીને તથા તેનાં ઉપરથી તારણો મેળવવાની સમય મર્યાદા પણ ધ્યાનમાં લેવી જરૂરી છે.

3.6 નિદર્શન પદ્ધતિઓ

સામાન્ય રીતે વપરાતી નિદર્શન પદ્ધતિઓને નીચે મુજબ વર્ગીકૃત કરી શકાય છે.

(A) સંભાવના યુક્ત નિદર્શન

(B) બિન સંભાવના યુક્ત નિદર્શન

(A) સંભાવના યુક્ત નિદર્શન (Probability Sampling) :

સંભાવના યુક્ત નિદર્શન પદ્ધતિમાં સમષ્ટિમાંથી નિદર્શનની પસંદગી, એ તેના પસંદ થવાની સંભાવનાના આધારે કરવામાં આવે છે. જેની મુખ્યત્વે ત્રણ રીતો છે.

(a) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન

(b) સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન

(c) પદીક યાદચ્છિક નિદર્શન

(B) બિન સંભાવના યુક્ત નિદર્શન (Non Probability Sampling) :

બિન સંભાવના યુક્ત નિદર્શન એ નિદર્શનની એવી પદ્ધતિ છે. જેમાં નિદર્શન તરીકે પસંદ થવા માટે બધા જ એકમોને સમાન તક મળતી નથી. સંભાવના યુક્ત નિદર્શન પદ્ધતિમાં યદચ્છ રીતે નિદર્શનની પસંદગી થાય છે. જ્યારે તેનાથી વિપરિત બિન સંભાવના યુક્ત નિદર્શનમાં યદચ્છ રીતે નિદર્શનની પસંદગી થતી નથી. બિન સંભાવના યુક્ત નિદર્શનનાં એકમોની પસંદગી તેની સુલભતા, સંશોધક અને આગણકનાં અંગત સહેતુક નિર્ણય પર આધાર રાખે છે.

સંભાવના યુક્ત નિદર્શનની પદ્ધતિઓ (Methods of Probability Sampling) :

અહીં આપણે નીચેની સંભાવનાયુક્ત નિદર્શન પદ્ધતિઓની ચર્ચા કરીશું.

(a) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન

(b) સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન

(c) પદિક યાદચ્છિક નિદર્શન

(a) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ (Simple Random Sampling) :

સમષ્ટિમાંથી પસંદ કરવામાં આવતાં પ્રત્યેક એકમને નિદર્શન તરીકે પસંદ થવાની સમાન તક પ્રાપ્ત થતી હોય તો તેવી પસંદગીને 'સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ' કહેવામાં આવે છે. તપાસ માટેની બધી જ નિદર્શન પદ્ધતિઓમાંથી આ પદ્ધતિ શ્રેષ્ઠ છે. કેમ કે આ પદ્ધતિમાં કોઈપણ એકમ પ્રત્યે પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાતને સ્થાન હોતું નથી. આ પદ્ધતિમાં નિદર્શનનાં એકમની પસંદગી નિરપેક્ષ રીતે થાય છે, એટલે કે કોઈપણ એકમની પસંદગી કે ના પસંદગીનો આધાર બીજા કોઈ એકમની પસંદગી કે ના પસંદગી ઉપર હોતો નથી. તેને બિન પ્રતિબંધિત નિદર્શન પદ્ધતિ પણ કહેવામાં આવે છે. સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન બે રીતે પસંદ કરી શકાય છે.

- **પુરવણી રહિત સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન (Without Replacement Sampling) :** સમષ્ટિમાંથી નિદર્શન પસંદ કરતી વખતે જો અગાઉ પસંદગી પામેલ

એકમ, બીજા એકમની પસંદગી કરતાં પહેલાં નિદર્શન યાદી એટલે કે સમષ્ટિમાં પરત મૂકવામાં ન આવે તો તેવી નિદર્શન પસંદગીને પુરવણી રહિત પસંદગી કહેવામાં આવે છે. દા.ત. લોહીનું પરિક્ષણ, દરિયાઈ પાણીની ખારાશનું પરીક્ષણ, મીઠાઈની દુકાનમાં, મીઠાઈનું સ્વાદ પરીક્ષણ વગેરે પુરવણી રહિત નિદર્શન પસંદગી છે.

- પુરવણી સહિત પસંદગી **(With Replacement Sampling)** : સમષ્ટિમાંથી નિદર્શન પસંદ કરતી વખતે જો અગાઉ પસંદગી પામેલ એકમ, બીજા એકમની પસંદગી કરતાં પહેલા નિદર્શન યાદી એટલે કે સમષ્ટિમાં પરત મૂકવામાં આવે તો તેવી નિદર્શન પસંદગીને પુરવણી રહિત પસંદગી કહેવામાં આવે છે. કરિયાણાની દુકાનમાં કરવામાં આવતી ઘઉંની તપાસ, રોજિંદા પિરિયડમાં શિક્ષક દ્વારા વિદ્યાર્થીને પૂછવામાં આવતાં પ્રશ્નો, વગેરે પુરવણી રહિત પસંદગીનાં ઉદાહરણો છે.

સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિમાં યાદચ્છિક નિદર્શન મેળવવાની કેટલીક પદ્ધતિઓ નીચે મુજબ છે.

(1) લોટરીની પદ્ધતિ (Lottery Method) : યાદચ્છિક નિદર્શન પસંદ કરવાની આ એક ખૂબ જ પ્રચલિત રીત છે. આ પદ્ધતિમાં સૌપ્રથમ સમષ્ટિનાં દરેક એકમને નંબર અથવા એકમનું નામ સરખા કદ, આકાર અને રંગની ચિઠ્ઠીઓમાં લખવામાં આવે છે. ત્યારબાદ આ બધી જ ચિઠ્ઠીઓને એક મોટા પાત્રમાં સારી રીતે ભેળસેળ કરી, તેમાંથી જેટલા કદનો નિદર્શન પસંદ કરવાનો હોય તેટલી ચિઠ્ઠીઓ ઉપાડવામાં આવે છે. આ ચિઠ્ઠીઓ હાથ વડે કે યંત્રની સહાયથી ઉપાડવામાં આવે છે.

અહીં સમષ્ટિનાં કોઈપણ એકમ પ્રત્યે પૂર્વગ્રહ રાખવામાં આવતો નથી. દા.ત. ભારત સરકારની હાઉસિંગ બોર્ડના મકાનોની વહેંચણીમાં તેમજ અન્ય ઈનામી યોજનામાં પણ આ જ પદ્ધતિ વપરાય છે. આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરતી વખતે બધી જ ચિઠ્ઠીઓ સરખા કદની અને એક જ રંગની હોય તે ધ્યાનમાં રાખવું ખાસ જરૂરી છે. જો આમ ના કરવામાં આવે તો, પક્ષપાત થવાની શક્યતાને નિવારી શકાય નહીં, આ ઉપરાંત જો અનંત સમષ્ટિ હોય તો પણ આ પદ્ધતિ ઉપયોગમાં લઈ શકાતી નથી.

(2) યાદચ્છિક સંખ્યાઓનાં કોષ્ટકની મદદથી (Random Number Table Method) : જ્યારે સમષ્ટિનું કદ ખૂબ જ વિશાળ હોય ત્યારે લોટરીની પદ્ધતિ ખૂબ જ કંટાળાજનક બને છે. તેથી આવી પરિસ્થિતિઓમાં યાદચ્છિક સંખ્યાઓનાં કોષ્ટકની મદદથી યાદચ્છિક નિદર્શન તૈયાર કરવામાં આવે છે. યાદચ્છિક સંખ્યાઓનાં નીચેનાં કોષ્ટકો આંકડાશાસ્ત્રીય સંશોધનો માટે ખૂબ જ પ્રચલિત છે.

(A) પ્રો. એલ.એચ.સી. ટીપેટનાં યાદચ્છિક સંખ્યાનાં કોષ્ટકો

(B) ફિશર અને યેટ્સનાં કોષ્ટકો

(C) કેન્ડાલ અને સ્મિથનાં કોષ્ટકો

(D) રાવ, મિત્રા અને મિથ્થાઈનાં કોષ્ટકો

(E) અમેરિકાની રેન્ડ કોર્પોરેશન સંસ્થાનાં કોષ્ટકો.

આ પૈકી ટીપેટનાં કોષ્ટકો સૌથી વધુ પ્રચલિત છે. યાદચ્છિક સંખ્યાઓનાં કોષ્ટકો પ્રથમ વાર પ્રો. એલ.એચ.સી. ટીપેટે ઈ.સ. 1927 માં તૈયાર કર્યા હતા. જ્યારે સમષ્ટિમાંથી યાદચ્છિક નિદર્શન લેવાનો હોય ત્યારે દા.ત., ટીપેટનાં આ કોષ્ટકો દર્શાવતી પુસ્તિકાનું કોઈપણ એક પાનું યાદચ્છિક રીતે ખોલવામાં આવે છે અને તેમાંથી જે સંખ્યા મળેને સંખ્યાવાળા એકમો લેવાથી યાદચ્છિક નિદર્શન મળે છે.

(3) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિનાં ફાયદા :

સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિનાં ફાયદાઓ નીચે મુજબ છે :

(1) આ પદ્ધતિમાં સમષ્ટિનાં દરેક એકમને પસંદગી માટેની સમાન તક હોવાથી પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાતને સ્થાન હોતું નથી.

(2) યાદચ્છિક નિદર્શન સમષ્ટિનું યોગ્ય પ્રતિનિધિત્વ ધરાવે છે.

(3) નિદર્શનમાં સમષ્ટિ વિશે મળનાર પરિણામોમાં થતી ક્ષતિઓ વિશે ગણતરી થઈ શકે છે.

(4) ન્યૂનતમ ખર્ચમાં સમષ્ટિ વિશે તથ્યપૂર્વકની માહિતી મળે છે.

(5) નિદર્શન પસંદ કરવા માટે સમષ્ટિનાં એકમોની ઊંડાણપૂર્વકની માહિતી હોવી જરૂરી નથી.

(6) નિદર્શનની અન્ય પદ્ધતિઓમાં પણ આ પદ્ધતિ ઉપયોગી છે.

(4) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિની મર્યાદાઓ :

(1) સમષ્ટિનાં એકમો વચ્ચે ગુણધર્મોની દષ્ટિએ બહુ તફાવત હોય તો આ પદ્ધતિથી સાચું પરિણામ મળતું નથી.

(2) પસંદગી માટે નિદર્શન યાદીની જરૂર પડે છે. જે કેટલીકવાર અશક્ય હોય છે.

(3) સમષ્ટિમાં એકમોની સંખ્યા બહુ ઓછી હોય ત્યારે આ પદ્ધતિ સારું પરિણામ આપી ન શકે.

(4) ચિઠ્ઠીઓ બનાવવાનું કાર્ય કેટલીકવાર કંટાળાજનક બની જાય.

(5) કોઈકવાર નિદર્શન યાદચ્છિક રીતે લેવામાં આવ્યું હોય છતાં પણ પક્ષપાતી વલણ દર્શાવે છે.

(6) સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિની સરખામણીમાં સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિમાં નિદર્શનનું કદ મોટું લેવું પડે છે.

(7) જો સમષ્ટિનાં એકમો ભૌગોલિક રીતે વિવિધ વિસ્તારોમાં વહેંચાયેલા હોય તો નિદર્શન પસંદ કરવાનો ખર્ચ અને સમય વધુ લાગે છે.

(b) સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન :

જ્યારે સમષ્ટિનાં એકમોમાં ખૂબ જ વધારે પડતી અસમાનતા હોય ત્યારે સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ ઉપયોગી થતી નથી. આવા સંજોગોમાં ‘સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ પદ્ધતિમાં સૌપ્રથમ સમષ્ટિનાં એકમોને સમાન ગુણધર્મોવાળા સ્તરોમાં કે વિભાગોમાં વહેંચવામાં આવે છે. આ દરેક સ્તરો પરસ્પર જુદા ગુણધર્મોવાળા હોય છે. પરંતુ દરેક સ્તરનાં એકમો આંતરિક રીતે સમાન ગુણધર્મોવાળા હોય છે. ત્યારબાદ પ્રત્યેક સ્તરમાંથી સ્વતંત્ર રીતે યાદચ્છિક નિદર્શન લેવામાં આવે છે અને બધાં જ નિદર્શોના એકમોના સમૂહથી જે નિદર્શન તૈયાર થાય, તેને સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન કહેવામાં આવે છે. સ્તરિત નિદર્શન પરથી નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિને સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ કહેવામાં આવે છે. આ પદ્ધતિનો ચીવટપૂર્વક બૌદ્ધિક રીતે ઉપયોગ કરવામાં આવે તો ખૂબ જ સચોટ અને ચોક્કસાઈ ભર્યા પરિણામો મેળવી શકાય છે.

કોઈ 1000 વિદ્યાર્થીઓનાં કુટુંબની સરેરાશ આવકનો અભ્યાસ કરવા તેમને ગરીબ, મધ્યમ અને તવંગર એમ ત્રણ સ્તરમાં વહેંચી શકાય અને ત્યારબાદ દરેક સ્તરમાંથી અમુક વિદ્યાર્થીઓનો યાદચ્છિક નિદર્શન લેવામાં આવે છે અને તે બધાં જ નિદર્શો ભેગાં કરીને જે નિદર્શન બને તેને સ્તરિત નિદર્શન કહેવાય છે.

સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન પસંદ કરવાની બે રીત છે. પ્રમાણસર સ્તરિત નિદર્શન અને બિન પ્રમાણસર સ્તરિત નિદર્શન પદ્ધતિ

(1) પ્રમાણસર સ્તરિત નિદર્શન પદ્ધતિ (Proportionate Stratified Sampling) : પ્રમાણસર સ્તરિત નિદર્શન પદ્ધતિમાં દરેક સ્તરમાંથી સમષ્ટિનાં કદને આધારે પ્રમાણસર નિદર્શન પસંદ કરવામાં આવે છે. આ પ્રમાણ દરેક સ્તર માટે સમાન રાખવામાં આવે છે, તેથી સમષ્ટિનાં દરેક એકમોની નિદર્શનની પસંદગીની શક્યતા સમાન રહે છે. ધારો કે N કદની સમષ્ટિને N_1 અને N_2 કદનાં બે સ્તરમાં વહેંચતા તેમાંથી કુલ N કદનો નિદર્શન પસંદ કરવાનાં હોય તો, પ્રથમ સ્તરનાં નિદર્શનનું કદ $n_1 = \frac{N_1}{N} \times n$ અને બીજા સ્તરનાં નિદર્શનનું કદ $n_2 = \frac{N_2}{N} \times n$ થાય. જ્યારે સમષ્ટિનાં પ્રાચલોનું આગણન કરવાનું હોય તો આ પદ્ધતિ વપરાય છે.

(2) બિન પ્રમાણસર નિદર્શન પદ્ધતિ (Non-Proportionate Stratified Sampling) : આ પદ્ધતિમાં દરેક સ્તરમાંથી પસંદ કરેલ નિદર્શન, એ સમષ્ટિનાં પ્રમાણસર સમાન એકમો હોતાં નથી. દરેક સ્તરમાંથી અલગ-અલગ પ્રમાણ કે યાદચ્છિક કદનાં નિદર્શનની પસંદગી કરવામાં આવે છે. આમ, સમષ્ટિનાં દરેક એકમની પસંદગીની તક સમાન રહેતી નથી. દરેક સ્તરમાંથી પસંદ કરાતા નિદર્શનનું પ્રમાણ ભિન્ન હોવા છતાં, કેટલાંક સંશોધક દ્વારા યોજનાઓમાં આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

સ્તરિત નિદર્શન પદ્ધતિનાં કેટલાંક ફાયદાઓ અને મર્યાદાઓ નીચે મુજબ છે :

ફાયદા :

(1) સમષ્ટિને જુદાં-જુદાં સ્તરોમાં વહેંચવાથી દરેક સ્તરને પ્રતિનિધિત્વ મળે છે. આમ, બધાં જ સ્તરોનું પ્રતિનિધિત્વ સંપૂર્ણ રીતે જળવાઈ રહે છે.

(2) આ પદ્ધતિમાં નિદર્શન લેવા માટેની વહીવટી સુગમતા વધે છે.

(3) દરેક સ્તર આંતરિક રીતે સમાન ગુણધર્મોવાળા હોવાથી તેમાં નાના કદના નિદર્શો, સ્તર વિશે પૂરતી માહિતી પૂરી પાડે છે. જેથી ચોક્કસાઈનું પ્રમાણ વધે છે.

(4) જુદાં-જુદાં સ્તર માટે નિદર્શનની પસંદગી કરવા જુદી-જુદી વ્યક્તિઓ નિયુક્તિ કરી શકાય છે.

(5) જ્યારે પ્રત્યેક સ્તર માટે ચોક્કસાઈનું ધોરણ આવશ્યક હોય ત્યારે આ પદ્ધતિ જ કામ લાગે છે.

મર્યાદાઓ :

(1) સમષ્ટિનાં સમાન ગુણધર્મોવાળા સ્તરોમાં વહેંચતી વખતે ખૂબ જ કાળજી રાખવી પડે છે.

(2) સમષ્ટિનાં એકમોની યોગ્ય સ્તરોમાં વહેંચણી ન થાય તો ભૂલ ભરેલા પરિણામો આવી શકે.

(3) સમષ્ટિના પ્રત્યેક પ્રાચલોનું અનુમાન કરવાનું કામ અઘરું છે.

(4) કુશળ વ્યક્તિઓ જ યોગ્ય ચોક્કસાઈનું ધોરણ જાળવી શકે, બિન કુશળ વ્યક્તિઓ આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરે તો પરિણામ સાચા મળતાં નથી.

(c) પદિક યાદચ્છિક નિદર્શન (Systematic Sampling) :

જ્યારે સમષ્ટિ અને તેમાંથી લેવામાં આવતા સરળ યાદચ્છિક નિદર્શનનાં કદ અસાધારણ રીતે મોટા હોય, ત્યારે અગાઉ જણાવેલ 'સરળ યાદચ્છિક' અને 'સ્તરિત યાદચ્છિક' નિદર્શન પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ કંટાળાજનક અને વધુ સમય માંગે તેવો બને છે. ઉદા. તરીકે, એક મોટા શહેરનાં 10 લાખ મતદારોની ક્રમવાર યાદીમાં, 1000 મતદારોનો યાદચ્છિક નિદર્શન પસંદ કરવાની જરૂર પડે છે. આ પરિસ્થિતિમાં મતદાર યાદીમાંથી પ્રત્યેક હજારમો મતદાર પસંદ કરો તો, આ મુજબની નિદર્શન પસંદ કરવાની પદ્ધતિને 'પદિક નિદર્શન કહેવાય.' પદિક નિદર્શનમાં નિદર્શન પસંદ જ કરવાની ક્રિયા સરળ હોવાથી સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિની સરખામણીમાં પદિક નિદર્શન પદ્ધતિ દ્વારા નિદર્શન પસંદ કરવાનું વધુ સરળ અને સુવિધાજનક છે.

પદિક નિદર્શન પદ્ધતિમાં સમષ્ટિનાં એકમોને કોઈ એક ગુણધર્મ કે લક્ષણ પ્રમાણે ક્રમવાર ગોઠવવામાં આવે છે અને આ સમષ્ટિનાં એકમોને ક્રમિક 1, 2, 3, ... નંબર આપવામાં આવે છે. આ સમષ્ટિમાંથી નિદર્શન પસંદ કરતી વખતે માત્ર પ્રથમ એકમની જ યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે છે અને ત્યારબાદનાં એકમો નક્કી કરેલ અંતરે પસંદ કરવામાં આવે છે. આમ, એકમોની પસંદગી પદ અનુસાર થતી હોવાથી આ પ્રકારની નિદર્શન પદ્ધતિને 'પદિક નિદર્શન પદ્ધતિ કહેવામાં આવે છે અને આ રીતે પસંદ થયેલા યાદચ્છિક નિદર્શને પદિક નિદર્શન કહેવામાં આવે છે. પદિક નિદર્શનમાં નક્કી થયેલ નિદર્શન પુરવણી રહિત નિદર્શન હોય છે.

પદિક નિદર્શન પદ્ધતિમાં સમષ્ટિમાંથી પ્રથમ નિદર્શનની પસંદગી યાદચ્છિક હોય છે.

પ્રથમ નિદર્શન એકમ યાદચ્છિક સંખ્યાઓનાં કોષ્ટકની મદદથી પસંદ કરવામાં આવે છે અને ત્યારબાદ નિશ્ચિત અંતરાલમાં નિદર્શન પસંદ કરવામાં આવે છે. આ નિશ્ચિત અંતર કે અંતરાલને 'k' વડે દર્શાવવામાં આવે છે. પદિક નિદર્શનમાં 'n' એકમો પસંદ કરવા માટે, પ્રથમ k એકમોમાંથી એક એકમની પસંદગી યાદચ્છિક રીતે કરી, ત્યારબાદ દરેક k અંતરે આવેલા એકમો નિદર્શન તરીકે પસંદ થાય છે. આમ, પૂર્ણાંક કિંમત k ને પદિક નિદર્શનનો અંતરાલ પણ કહેવાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, જો 500 વિદ્યાર્થીઓનાં સમૂહમાંથી 50 વિદ્યાર્થીઓને નિદર્શન તરીકે પસંદ કરવાનાં હોય તો સૌપ્રથમ નીચેના સૂત્રની મદદથી નિદર્શન અંતરાલ શોધવામાં આવે છે.

$$\text{નિદર્શન અંતરાલ, } k = \frac{N}{n} = \frac{\text{સમષ્ટિનું કદ}}{\text{નિદર્શનું કદ}} = \frac{500}{50} = 10$$

અહીં, $k = 10$ એ નિદર્શન અંતરાલ મળ્યો. ધારો કે યાદચ્છિક સંખ્યાઓનાં કોષ્ટક પરથી કોઈ એક સંખ્યા $i = 5$ મળી, અહીં i ને, યાદચ્છ પ્રારંભિક સંખ્યા કહેવામાં આવે છે. અહીં, પ્રારંભિક સંખ્યા 5 માં નિદર્શન અંતરાલ 10 ઉમેરતાં બાકીનાં નિદર્શન મળે છે, જેમ કે સંખ્યા 5, 15, 25, ... 495. એ પદિક નિદર્શન તરીકે પસંદ થશે.

પદિક નિદર્શનમાં સમષ્ટિનું n સ્તરોમાં વિભાજન થાય છે અને દરેક સ્તરમાં એક એકમ પદિક નિદર્શનમાં સ્થાન પામે છે, આ સંદર્ભમાં પદિક નિદર્શન સ્તરિત નિદર્શનને મળતું આવે તેવો ભાસ થાય છે, પરંતુ બંન્ને વચ્ચે તફાવત એ છે કે, સ્તરિત નિદર્શનમાં પ્રત્યેક સ્તરમાંથી એકમોની પસંદગી યાદચ્છિક રીતે કરવામાં આવે છે, જ્યારે પદિક નિદર્શનમાં દરેક સ્તરમાં પસંદ થયેલ એકમનું સ્થાન એક સરખું હોય છે અને યાદચ્છિક હોતું નથી.

પદિક નિદર્શન પદ્ધતિનાં ફાયદા :

(1) આ પદ્ધતિ સાદી અને સરળ છે.

(2) આ પદ્ધતિથી સમય અને શક્તિનો ઘણો બચાવ થાય છે.

(3) જો નિદર્શન પસંદગીમાં યોગ્ય ધ્યાન રાખવામાં આવે તો ચોક્કસ પરિણામ મેળવી શકાય છે.

(4) અનંત સમષ્ટિ માટે પણ આ પદ્ધતિ વાપરી શકાય છે.

પદિક નિદર્શન પદ્ધતિની મર્યાદા :

(1) પદિક નિદર્શન સમગ્ર સમષ્ટિનું યોગ્ય પ્રતિનિધિત્વ કરતું નથી.

(2) આગણકનાં અંગત પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાતની અસર ઘણીવાર જોવા મળે છે.

(3) પદિક નિદર્શનમાં પદિક નિદર્શન મધ્યકનો પ્રમાણિત દોષ જાણી શકતો નથી.

(4) અમુક વિશિષ્ટ ગુણધર્મ ધરાવતાં એકમો સમષ્ટિમાં ચોક્કસ અંતરે આવેલા હોય તો પદિક નિદર્શન દ્વારા મળેલ પરિણામો ગેરમાર્ગે દોરનાર હોય છે.

3.7 સ્વાધ્યાય

- **બહુ વૈકલ્પિક પ્રશ્નો :**

1. આંકડાશાસ્ત્રીય પરિક્ષણ હેઠળ આવરી લેવાતાં બધાં જ એકમોના સમૂહને કયા નામથી ઓળખવામાં આવે છે ?

(a) નિદર્શન (b) વિચરણ (c) મધ્યક (d) સમષ્ટિ

2. સમષ્ટિનાં મુખ્યત્વે કયા કયા પ્રકાર છે ?

(a) આગણક અને પ્રાચલ (b) સાન્ત અને અનંત

(c) બહુલક અને મધ્યક (d) સાર્થકતા અને બહુલકતા

3. સમષ્ટિમાંથી પસંદ કરાયેલ ભાગને (એકમને) કયા નામથી ઓળખવામાં આવે છે.

(a) નિદર્શન (b) મધ્યસ્થ (c) પ્રસારમાન (d) આગણક

4. નિદર્શન પસંદ કરતા પહેલા સમષ્ટિનાં બધાં જ એકમોને ઓળખીને બનાવેલ યાદી કયા નામે ઓળખવામાં આવે છે ?

(a) સેમ્પલ (b) સેમ્પલ યુનિટ (c) સેમ્પલિંગ ફ્રેમ (d) પોપ્યુલેશન

5. સમષ્ટિમાંથી પ્રતિનિધિત્વરૂપ પસંદ કરાયેલ એકમોની કુલ સંખ્યાને શું કહેવાય ?

(a) સમષ્ટિ એકમો (b) નિદર્શન એકમો (c) નિદર્શન કદ (d) સમષ્ટિ કદ

6. લોટરી પદ્ધતિ, નિદર્શન પસંદ કરવાની કઈ રીત દર્શાવે છે ?

(a) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ (b) સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ

(c) પદિક યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ (d) ગુચ્છ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ

7. યાદચ્છિક સંખ્યાઓનાં કોષ્ટકો સૌપ્રથમ કોણે તૈયાર કરેલા ?

(a) ફિશર અને યેટ્સ (b) પ્રો. એલ.એચ.સી. ટીપેટ

(c) રેન્ડ કોર્પોરેશન અમેરિકા (d) કેન્ડાલ અને સ્મિથ

8. નિમ્ન દર્શાવેલ પદ્ધતિઓ પૈકી કઈ પદ્ધતિ સંભાવનાયુક્ત નિદર્શનની પદ્ધતિ છે.

(a) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ (b) સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ

(c) પદિક નિદર્શન પદ્ધતિ (d) આપેલ તમામ

9. પુરવણી રહિત અને પુરવણી સહિત નિદર્શન પસંદગી નિદર્શનની કઈ પદ્ધતિ દર્શાવે છે.

(a) ગુચ્છ નિદર્શન પદ્ધતિ (b) સમકાલિન નિદર્શન પદ્ધતિ

(c) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ (d) વસ્તી ગણતરીની પદ્ધતિ

10. સમષ્ટિનાં પ્રાચલોનું આગણન કરવા માટે કઈ પદ્ધતિ વપરાય છે.

(a) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન (b) પ્રમાણસર સ્તરિત નિદર્શન

(c) ગુચ્છ યાદચ્છિક નિદર્શન (d) બિન પ્રમાણસર સ્તરિત નિદર્શન

11. પદિક નિદર્શનનાં અંતરાલને સંજ્ઞામાં કેવી રીતે દર્શાવવામાં આવે છે ?

(a) N (b) k (c) $\frac{N}{n}$ (d) $\frac{\text{સમષ્ટિનું કદ}}{\text{નિદર્શનું કદ}}$

12. મર્યાદિત કે સીમિત એકમો ધરાવી સમષ્ટિને કયા નામે ઓળખવામાં આવે છે.

(a) અનંત સમષ્ટિ (b) વિશાળ સમષ્ટિ (c) સાન્ત સમષ્ટિ (d) મર્યાદિત સમષ્ટિ

13. 'સમુદ્રનાં પાણીના ટીપાની સંખ્યા' - આ કેવા પ્રકારની સમષ્ટિ છે ?

(a) સાન્ત સમષ્ટિ (b) અનંત સમષ્ટિ (c) વિશાળ સમષ્ટિ (d) સમસમષ્ટિ

14. સંશોધન અભ્યાસમાં ચકાસણીનાં એકમો જ્યારે ખૂબ ટૂંકાગાળામાં મેળવવા જરૂરી હોય ત્યારે કઈ આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિ ઉપયોગમાં લેવાય છે.

(a) અનુમાનની પદ્ધતિ (b) પ્રસારમાનની પદ્ધતિ

(c) નિદર્શન પદ્ધતિ (d) બિંદુ અનુમાન પદ્ધતિ

15. 'નિદર્શનનું કદ' નીચેનાં પૈકી કયા પરિબળ આધાર રાખે છે ?

(a) સમષ્ટિમાં સંપૂર્ણ સમાનગુણી એકમો હોય

(b) સમષ્ટિ અનંત હોય

(c) સમષ્ટિ સીમિત હોય

(d) ઉપરોક્ત દરેક

16. સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ ક્યારે ઉપયોગી બને છે ?

(a) સમષ્ટિ ભિન્ન ગુણધર્મી એકમો ધરાવતી હોય

(b) સમષ્ટિ સમાન ગુણધર્મી એકમો ધરાવતી હોય

(c) A અને B બન્ને

(d) એક પણ નહીં

17. પદિક નિદર્શનમાં પસંદ કરેલો નિદર્શન કેવો હોય છે ?

(a) પુરવણી સહિત (b) પુરવણી રહિત (c) સ્તરિત (d) સરળ

18. સમષ્ટિમાંથી લેવાયેલ યાદચ્છિક નિદર્શનનાં કદ અસાધારણ રીતે મોટા હોય ત્યારે કઈ નિદર્શન પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે ?

(a) સ્તરિત નિદર્શન પદ્ધતિ (b) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ

(c) ગુચ્છ નિદર્શન પદ્ધતિ (d) પદિક નિદર્શન પદ્ધતિ

19. સમષ્ટિમાંથી પસંદ થતા દરેક એકમને નિદર્શન પસંદગી માટે સમાન વક્ર પ્રાપ્ત થતો હોય તો તે નિદર્શનની કઈ પદ્ધતિ કહેવાય ?

(a) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ (b) હિસ્સા નિદર્શન પદ્ધતિ

(c) અનુકૂળતા નિદર્શન પદ્ધતિ (d) સ્નોબોલ નિદર્શન પદ્ધતિ

20. પસંદ પામેલ નિદર્શનનું સ્તર પ્રમાણસર કે સમાન ન હોય ત્યારે કઈ પદ્ધતિ ઉપયોગમાં લેવામાં આવે છે ?

(a) બિન પ્રમાણસર સ્તરિત નિદર્શન પદ્ધતિ

(b) બિન સંભાવના યુક્ત નિદર્શન પદ્ધતિ

(c) વર્ગીકરણની પદ્ધતિ

(d) આવૃત્તિ વિતરણની પદ્ધતિ

જવાબ :

(1) - D	(2) - B	(3) - A	(4) - C	(5) - C
(6) - A	(7) - B	(8) - D	(9) - C	(10) - B
(11) - B	(12) - C	(13) - B	(14) - C	(15) - A
(16) - A	(17) - B	(18) - A	(19) - A	(20) - A

- **પ્રશ્નો :**

(1) સમષ્ટિ એટલે શું ?

(2) સાન્ત અને અનંત સમષ્ટિ ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

(3) નિદર્શન એટલે શું ?

(4) નિદર્શન, નિદર્શનનું કદ, સમષ્ટિ, નિદર્શન એકમ, નિદર્શન યાદી : પદ સમજાવો.

(5) સમષ્ટિ અને નિદર્શન વચ્ચેનો તફાવત સમજાવો.

(6) નિદર્શન તપાસની મર્યાદા જણાવો.

(7) યાદૃચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિઓ સમજાવો.

(8) સરળ યાદૃચ્છિક નિદર્શન પસંદ કરવાની બે રીતો જણાવો.

(9) સરળ યાદૃચ્છિક નિદર્શનનાં ફાયદા-મર્યાદા ચર્ચો.

(10) કઈ પરિસ્થિતિમાં સ્તરિત યાદૃચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ વપરાય છે ?

(11) પદિક નિદર્શન પદ્ધતિ સવિસ્તર સમજાવો.

(12) પદિક નિદર્શનનાં ફાયદા-મર્યાદા ચર્ચો.

(13) 'નિદર્શનનું કદ' નક્કી કરવા પર ટૂંકનોંધ લખો.

એકમ 4

સંભાવના

: રૂપરેખા :

1. અર્થ
2. વ્યાખ્યાઓ
3. સંભાવનાનો સરવાળા તથા ગુણાકારનો નિયમ
4. દાખલાઓ

પ્રાસ્તાવિક :

આપણે વ્યવહારમાં ઘણી વખત એમ બોલતા હોઈએ છીએ કે આજે વરસાદ પડવાની શક્યતા છે. આજે ભારતને મેચ જીતવાનો "chance" છે. આ શક્યતા અથવા ચાન્સનાં સંખ્યાત્મક માપને આપણે સંભાવના કહી શકીએ. આમ કોઈ ઘટના કે જે અનિશ્ચિત છે (જે હજુ બની નથી પણ બની શકે છે.) તે બનવાની શક્યતાનાં સંખ્યાત્મક માપને સંભાવના કહેવાય. આ અર્થમાં જોઈએ તો મોબાઈલમાં કે ગુગલ પર weather (હવામાન) જોઈએ અને તેમાં વરસાદ પડવાની શક્યતા જે 70% બતાવે, તો તેને સંભાવના કહેવાય.

અહીં આપણે પ્રશિષ્ટ સંભાવનાનો અભ્યાસ કરીશું. જ્યારે આપણે કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગ કરીએ (જેમકે સિક્કો ઉછાળવો) અને તેનાં પરથી કોઈ ઘટના બનવાની સંભાવના શોધીએ તેને પ્રશિષ્ટ સંભાવના કહે છે. સંભાવનાનો અભ્યાસ કરતા પહેલાં આપણે સંભાવના માટે ઉપયોગી કેટલાંક પદો જોઈશું.

યદચ્છ પ્રયોગ : જે પ્રયોગનાં તમામ પરિણામો વિશે જાણતા હોઈએ પરંતુ પ્રયોગને અંતે ચોક્કસપણે કયું પરિણામ ઉદ્ભવશે તે કહી શકીએ નહિ તેવા પ્રયોગને યદચ્છ પ્રયોગ કહે છે. દા.ત. સિક્કો ઉછાળીએ તો આપણને ખ્યાલ છે કે પ્રયોગને અંતે છાપ કે કાંટો મળી શકે છે, પરંતુ સિક્કો ઉછાળતા પહેલાં આપણે ચોક્કસપણે કહી શકતા નથી કે છાપ પડશે કે કાંટો. આમ "સિક્કો ઉછાળવો" એ યદચ્છ પ્રયોગનું ઉદાહરણ છે. આ જ રીતે પાસો ઉછાળવો, પત્તાની વહેંચણી કરવી, કૉલેજનાં વિદ્યાર્થીઓનાં નામની ચિઠ્ઠીઓ બનાવી તેમાંથી એક ચિઠ્ઠી પસંદ કરવી વગેરે પણ યદચ્છ પ્રયોગનાં ઉદાહરણ છે. આ ઉપરથી યદચ્છ પ્રયોગનાં કેટલાક લક્ષણો નીચે મુજબ તારવી શકાય.

1. પ્રયોગને અંતે મળતા તમામ પરિણામો વિશે પહેલેથી ખ્યાલ હોય પરંતુ કોઈ એક પરિણામ વિશે ખાત્રીપૂર્વક કહી શકાય નહિ.

2. પ્રયોગને અંતે કોઈ પણ એક પરિણામ મળે.

3. આ પ્રયોગનું પુનરાવર્તન સ્વતંત્ર રીતે કરી શકાય.

એટલે કે એક સિક્કો ઉછાળતા પહેલી વખત છાપ મળે તો બીજી વખત મળતું પરિણામ પ્રથમ વખત મળેલા પરિણામ પર આધાર રાખતું નથી, તે છાપ પણ હોઈ શકે અથવા કાંટો પણ હોઈ શકે.

નિદર્શ અવકાશ : યદચ્છ પ્રયોગનાં શક્ય તેટલા તમામ પરિણામોનાં ગણને નિદર્શ અવકાશ કહે છે. તેને S અથવા U વડે દર્શાવાય છે. દા.ત. સિક્કો ઉછાળતા છાપ અથવા કાંટો મળી શકે. આમ સિક્કો ઉછાળવાના યદચ્છ પ્રયોગ માટે નિદર્શ અવકાશ {છાપ, કાંટો} થાય. આ જ રીતે એક વર્ગનાં 100 વિદ્યાર્થીઓને તેમનાં રોલ નંબર 1થી 100 સાથે સાંકળતા "આ વર્ગમાંથી એક વિદ્યાર્થી પસંદ કરવાનાં" યદચ્છ પ્રયોગમાં નિદર્શ અવકાશ $\{1,2,....,100\}$ થાય. નિદર્શ અવકાશનાં દરેક પરિણામને નિદર્શ બિંદુ કહે છે. જ્યારે આપણે નિદર્શ અવકાશના બધા જ બિંદુઓને ગણી શકીએ તો તેને શાન્ત નિદર્શ અવકાશ કહે છે અને જ્યારે નિદર્શ અવકાશમાં ગણી ન શકાય તેટલા (અસંખ્ય) બિંદુઓ આવેલા હોય તો તેને અનંત નિદર્શ અવકાશ કહે છે. દા.ત. એક ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા પસંદ કરવાના પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ $\{1,2,....\}$ થાય.

આ જ રીતે બે સિક્કા ઉછાળતા નિદર્શ અવકાશ {HH, HT, TH, TT} થાય.

જ્યારે ત્રણ સિક્કા ઉછાળવાનાં યદચ્છ પ્રયોગમાં નિદર્શ અવકાશ {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT} થાય.

બે પાસા ઉછાળતા {(1,1), (1,2),.....(1,6), (2,1), (2,2).......(2,6), (6,1), (6,2),.....(6,6)} આ નિદર્શ અવકાશ મળે. જેનાં 36 પરિણામો હશે.

એક સિક્કો અને એક પાસો ઉછાળતા {1H, 2H, 3H, 4H, 5H, 6H, 1T, 2T, 3T, 4T, 5T, 6T} નિદર્શ અવકાશ મળે.

આમ,

સાધન	કુલ પરિણામ	કેટલી વખત ઉછાળીએ	નિદર્શ અવકાશનાં ઘટકો
સિક્કો	2 (H,T)	2	$2^2 = 4$
સિક્કો	2 (H,T)	3	$2^3 = 8$
સિક્કો	૨ (H,T)	4	$2^4 = 16$
પાસો	6 (1,2....,6)	1	$6^1 = 6$
પાસો	6	2	$6^2 = 36$
પાસો	6	3	$6^3 = 216$

ઘટના : યદચ્છ પ્રયોગને અંતે મળતા પરિણામને ઘટના કહે છે. સામાન્ય રીતે તેને A, B, C.... વડે દર્શાવાય છે. દા.ત. ''સિક્કો ઉછાળતા છાપ મળે'' તેને ઘટના બની કહેવાય. પાસો ઉછાળતાં તેના પર આંક ''3'' મળ્યો તેને ઘટના બની કહેવાય.

ટૂંકમાં,

સિક્કો/પાસો ઉછાળવો એ યદચ્છ પ્રયોગ છે.

સિક્કો/પાસો ઉછાળતા મળતા પરિણામોનો ગણ એ નિદર્શ અવકાશ છે. {H,T} {1,2,.....6} અને

સિક્કો/પાસો ઉછાળતા જે પરિણામ મળે તેને ઘટના કહે છે. {H} {3}

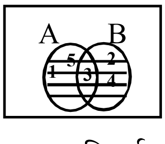
અહીં એ સ્પષ્ટ છે કે ઘટના એ નિદર્શ અવકાશનો ઉપગણ હોય છે. પાસો ઉછાળતા નિદર્શ અવકાશ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ મળે અને પાસા પર મળતા એકી અંકોની સંખ્યાને ઘટના A' વડે દર્શાવીએ તો $A = \{1,3,5\}$ થાય.

આમ $A \subset S$ થાય. (A, Sનો ઉપગણ છે.)

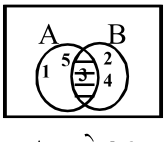
પૂરક ઘટના : કોઈ ઘટના A માટે, નિદર્શ અવકાશમાં હોય પણ, ઘટના Aમાં ન હોય, તેવા તમામ નિદર્શ બિંદુઓનાં ગણને ઘટના Aની પૂરક ઘટના કહે છે. તેને A' અથવા A^c વડે દર્શાવાય છે.

દા.ત. એક પાસો ઉછાળવાનાં નિદર્શ પ્રયોગ માટે નિદર્શ અવકાશ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} થાય. હવે જો પાસો ઉછાળતા તેની પર મળતા એકી અંકોને ઘટના A વડે દર્શાવીએ તો A = {1, 3, 5} થાય જ્યારે A' = {2,4,6} થાય. આમ, A' ને ઘટના A ની પૂરક ઘટના કહે છે.

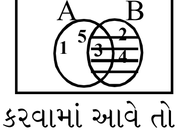
યોગ ઘટનાઃ



છેદ ઘટનાઃ



તફાવત ઘટનાઃ



યોગ ઘટના : નિદર્શ અવકાશ Sમાં ઘટના A અને ઘટના B વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે તો ઘટના Aમાં હોય અથવા ઘટના Bમાં હોય તેવા તમામ નિદર્શ બિંદુઓનાં ગણને ઘટના A તથા ઘટના Bની યોગ ઘટના કહે છે. તેને સંકેતમાં A B વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને A યોગ B એમ વંચાય છે. $A = \{1,3,5\}$ અને $B = \{2,3,4\}$ હોય તો A B = {1,2,3,4,5} થાય.

આમ (A B) = બે ઘટના A અને Bમાંથી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના ઉદ્ભવે

છેદ ઘટના : નિદર્શ અવકાશ Sમાં બે ઘટના A અને B વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે તો ઘટના Aમાં હોય અને ઘટના Bમાં હોય તેવા તમામ નિદર્શ બિંદુઓનાં ગણને ઘટના A તથા ઘટના Bની છેદ ઘટના કહે છે. તેને સંકેતમાં A B વડે દર્શાવાય છે અને A છેદ B એમ વંચાય છે. ઉપરનાં ઉદાહરણમાં A B = {3} થાય.

$(A \quad B) =$ બે ઘટના A અને B સાથે ઉદ્‌ભવે.

તફાવત ઘટના : નિદર્શ અવકાશ Sની બે ઘટનાઓ A અને B માટે જો ઘટના Aમાં હોય અને ઘટના B ન હોય તેવા તમામ નિદર્શ બિંદુઓના ગણને ઘટના A અને Bની તફાવત ઘટના કહે છે. તેને A-B વડે દર્શાવાય છે.

ઉપર દર્શાવેલ ઉદાહરણમાં $A - B = \{1,5\}$

સાનુકૂળ બનાવો : નિદર્શ અવકાશ Sનાં જે બનાવો ઘટનાની પ્રાપ્તિ માટે અનુકૂળ હોય તેવા બનાવોને તે ઘટના માટેનાં સાનુકૂળ બનાવો કહે છે. દા.ત. પાસો ઉછાળતા આંક {1,2.....6} મળી શકે. હવે આપણે ઘટના A ને પાસા પરના એકી સંખ્યા મળે તેમ વ્યાખ્યાયિત કરીએ તો નિદર્શ બિંદુઓ 1,3,5 એ ઘટના A માટે સાનુકૂળ બનાવો કહેવાય. સાદા શબ્દોમાં કોઈ ઘટના માટે આપણે જે બનાવ જોઈતો હોય તેને સાનુકૂળ બનાવ કહેવાય.

સમસંભવી ઘટનાઓ : જો કોઈ યદચ્છ પ્રયોગમાં દરેક ઘટના બનવાની સંભાવના એકસરખી હોય તો તે ઘટનાઓને સમસંભવી ઘટના કહે છે. દા.ત. ખામીરહિત પાસા ઉછાળતા તેના પર મળતો અંકની સંભાવના સરખી છે. આથી તેને "પાસો ઉછાળતા તેના પર મળતાં આંકની સંખ્યા" એ સમસંભવી ઘટના છે.

પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ : નિદર્શ અવકાશની ઘટનાઓમાંથી જ્યારે એક ઘટના બનવાથી બાકીની ઘટનાઓનું નિવારણ થાય ત્યારે આવી ઘટનાઓને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહે છે. દા.ત. સિક્કો ઉછાળતાં તેની પર છાપ {H} મળે તેને ઘટના A કહીએ અને કાંટો મળે તેને ઘટના B કહીએ તો ઘટના A અને ઘટના B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ થાય. આમ, બે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ A અને B માટે $A \cap B$ અશક્ય ઘટના થાય.

નિઃશેષ ઘટનાઓ : જો કોઈ બે કે વધુ ઘટનાઓ એવી રીતે બને કે તે તમામ ઘટનાઓનાં તમામ ઘટકો એ બધા જ નિદર્શ બિંદુઓને આવરી લે તો તે બે કે વધુ ઘટનાઓને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહેવાય.

દા.ત. પાસા ઉછાળવાના પ્રયોગમાં બે ઘટના $A = \{1,2,3\}$ અને $B = \{4,5,6\}$ હોય તો ઘટના A અને B ને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહે છે.

નિરપેક્ષ ઘટના : જ્યારે એકથી વધુ ઘટનાઓ સાથે (અથવા એક પછી એક) બનતી હોય ત્યારે એક ઘટનાની પ્રાપ્તિની બીજી ઘટનાની પ્રાપ્તિ અથવા અપ્રાપ્તિ પર કોઈ અસર થાય નહિ ત્યારે તે બે ઘટનાઓને નિરપેક્ષ ઘટના કહે છે. દા.ત. એક સિક્કો અને એક પાસો સાથે ઉછાળતા સિક્કા પર છાપ મળે ત્યારે પાસા પર ગમે તે અંક મળી શકે છે. આમ બંને ઉપર મળતા બનાવો એકબીજાથી સ્વતંત્ર છે. આવી ઘટનાને નિરપેક્ષ અથવા સ્વતંત્ર ઘટનાઓ કહે છે.

આટલી પૂર્વભૂમિકા બાદ હવે આપણે સંભાવનાની વ્યાખ્યાઓ જોઈશું.

સંભાવનાની ગાણિતિક અથવા પ્રશિષ્ટ (પૂર્વસ્વીકૃત) વ્યાખ્યા :

જો કોઈ યદચ્છ પ્રયોગના સમસંભવી, પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ બનાવોની કુલ સંખ્યા n હોય અને તેમાંથી m બનાવો કોઈ ઘટના 'A'ને અનુકૂળ હોય તો ઘટના A બનવાની સંભાવના $\frac{m}{n}$ હોય છે જેને P(A) વડે દર્શાવાય છે. હવે જો આપણે ઘટના A બનવાને સફળતા ગણીએ અને સફળતાની સંભાવનાને P વડે દર્શાવીએ તો ઘટના A બનવાની સંભાવના નીચેના સૂત્રથી અપાય છે.

$$P(A) = \frac{\text{ઘટના A માટેના સાનુકૂળ બનાવોની સંખ્યા}}{\text{કુલ બનાવોની સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

હવે n બનાવોમાંથી m બનાવોમાં સફળતા મળે છે એટલે કે બાકીના $(n - m)$ બનાવોમાં નિષ્ફળતા મળે છે. નિષ્ફળતાની સંભાવનાને જો q વડે દર્શાવીએ તો $q = \frac{n-m}{n}$ થાય.

હવે જો નિદર્શ અવકાશમાં બધા જ બનાવો A માટે સાનુકુળ હોય તો $m = n$ થાય અને

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$ થાય

જ્યારે બધા જ બનાવો સાનુકુળ ન હોય તો $m = 0$ થાય અને $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$ થાય.

આમ, સંભાવનાની કિંમત હંમેશા 0 અને 1ની વચ્ચે જ આવે છે.

$0 \le P(A) \le 1$

$P(A) = 1$ થાય તો A ને ચોક્કસ ઘટના કહે છે.

$P(A) = 0$ હોય તો A ને અશક્ય ઘટના કહે છે.

મર્યાદાઓ :

(i) આ વ્યાખ્યા માત્ર સમસંભવી ઘટનાઓ માટે જ સાચી છે. એટલે કે એક પાસા પર ત્રણ બાજુ 1, 1 અને 1 લખીએ અને બાકીના આંકે 2,3,4 હોય તો આ ઘટનાઓ સમસંભવી બને નહિ.

(ii) અનન્ત બનાવો હોય તેવા પ્રયોગોમાં આ વ્યાખ્યા ઉપયોગી નથી.

(iii) સંભાવનાની વ્યાખ્યામાં ×સમસંભવી× શબ્દ આવે છે. જે સંભાવનાનો જે એક પ્રકાર છે. આમ સંભાવનાની વ્યાખ્યામાં જ સંભાવના શબ્દનો ઉપયોગ થાય છે.

ઉદાહરણ-1 : બે સિક્કાને એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો તેનાં પર એક છાપ મળે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબઃ બે સિક્કા ઉછાળતા કુલ $2^2 = 4$ નિદર્શ બિંદુઓ $\{HH, HT, TH, TT\}$ મળે. આમ કુલ બનાવો $n = 4$ થાય. આપણે એક છાપ મળે તેને સફળતા કહીએ છીએ (તેને ઘટના A કહીએ તો) $\{HT, TH\}$ એમ બે રીતે એક વખત છાપ મળી શકે. આમ સાનુકૂળ બનાવો $m = 2$ થશે.

હવે સફળતાની સંભાવના = $P(A) = \frac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

આમ એક છાપ મળવાની સંભાવના $P(A) = \frac{1}{2} = 0.5$ થાય.

ઉદાહરણ-2 : બે પાસાને ઉછાળતા તેના પર મળતા આંકનો સરવાળો "4" મળે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબઃ એક પાસા પર $\{1, 2, ...6\}$ એમ 6 આંક હોય.

આવા બે પાસા ઉછાળતા $6^2 = 36$ બનાવો બની શકે.

આ બનાવો $\{(1,1), (1,2), ...(1,6)$

$(2,1), (2,2), ...(2,6)$

.

.

.

.

$(6,1), (6,2), ...(6,6)\}$ હોય છે.

પાસા પરના આંકનો સરવાળો '4' હોય તેને અહીં સાનુકૂળ બનાવો કહીએ છીએ. આવા બનાવોની સંખ્યા $\{(1,3), (2,2), (3,1)\}$ એમ 3 થાય.

હવે, બે પાસા ઉછાળતાં તેના પર મળતા આંકનો સરવાળો 4 હોય તેની સંભાવના =

$$\frac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

ઉદાહરણ-3 : 52 પત્તાની જોડમાંથી યદચ્છ રીતે એક પત્તું લેતા તે

(i) લાલનું હોય

(ii) રાજા હોય

(iii) લાલનો રાજા હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

પત્તાની એક જોડમાં 52 પત્તા છે. આમ કુલ બનાવો $n = 52$ થાય. હવે તેમાં લાલનાં 13 પત્તા, રાજાના 4 પત્તા અને લાલનો રાજા 1 હોય છે. તે સાનુકૂળ બનાવો થાય.

(i) પત્તુ લાલનું હોય તેની સંભાવના = $\frac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \frac{m}{n} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

(ii) પત્તુ રાજા હોય તેની સંભાવના = $\frac{m}{n} = \frac{4}{52} = \frac{1}{3}$

(iii) પત્તુ લાલનો રાજા હોય = $\frac{m}{n} = \frac{1}{52}$ થાય.

નોંધ : n માંથી r વસ્તુની પસંદગી ${}^nC_r$ રીતે થાય.

(i) ${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

(ii) ${}^nC_o = {}^nC_n = 1$ થાય. ${}^5C_0 = {}^5C_5 = 1$

આમ બધી જ વસ્તુઓમાંથી શૂન્ય અથવા બધી જ વસ્તુ 1 પ્રકારે પસંદ થાય.

(iii) ${}^nC_1 = {}^nC_{n-1} = n$ થાય. ${}^5C_1 = {}^5C_4 = 5$ થાય.

બધી જ વસ્તુમાંથી એક અથવા $(n-1)$ વસ્તુ કુલ n પ્રકારે પસંદ થાય.

(iv) ${}^nC_1 = {}^nC_{n-r}$ થાય જેમ કે ${}^{10}C_2 = {}^{10}C_{10-2} = {}^{10}C_8$

ઉદાહરણ-4 : 52 પત્તાની જોડમાંથી બે પત્તા લેવામાં આવે તો તે એક રાજા અને એક રાણી આવે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં 52 પત્તામાંથી 2 પત્તાની પસંદગી ${}^{52}C_2$ રીતે થાય.

${}^{52}C_2 = \frac{52!}{2! \times (52-2)!} = \frac{52 \times 51 \times 50!}{2 \times 50!} = 1326$ કુલ બનાવો થાય.

કુલ 4 રાજામાંથી 1 રાજાની પસંદગી ${}^4C_1$ અને 4 રાણીમાંથી 1 રાણીની પસંદગી ${}^4C_1$ રીતે થાય.

આમ, રાજા અને રાણી આવવાનો કુલ પ્રકારો = ${}^4C_1 \times {}^4C_1 = 4 \times 4 = 16$ રીતે થાય.

સંભાવના = $\frac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \frac{m}{n}$

$$= \frac{16}{1326} = \frac{8}{663} \text{ થાય}$$

ઉદાહરણ-5 : એક પેટીમાં 5 કાળા અને 4 સફેદ દડા છે, તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે દડા લેવામાં આવે તો

(i) બંને દડા કાળા હોવાની

(ii) એક દડો કાળો અને એક દડો સફેદ હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : પેટીમાં કુલ 5 કાળા + 4 સફેદ એમ 9 દડા છે.

9 માંથી 2 દડાની પસંદગી ${}^{9}C_2$ રીતે થાય.

$${}^{9}C_2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{2 \times 7!} = 36 \text{ કુલ બનાવો બને. } \therefore \ n = 36$$

(i) બંને કાળા દડા ${}^{5}C_2 = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 10$ રીતે મળે. $\therefore \ m = 10$

$$\text{સંભાવના} = \frac{m}{n} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

(ii) એક દડો કાળો અને એક દડો સફેદ મળે.

(5માંથી 1 કાળો દડો મળે) અને (4માંથી 1 સફેદ દડો મળે)

${}^{5}C_1 \times {}^{4}C_1 = 5 \times 4 = 20$ રીતે મળે. $\therefore \ m = 20$

$$\text{સંભાવના} = \frac{m}{n} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

સંભાવનાની સંખ્યાકીય અથવા આનુભાવિક વ્યાખ્યા :

જો સમાન શરતો હેઠળ પ્રયોગનું ખૂબ વધારે વખત પુનરાવર્તન કરવામાં આવે તો કોઈ એક ઘટના બનવાના પ્રયત્નો અને કુલ પ્રયત્નોના ગુણોત્તરનાં લક્ષને તે ઘટનાની સફળતાની સંભાવના કહે છે.

કુલ n પ્રયત્નોમાં m વખત ઘટના A બનતી હોય તો ઘટના A બનવાની સંભાવના નીચે મુજબ મળે છે.

$$P(A) = \lim_{n} \frac{m}{n}$$

સંભાવનાની પૂર્વધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા :

જો કોઈ યદચ્છ પ્રયોગનાં નિદર્શ અવકાશ S નાં ઉપગણ A હોય અને તેની સાથે સંકળાયેલ સંખ્યા $P(A)$ જો નીચેની પૂર્વધારણાઓનું સમાધાન કરે તો તેને ઘટના A ની સંભાવના કહે છે.

પૂર્વધારણા-1 : $0 \le P(A) \le 1$

($P(A)$ ની કિંમત 0 થી 1ની વચ્ચે હોવી જોઈએ.)

પૂર્વધારણા-2 : $P(S) = 1$

પૂર્વધારણા-3 : જો $A_1, A_2, ...A_n$ એ નિદર્શ અવકાશ S ની પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો

$$P(A_1 \quad A_2 \quad .... \quad A_n) = P(A) + P(A_2) + ... + P(A_n) \text{ થાય.}$$

શરતી સંભાવના : ધારો કે A અને B બે ઘટનાઓ હોય તો જ્યારે ઘટના A બની ગઈ હોય ત્યારબાદ ઘટના B બનવાની સંભાવનાને ઘટના B ની શરતી સંભાવના કહે છે. તેને $P(B/A)$ વડે દર્શાવાય છે. અને $P(B/A) = \frac{P(A \quad B)}{P(A)}, P(A) \quad 0$

એક શાળામાં ધોરણ 10માં 100 વિદ્યાર્થીઓ છે. તેમાંથી 60 છોકરાઓ છે જ્યારે 40 છોકરીઓ છે. વર્ગનાં 70 વિદ્યાર્થીઓ પાસ થાય છે અને નાપાસ થનાર છોકરાઓની સંખ્યા 20 છે.

હવે ઘટના Aને છોકરો હોય અને ઘટના Bને વિદ્યાર્થી પાસ હોય એમ કહીએ તો ઉપરની માહિતીને કોષ્ટકમાં નીચે મુજબ મૂકી શકાય.

	પાસ	નાપાસ	
છોકરો	40	20	60
છોકરી	30	10	40
	70	30	કુલ=100

નોંધ : સર્કલ કરેલ માહિતી બાદબાકીથી મળે છે. આમ $P(A) = \frac{60}{100}$ અને $P(B) = \frac{70}{100}$ થાય.

હવે જો વિદ્યાર્થી છોકરો છે તેમ આપેલું હોય તો તે નાપાસ થયો હોય તેની સંભાવના = $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ થાય.

આમ, $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{3}$ થાય.

કેટલાંક પરિણામો :

(i) ઘટના A બનવાની સંભાવના = $P(A) = \frac{m}{n}$

(ii) $P(A')$ = ઘટના A ન બનવાની સંભાવના $P(A') = 1 - P(A)$

આમ કોઈ પણ ઘટના A માટે $P(A) + P(A') = 1$ થાય.

(iii) બે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A \quad B) = 0$ થાય.

(iv) બે સ્વતંત્ર ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A \quad B) = P(A).P(B)$

(v) સંભાવનાનો સરવાળાનો નિયમ : જો ઘટના A અને ઘટના B નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ હોય અને તે બેમાંથી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના ઉદ્‌ભવે તેની સંભાવના નીચેના સૂત્રથી દર્શાવાય છે.

$P(A \quad B) = P(A) + P(B) - P(A \quad B)$

જો બે ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક હોય તો $P(A \quad B) = P(A) + P(B)$ થાય.

(vi) બે ઘટનાઓ A અને B માંથી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના ન ઉદ્‌ભવે તેની સંભાવના નીચે મુજબ દર્શાવાય છે.

$P(A' \quad B') = P(A \quad B)'$

$= 1 - P(A \quad B)$ થાય.

(vii) ઘટના A અને B બંને ન ઉદ્‌ભવે તેની સંભાવના

$P(A' \quad B') = P(A \quad B)' = 1 - P(A \quad B)$

(viii) બે ઘટનાઓમાંથી ઘટના A ઉદ્‌ભવે અને ઘટના B ન ઉદ્‌ભવે (એટલે કે ફક્ત ઘટના A જ બને) તેની સંભાવના

$P(A \quad B') = P(A) - P(A \quad B) = P(A - B)$ થાય.

(ix) ત્રણ ઘટના A, B અને C માટે સંભાવનાનો સરવાળાનો નિયમ નીચે મુજબ આપી શકાય.

$$P(A \quad B \quad C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \quad B) - P(A \quad C) - P(B \quad C) + P(A \quad B \quad C)$$

સંભાવનાનું ગુણાકારનું પ્રમેયઃ

નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે ઘટના A અને ઘટના B સાથે બનવાની સંભાવના, ઘટના A બને અને ઘટના A બની ગઈ છે તે શરતે ઘટના B બને તેના ગુણાકાર બરાબર થાય છે. તેને સંકેતમાં

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left(B/_{A}\right)$ વડે દર્શાવાય છે. હવે જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટના હોય તો A અને B બંનેની બનવાની સંભાવના

$P(A \quad B) = P(A).P(B)$ થાય.

ઉદાહરણ-6 : એક કોથળીમાં 4 લાલ અને 6 સફેદ દડા છે જ્યારે બીજી કોથળીમાં 5 લાલ અને 7 સફેદ દડા છે. કોઈ વ્યક્તિ યદચ્છ રીતે એક કોથળી પસંદ કરે અને તેમાંથી એક દડો પસંદ કરે તો તે દડો સફેદ આવવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં વ્યક્તિ સૌ પ્રથમ એક કોથળી પસંદ કરે છે. બેમાંથી એક કોથળીની પસંદગીની સંભાવના $= \frac{1}{2}$ થાય.

પ્રથમ કોથળીમાંથી એક સફેદ દડો પસંદ થવાની સંભાવના $= \frac{6}{10}$

બીજી કોથળીમાંથી એક સફેદ દડો પસંદ થવાની સંભાવના $= \frac{7}{12}$

એક સફેદ દડો આવે તે માટે, પ્રથમ કોથળી પસંદ થાય અને પ્રથમ કોથળીમાંથી ૧ સફેદ દડો પસંદ થાય

અથવા બીજી કોથળી પસંદ થાય અને બીજી કોથળીમાંથી ૧ સફેદ દડો પસંદ થાય હોવું જોઈએ.

$$\therefore \text{સંભાવના} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{12}$$

$$= \frac{6}{20} + \frac{7}{24}$$

$$= \frac{61}{120}$$

ઉદાહરણ-7 : એક કોથળીમાં 5 લાલ અને 6 સફેદ દડા છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે એક પછી એક એમ બે દડા (1) પુરવણી સહિત અને (2) પુરવણી રહિત લેવામાં આવે તો બંને દડા સફેદ હોવાની સંભાવના શોધો.

નોંધ : પુરવણી સહિત નિદર્શન : જ્યારે બીજો દડો પસંદ કરતાં પહેલાં પ્રથમ પસંદ કરેલ દડો નિદર્શમાં પાછો મૂકવામાં આવે તો તેને પુરવણી સહિત નિદર્શન કહે છે. આમ આ નિદર્શનમાં દરેક પસંદગી વખતે નિદર્શના અવલોકનોની સંખ્યા સમાન રહે છે.

પુરવણી રહિત નિદર્શન : જ્યારે બીજો દડો પસંદ કરતાં પહેલાં પ્રથમ પસંદ કરેલ દડો નિદર્શમાં પાછો ન મૂકવામાં આવે તો તેને પુરવણી રહિત નિદર્શન કહે છે. આમ આ નિદર્શનમાં દરેક પસંદગી વખતે નિદર્શમાં કુલ સંખ્યા ઘટે છે.

જવાબ : કોથળીમાં 5 લાલ + 6 સફેદ = 11 કુલ દડા છે.

(i) પુરવણી સહિત નિદર્શન દ્વારા એક પછી એક એમ બે દડા લેવામાં આવે છે.

બંને દડા સફેદ આવે તે માટે (પ્રથમ દડો સફેદ આવે) અને (બીજો દડો સફેદ આવે)

સંભાવના $$= \frac{^{6}C_1}{^{11}C_1} \times \frac{^{6}C_1}{^{11}C_1}$$

$$= \frac{6}{11} \times \frac{6}{11} = \frac{36}{121}$$

(ii) પુરવણી રહિત નિદર્શન દ્વારા એક પછી એક એમ બે દડા લેવામાં આવે ત્યારે

બંને દડા સફેદ આવે તે માટે, (પ્રથમ દડો સફેદ આવે) અને (બીજો દડો સફેદ આવે)

$$= \frac{^{6}C_1}{^{11}C_1} \times \frac{^{5}C_1}{^{10}C_1}$$

$$= \frac{3}{11}$$

ઉદાહરણ-8 : એક ટોપલીમાં 2 ગુલાબનાં, 3 ચંપાનાં અને 4 પારિજાતનાં ફૂલો છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે ત્રણ પુષ્પો લેવામાં આવે તો

(i) ત્રણે ફૂલો જુદા રંગનાં હોય

(ii) બે ફૂલો એક જ રંગનાં હોય અને એક ફૂલ જુદા રંગનું હોય.

(iii) ત્રણેય ફૂલો એક જ રંગનાં હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

ટોપલીમાં	2 ગુલાબ
	3 ચંપો
	4 પારિજાતનાં ફૂલો છે.
કુલ	9 ફૂલો છે.

9માંથી 3 ફૂલો $^{9}C_3$ રીતે પસંદ થાય.

આમ, કુલ બનાવો $n = {^{9}C_3} = \frac{9!}{(9-3)!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84$ બને.

(i) ત્રણેય ફૂલો જુદા રંગના હોય. તેનાં પ્રકારો

(એક ફૂલ ગુલાબનું હોય) અને (એક ફૂલ ચંપાનું હોય) અને (એક ફૂલ પારિજાતનું હોય)

સાનુકૂળ બનાવો = $^2C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4C_1$

$= 2 \times 3 \times 4$

$= 24$

અને ત્રણેય ફૂલો જુદા રંગનાં હોવાની સંભાવના $= \dfrac{^2C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4C_1}{^9C_3} = \dfrac{24}{84} = \dfrac{2}{7}$ થાય.

(ii) બે ફૂલ એક જ રંગનાં હોય અને એક ફૂલ જુદા રંગનું હોય તેનાં પ્રકારો

બે માંથી બે ફૂલ ગુલાબના હોય અને બાકીનાં 7 માંથી એક ફૂલ બીજા રંગનું હોય અથવા 3માંથી 2 ફૂલ ચંપાના હોય અને બાકીનાં 6 માંથી 1 ફૂલ અન્ય રંગનું હોય

અથવા 4માંથી 2 ફૂલ પારિજાતનું હોય અને બાકીનાં 5 માંથી 1 ફૂલ અન્ય રંગનું હોય

$\therefore$ સાનુકુળ બનાવો m

$= \left(^2C_2 \times {}^7C_1\right) + \left(^3C_2 \times {}^6C_1\right) + \left(^4C_2 \times {}^5C_1\right)$

$= (1 \times 7) + (3 \times 6) + (6 \times 5)$

$= 7 + 18 + 30$

= 55 રીતે પસંદ થાય.

હવે બે ફૂલ એક જ રંગનાં હોય અને એક ફૂલ જુદા રંગનું હોય તેની સંભાવના

$= \dfrac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \dfrac{55}{84}$

(iii) ત્રણેય ફૂલો એક જ રંગનાં હોય તેવા બનાવો

અહીં ગુલાબનાં બે જ ફૂલો છે. તેમાંથી ત્રણ ફૂલોની પસંદગી થઈ શકે નહિ.

$\therefore$ સાનુકૂળ બનાવો m = (3માંથી 3 ફૂલ ચંપાનાં હોય) અથવા (4માંથી 3 ફૂલો પારિજાતનાં હોય)

$= {}^3C_3 + {}^4C_3$

$= 1 + 4$

= 5 બનાવો.

ત્રણેય ફૂલ એક જ રંગનાં હોય તેની સંભાવના

$= \dfrac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \dfrac{5}{84} = \dfrac{5}{84}$

ઉદાહરણ-9 : જો $P(A) = \dfrac{3}{4}, P(B) = \dfrac{5}{8}$ અને $P(A \cap B) = \dfrac{1}{2}$ હોય તો

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(B/A)$ (iii) $P(A' \cup B')$ શોધો.

જવાબ : બે ઘટનાઓ A અને B માટે

(i) $P(A \cup B) \quad = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{6+5-4}{8}$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{8}$$

(ii) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(iii) $P(A' \cup B') = P(A \cap B)'$

$$= 1 - P(A \cap B)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}$$

$$P(A' \cup B') = \frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ-10 : જો $3P(A) = 2P(B) = 4P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ હોય તો

(i)$P(A \cup B)$ (ii)$P(A' \cap B')$ (iii)$P(B/A')$ શોધો.

જવાબ : અહીં $3P(A) = 2P(B) = 4P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ આપેલ છે.

$\therefore 3P(A) = \frac{1}{3}$ $\quad\quad$ $\therefore P(A) = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$ થાય.

$2P(B) = \frac{1}{3}$ $\quad\quad$ $\therefore P(B) = \frac{1}{6}$ થાય.

$4P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ $\quad\quad$ $\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ થાય.

હવે,

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{4+6-3}{36} = \frac{7}{36}$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{36}$$

(ii) $P(A'\cap B') = P(A\cup B)'$

$$= 1 - P(A\cup B)$$

$$= 1 - \frac{7}{36} = \frac{36-7}{36}$$

$$P(A'\cap B') = \frac{29}{36}$$

(iii) $P(B/A') = \dfrac{P(B\cap A')}{P(A')}$

$$= \frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)}{\left(1-\frac{1}{9}\right)}$$

$$= \frac{\frac{12-6}{12}}{\frac{9-1}{9}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{2}\times\frac{9}{8} = \frac{9}{16}$$

$$P(B/A') = \frac{9}{16}$$

ઉદાહરણ-11 : જો A અને B બે ઘટનાઓ માટે $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ અને $P(A\cap B) = \frac{1}{4}$ હોય તો

(i) ઘટના A અથવા B બને

(ii) ઘટના A ન બને અને ઘટના B ન બને.

(iii) ઘટના A ન બને અને ઘટના B બને.

(iv) ઘટના B' બને તે શરતે ઘટના A' બને તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

(i) ઘટના A અથવા B બને તેને સંકેતમાં $P(A\cup B)$ વડે દર્શાવાય.

હવે $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{6+4-3}{12} = \frac{7}{12}$$

(ii) ઘટના A ન બને અને ઘટના B ન બને એટલે

$P(A'\cap B') = P(A\cup B)'$

$$= 1 - P(A\cup B)$$

$$= 1 - \frac{7}{12}$$

$P(A' \cap B') = \dfrac{5}{12}$

(iii) ઘટના B બને અને A ન બને એટલે $P(B \cap A')$

$P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B)$

$= \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$

$P(B \cap A') = \dfrac{1}{12}$

(iv) ઘટના B' બને તે શરતે ઘટના A' બને તેની સંભાવના

$= P(A'/B')$

$$P(A'/B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')}$$

$$= \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{5}{12} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

$P(A'/B') = \dfrac{5}{8}$

ઉદાહરણ-12 : જો A અને B બે ઘટનાઓ માટે $P(A) = 0.5$ અને $P(B) = 0.4$ હોય અને જો

(i) A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B')$ શોધો.

(ii) A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B')$ શોધો.

જવાબ : ઘટના A અને ઘટના B જો પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો $P(A \cap B) = 0$ થાય.

ઘટના A અને ઘટના B જો નિરપેક્ષ (સ્વતંત્ર) ઘટનાઓ હોય તો $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ થાય.

(i) બે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ માટે

$P(A \cap B) = 0$ થાય.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.5 + 0.4 - 0$

$P(A \cup B) = 0.9$

$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - 0$

$P(A \cap B') = 0.5$

(ii) બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ માટે

$P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0.5 \times 0.4 = 0.20$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.4 - 0.2 = 0.7$

$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.2 = 0.3$

બેઈઝનું પ્રમેય (પ્રતીપ સંભાવના)

જો પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ $A_1, A_2, ...A_n$ બનવાની સંભાવના $P(A_1), P(A_2), ...P(A_n)$ હોય તથા કોઈ ઘટના E એવી બની શકતી હોય કે જેથી $P(E/A_1), ..., P(E/A_n)$ જાણતાં હોઈએ તો ઘટના E બની ગઈ છે તે શરતે ઘટના A_i બનવાની સંભાવનાનું સૂત્ર નીચે મુજબ છે. જેને બેઈઝનું પ્રમેય કહે છે.

$$P(A_1 / E) = \frac{P(A_1).P(E/A_1)}{P(A_1).P(E/A_1) + P(A_2) \bullet P(E/A_2) + ... + P(A_n) \bullet P(E/A_n)}$$

ત્રણ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ A_1, A_2 અને A_3 માટે,

$$P(A_1 / E) = \frac{P(A_1).P(E/A_1)}{P(A_1).P(E/A_1) + P(A_2) \bullet P(E/A_2) + P(A_3) \bullet P(E/A_3)}$$

ઉદાહરણ-13 : એક ફેક્ટરીમાં દરરોજ મશીન A દ્વારા 1000, B દ્વારા 1500 અને C દ્વારા 2000 એકમોનું ઉત્પાદન થાય છે. તેમનાં ઉત્પાદનમાં અનુક્રમે 3%, 2% અને 1% વસ્તુઓ ખામીવાળી બને છે. તો સમગ્ર ઉત્પાદનમાંથી યદચ્છ રીતે એક વસ્તુ લેવામાં આવે અને તે ખામીવાળી જ હોય તો તે મશીન Cમાંથી ઉત્પાદિત થઈ હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં વસ્તુ ખામીવાળી મળે તેને ઘટના E કહીએ અને ત્રણ મશીન દ્વારા વસ્તુનાં ઉત્પાદનને A, B, C કહીએ. દરરોજ કુલ $1000 + 1500 + 2000 = 4500$ વસ્તુઓ બને છે.

વસ્તુ મશીન Aમાંથી ઉત્પાદીત થાય તેની સંભાવના $P(A) = \frac{1000}{4500} = \frac{2}{9}$

વસ્તુ મશીન Bમાંથી બને તેની સંભાવના $P(B) = \frac{1500}{4500} = \frac{3}{9}$

વસ્તુ મશીન Cમાંથી બને તેની સંભાવના $P(C) = \frac{2000}{4500} = \frac{4}{9}$

મશીન Aનું ખામીપ્રમાણ 3% છે. આમ, $P(E/A) = \frac{3}{100}$

મશીન Bનું ખામીપ્રમાણ 2% છે. આમ $P(E/B) = \frac{2}{100}$

મશીન Cનું ખામીપ્રમાણ 1% છે. આમ $P(E/C) = \frac{1}{100}$.

હવે વસ્તુ મશીન A દ્વારા ઉત્પાદીત હોય અને ખામીવાળી હોય

$$= P(A).P(E/A) = \frac{2}{9} \times \frac{3}{100} = \frac{6}{900}$$

વસ્તુ મશીન B દ્વારા ઉત્પાદીત હોય અને ખામીવાળી હોય

$$= P(B) \times P(E/B) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{100} = \frac{6}{900}$$

વસ્તુ મશીન C દ્વારા ઉત્પાદીત હોય અને ખામીવાળી હોય

$$= P(C) \times P(E/C) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{100} = \frac{4}{900}$$

આમ કોઈ પણ મશીનમાંથી વસ્તુ ખામીવાળી મળે તેની કુલ સંભાવના

$$= \frac{6}{900}+\frac{6}{900}+\frac{4}{900}=\frac{16}{900}$$

હવે, વસ્તુ ખામીવાળી જણાઈ તો તે મશીન Cમાંથી ઉત્પાદીત હોય તેની સંભાવના

$$P(C/E)=\frac{P(C).P(E/C)}{P(A)P(E/A)+P(B).P(E/B)+P(C).P(E/C)}$$

$$=\frac{\frac{4}{900}}{\frac{16}{900}}$$

$$=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

આ જ દાખલાને ટૂંકમાં નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય.

વસ્તુ મશીનમાંથી પસંદ થવાની સંભાવના	**વસ્તુ ખામીવાળી હોવાની સંભાવના**	**વસ્તુ મશીનમાંથી પસંદ થાય અને ખામીવાળી હોય તેની સંભાવના**
$P(A)=\frac{1000}{4500}=\frac{2}{9}$	$P(E/A)=\frac{3}{100}$	$P(A).P(E/A)=\frac{2}{9}\times\frac{3}{100}=\frac{6}{900}$
$P(B)=\frac{3}{9}$	$P(E/B)=\frac{2}{100}$	$P(B).P(E/B)=\frac{3}{9}\times\frac{2}{100}=\frac{6}{900}$
$P(C)=\frac{4}{9}$	$P(E/C)=\frac{1}{100}$	$P(C)\bullet P(E/C)=\frac{4}{9}\times\frac{1}{100}=\frac{4}{900}$
		વસ્તુ ખામીવાળી મળે તેની સંભાવના $=\frac{16}{900}$

$$P(C/E)=\frac{\text{વસ્તુ ત્રીજા મશીનમાંથી પસંદ થાય અને ખામીવાળી હોય}}{\text{વસ્તુ ખામીવાળી હોય}}$$

$$=\frac{P(C).P(E/C)}{P(A).P(E/A)+P(B).P(E/B)+P(C).P(E/C)}$$

$$=\frac{4/900}{16/900}$$

$$P(C/E)=\frac{1}{4}$$

ઉદાહરણ-14 : એક ફેક્ટરીમાં ત્રણ મશીનો A, B, C અનુક્રમે કુલ ઉત્પાદનનાં 30%, 30% અને 40% ઉત્પાદન કરે છે. જો તે મશીનો 3%, 4% અને 5% ખામીવાળી વસ્તુઓ બનાવતા હોય અને જો સમગ્ર ઉત્પાદનમાંથી યદચ્છ રીતે એક વસ્તુ લેવામાં આવે અને તે ખામીવાળી જણાય તો તે વસ્તુ મશીન A દ્વારા ઉત્પાદિત થઈ હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં વસ્તુ ખામીવાળી હોય તેને ઘટના E કહીશું અને ત્રણ મશીનો A, B અને Cમાંથી વસ્તુના ઉત્પાદનને P(A), P(B) અને P(C) કહીએ તો

વસ્તુ ચોક્કસ મશીનમાંથી ઉત્પાદીત થાય તેની સંભાવના	ચોક્કસ મશીનની વસ્તુ ખામીવાળી હોય તેની સંભાવના	વસ્તુ ચોક્કસ મશીનમાંથી પસંદ થાય અને ખામીવાળી હોય તેની સંભાવના
$P(A) = 30\% = \frac{3}{10}$	$P(E/A) = 3\% = \frac{3}{100}$	$P(A).P(E/A) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{100} = \frac{9}{1000}$
$P(B) = 30\% = \frac{3}{10}$	$P(E/B) = 4\% = \frac{4}{100}$	$P(B).P(E/B) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{100} = \frac{12}{1000}$
$P(C) = 40\% = \frac{4}{10}$	$P(E/C) = 5\% = \frac{5}{100}$	$P(C).P(E/C) = \frac{4}{10} \times \frac{5}{100} = \frac{20}{1000}$

વસ્તુ ખામીવાળી હોય તેની સંભાવના $= \left[\frac{9}{1000} + \frac{12}{1000} + \frac{20}{1000}\right] = \frac{41}{1000}$

હવે ખામીવાળી વસ્તુ A મશીન દ્વારા બની હોય તેની સંભાવના

$$P(A/E) = \frac{P(A).P(E/A)}{P(A).P(E/A) + P(B).P(E/B) + P(C).P(E/C)}$$

$$= \frac{\frac{9}{1000}}{\frac{41}{1000}} = \frac{9}{41}$$

ઉદાહરણ-15 : પેટી Aમાં 4 લાલ અને 3 સફેદ દડા છે. પેટી Bમાં 5 લાલ અને 4 સફેદ દડા છે અને પેટી Cમાં 3 લાલ અને 5 સફેદ દડા છે. જો તેમાંથી યદચ્છ રીતે એક પેટી પસંદ કરી તેમાંથી બે દડા લેવામાં આવે તો એક દડો લાલ અને એક દડો સફેદ આવવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ: અહીં ત્રણ પેટીમાંથી સૌપ્રથમ એક પેટી પસંદ કરવામાં આવે છે. 3માંથી એક પેટી પસંદ થવાની સંભાવના $= \frac{1}{3}$ થાય.

દડા	પેટી			કુલ
	A	B	C	
લાલ	4	5	3	12
સફેદ	3	4	5	12
કુલ	**7**	**9**	**8**	**24 કુલ દડા**

હવે એક લાલ અને એક સફેદ દડો પસંદ થવાને ઘટના E કહીએ તો

P(E) = (પેટી A પસંદ થાય અને તેમાંથી એક લાલ અને એક સફેદ દડો પસંદ થાય.) અથવા (પેટી B પસંદ થાય અને તેમાંથી એક લાલ અને એક સફેદ દડો પસંદ થાય.)

અથવા (પેટી C પસંદ થાય અને તેમાંથી એક લાલ અને એક સફેદ દડો પસંદ થાય.)

$$= P(A).P(E/A) + P(B).P(E/B) + P(C).P(E/C)$$

$$=\left(\frac{1}{3}\times\frac{{}^4C_1\times{}^3C_1}{{}^7C_2}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{{}^5C_1\times{}^4C_1}{{}^9C_2}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{{}^3C_1\times{}^5C_1}{{}^8C_2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}\times\frac{4\times3}{21}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{5\times4}{36}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{3\times5}{28}\right)$$

$$=\frac{4}{21}+\frac{5}{27}+\frac{5}{28}$$

$$=\frac{419}{756}$$

ઉદાહરણ-16 : 366 દિવસ ધરાવતા લીપ વર્ષમાં 53 શનિ-રવિની જોડ આવવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : એક અઠવાડીયાનાં 7 દિવસ અને વર્ષનાં 52 અઠવાડીયા લઈએ તો 364 દિવસો થાય. બાકીના બે દિવસો અઠવાડીયાનાં ગમે તે સળંગ દિવસો હોઈ શકે. એટલે કે તે સોમ-મંગળ, મંગળ-બુધ, બુધ-ગુરુ, ગુરુ-શુક્ર, શુક્ર-શનિ, શનિ-રવિ અને રવિ-સોમ માંથી કોઈ પણ એક જોડ હોઈ શકે.

આમ અહીં કુલ બનાવો. 7 રીતે બની શકે. જ્યારે સાનુકૂળ બનાવો શનિ-રવિની જોડ 1 રીતે બની શકે.

53 શનિ-રવિ આપવાની સંભાવના $= \frac{1}{7}$ થાય.

ઉદાહરણ-17 : A 5 માંથી 4 વખત, B 5 માંથી 3 વખત અને C 4 માંથી 2 વખત નિશાન વિંધી શકે છે. જો ત્રણે સાથે નિશાન વિંધે તો નિશાન વિંધાય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં નિશાન વિંધાય તેની સંભાવના શોધવી છે. એટલે કે A અથવા B અથવા C માંથી ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ નિશાન વિંધે તો નિશાન વિંધાયું ગણાય.

આમ આપણે $P(A\cup B\cup C)$ શોધવી પડે.

આનાથી વિરુદ્ધ A, B અને C નિશાન ન વિંધી શકે તેની સંભાવના શોધી કુલ સંભાવના 1માંથી બાદ કરતાં પણ $P(A\cup B\cup C)$ મળે.

હવે A નિશાન વિંધે તેની સંભાવના $P(A)=\frac{4}{5}$

A નિશાન ન વિંધે તેની સંભાવના $P(A')=1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

આ જ રીતે $P(B)=\frac{3}{5} \quad \therefore P(B')=\frac{2}{5}$

જ્યારે $P(C)=\frac{2}{4} \therefore P(C')=\frac{2}{4}$ થાય.

હવે ત્રણે સાથે નિશાન ન વિંધી શકે $=(A'\cap B'\cap C')$

$\ldots\ P(A'\cap B'\cap C') = \frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}$

ત્રણે નિશાન ન વિંધી શકે તેની સંભાવના $= \frac{4}{100}$

નિશાન વિંધાય તેની સંભાવના $= 1 -$ નિશાન ન વિંધાય તેની સંભાવના

$$= 1 - P(A' \cap B' \cap C')$$

$$= 1 - \frac{4}{100}$$

નિશાન વિંધાય તેની સંભાવના $P(A \cup B \cup C) = \frac{96}{100}$

ઉદાહરણ-18 : એક કુટુંબમાં 1 છોકરો અને 3 છોકરીઓ, બીજા કુટુંબમાં 2 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓ અને ત્રીજા કુટુંબમાં 3 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓ છે. જો પ્રત્યેક કુટુંબમાંથી યદચ્છ રીતે એક બાળક પસંદ કરવામાં આવે તો (i) ત્રણેય છોકરાઓ પસંદ થાય. (ii) એક છોકરી અને બે છોકરાઓ પસંદ થાય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં દરેક કુટુંબમાંથી એક બાળક પસંદ કરવાનું છે.

કુટુંબ	**છોકરા**	**છોકરી**	**કુલ**
I	1	3	4
II	2	2	4
III	3	2	5

(i) ત્રણેય છોકરાઓ પસંદ થાય એટલે કે,

પ્રથમ કુટુંબમાંથી છોકરો પસંદ થાય અને બીજા કુટુંબમાંથી છોકરો પસંદ થાય અને ત્રીજા કુટુંબમાંથી છોકરો પસંદ થાય

સંભાવના $= P(B_1) \times P(B_2) \times P(B_3)$

$$= \frac{{}^1C_1}{{}^4C_1} \times \frac{{}^2C_1}{{}^4C_1} \times \frac{{}^3C_1}{{}^5C_1}$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{80} = \frac{3}{40}$$

(ii) એક છોકરી અને બે છોકરા પસંદ થાય એટલે કે,

પ્રથમ કુટુંબમાંથી છોકરી પસંદ થાય અને બીજા, ત્રીજામાંથી છોકરો પસંદ થાય અથવા બીજા કુટુંબમાંથી છોકરી પસંદ થાય અને પહેલા, ત્રીજામાંથી છોકરો પસંદ થાય અથવા ત્રીજા કુટુંબમાંથી છોકરી પસંદ થાય અને પહેલા અને બીજા કુટુંબમાંથી છોકરો પસંદ થાય

સંભાવના $= P(G_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap G_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap G_3)$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{18}{80} + \frac{6}{80} + \frac{4}{80} = \frac{28}{80} = \frac{7}{20}$$

એક છોકરી અને બે છોકરાઓ પસંદ થવાની સંભાવના $= \frac{7}{20}$ થાય.

ઉદાહરણ-19 : એક પેટીમાં 6 લીલા તથા કેટલાંક સફેદ દડા છે. તેમાંથી 2 લીલા દડા લેવાની સંભાવના $\frac{1}{3}$ છે. તો સફેદ દડાની સંખ્યા શોધો.

જવાબ : અહીં બે લીલા દડા પસંદ કરવાની સંભાવના $\frac{1}{3}$ આપેલ છે. પણ કુલ દડાની સંખ્યા આપેલ નથી. ધારો કે તે x છે.

બે લીલા દડા પસંદ થવાની સંભાવના $=\frac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}}=\frac{m}{n}$

$$\frac{1}{3}=\frac{{}^6C_2}{{}^xC_2}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{6\times 5}{2\times\left(\frac{x(x-1)}{2}\right)}$$

$x(x-1)=6\times 5\times 3$

$x(x-1)=90$

$x^2-x-90=0$

$x^2-10x+9x-90=0$

$x(x-10)+9(x-10)=0$

$(x-10)(x+9)=0$

$x=-9$ અશક્ય છે. $\therefore\ (x-10)=0\ \therefore x=10$ દડા

આમ કુલ દડાની સંખ્યા 10 થાય.

$\therefore$ સફેદ દડાની સંખ્યા = $10-6$ (લાલ દડાની સંખ્યા)

સફેદ દડા = 4 થાય.

ઉદાહરણ-20 : ધ્રુવ અને દેવ વારાફરતી સિક્કો ઉછાળે છે અને જેને પહેલી છાપ મળે તે જીતે છે. જો આ રમત છાપ ન મળે ત્યાં સુધી ચાલુ જ રહેતી હોય તો તેઓની જીતવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : સિક્કો ઉછાળતા છાપ (H) મળવાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ થાય.

(i) ધ્રુવની જીતના પ્રકારો.

$$=\begin{pmatrix}\text{પહેલાં પ્રયત્નમાં}\\ \text{ધ્રુવ જીતે}\end{pmatrix}\text{અથવા}\begin{pmatrix}\text{પહેલા પ્રયત્નમાં ધ્રુવ}\\ \text{હારે અને બીજા પ્રયત્નમાં}\\ \text{દેવ હારે અને ત્રીજા પ્રયત્નમાં}\\ \text{ધ્રુવ જીતે}\end{pmatrix}\text{અથવા.....}$$

સંભાવના $=P(H)+P(TTH)+P(TTTTH)+......$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^5+........$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}^{2}+\frac{1}{2}^{4}+.....\right.$$

$\left[\text{ગુણોત્તર શ્રેણીનાં અનંત પદોનો સરવાળો } S = \frac{a}{1-r} \text{ માં } a = 1 \text{ અને } r = \left(\frac{1}{2}\right) \text{ લેતાં}\right]$

સંભાવના $\frac{1}{2}\left[\frac{a}{1-r}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{3}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\right]$$

ધ્રુવની જીતવાની સંભાવના $= \frac{2}{3}$ થાય.

દેવની જીતવાની સંભાવના = 1 - ધ્રુવની જીતવાની સંભાવના = $1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$

ઉદાહરણ-21 : A અને B બે સ્વતંત્ર સાક્ષીઓ છે. A ની સાચુ બોલવાની સંભાવના 0.7 છે. જ્યારે Bની સાચુ બોલવાની સંભાવના 0.5 છે. જો A અને B બંને કોઈ ઘટના માટે સહમત થાય તો તે ઘટના સાચી હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : Aની સાચુ બોલવાની સંભાવના = P(A) = 0.7

$\therefore$ A ની સાચુ ન બોલવાની સંભાવના = P(A') = 1 – 0.7 = 0.3

B ની સાચુ બોલવાની સંભાવના = P(B) = 0.5

Bની સાચુ ન બોલવાની સંભાવના = P(B') = 1 – 0.5 = 0.5

બંને સહમત થાય = (બંને સાચુ બોલતા હોય) અથવા (બંને ખોટું બોલતાં હોય)

બંને સહમત થાય તેની સંભાવના = $P(A \cap B)$ અથવા $P(A' \cap B')$

$= P(A).P(B) + P(A').P(B')$

= (0.7) (0.5) + (0.3) (0.5)

= 0.35 + 0.15

= 0.50

બંને સહમત થાય તેની સંભાવના = 0.50

ઘટના સાચી હોવાની સંભાવના = $P(A \cap B)$

$= P(A).P(B)$

= 0.7 x 0.5

= 0.35

P (ઘટના સાચી હોય / બંને સહમત થાય)

$$= \frac{\text{P (ઘટના સાચી હોય અને બંને સહમત થાય.)}}{\text{P (બંને સહમત થાય.)}}$$

$$= \frac{0.35}{0.50}$$

$$= 0.70$$

સ્વાધ્યાય

1. નીચેનાં પદોની વ્યાખ્યા આપી ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.
   1. યદચ્છ પ્રયોગ
   2. નિદર્શ અવકાશ
   3. ઘટના
   4. યોગ ઘટના
   5. છેદ ઘટના
   6. પૂરક ઘટના
   7. તફાવત ઘટના
   8. પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ
   9. સમસંભવી ઘટનાઓ
   10. નિઃશેષ ઘટના
   11. સાનુકૂળ બનાવો
   12. સંભાવના (ગાણિતિક વ્યાખ્યા)
   13. સંભાવના (સાંખ્યાકીય વ્યાખ્યા)
   14. સંભાવના (પૂર્વધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા)
   15. શરતી સંભાવના
   16. શાંત નિદર્શઅવકાશ
   17. અનંત નિદર્શ અવકાશ
2. નીચેનામાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો.

(i) ઘટના A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો

(1) $P(A \cap B) =$ _________ થાય.

(i) P(A).P(B) (ii) P(A) + P(B) (iii) 0

(2) $P(A \quad B) =$ ________ થાય.

(i) P(A).P(B) (ii) P(A) + P(B) (iii) 0

(ii) A અને B બે સમસંભવી ઘટનાઓ હોય તો

(i) ઘટના A બનવાની સંભાવના અને ઘટના B બનવાની સંભાવના સરખી થાય.

(ii) ઘટના A બનવાની સંભાવના અને ઘટના B બનવાની સંભાવના જુદુ-જુદી થાય.

(iii) ઉપરનાં બંને હોઈ શકે.

(iii) A અને B બે સ્વતંત્ર (નિરપેક્ષ) ઘટનાઓ હોય તો

(i) $P(A \quad B) =$ _______ થાય.

(i) P(A).P(B)   (ii) P(A) + P(B)   (iii) 0

(iv) કોઈ એક ઘટના બનવાની સંભાવના ________ની વચ્ચે હોય છે.

(i) [−1,1] (ii) [0,1]   (iii) [− ,]

(v) નિદર્શઅવકાશની બધી જ ઘટનાઓની સંભાવનાનો સરવાળો હંમેશા ________થાય.

(i) 0   (ii) 1   (iii) 0થી 1ની વચ્ચે

(vi) પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટના માટે વિધાન સાચુ છે કે ખોટું તે જણાવો. ખોટા વિધાન માટે કારણ આપો.

(i) P(A) = 0.4 P(B) = 0.4 P(C) = 0.2

(ii) P(A) = 0.6 P(B) = 0.5 P(C) = 0.1

(iii) P(A) = 0.6 P(B) = 0.4 P(A B) = 0.3

3. બે સિક્કા એકસાથે ઉછાળતાં તેના પર

(i) બે છાપ મળે તેની સંભાવના શોધો.

(ii) ઓછામાં ઓછી એક છાપ મળે (એક અથવા બે છાપ મળે) તેની સંભાવના શોધો.

4. બે પાસાને એકસાથે ઉછાળતા તેના પર મળતાં આંકોનો સરવાળો

(i) 7 હોય

(ii) ઓછામાં ઓછો 9 હોય

(iii) વધુમાં વધુ 10 હોય તેની સંભાવના શોધો.

5. બે પાસા ઊછાળતા તેનાં પર મળતાં આંકનો સરવાળો 2 અથવા 3થી ભાગી શકાય તેની સંભાવના શોધો.

6. ત્રણ સિક્કાઓ એકસાથે ઉછાળતાં તેની પર

(i) ત્રણ છાપ મળે

(ii) બે છાપ મળે અને એક કાંટો મળે

(iii) એક છાપ અને બે કાંટા મળે

(iv) ત્રણ કાંટા મળે તેની સંભાવના શોધો.

ઉપરની ચારેય ઘટનાઓ ભેગી મળે તો નિઃશેષ ઘટના બને કે નહિ ?

7. ત્રણ પાસાઓ એકસાથે ઉછાળતાં તેના પર મળતાં આંકનો સરવાળો 15 મળે તેની સંભાવના શોધો.

8. 52 પત્તાની એક જોડમાંથી યદચ્છ રીતે એક પત્તું લેવામાં આવે તો, (1) રાજાનું હોય (2) કાળીનું હોય (3) કાળીનો રાજા હોય (4) કાળી અથવા રાજા હોય તેની સંભાવના શોધો.

9. 52 પત્તાની એક જોડમાંથી બે પત્તા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે તો બે રાજા મળવાની સંભાવના શોધો.

10. એક પેટીમાં 7 લાલ અને 5 લીલા દડા છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે દડાઓ લેવામાં આવે તો તે બંને દડાઓ લીલા હોવાની સંભાવના શોધો.

11. એક પેટીમાં 3 લાલ, 4 લીલા અને 5 પીળા દડા છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે ત્રણ દડા લેતા (1) ત્રણેય દડા લાલ આવે (2) ત્રણેય જુદા રંગનાં આવે (3) ત્રણેય દડા લાલ આવે તેની સંભાવના શોધો.

12. 1થી 100 સુધીનાં આંકડાઓમાંથી એક આંકડો યદચ્છ રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે તો તે આંકડો (1) 5નો ગુણક હોય, (2) 7નો ગુણક હોય (3) 5 અને 7નો ગુણક હોય (4) 5 અથવા 7નો ગુણક હોય તેની સંભાવના શોધો.

13. કેરીની ટોપલીમાં 20 કેરીઓ છે જેમાંથી 3 કેરીઓ બગડેલી છે. જો તેમાંથી યદચ્છ રીતે 3 કેરી લેવામાં આવે તો.

(1) ઓછામાં ઓછી બે કેરી બગડેલી આવે

(2) વધુમાં વધુ બે કેરી બગડેલી આવે તની સંભાવના શોધો.

14. રમેશ, મહેશ અને સુરેશની દાખલો સાચો ગણવાની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}$ હોય તો

(1) દાખલો ખોટો ગણાય

(2) દાખલો સાચો ગણાય તેની સંભાવના શોધો.

15. એક પેટીમાં 4 સફેદ અને 5 કાળા દડા છે જ્યારે બીજી પેટીમાં 6 સફેદ અને 4 કાળા દડા છે. જો યદચ્છ રીત એક પેટી લેવામાં આવે અને તેમાંથી બે દડા લેવામાં આવે તો બંને દડા સફેદ આવે તેની સંભાવના શોધો.

16. એક પેટીમાં 3 સફેદ અને 4 કાળા, બીજી પેટીમાં 4 સફેદ અને 5 કાળા અને ત્રીજી પેટીમાં 3 સફેદ અને 6 કાળા દડા છે. જો તેમાંથી યદચ્છ રીતે એક પેટી પસંદ કરી બે દડા લેવામાં આવે તો એક સફેદ અને એક કાળો દડો આવે તેની સંભાવના શોધો.

17. એક કુટુંબમાં 1 છોકરો અને 3 છોકરી, બીજા કુટુંબમાં 2 છોકરા અને 2 છોકરી છે. જો દરેક કુટુંબમાંથી યદચ્છ રીતે એક બાળક પસંદ કરવામાં આવે તો (1) બંને છોકરીઓ હોવાની (2) એક છોકરો અને એક છોકરી હોવાની સંભાવના શોધો.

18. એક પેટીમાં 5 સફેદ અને 4 કાળા દડા છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે એક-એક દડો વારાફરતી લેવામાં આવે છે. (1) જો પ્રથમવાર લીધેલા દડા પાછા મૂકવામાં આવે (2) જો પ્રથમવાર લીધેલા દડા પાછા ન મૂકવામાં આવે તો પ્રથમ પ્રયત્નમાં સફેદ અને બીજા પ્રયત્નમાં કાળો દડો મળવાની સંભાવના શોધો.

19. એક પેટીમાં 4 લાલ અને 6 પીળા દડા છે. જો તેમાંથી યદચ્છ રીતે એક દડો લઈ તેની જગ્યાએ બીજા રંગનો દડો પેટીમાં પાછો મૂકવામાં આવે છે. જો પેટીમાંથી હવે એક દડો લેવામાં આવે તો તે લાલ રંગનો હોય તેની સંભાવના શોધો.

20. ત્રણ વ્યક્તિ A, B અને C ની નિશાન વિંધવાની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{2}{3},\frac{1}{3}$ અને $\frac{1}{4}$ છે. તો નિશાન વિંધાય તેની સંભાવના શોધો.

21. બે સ્વતંત્ર સાક્ષીઓ A અને B માંથી A સાચુ બોલે તેની સંભાવના $\frac{2}{3}$ છે. જ્યારે B ખોટું બોલે તેની સંભાવના $\frac{1}{4}$ છે. જો બંને એક વિધાન પર સહમત થતા હોય તો તે વિધાન સાચુ હોવાનુ સંભાવના શોધો.

22. એક ફેક્ટરીમાં ત્રણ મશીનો M_1, M_2 અને M_3 અનુક્રમે 1000, 2000 અને 3000 એકમોનું ઉત્પાદન કરે છે. તે મશીનમાં અનુક્રમે 3%, 2% અને 1% વસ્તુઓ ખામીવાળી બને છે. જો ઉત્પાદનમાંથી યદચ્છ રીતે એક વસ્તુ લેવામાં આવે અને જો તે ખામીવાળી જણાય તો તે વસ્તુ મશીન M_2 વડે બની હોય તેની સંભાવના શોધો.

23. એક ટીમમાં 7 પુરુષો અને અમુક સ્ત્રીઓ છે. જો તેમાંથી બે પુરુષો પસંદ થવાની સંભાવના $\frac{1}{5}$ હોય તો તેમાં સ્ત્રીઓની સંખ્યા શોધો. [8]

24. જો $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{3}{4}$ અને $P(A\cap B)=\frac{1}{2}$ હોય તો (i) $P(A\cup B)$ (ii) $P(A'\cap B')$ (iii) $P(A/B)$ શોધો.

25. જો $P(A)=\frac{1}{3}$ $P(B)=\frac{1}{4}$ અને $P(A\cup B)=\frac{2}{5}$ હોય તો (i) $P(A\cap B)$, (ii) $P(A/B)$, (iii) $P(B/A)$, (iv) $P(A-B)$ તથા (v) $P(B-A)$ શોધો.

26. ત્રણ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ A, B અને C માટે જો $P(A)=2P(B)=3P(C)$ હોય તો (i) $P(A\cup B)$ તથા (ii) $P(A\cup B\cup C)$ શોધો.

યુનિવર્સિટી ગીત

સ્વાધ્યાય: પરમં તપ:
સ્વાધ્યાય: પરમં તપ:
સ્વાધ્યાય: પરમં તપ:

શિક્ષણ, સંસ્કૃતિ, સદ્ભાવ, દિવ્યબોધનું ધામ
ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી નામ;
સૌને સૌની પાંખ મળે, ને સૌને સૌનું આભ,
દશે દિશામાં સ્મિત વહે હો દશે દિશે શુભ-લાભ.

અભણ રહી અજ્ઞાનના શાને, અંધકારને પીવો ?
કહે બુદ્ધ આંબેડકર કહે, તું થા તારો દીવો;
શારદીય અજવાળા પહોંચ્યાં ગુર્જર ગામે ગામ
ધ્રુવ તારકની જેમ ઝળહળે એકલવ્યની શાન.

સરસ્વતીના મયૂર તમારે ફળિયે આવી ગહેકે
અંધકારને હડસેલીને ઉજાસના ફૂલ મહેંકે;
બંધન નહીં કો સ્થાન સમયના જવું ન ઘરથી દૂર
ઘર આવી મા હરે શારદા દૈન્ય તિમિરના પૂર.

સંસ્કારોની સુગંધ મહેંકે, મન મંદિરને ધામે
સુખની ટપાલ પહોંચે સૌને પોતાને સરનામે;
સમાજ કેરે દરિયે હાંકી શિક્ષણ કેરું વહાણ,
આવો કરીયે આપણ સૌ
ભવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ...
દિવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ...
ભવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ

DR. BABASAHEB AMBEDKAR OPEN UNIVERSITY
(Established by Government of Gujarat)
'Jyotirmay' Parisar,
Sarkhej-Gandhinagar Highway, Chharodi, Ahmedabad-382 481
Website : www.baou.edu.in

BAOU
Education
for All

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી

(ગુજરાત સરકાર દ્વારા સ્થાપિત)

તૃતીય વર્ષ બી.કોમ.

BCSTAN306

આંકડાશાસ્ત્ર

બ્લોક-૨

સ્વાધ્યાયનું અજવાળું

ભારતના સંવિધાનના સર્જક, ભારતરત્ન ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકરની પાવન સ્મૃતિમાં ગરવી ગુજરાતમાં, ગુજરાત સરકારશ્રીએ ઈ.સ. 1994માં યુનિવર્સિટી ગ્રાન્ટ્સ કમિશન અને ડિસ્ટન્સ એજ્યુકેશન કાઉન્સિલની માન્યતા મેળવી અમદાવાદમાં ગુજરાતના એકમાત્ર મુક્ત વિશ્વવિદ્યાલય ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટીની સ્થાપના કરી છે.

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકરની 125મી જન્મજયંતીના અવસરે જ ગુજરાત સરકાર દ્વારા યુનિવર્સિટી માટે અદ્યતન સગવડતા સાથે, શાંત જગ્યા મેળવી, જ્યોતિર્મય પરિસરનું નિર્માણ કરી આપ્યું. BAOUના સત્તામંડળે પણ યુનિવર્સિટીના આગવા ભવિષ્ય માટે ખૂબ સહયોગ આપ્યો, આપતા રહે છે.

શિક્ષણ એટલે માનવમાં થતું મૂડીરોકાણ, શિક્ષણ લોકસમાજની ગુણવત્તા સુધારવામાં અધિક ફાળો આપી શકે છે. અહીં મને સ્વામી વિવેકાનંદનું શિક્ષણ વિષયક દર્શન યાદ આવે છે:

'જેનાથી ચારિત્ર્યનું ઘડતર થાય, જેનાથી માનસિક ક્ષમતાનું નિર્માણ થાય, જેનાથી બૌદ્ધિક વિકાસ સાધી શકાય અને જેના થકી વ્યક્તિ પગભર બની શકે તેને શિક્ષણ કહેવાય'

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી શિક્ષણમાં આવા ઉમદા વિચારને વરેલી છે. તેથી વિદ્યાર્થીઓને ગુણવત્તાયુક્ત, વ્યવસાયલક્ષી, જીવનલક્ષી શિક્ષણની સગવડ ઘરે બેઠાં મળી રહે એવા પ્રયત્નો મક્કમ બની કરે છે. બહોળા સમાજના લોકોને ઉચ્ચશિક્ષણ પ્રાપ્ત થાય, છેવાડાના માણસોને ઉત્તમ કેળવણી એમનાં રોજિંદાં કામો કરતાં પ્રાપ્ત થતી રહે. વ્યાવસાયિક લોકોને આગળ ભણતરની ઉત્તમ તક સાંપડે અને જીવનમાં પોતાની ક્ષમતાઓ, કૌશલ્યોને પ્રગટ કરી સારી કારકિર્દી ઘડે, સ્વાવલંબી બની ઉત્તમ જીવન જીવતાં સમાજ અને રાષ્ટ્રનિર્માણમાં પોતાનું યોગદાન આપે, એ માટે પ્રયાસરત છે.

'સ્વાધ્યાય: પરમં તપ:' સૂત્રને ઓપન યુનિવર્સિટી કેન્દ્રમાં રાખીને અહીં પ્રવેશ કરતા છાત્રોને સ્વઅધ્યયન માટે સરળતાથી સમજાય એવો ગુણવત્તાલક્ષી શૈક્ષણિક અભ્યાસક્રમ ઉપલબ્ધ કરાવી આપે છે. દરેક વિષયની પાયાની સમજણ મળે તેની કાળજી રાખવામાં આવે છે. વિદ્યાર્થીઓને રસ પડે અને રુચિ કેળવાય તેવાં પાઠ્યપુસ્તકો નિષ્ણાત અધ્યાપકો દ્વારા તૈયાર કરવામાં આવે છે. દૂરવર્તી શિક્ષણ પ્રાપ્ત કરવા ખેવના રાખતા કોઈ પણ ઉંમરના છાત્રોને માટે અભ્યાસસામગ્રી તૈયાર કરવા માટે શિક્ષણવિદો સાથે પરામર્શ કરવામાં આવે છે. એ પછી જ માળખું રચી, અભ્યાસસામગ્રી તૈયાર કરી પુસ્તક સ્વરૂપે છાત્રોનાં કરકમળોમાં આપે છે. જેનો ઉપયોગ કરીને વિદ્યાર્થીઓ સંતોષપ્રદ અનુભવ કરી શકે છે.

યુનિવર્સિટીના તજજ્ઞ અધ્યાપકો ખૂબ કાળજીથી આ અભ્યાસસામગ્રીનું લેખન કરે છે. વિષયનિષ્ણાત પ્રોફેસરો દ્વારા એમનું પરામર્શન થયા પછી જ પરિણામલક્ષી અભ્યાસસામગ્રી યુનિવર્સિટીના વિદ્યાર્થીઓને પહોંચે છે. ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી જ્ઞાનનું કેન્દ્રબિંદુ બની રહી છે. વિદ્યાર્થીઓને 'સ્વાધ્યાય ટેલિવિઝન', 'સ્વાધ્યાય રેડિયો' જેવા દૂરવર્તી ઉપાદાનો થકી પણ એમના ઘરમાં શિક્ષણ પહોંચાડવાનો પુરુષાર્થ થઇ રહ્યો છે. ઉમદા હેતુ, શ્રેષ્ઠ ધ્યેયને આંબવા પરિશ્રમરત યુનિવર્સિટીના જ્ઞાનની પરબ સમા અધ્યાપકો તેમજ કર્મઠ કર્મચારીગણને અભિનંદન અને અમારી યુનિવર્સિટીના વિદ્યાર્થીઓ સફળ થવા ખૂબ મહેનત કરી, જીવન સફળ કરવાની સાથે જીવન સાર્થક કરે એવી પરમેશ્વરને પ્રાથના કરું છું.

પ્રો. (ડૉ.) અમીબહેન ઉપાધ્યાય
કુલપતિશ્રી,
ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી,
જ્યોતિર્મય પરિસર,સરખેજ-ગાંધીનગર હાઈવે, છારોડી, અમદાવાદ

લેખન :	ડૉ. કલ્પેશ વાંકાણી	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, ક્રાઈસ્ટ કોલેજ, રાજકોટ.
	ડૉ. પરાગ શાહ	એસોસિયેટ પ્રોફેસર, એચ.એલ. કોલેજ ઓફ કોમર્સ, અમદાવાદ.
	ડૉ. રોનક પટેલ	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, ગવર્મેન્ટ કોમર્સ કોલેજ, ગાંધીનગર.
પરામર્શક(વિષય) :	પ્રો. (ડૉ.) મનોજ શાહ	પ્રોફેસર & નિયામક, સ્કૂલ ઓફ કોમર્સ એન્ડ મેનેજમેન્ટ, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ.
	ડૉ. મૌલિક દેસાઈ	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, કે.એસ. સ્કૂલ ઓફ બિઝનેસ મેનેજમેન્ટ, અમદાવાદ.
	ડૉ. કલ્પેશ વાંકાણી	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, ક્રાઈસ્ટ કોલેજ, રાજકોટ.
પરામર્શક(ભાષા) :	ઘનશ્યામ કે ગઢવી	નિવૃત આચાર્ય, સાર્વજનિક કોલેજ, મહેસાણા.
	ડૉ. દિનુ ચુડાસમા	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, (ગુજરાતી) ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ.
	શ્રી ઉર્વિકા પટેલ	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, (ગુજરાતી) ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ.
સંપાદન :	પ્રો. (ડૉ.) મનોજ શાહ	પ્રોફેસર & નિયામક, સ્કૂલ ઓફ કોમર્સ એન્ડ મૅનેજમૅન્ટ, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ.

પ્રકાશક :	ડૉ. ભાવિન ત્રિવેદી	કાર્યકારી કુલસચિવ, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ.

આવૃત્તિ : સુધારેલ પુનઃ આવૃત્તિ (નવો અભ્યાસક્રમ-2022)

ISBN : 978-93-5598-212-4

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી
(ગુજરાત સરકાર દ્વારા સ્થાપિત)

તૃતીય વર્ષ, **B.Com.**

BCSTAN-306

આંકડાશાસ્ત્ર

આંકડાશાસ્ત્ર

PART -2

એકમ 5

અસતત સંભાવના વિતરણ

5.1 અર્થ

સંભાવનાના અભ્યાસમાં આપણે જોયું કે યાદચ્છિક પ્રયોગની શક્ય પરિણામી ઘટનાઓ કેટલીક વખત સંખ્યાત્મક હોય છે. જ્યારે કેટલીક વખત ગુણાત્મક હોય છે. જેમકે પરિક્ષામાં વિદ્યાર્થી ક્યાં તો પાસ થાય ક્યાં તો નાપાસ થાય એવા પરિણામ મળે; પરંતુ કુટુંબમાં બાળકોની સંખ્યાની તપાસ કરીએ તો પરિણામી ઘટનાઓ 0, 1, 2 કે 3... એવી સંખ્યાત્મક મળે.

જો નિદર્શ-અવકાશની પ્રત્યેક ઘટનાને કોઈ એક વાસ્તવિક સંખ્યા સાથે કોઈ નિયમથી સાંકળી દઈએ તો આપણને જેમાં રસ છે તેવી ઘટનાઓની સંભાવનાની ગણતરીનું કાર્ય સરળ બને છે.

નિદર્શ-અવકાશ S પર વ્યાખ્યાયિત આવા વાસ્તવિક સંખ્યા લેતા વિધેયને **યાદચ્છિક ચલ** કહે છે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં 3 વિદ્યાર્થીઓની તપાસ કરતાં તેમાં “પાસ થયેલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા” યાદચ્છિક ચલ X લઈએ તો Xની શક્ય કિંમતો 0, 1, 2, 3 થશે. યાદચ્છિક ચલના અન્ય કેટલાંક ઉદાહરણ આપણે જોઈએ.

ધારો કે કોઈ એક ડબ્બામાં 3 વાદળી, 2 સફેદ દડા છે અને તેમાંથી એક વ્યક્તિ બે દડા લે છે. જો “વાદળી રંગના મળતા દડાની સંખ્યા”ને યાદચ્છિક ચલ X લઈએ તો Xની શક્ય કિંમતો 0, 1, 2 થશે. આ ઉદાહરણમાં આપણે એમ ઉમેરીએ કે પ્રત્યેક વાદળી દડા માટે રૂ.10 અને પ્રત્યેક સફેદ દડા માટે રૂ.5 મળે છે. તો તે વ્યક્તિને મળતી રકમને યાદચ્છિક ચલ X વડે દર્શાવીએ તો Xની કિંમતો નીચે પ્રમાણે મળશે.

ઘટના	યાદચ્છિક ચલ (X) મળતી રકમ (રૂ.)માં
બંને વાદળી દડા મળે	10 + 10 = 20
બંને સફેદ દડા મળે	5 + 5 = 10
એક વાદળી અને એક સફેદ દડો મળે	10 + 5 = 15

અહીં યાદચ્છિક ચલ Xની કિંમતો 20, 10, 15 મળી શકે છે.

5.2 અસતત અને સતત યાદચ્છિક ચલ

જો કોઈ ચલ આપેલા વિસ્તારમાં ગણી શકાય તેટલી શાન્ત અથવા ગણ્ય અનંત કિંમતો ધારણ કરે તો તે ચલને **અસતત યાદચ્છિક** કહે છે.

દા.ત. કુટુંબમાં બાળકોની સંખ્યા, કુટુંબમાં વાહનોની સંખ્યા, વિદ્યાર્થીના ગુણ વગેરે અસતત ચલ થશે.

જો ચલ આપેલા વિસ્તારમાં બધી જ કિંમતો ધારણ કરી શકે તો તેવા ચલને **સતત યાદચ્છિક** ચલ કહે છે.

દા.ત. કોઈ એક રાજયમાં કુટુંબની વાર્ષિક આવક, વસ્તુના ભાવ, માંગ વગેરે સતત ચલ થશે.

5.3 અસતત યાદચ્છિક ચલનું સંભાવના વિતરણ

જો X એક અસતત યાદચ્છિક ચલ હોય અને તે જુદી જુદી કિંમતો $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ ધારણ કરતો હોય જેની સંભાવના અનુક્રમે $p(x_1), p(x_2) \ldots p(x_n)$ હોય તો સમૂહ $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ અને $\{p(x_1), p(x_2) \ldots . p(x_n)\}$ને યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ કહે છે.

આ સંભાવના વિતરણને કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય.

$X = x$	$P(X = x)$
x_1	$p(x_1)$
x_2	$p(x_2)$
.	.
.	.
.	.
.	.
x_n	$p(x_n)$
કુલ	1

સંભાવના વિતરણ માટે નીચેની બે જરૂરી શરતો છે :

(1) $p(x_i) \geq 0,\ i = 1, 2 \ldots . n$

(2) $\Sigma p(x_i) = p(x_1) + p(x_2) + \ldots .. + p(x_n) = 1$

આપણે આ વ્યાખ્યાને એક ઉદાહરણથી સમજીએ.

ધારો કે એક ડબ્બામાં 3 વાદળી અને 2 સફેદ દડા છે અને તેમાંથી એક વ્યક્તિ બે દડા લે છે. જો "વાદળી દડાની સંખ્યા"ને યાદચ્છિક ચલ x લઈએ તો તેનું સંભાવના વિતરણ સમજીએ.

એક ડબ્બામાં 3 વાદળી અને 2 સફેદ એટલે કે કુલ 5 દડા છે. જેમાંથી બે દડા લેવામાં આવે છે. તે લેવામાં આવેલ દડામાંથી મળતા વાદળી દડાની સંખ્યા યાદચ્છિક ચલ x વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

હવે ડબ્બામાંથી લીધેલાં બે દડામાંથી વાદળી દડાની સંખ્યા 0, 1 કે 2 હોઈ શકે તો સફેદ દડાની સંખ્યા 2, 1 કે 0 જ હોઈ શકે છે.

યાદચ્છિક ચલ (x) વાદળી દડાની સંખ્યા	સફેદ દડાની સંખ્યા	સંભાવના
0	2	$\frac{{}_3C_0 \times {}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$
1	1	$\frac{{}_3C_2 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10}$
2	1	$\frac{{}_3C_2 \times {}_2C_0}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$
કુલ		$\frac{10}{10} = 1$

તેથી યાદચ્છિક ચલ xનું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે મળશે.

વાદળી દંડાની સંખ્યા (x)	0	1	2
સંભાવના p(x).	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

યાદચ્છિક ચલના ઘણા પ્રકારના સંભાવના વિતરણો છે. જેવાં કે દ્વિપદી, પોયસન, અતિગુણોત્તર, ગુણોત્તર, ઋણ દ્વિપદી વગેરે. આપણો અભ્યાસ દ્વિપદી અને પોયસન સંભાવના વિતરણ પૂરતો સીમીત રાખીશું.

5.4 દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ (Binomial Probability Distribution)

ઘણા યાદચ્છિક પ્રયોગના બે જ પરિણામો શક્ય હોય. ઉપરાંત આ પરિણામો પરસ્પર નિવારક હોય છે.

દા.ત. (1) કારખાનામાં ઉત્પાદિત એકમની તપાસ કરવામાં આવે તો તે ક્યાં તો ખામીવાળું હશે અથવા ખામી વગરનું હશે. એટલે કે બે જ પરિણામ શક્ય છે.

(2) યુદ્ધ વખતે વપરાતા એન્ટી એરક્રાફ્ટ મિસાઈલ ક્યાં તો એરક્રાફ્ટને અથડાશે અથવા નહીં અથડાય. એટલે કે બે જ પરિણામ શક્ય છે.

(3) વિદ્યાર્થીઓએ આપેલ પરિક્ષામાં ક્યાં તો તે પાસ થશે અથવા નાપાસ થશે એટલે કે બે જ પરિણામ શક્ય છે.

આવા યાદચ્છિક પ્રયોગને આપણે દ્વિવિધ વિકલ્પના પ્રયોગ કહીશું અને તેમાં મળતા પરિણામોને સફળતા અથવા નિષ્ફળતા કહીશું. અહીં સફળતા અથવા નિષ્ફળતા પ્રયોગના હેતુ પરથી નક્કી કરવામાં આવે છે.

અઢારમી સદીની શરૂઆતમાં સ્વીસ ગણિતશાસ્ત્રી જેમ્સ બર્નોલીએ આ વિતરણની સૌપ્રથમ રજૂઆત કરી હતી.

બર્નોલી પ્રયત્નો : ધારો કે એક દ્વિવિધ વિકલ્પવાળા યાદચ્છિક પ્રયોગનાં બે શક્ય પરિણામો સફળતા અને નિષ્ફળતા છે અને જો આ પ્રયોગનું સમાન પરિસ્થિતિ હેઠળ પુનરાવર્તન કરવામાં આવે અને દરેક પ્રયત્ને સફળતાની સંભાવના અચળ રહેતી હોય તો આવા પ્રયોગોને બર્નોલી પ્રયત્નો કહેવામાં આવે છે.

5.5 બર્નોલી પ્રયત્નોના ગુણધર્મો :

(1) દરેક પ્રયત્નમાં ફક્ત બે જ શક્ય પરિણામો (i) સફળતા (ii) નિષ્ફળતા મળી શકે છે.

(2) દરેક પ્રયત્ને મળતી સફળતાની સંભાવના અચળ હોય છે.

(3) દરેક પ્રયત્ન એકબીજાથી સ્વતંત્ર હોય છે. એટલે કે કોઈપણ પ્રયત્ને મળતી સફળતા કે નિષ્ફળતા તેના અગાઉના પ્રયત્ને મળેલ સફળતા કે નિષ્ફળતા પર આધારિત નથી.

(4) સફળતા અને નિષ્ફળતા બંને પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ છે એટલે સફળતાની સંભાવના અને નિષ્ફળતાની સંભાવનાનો સરવાળો 1 થશે

5.6 દ્વિપદી વિતરણના ગુણધર્મો

જો કોઈ એક યાદચ્છિક પ્રયોગમાં ફક્ત બે જ પરિણામો સફળતા અને નિષ્ફળતા મળી શકતા હોય અને દરેક પ્રયત્નમાં સફળતાની સંભાવના p અને નિષ્ફળતાની સંભાવના q અચળ રહેતી હોય અને જો આ પ્રયોગનું સ્વતંત્ર રીતે n વખત પુનરાવર્તન કરવામાં આવે તો તેમાંથી x પ્રયત્નોમાં સફળતા મળે તેની સંભાવના $p(x) = {}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x}$ થાય.

અહીં x એ સાન્ત ગણ $\{0,1,2....n\}$ માંથી કોઈપણ એક કિંમત ધારણ કરી શકે છે.

સંભાવનાના આ વિતરણને દ્વિપદી વિતરણ કહે છે. n અને p ને દ્વિપદી વિતરણના પ્રાચલ કહેવામાં આવે છે તેથી દ્વિપદી વિતરણને સંજ્ઞામાં $b(n, p)$ વડે દર્શાવી શકાય છે.

દ્વિપદી વિતરણના ગુણધર્મો

(1) દ્વિપદી વિતરણ એ અસતત ચલ માટેનું વિતરણ છે.

(2) n અને p તેનાં પ્રાચલો છે.

(3) આ વિતરણનો મધ્યક np છે જે સફળતાની સરેરાશ સંખ્યા દર્શાવે છે.
(4) આ વિતરણનું વિચરણ npq છે.
(5) દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક એ વિચરણ કરતા મોટો હોય છે એટલે કે $np > npq$

(6) nની કોઈપણ કિંમત માટે જો $p < \frac{1}{2}$ હોય, તો આ વિતરણની વિષમતા ધન થાય છે.

(7) nની કોઈપણ કિંમત માટે જો $p > \frac{1}{2}$ હોય, તો આ વિતરણની વિષમતા ઋણ થાય છે.

(8) nની કોઈપણ કિંમત માટે જો $p = \frac{1}{2}$ હોય, તો આ વિતરણની વિષમતા શૂન્ય થાય છે એટલે કે વિતરણ સંમિત થાય છે.

નોંધ :

(1) દ્વિપદી વિતરણમાં જ્યારે કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા (n) ખૂબ મોટી હોય અને p અને q ની કિંમતો નાની ન હોય તો દ્વિપદી વિતરણનું સ્વરૂપ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે.
(2) જો બર્નોલી પ્રયત્નોવાળા પ્રયોગને N વખતે પુનરાવર્તિત કરીએ તો N પુનરાવર્તનોમાં મળતી સફળતાની સંખ્યાની અપેક્ષિત આવૃત્તિ = $N.p(x)$ થશે.

ઉદાહરણ-1 : નિશાન તાકવાની એક રમતમાં રોનિશ સફળ જાય તેની સંભાવના $\frac{4}{5}$ છે. જો તેને નિશાન તાકવા માટે 5 પ્રયત્નો આપવામાં આવે તો તેમાંથી 2 પ્રયત્નોમાં તે નિશાન તાકવામાં સફળ થાય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં દરેક પ્રયત્નમાં નિશાન તાકવાની સંભાવના $p = \frac{4}{5} = 0.8$ આપેલ છે.

$\therefore q = 1 - p = 1 - 0.8 = 0.2$ અને $n = 5$ છે
હવે, 2 પ્રયત્નોમાં સફળતા મળે એટલે $x = 2$ થાય.
$P(x) = {}^n c_x p^x q^{n-x}$ માં n,p,q અને xની કિંમત મૂકતા,
$P(2) = {}^5 C_2 \ (0.8)^2 \ (0.2)^{5-2}$
$= 10 \times 0.64 \times 0.008$
$= 0.0512$
આમ, 5 પ્રયત્નોમાંથી 2માં સફળતા મળે તેની સંભાવના 0.0512 થાય.

ઉદાહરણ-2 : એક કૉલેજમાં ભણતા વિદ્યાર્થીઓમાં 20% વિદ્યાર્થીઓને ચશ્માં છે. તે કૉલેજમાંથી લીધેલ 4 વિદ્યાર્થીઓમાંથી એક વિદ્યાર્થીને ચશ્માં હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં કૉલેજમાં ભણતા વિદ્યાર્થીને ચશ્માં હોય તેની સંભાવના $(p) = 0.20$ થશે.

$\therefore q = 1 - p = 1 - 0.20 = 0.80$
$n = 4$ અને ચશ્માં હોય તેવા વિદ્યાર્થીની સંખ્યાને X લઈએ.
એક વિદ્યાર્થીને ચશ્માં હોય એટલે કે x = 1 થાય.
$\therefore \ P(1) = {}^4C_1(0.20)^1 \ (0.80)^{4-1}$
$= 4 \times 0.20 \times 0.512$
$= 0.4096$

ઉદાહરણ-3 : એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત એકમોમાં 98% એકમો ખામીરહિત હોય છે. આ

ઉત્પાદિત થયેલ એકમોમાંથી યાદચ્છિક રીતે 6 એકમો પસંદ કરવામાં આવે છે, તેમાંથી બધા જ એકમો ખામીરહિત મળે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : પસંદ કરેલ એકમ ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને સફળતા ગણીએ તો સફળતાની સંભાવના $p = 0.02$ થશે. અહીં $n = 6$ અને $q = 1 - p = 0.98$ થશે.

બધા જ એકમો ખામીરહિત મળે

એટલે એક પણ એકમ ખામીવાળો નથી તેથી $x = 0$ થાય.

$$P(0) = {}^6C_0 (0.02)^0 (0.98)^{6-0}$$
$$= 1 \times 1 \times 0.8858$$
$$= 0.8858$$

ઉદાહરણ-4 : એક સ્ટોરમાં આવતા ગ્રાહકો પૈકી 10 ટકા ગ્રાહકો ટી.વી.ની ખરીદી કરે છે. જો કોઈ એક દિવસે તે સ્ટોરમાં 10 ગ્રાહકો આવ્યા હોય તો તે દિવસે

(i) એક પણ ટીવીનું વેચાણ ન થાય.

(ii) ઓછામાં ઓછા 3 ટીવીનું વેચાણ થાય.

(iii) 4થી વધારે ટીવીનું વેચાણ ન થાય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં ગ્રાહક ટીવી ખરીદશે તેની સંભાવના $(p) = 0.10$ છે. $\therefore q = 1 - p = 1 - 0.10 = 0.90$ થશે. $n = 10$ અને ટીવી ખરીદે તેવા ગ્રાહકની સંખ્યાને X લઈએ.

(i) **એક પણ ટીવીનું વેચાણ ન થાય.**

એટલે કે $x = 0$ થશે.

$$P(0) = {}^{10}C_0 (0.10)^0 (0.90)^{10}$$
$$= 1 \times 1 \times 0.3487$$
$$= 0.3487$$

(ii) **ઓછામાં ઓછા 3 ટીવીનું વેચાણ થાય.**

એટલે કે $x \geq 3$ થશે.

$$\therefore P(x \geq 3) = P(3) + P(4) + ... + P(10)$$
$$= 1 - [P(0) + P(1) + P(2)]$$

$$P(0) = {}^{10}C_0 (0.10)^0 (0.90)^{10}$$
$$= 1 \times 1 \times 0.3487$$
$$= 0.3487$$

$$P(1) = {}^{10}C_1 (0.10)^1 (0.90)^9$$
$$= 10 \times 0.10 \times 0.3874$$
$$= 0.3874$$

$$P(2) = {}^{10}C_2 (0.10)^2 (0.90)^8$$
$$= 45 \times 0.01 \times 0.4305$$
$$= 0.1937$$

$$\therefore P(x \geq 3) = 1 - [0.3487 + 0.3874 + 0.1937]$$
$$= 1 - 0.9278$$
$$= 0.0702$$

(iii) **4થી વધારે ટીવીનું વેચાણ ન થાય**

એટલે કે $x \leq 4$

$$P(x \leq 4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

$P(0), P(1), P(2)$ ની કિંમતો આગળ મેળવેલ છે. તેથી $P(3)$ અને $P(4)$ ની કિંમતો મેળવીશું.

$P(3)={}^{10}C_3(0.10)^3(0.90)^7$

$=120\times 0.001\times 0.4783$

$=0.05740$

$P(4)={}^{10}C_4(0.10)^4(0.90)^6$

$=210\times 0.0001\times 0.5314$

$=0.01116$

હવે, $P(x\leq 4)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)$

$=0.3487+0.3874+0.1937+0.05740+0.01116$

$=0.9984$

ઉદાહરણ-5 : છોકરા અને છોકરીની સંભાવના સરખી ગણતાં પ્રત્યેક કુટુંબમાં 4 બાળકો હોય તેવા 400 કુટુંબોમાં

(i) 2 છોકરા, (ii) 4 છોકરીઓ, (iii)1 અથવા 2 છોકરાઓ હોય તેવા કુટુંબોની સંખ્યા શોધો.

જવાબ : છોકરા અને છોકરીની સંભાવના સરખી હોવાથી છોકરા અને છોકરીની સંભાવના 0.5 અને 0.5 થશે.

જો છોકરાઓની સંખ્યાને X લઈએ તો છોકરાની સંભાવના $(p)=0.5$ થશે.

અહીં $n=4$ અને $N=400$ થશે.

(i) **2 છોકરા**

એટલે કે $x = 2$ થાય.

$P(2)={}^4C_2(0.5)^2\times(0.5)^2$

$=6\times 0.25\times 0.25$

$=0.375$

$\therefore$ 2 છોકરાઓ હોય તે કુટુંબોની સંખ્યા = $N\,P(2)=400\times 0.375=150$ થશે.

(ii) **4 છોકરીઓ**

એટલે કે 0 છોકરાઓ થશે. $\therefore x=0$

$P(0)={}^4C_0(0.5)^0(0.5)^4$

$=1\times 1\times 0.0625$

$=0.0625$

4 છોકરીઓ હોય તેવા કુટુંબોની સંખ્યા = $NP(0)$

$=400\times 0.0625$

$=25$

(iii) **1 અથવા 2 છોકરા**

એટલે કે $x=1$ અથવા $x=2$ થશે.

$P(1)={}^4C_1(0.5)^1(0.5)^2$

$=4\times 0.5\times 0.125$

$=0.25$

$P(2)={}^4C_2(0.5)^2(0.5)^2$

$=6\times 0.25\times 0.25$

$=0.375$

તેથી P(x=1 અથવા x=2) = $P(1)+P(2)=0.25+0.375$

$=0.625$

$\therefore$ 1 અથવા 2 છોકરાઓ હોય તેવા કુટુંબોની સંખ્યા = 400×0.625

$=250$

ઉદાહરણ-6 : એક સમતોલ પાસાને 6 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. દરેક પ્રયત્ને 1 અથવા 6 મળે તેને સફળતા ગણીએ તો સફળતાની સંખ્યાનું સંભાવના-વિતરણ લખો.

જવાબ : એક સમતોલ પાસામાં 1 અથવા 6 મળે તેની સંભાવના $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ થશે.

$\therefore q=1-p=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

હવે કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા 6 છે. $\therefore n=6$ થશે.

6 પાસાઓ ઉછાળતા મળતી સફળતાની સંખ્યાને X લઈએ.

હવે, $P(x)={}^nC_x p^x q^{n-x}$

$$P(x)={}^6C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x},x=0,1....6 \text{ મળે.}$$

હવે આપણે ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી દરેક x માટે તેની સંભાવના મેળવીશું.

x	$P(x)$
0	${}_6C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{64}{729}$
1	${}_6C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{192}{729}$
2	${}_6C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{240}{729}$
3	${}_6C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{160}{729}$
4	${}_6C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{60}{729}$
5	${}_6C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{12}{729}$
6	${}_6C_6\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{729}$
કુલ	$\frac{729}{729}=1$

ઉદાહરણ-7 : એક દ્વિપદી વિતરણ માટે મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 3 અને $\frac{9}{4}$ છે, તો આ વિતરણનાં પ્રાચલો શોધો.

જવાબ : અહીં વિચરણ = $\frac{9}{4}$ અને મધ્યક = 3 છે.

$\therefore npq=\frac{9}{4}$ અને $np=3$ છે.

$$\therefore \frac{npq}{np}=\frac{\frac{9}{4}}{3}$$

$\therefore q = \frac{3}{4}$ તથા $p = 1 - q = \frac{1}{4}$ થશે.

હવે $np = 3$ છે.

$\therefore n\left(\frac{1}{4}\right) = 3$

$\therefore n = 12$ થશે. તેથી વિતરણના પ્રાચલો $n = 12$ અને $p = \frac{1}{4}$ છે.

ઉદાહરણ-8 : એક દ્વિપદી વિતરણ માટે $n = 5$ અને $2P(1) = P(3)$ હોય તો આ વિતરણમાં સફળતાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : $n = 5$ અને $2P(1) = P(3)$ આપેલ છે.

$\therefore 2\left[{}^5C_1 p^1 q^4\right] = \left[{}^5C_3 p^3 q^2\right]$

$\therefore 2\left[5pq^4\right] = 10p^3q^2$

$\therefore q^2 = p^2$

$\therefore q = p$

$\therefore 1 - p = p$

$\therefore 2p = 1$

$\therefore p = \frac{1}{2}$ થાય.

તેથી સફળતાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે.

સ્વાધ્યાય

1. યાદચ્છિક ચલની વ્યાખ્યા આપો.
2. અસતત અને સતત યાદચ્છિક ચલનો અર્થ સમજાવો.
3. અસતત યાદચ્છિક ચલનું સંભાવના વિતરણ એટલે શું ?
4. દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના સૂત્ર જણાવો અને તેના પ્રાચલો જણાવો.
5. દ્વિપદી વિતરણના ગુણધર્મો જણાવો.
6. એક ડબ્બાના 6 બલ્બમાંથી 2 ખામીવાળા છે. જો તે ડબ્બામાંથી યાદચ્છિક રીતે 2 બલ્બ લેવામાં આવે તો ખામીવાળા બલ્બનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.
7. એક થેલીમાં 5 લાલ અને 4 સફેદ દડા છે. જો થેલીમાંથી યાદચ્છિક રીતે 3 દડા લેવામાં આવે તો લાલ દડાની સંખ્યાનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.
8. એક ડબ્બામાં 6 ટિકિટો છે. તેના ઉપર 1, 1, 2, 2, 3, 3 એમ સંખ્યાઓ લખેલી છે. તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે 2 ટિકિટ લેવામાં આવે છે. જો ટિકિટ ઉપર મળતી સંખ્યાઓના સરવાળાને યાદચ્છિક ચલ X વડે દર્શાવવામાં આવે તો Xનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.
9. બે પાસાઓને એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે. બે પાસાઓ પર મળતા અંકોમાંથી મહત્તમ અંકને X વડે દર્શાવીએ તો Xનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.
10. યુદ્ધ દરમિયાન હવાઈ સફરમાં સરેરાશ 10માંથી એક વિમાન તોડી પડાય છે, તો 5 વિમાનના કાફલામાંથી 4 વિમાન સલામત રીતે પાછા આવે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.
11. એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થયેલા એકમોમાં 2% એકમો ખામીવાળા હોય છે. આ ઉત્પાદિત થયેલ એકમોમાંથી યાદચ્છિક રીતે 6 એકમો પસંદ કરવામાં આવે છે. તેમાંથી (1) એક પણ એકમ ખામીવાળો ન મળે (2) 2 એકમો ખામીવાળા મળે તેની સંભાવના કેટલી થશે ?

12. એક સમતોલ પાસાને 7 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. દરેક પ્રયત્ને 2 કે તેથી નાની સંખ્યા મળે તેને સફળતા ગણીએ તો (1) 4 સફળતા મળે (2) વધુમાં વધુ 6 સફળતા મળે તેની સંભાવના શોધો.
13. એક બોક્સમાં 100 બોલપેન છે જેમાંથી 20 ખામીવાળી છે. જો બોક્સમાંથી 10 બોલપેન યાદચ્છિક રીતે લેવામાં આવે તો (1) બધી જ બોલપેન ખામીવાળી (2) બધી જ ખામી વગરની હોય તેની સંભાવના શોધો.
14. એક દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક અને વિચરણ 6 અને 2 છે, તો આ દ્વિપદી વિતરણના પ્રાચલો શોધો.
15. એક દ્વિપદી વિતરણમાં જો $n=6$ અને $9p(x=4)=p(x=2)$ હોય તો વિતરણનું મધ્યક અને વિચરણ શોધો.
16. છ સિક્કા એકસાથે ઉછાળવામાં આવે તો (1) પાંચ છાપ (2) ઓછામાં ઓછી 2 છાપ મળે તેની સંભાવના શોધો.
17. કોઈ એક વિસ્તારમાં ચોમાસામાં 30માંથી 10 દિવસ વરસાદ પડે છે. તો એક અઠવાડીયામાં ઓછામાં ઓછા 3 દિવસ વરસાદ પડે તેની સંભાવના શોધો.
18. એક પરિક્ષામાં બહુ વિકલ્પ પ્રશ્નો પૂછવામાં આવે છે. દરેક પ્રશ્નોના ચાર વિકલ્પો આપવામાં આવે છે અને તેમાંથી એક જ વિકલ્પ સાચો છે. જો પરિક્ષામાં 10 પ્રશ્નો પૂછવામાં આવે તો (1) દરેક પ્રશ્નના જવાબ સાચા પડે (2) વધુમાં વધુ 3 પ્રશ્નોના જવાબ સાચા પડે તેની સંભાવના શોધો.
19. એક દ્વિપદી વિતરણમાં જો $n=5$ અને $P(3):P(4)=8:3$ હોય તો p ની કિંમત શોધો.
20. એક દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય $p(x)={}^{8}C_x p^x q^{n-x}$ અને મધ્યક 2 આપેલ હોય તો $p(x=6)$ શોધો.

પોયસન વિતરણ (Poisson distribution)

ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી સાયમન ડી. પોયસને ઈ.સ.1837માં આ વિતરણ શોધેલું.

દ્વિપદી વિતરણમાં જ્યારે n ની કિંમત ખૂબ મોટી હોય $(n \to \infty)$ અને p ની કિંમત ખૂબ નાની હોય $(p \to 0)$ અને np ની કિંમત ચોક્કસ સંખ્યા હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણનું લક્ષ પોયસન વિતરણ બને છે.

વ્યાખ્યા : જે ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય $P(x)=\dfrac{e^{-m}m^x}{x!}, x=0,1,2.....: m>0$ હોય તે યાદચ્છિક ચલ xને પોયસન ચલ કહે છે અને તેના વિતરણને પોયસન વિતરણ કહે છે.

ઉપયોગિતા : આ વિતરણ વ્યવહારમાં ઘણું ઉપયોગી છે, કારણ કે ઘણીબધી વ્યવહારુ પરિસ્થિતિઓમાં યાદચ્છિક ચલ પોયસન વિતરણ ધરાવતો હોય છે. નીચે આવા કેટલાક યાદચ્છિક ચલ જે પોયસન વિતરણ ધરાવે છે તે જાણીએ :

– કોઈ એક વિસ્તારમાં અમુક સમયના ગાળામાં થતાં અકસ્માતોની સંખ્યા.

– ઓફિસમાં અમુક સમયના ગાળામાં આવતા ટેલિફોનની સંખ્યા.

– છાપેલા પાના પર ભૂલોની સંખ્યા

– અમુક વિસ્તારમાં અમુક સમયના ગાળામાં કોઈ ચોક્કસ રોગથી થતા મૃત્યુની સંખ્યા વગેરે.

ગુણધર્મો

(1) પોયસન વિતરણ અસતત ચલનું વિતરણ છે.

(2) m એ પ્રાચલ છે.

(3) આ વિતરણનો મધ્યક અને વિચરણ m છે.

(4) આ વિતરણ ધન વિષમતાવાળું વિતરણ છે.

(5) બે નિરપેક્ષ પોયસન ચલોના સરવાળાનું વિતરણ પોયસન વિતરણ હોય છે.

પોયસન વિતરણના દાખલા માટે e^{-m} ની કિંમત આ પ્રકરણના સ્વાધ્યાય પછી આપેલ કોષ્ટકમાંથી શોધી અને ગણતરી કરીશું.

ઉદાહરણ-1 : એક કંપનીના ઉત્પાદનમાં સરેરાશ 3% વસ્તુઓ ખામીવાળી હોય છે. તો 100 વસ્તુની એક પેટીમાં 3 વસ્તુઓ ખામીવાળી હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : પેટીમાં ખામીવાળી વસ્તુઓની સંખ્યાને X વડે દર્શાવીએ.

$m =$ પેટીમાં ખામીવાળી વસ્તુઓની સરેરાશ

$$= np$$

$$= 100 \times \frac{3}{100}$$

$$\therefore m = 3$$

3 વસ્તુઓ ખામીવાળી હોવાની સંભાવના હોય એટલે કે *x = 3* થાય.

$$P(3) = \frac{e^{-3}3^3}{3!}$$

$$= \frac{0.0498 \times 27}{6}$$

$$= 0.2241$$

ઉદાહરણ-2 : એક મોટા કારખાનામાં, કોઈ એક પાળીમાં સરેરાશ 2 કારીગરો ગેરહાજર હોય છે. તો કોઈ ચોક્કસ પાળીમાં (1) ત્રણ કારીગરો ગેરહાજર હોય (2) ચારથી વધુ ગેરહાજર હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : ગેરહાજર કારીગરોની સંખ્યાને X વડે દર્શાવીએ તો કોઈ એક પાળીમાં સરેરાશ ગેરહાજરી લેતાં $m = 2$

(1) ત્રણ કારીગર ગેરહાજર હોય એટલે કે *x = 3*

$$P(x=3) = \frac{e^{-2}2^3}{3!}$$

$$= \frac{0.1353 \times 8}{6}$$

$$= 0.1804$$

(2) ચાર કે તેથી વધુ ગેરહાજર હોય એટલે કે *x* = 4, 5, 6....

$$P(x \geq 4) = P(4) + P(5) + ...$$

$$= 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)]$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-2}2^0}{0!} + \frac{e^{-2}2^1}{1!} + \frac{e^{-2}2^2}{2!} + \frac{e^{-2}2^3}{3!}\right]$$

$$= 1 - e^{-2}\left[\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{6}\right]$$

$$= 1 - 0.1353[6.5]$$

$$= 0.1206$$

ઉદાહરણ-3 : એક કોર્પોરેટ કંપનીના ઈન્ટ્રા-મેલ સરવર પર 1 થી 3 વાગ્યા દરમિયાન દર મિનિટે સરેરાશ 3.5 મેલ આવે છે, તો અમુક ચોક્કસ મિનિટના ગાળામાં (1) એક મેલ આવે (2) એક પણ મેલ ન આવે (3) વધુમાં વધુ 3 મેલ આવે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : દર મિનિટે આવતા મેલની સંખ્યા X વડે દર્શાવતા Xનું વિતરણ પોયસન વિતરણ બને.

અહીં, દર મિનિટે સરેરાશ 3.5 મેલ આવે છે.

$\therefore m = 3.5$

(1) **એક મેલ આવે એટલે કે $x = 1$**

$$\therefore P(1) = \frac{e^{-3.5}(3.5)^1}{1!}$$

$$= \frac{0.3020 \times 3.5}{1}$$

$= 0.1057$

(2) **વધુમાં વધુ 3 મેલ આવે એટલે કે $x = 0, 1, 2, 3$ થશે.**

$P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$

$$= \frac{e^{-3.5}(3.5)^0}{0!} + \frac{e^{-3.5}(3.5)^1}{1!} + \frac{e^{-3.5}(3.5)^2}{2!} + \frac{e^{-3.5}(3.5)^3}{3!}$$

$$= e^{-3.5}\left[\frac{1}{1} + \frac{3.5}{1} + \frac{12.25}{2} + \frac{42.875}{6}\right]$$

$= 0.03020 \times [1 + 3.5 + 6.125 + 7.15]$

$= 0.5368$

ઉદાહરણ-4 : ઈલેક્ટ્રિક બલ્બ બનાવતી કંપનીના ઉત્પાદનમાં 0.2% ખામીવાળા હોય છે. તો 200 બલ્બની એક પેટીમાં બધા જ ખામી વગરના હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : પેટીમાંથી મળતા ખામીવાળા બલ્બની સંખ્યાને X વડે દર્શાવતા, Xનું વિતરણ પોયસન વિતરણ બને.

ખામીવાળા બલ્બની સરેરાશ સંખ્યા $(m) = np$

$$= 200 \times \frac{0.2}{100}$$

$\therefore m = 0.4$

બધા જ ખામી વગરના હોય એટલે કે $x = 0$ થશે

$$P(0) = \frac{e^{-0.4}(0.4)^0}{0!}$$

$= 0.01832$

ઉદાહરણ-5 : પોયસન ચલ X માટે $P(x=2) = P(x=3)$ હોય તો તેનો મધ્યક અને પ્ર.વિ. શોધો.

જવાબ :

અહીં $P(x=2) = P(x=3)$

$$\therefore \frac{e^{-m}m^2}{2!} = \frac{e^{-m}m^3}{3!}$$

$$\therefore \frac{m^2}{2} = \frac{m^3}{6}$$

$\therefore m = 3$

હવે મધ્યક $= m$

$\therefore$ મધ્યક $= 3$

અને પ્ર.વિ. $= \sqrt{m}$

$= \sqrt{3}$

$= 1.7321$

ઉદાહરણ-6 : પોયસન ચલ X એ ધન કિંમતો ધારણ કરે તેની સંભાવના $(1 - e^{-2.5})$

હોય તો $P(-1.5 < x < 1.5)$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $P(x > 0) = 1 - e^{-2.5}$

$\therefore 1 - P(0) = 1 - e^{-2.5}$

$\therefore P(0) = e^{-2.5}$

$\therefore \frac{e^{-m} m^0}{0!} = e^{-2.5}$

$\therefore m = 2.5$

હવે, $P(-1.5 < x < 1.5)$

$= P(0) + P(1)$ [$\because$ પોયસન ચલ x = 0, 1, 2,....કિંમતો જ ધારણ કરે છે.)

$= \frac{e^{-2.5}(2.5)^0}{0!} + \frac{e^{-2.5}(2.5)^1}{1!}$

$= e^{-2.5}\left[\frac{1}{1} + \frac{2.5}{1}\right]$

$= (0.08208)(3.5)$

$= 0.2873$

ઉદાહરણ-7 : પોયસન ચલ X માટે

$P(x = 2) = 9P(x = 4) + 90\, P(x = 6)$ હોય તો મધ્યક અને વિચરણ શોધો :

જવાબ : $P(x = 2) = 9P(x = 4) + 90P(x = 6)$

$\therefore \frac{e^{-m} m^2}{2!} = 9\left[\frac{e^{-m} m^4}{4!}\right] + 90\left[\frac{e^{-m} m^6}{6!}\right]$

$\therefore \frac{e^{-m} m^2}{2} = 9\left[\frac{e^{-m} m^4}{24}\right] + 90\left[\frac{e^{-m} m^6}{720}\right]$

$\therefore \frac{e^{-m} m^2}{2} = \frac{3e^{-m} m^4}{8} + \frac{e^{-m} m^6}{8}$

$\therefore \frac{e^{-m} m^2}{2} = \frac{e^{-m} m^2}{2}\left[\frac{3m^2 + m^4}{4}\right]$

$\therefore 1 = \frac{3m^2 + m^4}{4}$

$\therefore 4 = 3m^2 + m^4$

$\therefore m^4 + 3m^2 - 4 = 0$

$\therefore (m^4 + 4)(m^4 - 1) = 0$

$\therefore m^4 = -4$ અથવા $m^4 = 1$

$\therefore m = 1$ [$\because m$ ની ઋણ કિંમતો શક્ય નથી.]

હવે મધ્યક $= m = 1$

અને વિચરણ $= m = 1$

સ્વાધ્યાય

1. કઈ શરતો હેઠળ દ્વિપદી વિતરણ પોયસન વિતરણને અનુસરે છે ?
2. પોયસન વિતરણનું સંભાવના સૂત્ર લખો.
3. પોયસન વિતરણને અનુસરતી હોય તેવી પાંચ ઘટનાઓ જણાવો.
4. પોયસન વિતરણના ગુણધર્મો જણાવો.
5. પોયસન વિતરણનો મધ્યક અને વિચરણ જણાવો.
6. સેફ્ટી પીનનો ઉત્પાદક તેના ઉત્પાદનમાં 10% સેફ્ટીપીન ખામીવાળી છે એમ જણાય છે. દરેક બોક્સમાં તે 100 સેફ્ટીપીન મૂકે છે અને ખાતરી આપે છે કે કોઈપણ બોક્સમાં 5 કરતાં વધારે સેફ્ટીપીન ખામીવાળી હશે નહીં, તો કોઈ પણ એક બોક્સ માટે તેણે આપેલી ખાતરી સાચી હોય તેની સંભાવના શોધો.
7. એક ટ્રાવેલ એજન્ટ પાસે કેટલીક ટેક્સીઓ છે. તે જાણે છે કે રોજની સરેરાશ 2 ટેક્સીઓની માગ છે. તો કોઈપણ એક દિવસે 3 કે તેથી વધુ ટેક્સીઓ ઉપયોગમાં હોય તેની સંભાવના શોધો.
8. એક છપાવેલ પુસ્તકમાં પાનાદીઠ સરેરાશ 0.5 ભૂલ માલૂમ પડે છે. 200 પાનાંના તે પુસ્તકમાં કેટલાં પાનામાં 2થી વધુ ભૂલો હશે તે પોયસન વિતરણનો ઉપયોગ કરીને શોધો.
9. એક કંપનીના ટેલિફોન સ્વિચ બોર્ડ ઉપર 1 થી 2 વાગ્યાના લંચ-બ્રેક દરમિયાન દર મિનિટે સરેરાશ 4 કોલ આવે છે તો અમુક ચોક્કસ મિનિટના ગાળામાં (1) 3 કોલ અને (2) વધુમાં વધુ 2 કોલ આવે તેની સંભાવના શોધો.
10. પેન્સિલ બનાવતી એક ફેક્ટરીમાં કોઈ પણ પેન્સિલ ખામીવાળી હોવાની સંભાવના $\frac{1}{200}$ છે. પેકેટમાં 50ના પેન્સિલ પેક કરવામાં આવે છે, તો 1000 પેકેટના એક જથ્થામાં (1) એક પણ પેન્સિલ ખામીવાળી ન હોય (2) બે પેન્સિલ ખામીવાળી હોય તેવા પેકેટની લગભગ સંખ્યા શોધો.
11. એક પોયસન વિતરણનો મધ્યક 3 છે. તો તે વિતરણમાં 2 વખત સફળતા મળે તેની સંભાવના શોધો.
12. એક પોયસન વિતરણમાં પ્રમાણિત વિચલન 1.41 છે. તેનો મધ્યક અને $P(1)$ શોધો.
13. x એક એવો પોયસન ચલ છે, જેમાં $P(x=1)=P(x=2)$ છે. તો $P(x=3)$ મેળવો.
14. જો એક પોયસન ચલ x માટે $3P(x=2)=2P(x=3)$ હોય તો મધ્યક શોધો.
15. જો x એક પોયસન ચલ હોય અને $P(x=0)=0.05$ હોય તો $P(x\geq 2)$ ની કિંમત મેળવો.

Values 0f e^{-m}

$(0 < m < 1)$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.0000	.9900	.9802	.9704	.9608	.9512	.9418	.9324	.9231	.9139
0.1	.9048	.8958	.8869	.8781	.8694	.8607	.8521	.8437	.8553	.8270
0.2	.8187	.8106	.8025	.7945	.7866	.7788	.7711	.7634	.7558	.7483
0.3	.7408	.7334	.7261	.7189	.7118	.7047	.6977	.6907	.6839	.6771
0.4	.6703	.6636	.6570	.6505	.6440	.6376	.6313	.6250	.6188	.6126
0.5	.6065	.6005	.5945	.5886	.5827	.5770	.5712	.5655	.5599	.5543
0.6	.5488	.5434	.5379	.5326	.5273	.5226	.5169	.5117	.5066	.5016
0.7	.4966	.4916	.4868	.4819	.4771	.4724	.4777	.4630	.4584	.4538
0.8	.4493	.4449	.4404	.4360	.4317	.4274	.4232	.4190	.4148	.4107
0.9	.4066	.4025	.3985	.3946	.3906	.3867	.3829	.3791	.3753	.3716

$(m = 1, 2, 3, ..., 10)$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e^{-m}	.36788	.13534	.04979	.01832	.006738	.002479	.000912	.000335	.000123	.000045

Note : $e^{-235} = e^{-2} \times e^{-0.35}$
$= 0.13534 \times 0.7047$
$= 0.09537$

સંભાવના વિતરણ
સ્વાધ્યાય

બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો

1. દ્વિપદી વિતરણ સંમિત વિતરણ ક્યારે થાય ?
   (a) $p > q$ (b) $p < q$ (c) $p = q$ (d) $p = 0$
2. દ્વિપદી વિતરણમાં
   (a) મધ્યક = વિચરણ (b) મધ્યક = પ્ર.વિ. (c) મધ્યક > વિચરણ (d) મધ્યક < વિચરણ
3. દ્વિપદી વિતરણમાં પ્રયોગના સફળતાની સંભાવના પ્રયોગના નિષ્ફળતાની સંભાવના કરતાં બમણી છે, તો હવે પાંચ વખત પ્રયોગ કરવામાં આવે તો એક પણ સફળતા ન મળે તેની સંભાવના મેળવો
   (a) $2/3$ (b) $1/3$ (c) $1/243$ (d) $32/243$
4. જો દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક અને વિચરણનો સરવાળો 5 અને તફાવત 1 હોય તો તેના પ્રાચલો મેળવો.
   (a) $n = 9, p = 1/3$ (b) $n = 9, p = 2/3$ (c) $n = 25, p = 4/5$ (d) $n = 25, p = 1/5$
5. પોયસન વિતરણમાં
   (a) મધ્યક = વિચરણ (b) મધ્યક = પ્રા.વિ. (c) મધ્યક > વિચરણ (d) મધ્યક < વિચરણ
6. જો પોયસન વિતરણમાં $p(0) = 0.13534$ હોય તો મધ્યક શોધો.
   (a) 0.13534 (b) 2 (c) 1 (d) 0
7. જો પોયસન વિતરણમાં $p(x = 3) = p(x = 4)$ હોય તો પ્રા.વિ. શોધો.
   (a) 4 (b) 2 (c) 1 (d) 3
8. પોયસન ચલ x માટે વિતરણમાં $p(x > 0) = 1-e^{-2.5}$ હોય તો પોપસન વિતરણનો પ્રાચલ શોધો.
   (a) 1.58 (b) 0.03986 (c) 6.25 (d) 2.5

જવાબ : 1. c 2. c 3. c 4. a 5. a 6. b 7. b 8. 2.5

જવાબ : દ્વિપદી વિતરણ

6.

ખામીવાળા બલ્બ	0	1	2
સંભાવના	$6/15$	$8/15$	$1/15$

7.

લાલ દડાની સંખ્યા	0	1	2	3
સંભાવના	$4/84$	$30/84$	$40/84$	$10/84$

8.

સંખ્યાઓનો સરવાળો	2	3	4	5	6
સંભાવના	$1/15$	$4/15$	$4/15$	$5/15$	$1/15$

9.

મહત્તમ અંક	1	2	3	4	5	6
સંભાવના	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$

10. (1) 779 (2) 24 પેકેટ
11. (1) 0.8858 (2) 0.005537
12. (1) $\frac{280}{2187}$ (2) $\frac{2186}{2187}$
13. (1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$ (2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$
14. $n = 9,\ p = \frac{2}{3}$
15. મધ્યક = $\frac{3}{2}$ વિચરણ= $\frac{9}{4}$
16. (1) $\frac{3}{32}$ (2) $\frac{57}{64}$
17. 0.4294
18. (1) $\frac{1}{1048576}$ (2) $\frac{813564}{1048576}$
19. $p = \frac{3}{7}$
20. $\frac{252}{6536} = 0.0038$

પોયસન વિતરણ

6. 0.9994 7. 0.3233 8. સંભાવના = 0.01439, 2.88 ≅ 3 પાના 9. (1) 0.1954 (2) 0.2381
10. (1) 951 (2) 1 11. 0.2240 12. મધ્યક = 2, p (1) = 0.2707
13. p(3) = 0.1805 14. મધ્યક = 4.5 15. 0.8009

એકમ 6

સતત સંભાવના વિતરણ

-: રૂપરેખા :-

6.1 પૂર્વ ભૂમિકા

માહિતીના પૃથક્કરણમાં આંકડાકીય વિતરણનો ખૂબ જ બહોળો ઉપયોગ જોવા મળે છે. સામાન્ય સંજોગોમાં અસતત અને સતત એમ બે પ્રકારના આંકડાકીય વિતરણનો ઉપયોગ થાય છે. અસતત વિતરણો જેવા કે દ્વિપદી વિતરણ, પોયસન વિતરણ, ગુણોત્તર વિતરણ અને સતત વિતરણો જેવા કે ઘાત વિતરણ, વિબુલ વિતરણ, પ્રામાણ્ય વિતરણ, ગામા વિતરણ, x^2 વિતરણ, t - વિતરણ, F - વિતરણનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

6.2 પ્રામાણ્ય વિતરણ : પ્રસ્તાવના, સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

સતત ચલના વિતરણોમાં પ્રામાણ્ય વિતરણ સૌથી અગત્યનું સતત વિતરણ છે. આ વિતરણની સૌપ્રથમ શોધ ઈ.સ. 1773 માં ડી-મોઈવ્રે નામના ગણિતશાસ્ત્રીએ કરેલી. તેમણે સાબિત કર્યું હતું કે દ્વિપદી વિતરણમાં જ્યારે નિરપેક્ષ પ્રયત્નોની સંખ્યા ખૂબ જ મોટી હોય અને સફળતા (p) તથા નિષ્ફળતા (q) ની સંભાવના અલ્પ ન હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણનું લક્ષ પ્રામાણ્ય વિતરણ થાય છે. 19 મી સદીની શરૂઆતમાં લાપ્લાસ અને ગોસ નામના ગણિતશાસ્ત્રીએ ભૂલોના વિતરણનો અભ્યાસ કરતા આ સતત વિતરણને ઓળખાવ્યું અને સ્વતંત્ર રીતે ફરીથી શોધ્યું. ત્યારથી આ વિતરણ ગોસિયન વિતરણ તરીકે પણ ઓળખાય છે. અન્યના સમયમાં પ્રામાણ્ય વિતરણ એ ખૂબ જ અગત્યના વિતરણ તરીકે આંકડાકીય પૃથક્કરણમાં ઉપયોગમાં લેવાય છે.

પ્રામાણ્ય વિતરણનું સંભાવના વિધેય નીચે પ્રમાણે છે.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} ; -\infty < x < \infty$$

$$-\infty < \mu < \infty$$

$$\sigma > 0$$

અહીં μ = પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક

σ = પ્રામાણ્ય વિતરણનું પ્રમાણિત વિચલન

e = 2.7183 (અચલાંક)

$\pi = \frac{22}{7}$ અથવા 3.1416 (અચલાંક)

આ સૂત્રમાં x ની કિંમતો $x - \frac{dx}{2}$ અને $x + \frac{dx}{2}$ ના અંતરાલમાં હોવાની સંભાવના આપે છે. સતત ચલ x પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે તો તેને $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આ વિતરણમાં મધ્યક = મધ્યસ્થ = બહુલક હોય છે. તથા μ અને σ આ વિતરણના પ્રાચલો છે.

6.3 પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ અને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણ

જો પ્રામાણ્ય વિતરણમાં મધ્યક $\mu = 0$ અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 1$ હોય તેવા પ્રામાણ્ય વિતરણને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણ કહેવામાં આવે છે.

જો x નું વિતરણ $N(\mu, \sigma^2)$ હોય તો $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ નું વિતરણ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણ બને છે. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણનું ઘટત્વ વિધેય નીચે મુજબ બને છે.

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{\frac{-1}{2}Z^2}; \; -\infty < Z < \infty$$

Z ને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ કહેવામાં આવે છે અને Z નો મધ્યક 0 અને પ્રમાણિત વિચલન 1 છે. તેને $Z \sim N(0, 1)$ ના સંકેત વડે દર્શાવાય છે.

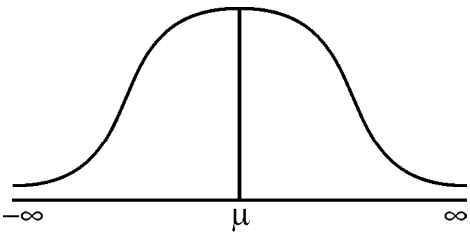
6.4 પ્રામાણ્ય વક્ર હેઠળનું ક્ષેત્રફળ

પ્રામાણ્ય વક્ર માટેનું ક્ષેત્રફળ,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

આ વિધેયમાં μ અને σ ને પ્રામાણ્ય વિતરણના પ્રાચલો કહેવામાં આવે છે. જો μ અને σ ની કિંમતો આપેલી હોય તો આપણે સંભાવના વક્ર દોરી શકીએ. આ વક્રને પ્રામાણ્ય વક્ર કહેવામાં આવે છે. પ્રામાણ્ય વક્ર હેઠળના ક્ષેત્રફળને કોષ્ટક સ્વરૂપમાં દર્શાવામાં આવે છે. જેને "Area Under the Normal Curve" કહેવાય છે. જે કોષ્ટક આ પુસ્તકના અંતે આપવામાં આવેલ છે.

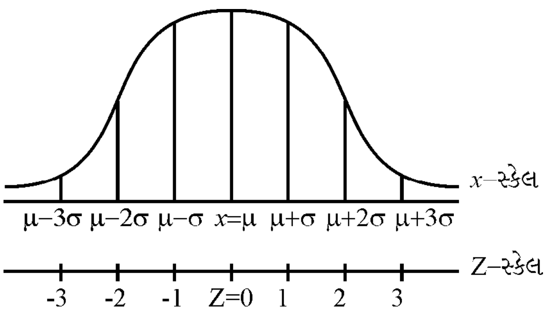
પ્રામાણ્ય વક્ર મધ્યરેખાની બંને બાજુ સંપૂર્ણ સંમિત હોય છે. ચલ x ની કિંમત $-\infty$ થી $+\infty$ વચ્ચે હોય તેની સંભાવના 1 હોય છે. એટલે કે, સંભાવના = વક્રનું કુલ ક્ષેત્રફળ = 1.



ચલ x ની બે કિંમતો a અને b ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના પણ ઉપરના વક્ર ક્ષેત્રફળના ભાગ ઉપરથી મળી શકે છે. એટલે કે,

Prob ($a \leq x \leq b$); એટલે કે $x = a$ અને $x = b$ આગળના બે લંબ વચ્ચેનું વક્રનું ક્ષેત્રફળ.

મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ ની જુદી-જુદી કિંમતો માટે જુદા-જુદા વક્ર મળી શકે છે અને તે ઉપરથી સંભાવના શોધીને કોષ્ટકોરૂપે રજૂ કરી શકાય છે. પરંતુ તેની બદલે પ્રામાણ્ય ચલ x નું મધ્યક 0 અને પ્રમાણિત વિચલન 1 હોય તેવા ચલ Z માં રૂપાંતર કરવામાં આવે છે. આવા ચલને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ કહેવામાં આવે છે અને તેનો વક્ર નીચે પ્રમાણેનો મળે છે.



પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની કિંમત $-\infty$ થી ∞ વચ્ચે આવેલા વક્રનું ક્ષેત્રફળ પણ 1 થાય. પ્રામાણ્ય વક્ર સંમિત વક્ર છે. તેથી Z ની કિંમત $-\infty$ થી 0 વચ્ચે આવેલા વક્રનું નીચેનું ક્ષેત્રફળ = Z ની કિંમત 0 થી $+\infty$ વચ્ચે આવેલ વક્ર નીચેનું ક્ષેત્રફળ = 0.5.

જેમ જેમ x ની કિંમત મોટી અને મોટી થતી જાય તેમ તેમ $f(z)$ ની કિંમત નાની થતી જશે પરંતુ શૂન્ય નહિ થાય. જે દર્શાવે છે કે પ્રામાણ્ય વક્ર x ને સ્પર્શતો નથી પરંતુ તે અનંતલક્ષી છે.

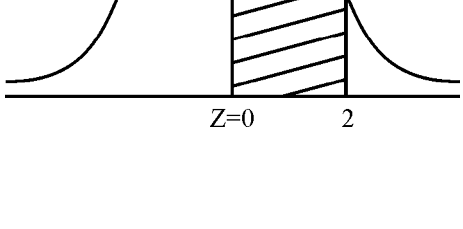
હવે આપણે પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની જુદી-જુદી કિંમતો ઉપરથી સંભાવના શોધવા કોષ્ટકનો ઉપયોગ સમજીએ.

(1) Z ની કિંમત 0 થી 2 વચ્ચે હોય તેની સંભાવના,

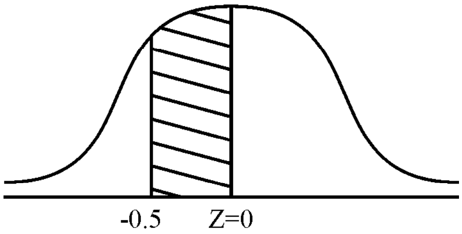
$= P [0 \leq Z \leq 2]$

$= 0.4772$

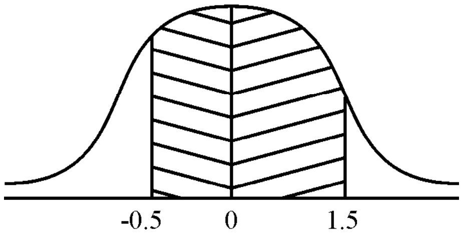
(કોષ્ટકમાં Z = 2 માટે મળતી કિંમત)



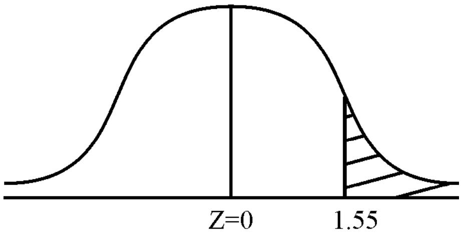
(2) Z ની કિંમત –0.5 થી 0 વચ્ચે
હોવાની સંભાવના,
$= P[-0.5 \leq Z \leq 0]$
$= 0.1915$
(કોષ્ટકમાં 0.5 માટે મળતી કિંમત)



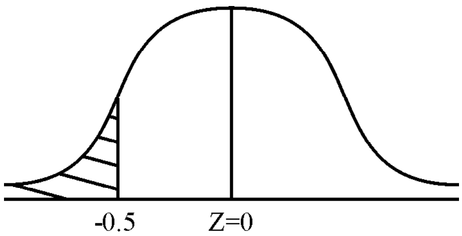
(3) Z ની કિંમત –0.5 થી 1.5
વચ્ચે હોવાની સંભાવના,
$= P[-0.5 \leq Z \leq 1.5]$
$= P[-0.5 \leq Z \leq 0] + [0 \leq Z \leq 1.5]$
$= 0.1915 + 0.4332 = 0.6247$



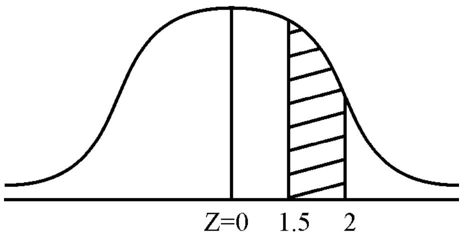
(4) Z ની કિંમત 1.55 થી મોટી
હોવાની સંભાવના,
$= P[Z \geq 1.55]$
$= 0.5 - [0 \geq Z \geq 1.55]$
$= 0.5 - 0.4394$
$= 0.0606$ (કોષ્ટકમાં $Z = 1.55$ માટેની કિંમત અને $Z = 0$ ની જમણી તરફ વક્રનું ક્ષેત્રફળ 0.5 છે.)



(5) Z ની કિંમત –0.5 થી ઓછી
હોવાની સંભાવના,
$= P[Z \leq -0.5]$
$= +0.5 - 0.1915$ ($\therefore$ 0.5 – (Z = 0 થી 0.5 વચ્ચે પ્રમાણિત વક્રનું ક્ષેત્રફળ))
$= 0.3085$ (કોષ્ટકમાં $Z = 0.5$ માટે મળતી કિંમત અને $Z = 0$ થી ડાબી બાજુનું વક્રનું ક્ષેત્રફળ 0.5 છે.)

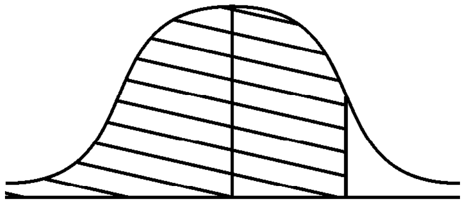


(6) Z ની કિંમત 1.5 થી 2
વચ્ચે હોવાની સંભાવના,
$= P[1.5 \leq Z \leq 2]$



= [Z = 0 થી Z = 2 વચ્ચે પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્રનું ક્ષેત્રફળ] – [Z = 0 થી 1.5 વચ્ચેનું વક્રનું ક્ષેત્રફળ]
$= 0.4772 - 0.4332$
$= 0.044$

(7) Z ની કિંમત 1.45 થી ઓછી હોવાની સંભાવના,



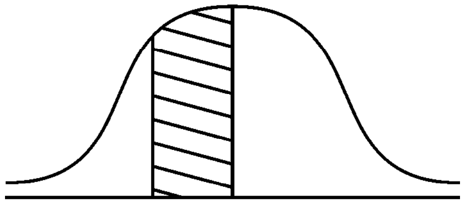
$= P[Z \le 1.45]$

$= 0.5 + [Z = 0$ થી $Z = 1.45$ વચ્ચેનું વક્રનું ક્ષેત્રફળ]

$= 0.5 + 0.4265$

$= 0.9265$

(8) Z ની કિંમત -0.5 થી વધુ હોવાની સંભાવના,

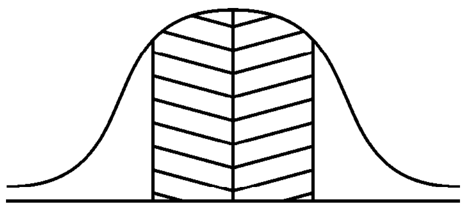


$= P[Z \ge -0.5]$

$= 0.1915 + 0.5$ [$\therefore$ $Z = 0$ થી $Z = 0.5$ વચ્ચેનું વક્રનું ક્ષેત્રફળ]

$= 0.6915$

(9) $\mu \pm \sigma$ ની વચ્ચે પ્રામાણ્ય વક્રનું ક્ષેત્રફળ :



$= P[\mu - \sigma < x < \mu + \sigma]$

$= P[-1 \le Z \le 1]$

$= 2\,(0.3413)$ ($\therefore$ $Z = 0$ આગળ વક્ર પ્રામાણ્ય છ.)

$= 0.6826$

6.5 પ્રામાણ્ય વિતરણના ગુણધર્મો

(1) પ્રામાણ્ય વિતરણ એ સતત વિતરણ છે.

(2) પ્રામાણ્ય વિતરણના પ્રાચલો μ અને σ છે.

(3) આ વિતરણના વક્રનો આકાર ઘંટાકાર જેવો છે.

(4) આ વિતરણનો મધ્યક $= \mu$ અને વિચરણ $= \sigma^2$ છે.

(5) આ વિતરણ μ ની બંને બાજુએથી સંમિત છે.

(6) આ વિતરણમાં મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક સમાન હોય છે.

(7) આ વિતરણની મહત્તમ કિંમત $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ છે. જે $x = \mu$ આગળ ધારણ કરે છે.

(8) આ વિતરણ માટે સરેરાશ વિચલન $(4/5)\,\sigma$ છે.

(9) આ વિતરણ માટે ચતુર્થક વિચલન $(2/3)\,\sigma$ છે.

(10) આ વિતરણમાં વિષમતા શૂન્ય હોય છે.

(11) પ્રામાણ્ય વક્રના બંને છેડા અનંતલક્ષી હોય છે. પરંતુ તે X-અક્ષને મળતા નથી.

(12) પ્રામાણ્ય વક્રની નીચેનું ક્ષેત્રફળ 1 છે.

(13) બે સ્વતંત્ર પ્રામાણ્ય ચલનો સરવાળો પણ પ્રામાણ્ય ચલ જ થાય છે.

(14) પ્રામાણ્ય વક્ર માટે મહત્ત્વના સંભાવના ક્ષેત્રફળો નીચે મુજબે છે :

(i) $\mu \pm \sigma$ ની વચ્ચે આવેલા વક્રના ભાગનું ક્ષેત્રફળ 0.6826 (68.26%) થાય છે.

(ii) $\mu \pm 2\sigma$ ની વચ્ચે આવેલા વક્રના ભાગનું ક્ષેત્રફળ 95.45% થાય છે.

(iii) $\mu \pm 3\sigma$ ની વચ્ચે આવેલા વક્રના ભાગનું ક્ષેત્રફળ 99.73% થાય છે.

(iv) $\mu \pm 1.96$ ની વચ્ચે આવેલા વક્રના ભાગનું ક્ષેત્રફળ 95% થાય છે.

(v) $\mu \pm 2.58$ માટે 99% થાય છે.

(15) જ્યારે n ની કિંમત મોટી હોય ત્યારે આંકડાશાસ્ત્રમાં મળતા મોટા ભાગના સંભાવના વિતરણો પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે.

(16) જ્યારે દ્વિપદી વિતરણમાં n ની કિંમત ખૂબ વધારે હોય અને p અને q ની કિંમત નાની ન હોય ત્યારે દ્વિપદી સંભાવના વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુલક્ષે છે.

6.6 પ્રામાણ્ય વિતરણનાં ઉપયોગો

આંકડાશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં પ્રામાણ્ય વિતરણ ખૂબ જ મહત્ત્વનું વિતરણ છે. તેના જુદા-જુદા ઉપયોગો અને મહત્ત્વ નીચે મુજબ છે :

(1) દૈનિક જીવન વ્યવહારમાં જોવા મળતી મોટા ભાગની ઘટનાઓ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે.

(2) આંકડાશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં આવતા મોટા ભાગના સંભાવના વિતરણમાં n ની કિંમત મોટી હોય તે માટે પ્રામાણ્ય વિતરણનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

(3) ગુરુ નિદર્શ પરીક્ષણોમાં પણ પ્રામાણ્ય વિતરણ ઉપયોગી બને છે.

(4) લઘુ નિદર્શ પરીક્ષણોમાં નિદર્શ પ્રામાણ્ય સમષ્ટિમાંથી લેવામાં આવે છે. તેવી ધારણા કરીને સાર્થકતાનું પરીક્ષણ કરવામાં આવે છે.

(5) આંકડાશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં ગુરુ નિદર્શ પરથી મેળવેલા નિદર્શ આગણકોનાં વિતરણો પ્રામાણ્ય વિતરણો હોય છે.

(6) અર્થશાસ્ત્રીઓ, ખોગળશાસ્ત્રીઓ, મનોવૈજ્ઞાનિકો અને સમાજશાસ્ત્રીઓ વગેરે તેમના સંશોધનમાં પ્રામાણ્ય વિતરણનો ઉપયોગ કરે છે.

(7) પ્રામાણ્ય વિતરણનો ઉપયોગ ઔદ્યોગિક ક્ષેત્રે ગુણવત્તા નિયંત્રણમાં પણ કરવામાં આવે છે.

6.7 ઉદાહરણો

ઉદા.-1 એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 7 અને પ્રમાણિત વિચલન 3 છે. તો (i) પ્રામાણ્ય ચલ x ની કિંમત 11.5 થી ઓછી હોય (ii) 10.75 થી વધુ હોય અને (iii) પ્રામાણ્ય ચલની કિંમત 4 અને 13 ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધો.

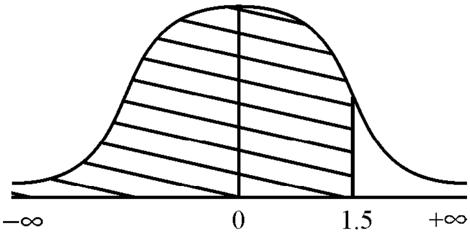
જવાબ : અહીં મધ્યક $\mu = 7$ અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 3$ છે.

(i) પ્રામાણ્ય ચલ x ની કિંમત 11.5 થી ઓછી હોય તેની સંભાવના એટલે કે,

આપણે $P(x < 11.5)$ શોધવાનું છે.

$$P(x < 11.5) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{11.5-7}{3}\right)$$

$= P(Z < 1.5)$

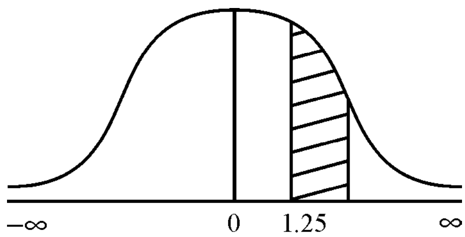


$= P(-\infty < Z < 0) + P(0 < Z < 1.5)$

$= 0.5 + 0.4332$

$= 0.9332$

(ii) પ્રામાણ્ય ચલ x ની કિંમત 10.75 થી વધુ હોય તેની સંભાવના શોધવી છે, એટલે કે, આપણે $P(x > 10.75)$ શોધવાનું છે.



$$\therefore\ P(x > 10.75) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{10.75-7}{3}\right)$$

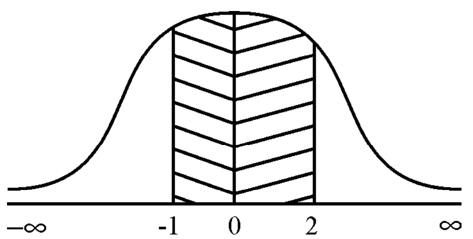
$= P(Z > 1.25)$

$= P(0 < Z < \infty) - P(0 < Z < 1.25)$

$= 0.5 - 0.3944$

$= 0.1056$

(iii) પ્રામાણ્ય ચલ કિંમત 4 અને 13 ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધવી છે એટલે કે, આપણે $P(4 \le x \le 13)$ શોધવાનું છે.



$$\therefore\ P(4 \le x \le 13) = P\left(\frac{4-7}{3} \le \frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{13-7}{3}\right)$$

$= P(-1 \le Z \le 2)$

$= P(-1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2)$

$= 0.3413 + 0.4772$

$= 0.8185$

ઉદા.-2 એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે $\mu = 61$ અને $\sigma = 8$ છે. ચલ x ની કિંમત 45 અને 73 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના કેટલી ?

જવાબ : અહીં $\mu = 61$ અને $\sigma = 8$ છે.

$x = 45$ માટે $Z_1 = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{45-61}{8} = -2$

અને $x = 73$ માટે $Z_2 = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{73-61}{8} = 1.5$

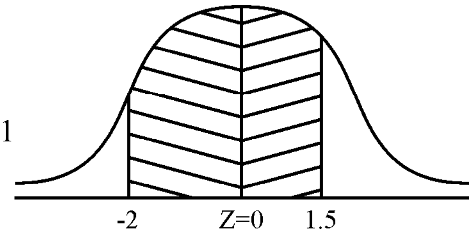
$\therefore$ P $(45 < x < 73)$

$= P(-2 < Z < 1.5)$

$= P(-2 < Z < 0) + P(0 < Z < 1$

$= 0.4772 + 0.4332$

$= 0.9104$



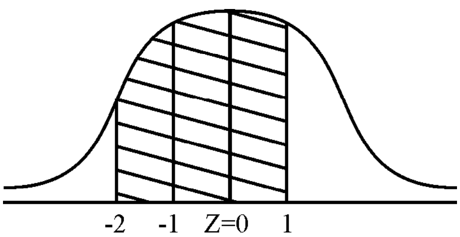
ઉદા.-3 એક પરીક્ષામાં 1000 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણનું વિતરણ મધ્યક 85 અને પ્રમાણિત વિચલન 15 વાળું પ્રામાણ્ય વિતરણ છે તો,

(i) 55 થી 100 ગુણની વચ્ચે ગુણ મેળવનારા

(ii) 55 થી વધુ ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

જવાબ : અહીં $n = 1000$, $\mu = 85$ અને $\sigma = 15$ છે.

(i) 55 થી 100 ગુણની વચ્ચે ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા :



$x = 55$ માટે $Z_1 = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{55-85}{15} = -2$

$x = 90$ માટે $Z_2 = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{100-85}{15} = +1$

$\therefore$ P $(-2 \le Z \le +1)$

$= P(-2 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le +1)$

$= 0.4772 + 0.3413$ ($\therefore$ કોષ્ટકમાંથી $Z = -2$ અને $Z = 1$ ની કિંમત મુકતા)

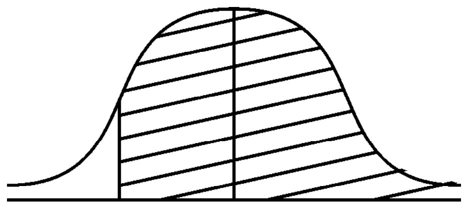
0.8185

$\therefore$ 55 થી 100 ગુણની વચ્ચે ગુણ મેળવનારની સંખ્યા,

$= 100 \times 0.8185$

$= 818.5 \simeq 819$ વિદ્યાર્થીઓ.

(ii) 55 થી વધુ ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા :



$x = 55$ માટે, $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{55-85}{15} = -2$

$\therefore$ વિદ્યાર્થીના ગુણ 55 થી વધુ હોવાની સંભાવના

$\therefore P(-2 \le Z \le \infty)$

$= P(-2 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le \infty)$

$= 0.4772 + 0.5$

$= 0.9772$

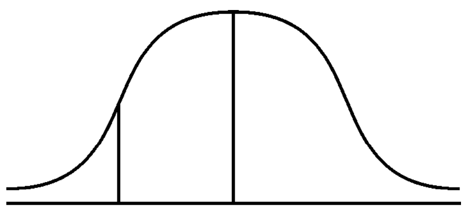
$\therefore$ 55 થી વધુ મેળવનાર વિદ્યાર્થીની સંખ્યા :

$= 1000 \times 0.9772$

$= 977.2 \qquad \simeq 977$ વિદ્યાર્થીઓ

ઉદા.-4 પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની એવી કિંમત શોધો. કે તેનાથી મોટી કિંમત માટેની સંભાવના 0.6915 થાય.

જવાબ : અહીંયા આપણે Z ની એવી કિંમત k શોધવાની છે. કે તેનાથી મોટી કિંમતની સંભાવના 0.6915 થાય.



એટલે કે $P(Z > k) = 0.6915$ થાય.

અહીંયા સંભાવના 0.6915 એ 0.5 કરતા મોટી હોવાતી k નું સ્થાન 0 ની ડાબી બાજુએ આવે.

ધારો કે, $Z = -C$ લઈએ

$\therefore$ P (Z > –C) = 0.6915

ને નીચે મુજબ લખી શકાય.

= P(–C < Z < 0) + 0.5 = 0.6915

= P(–C < Z < 0) = 0.6915 – 0.5

= P(0 < Z < C) = 0.1915

ઉદા.-5 નીચે આપેલ ઘટત્વ વિધેય પ્રામાણ્ય વિતરણનું ઘટત્વ વિધેય છે ? જો હોય તો આ વિતરણના મધ્યક, વિચરણ તથા પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-gx^2} ; -\infty < x < \infty$$

જવાબ : આપેલ ઘટત્વ વિધેયને પ્રામાણ્ય વિતરણના ઘટત્વ વિધેય $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$; $-\infty < x < \infty$. સાથે સરખાવતા,

આપણને $\frac{3}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$ મળે છે.

$$\therefore \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

$$\therefore \sigma = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$\therefore$ પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

$\therefore$ વિચરણ $= \sigma^2 = \frac{1}{9(2)} = \frac{1}{18}$

હવે, $9x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$ થશે.

ડાબી બાજુ ફક્ત x^2 વાળું પદ જ હોવાથી $\mu = 0$ થશે.

હવે, $\mu = 0$ અને $\sigma = \frac{1}{3\sqrt{2}}$ મુકતાં,

$$\therefore 9x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x-0}{1/3\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{1/9\,(2)}$$

$$= \frac{1}{2}(18x^2)$$

$= 9x^2$ થઈ જાય છે.

$\therefore$ આપેલ વિતરણએ પ્રમાણિત વિતરણનું ઘટત્વ વિધેય છે.

ઉદા.-6 એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓના 10 માં ધોરણમાં મેળવેલ ટકાવારીનું વિતરણ, જો મધ્યક = 75 તથા પ્રમાણિત વિચલન 10 હોય તેવું પ્રામાણ્ય વિતરણ છે. જો આ શાળાના ધોરણ-10 ના વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા 70 હોય અને 90 ટકાથી વધારે ટકાવારી મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓને ચંદ્રક આપવાનો હોય તો આ ક્લાસમાંથી કેટલા વિદ્યાર્થીઓ ચંદ્રક મેળવશે ?

જવાબ : જો વિદ્યાર્થીએ મેળવેલ ટકાવારીને x વડે દર્શાવીએ તો x નું વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણ છે. જેનો મધ્યક $\mu = 75$ તથા પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 10$ છે.

સૌ પ્રથમ આપણે 90 ટકાથી વધારે ટકાવારી હોય તેની સંભાવના શોધીશું.

$\therefore \; P(x > 90) \;\; P\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma} > \dfrac{90-75}{10}\right)$

$= P(Z > 1.5)$

$= P(0 < Z < 8) - P(0 < Z < 1.5)$

$= 0.5 - 0.4332$

$= 0.0668$

$\therefore$ ચંદ્રક મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા $= 70 \times 0.0668$

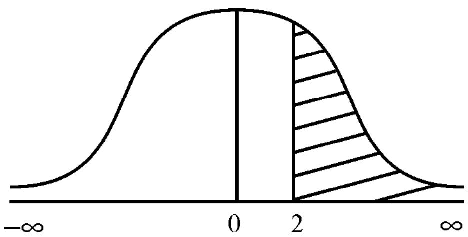
$= 4.676$

$\simeq 5$

$\therefore$ આશરે 5 વિદ્યાર્થીઓને ચંદ્રક મળશે.

ઉદા.-7 1800 સૈનિકોની છાતીના માપનો મધ્યક 85 સે.મી. અને પ્રમાણિત વિચલન 5 સે.મી. છે. જો છાતીના માપનું વિતરણ પ્રામાણ્ય છે. તેમ લેવામાં આવે તો આ સૈનિકો પૈકી કેટલા સૈનિકોની છાતીનું માપ 95 સે.મી. થી વધુ હશે ?

જવાબ : ધારો કે સૈનિકોના છાતીનું માપ x નું વિતરણ પ્રમાણિત વિતરણ છે. તો મધ્યક = $\mu = 85$ સે.મી. અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 5$ આપેલ છે.



હવે આપણે સૌપ્રથમ $P(x > 95)$ શોધીશું.

$\therefore \; P(x > 95) = P\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma} > \dfrac{95-85}{10}\right)$

$= P(Z > 2)$

$= P(0 < Z < \infty) - P(0 < Z < 2)$

$= 0.5 - 0.4772$

$= 0.0228$

$\therefore$ 1800 સૈનિકો પૈકી જેમની છાતીનું માપ 95 સે.મી. થી વધુ હોય તેવા સૈનિકોની સંખ્યા =

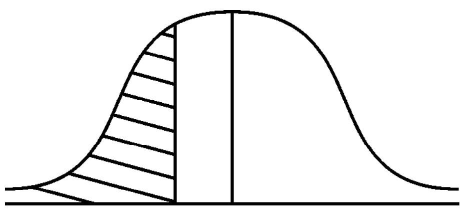
$= 0.0228 \times 1800$

$= 41.04$

$= 41$

ઉદા.-8 કોઈ એક ફેક્ટરીમાં બનતા ઈલેક્ટ્રિક બલ્બના આયુષ્યનું વિતરણ પ્રમાણિત વિતરણ છે. જેનો મધ્યક 1800 કલાક અને પ્રમાણિત વિચલન 700 કલાક છે. જે બલ્બનું આયુષ્ય 300 કલાકથી ઓછું હોય તો તેને ઓછી ગુણવત્તાવાળો ઈલેક્ટ્રિક બલ્બ તરીકે ગણવામાં આવે છે. તો આ ફેક્ટરીમાં બનેલ 2000 ઈલેક્ટ્રિક બલ્બમાંથી ઓછી ગુણવત્તાવાળા બલ્બની આશરે સંખ્યા નક્કી કરો.

જવાબ : ધારો કે ઈલેક્ટ્રિક બલ્બનું આયુષ્ય x વડે દર્શાવવાં આવે છે. અહીંયા x ચલનું વિતરણ પ્રામાણ્ય આપેલ છે કે જેનો મધ્યક $\mu = 1800$ કલાક અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 700$ કલાક છે.



સૌપ્રથમ આપણે ઓછી ગુણવત્તાવાળા બલ્બની સંભાવના મેળવીશું.

$$\therefore\ P(x < 300) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{300-1800}{700}\right)$$

$= P(Z < -2.1428)$

$= P(-\infty < Z < 0) - P(-2.1428 < Z < 0)$

$= 0.5 - 0.4838$

$= 0.0162$

$\therefore$ 2000 ઉત્પાદિત ઈલેક્ટ્રિક બલ્બમાંથી ઓછી ગુણવત્તાવાળા બલ્બની સંખ્યા

$= 0.0162 \times 200$

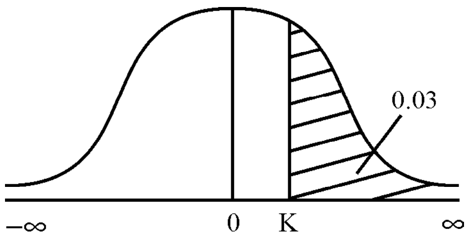
$= 32.4$

$\simeq 32$

$\therefore$ આશરે 32 ઈલેક્ટ્રિક બલ્બ ઓછી ગુણવત્તાવાળા હશે.

ઉદા.-9 મધ્યમ કક્ષાની આવક ધરાવતા 10,000 વ્યક્તિઓના આવકનું વિતરણ રૂ. 750 મધ્યક અને રૂ. 50 પ્રમાણિત વિચલનવાળું પ્રામાણ્ય વિતરણ હોય તો આ મધ્યમ કક્ષાની આવક ધરાવતા વ્યક્તિઓમાં સૌથી વધુ આવક ધરાવતા 300 વ્યક્તિઓની લઘુત્તમ આવક નક્કી કરો.

જવાબ : મધ્યમક કક્ષાની આવક ધરાવતા વ્યક્તિઓની આવક x રૂ. છે. $\therefore$ x નું વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણ છે.



જેનો મધ્યક μ = રૂ. 750 તથા પ્રમાણિત વિચલન σ = રૂ. 50 છે.

સૌથી વધુ આવક ધરાવતી વ્યક્તિઓની લઘુત્તમ આવક ધારો કે રૂ. k છે.

$\therefore\ P(x > k) = \frac{300}{10,000}$ થાય.

$\therefore\ P(x > k) = 0.03$

$$\therefore\ P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{k-750}{50}\right) = 0.03$$

$$\therefore\ P\left(Z > \frac{k-750}{50}\right) = 0.03$$

$$\therefore\ P\left(0 < Z < \frac{k-750}{50}\right) = 0.5 - 0.03$$

$= 0.47$

હવે, પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણના કોષ્ટક પરથી આપણને $\frac{k-750}{50} \simeq 1.88$ આશરે કિંમત મળશે.

$\therefore\ k = 750 + (1.88 \times 50)$

$= 844$

સૌથી વધુ આવક ધરાવતા 300 વ્યક્તિઓની સૌથી ઓછી આવક રૂ. 844 હશે.

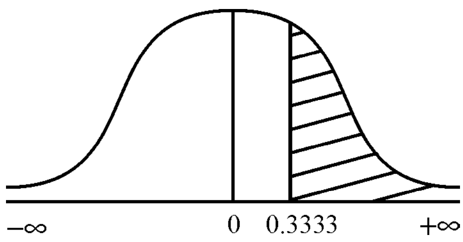
ઉદા.-10 કોઈ એક કરિયાણાના દુકાનનું દૈનિક વેચાણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. જેનું દૈનિક સરેરાશ વેચાણ રૂ. 3,000 અને પ્રમાણિત વિચલન 900 રૂપિયા છે.

(i) કોઈ એક દિવસે આ દુકાનદારનું દૈનિક વેચાણ 3300 રૂ. થી વધારે હોય તેની સંભાવના શોધો.

(ii) કોઈ એક દિવસે આ દુકાનદારનું દૈનિક વેચાણ 1500 રૂ. થી ઓછું હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : ધારો કે દૈનિક વેચાણ રૂ. x છે. અહીંયા x નું વિતરણ એ પ્રામાણ્ય વિતરણ છે. જેનો મધ્યક μ = 3,000 તથા પ્રમાણિત વિચલન σ = રૂ. 900 છે.

(i) હવે આપણે દૈનિક વેચાણ 3300 રૂ. થી વધારે હોય તેની સંભાવના શોધવી છે.



એટલે કે, P(x > 3300) શોધવું છે.

$$= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{3300-3000}{900}\right)$$

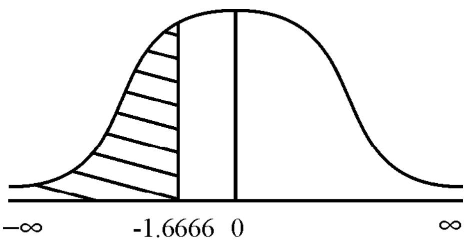
$= P(Z > 0.3333)$

$= P(0 < Z < \infty) - P(0 < Z < 0.3333)$

$= 0.5 - 0.1293$

$= 0.3707$

(ii) દૈનિક વેચાણ રૂ. 1500 થી ઓછું હોય તેની સંભાવના મેળવીએ એટલે કે P(x < 1500) શોધીશું.



$$= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{1500-3000}{900}\right)$$

$= P(Z < -1.6666)$

$= P(-\infty < Z < 0) - P(-1.6666 < Z < 0)$

$= 0.5 - 0.4525$

$= 0.0475$

ઉદા.-11 નીચેના વિધાનો સાચા છે કે ખોટા તે ગણતરી કરીને ચકાસો.

(i) એક પ્રામાણ્ય વિતરણનું સરેરાશ વિચલન 3 છે. માટે તેનું વિચરણ 6 થાય.

(ii) એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે વિષમતા ગુણક એ ઘંટાકારકતા ગુણક કરતા 3 ઓછો છે.

જવાબ : (i) પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે, સરેરાશ વિચલન $= \frac{4}{5}\sigma$

$\therefore 3 = \frac{4}{5}\sigma$

$\therefore \frac{15}{4} = \sigma$

$\therefore \sigma = 3.75$

હવે વિચરણ $= \sigma^2$, $\therefore$ વિચરણ $= (3.75)^2$

$= 14.0625$

$\therefore$ આપેલું વિધાન ખોટું છે.

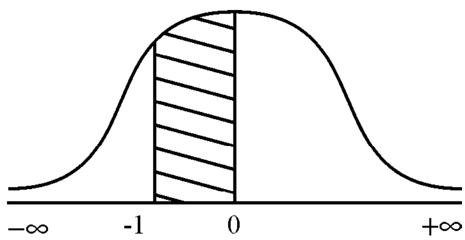
(ii) પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે વિષમતા ગુણાંક $\beta_1 = 0$ અને ઘંટાકારકતા ગુણાંક $\beta_2 = 3$ છે.

અહીંયા આપણને β_1 એ β_2 કરતા 3 ઓછો છે. એમ આપેલ છે. પરંતુ તેનો અર્થ એમ ન કરી શકાય કે β_1 હંમેશાં 0 અને $\beta_1 = 3$ જ હશે.

જો $\beta_1 = 3$ અને $\beta_2 = 6$ તો પણ β_1 એ β_2 કરતાં 3 ઓછો થયો કહેવાય.

$\therefore$ આપેલ વિધાન ખોટું છે.

ઉદા.-12 જો યાદચ્છિક ચલ x નું વિતરણ મધ્યક = 30 એમ પ્રમાણિત વિચલન 10 હોય તેવું પ્રામાણ્ય વિતરણ હોય તો $P(|x-25| > 5)$ શોધો.



જવાબ : $P(|x-25| > 5) = 1 - P(|x-25| \le 5)$

$= 1 - P(25 - 5 \le x \le 25 + 5)$

$= 1 - P(20 \le x \le 30)$

$= 1 - P\left(\frac{20-30}{10} \le \frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{30-30}{10}\right)$

$= 1 - P(-1 \le Z \le 0)$

$= 1 - 0.3413$

$= 0.6587$

ઉદા.-13 100 પ્રાપ્તાંકોવાળા એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે $Q_1 = 71$ અને $\sigma = 18$; તો (i) મધ્યસ્થ અને (ii) વચ્ચેના 50 ટકા પ્રાપ્તાંકોનો ગાળો શોધો.

જવાબ : (i) પ્રામાણ્ય વિતરણમાં ચતુર્થક વિચલન = $\frac{2}{3}\ \sigma$

$\therefore\ \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{2}{3}\ (18)$

$\therefore\ \frac{Q_3 - Q_1}{2} = 12$

$\therefore\ Q_3 - Q_1 = 24$

$\therefore\ Q_3 - 71 = 24$

$\therefore\ Q_3 = 24 + 71$

$\therefore\ Q_3 = 95$

હવે, મધ્યસ્થ M = $\frac{Q_3 + Q_1}{2} = \frac{95+71}{2}$

$= \frac{166}{2}$

$= 83$

(ii) વચ્ચેના 50% વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો ગાળો Q_1 અને Q_3 હોય.

$\therefore$ આ ગાળો 71 થી 95 વચ્ચેનો ગણાય.

ઉદા.-14 એક સિક્કો 1600 વખત ઉછાળવામાં આવે છે, તો છાપની સંખ્યા 775 થી 825 વચ્ચે આવે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં n ની કિંમત મોટી છે અને પ્રયત્નદીઠ છાપની સંભાવના P = $\frac{1}{2}$ છે.

પ્રામાણ્ય વિતરણને દ્વિપદીના લક્ષ તરીકે લઈ શકાશે.

$\therefore$ મધ્યક (np) = $1600 \times \frac{1}{2}$

$= 800$

અને વિચરણ (npq) = $1600 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= 400$

$\therefore$ પ્રમાણિત વિચલન (σ) = $\sqrt{npq}$

$= \sqrt{400}$

$= 20$

હવે, છાપની સંખ્યા 775 થી 825 વચ્ચે આવે એટલે કે છાપની સંખ્યા 774.5 થી 825.5 વચ્ચે આવે તેની સંભાવના શોધીએ.

$\therefore\ Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{774.5 - 800}{20}$

$= \frac{-25.5}{20} = -1.275$

અને $Z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{825.5 - 800}{20}$

$= \frac{25.5}{20} = 1.275$

$\therefore$ છાપની સંખ્યા 775 થી 825 વચ્ચેની હોય તેની સંભાવના Z ની કિંમત – 1.275 થી +1.275 વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ.

$= 0.3980 + 0.3980$

$= 0.7960$

ઉદા.-15 એક પ્રામાણ્ય ચલનું સંભાવના વિધેય નીચે પ્રમાણે છે :

$$f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\ e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-53}{6}\right)^2}$$

તો નીચેનાની કિંમત શોધો :

(i) $P(x \le 47.5)$

(ii) $P(47 \le x \le 59)$

(iii) $P(x \ge 46)$

જવાબ : ઉપર આપેલ વિધેયને પ્રામાણ્ય ચલનું સંભાવના વિધેય, $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ સાથે સરખાવતાં, $\mu = 53$ અને $\sigma = 6$ મળે છે.

(i) $P(x \le 47.5)$

$\therefore Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{47.5 - 53}{6} = -0.9166$

$\simeq -0.92$

$\therefore$ Z ની કિંમત –0.92 થી 0 વચ્ચે હોવાની સંભાવના = 0.3212

$\therefore P(x \le 47.5) = 0.5 - 0.3212$

$= 0.1788$

(ii) $P(47 \le x \le 59)$

$x = 47$ હોય ત્યારે, $Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{47 - 53}{6}$

$= -1$

$\therefore$ Z ની કિંમત 0 થી –1 વચ્ચેની સંભાવના = 0.3413

હવે $x = 59$ હોય ત્યારે, $Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{59 - 53}{6}$

$= 1$

$\therefore$ Z ની કિંમત 0 થી +1 વચ્ચેની સંભાવના = 0.3413

$\therefore P(47 \le x \le 59) = 0.3413 + 0.3413$

$= 0.6826$

(iii) $P(x \geq 46)$

$\therefore$ $x = 46$ હોય ત્યારે, $Z = \dfrac{46-53}{6}$

$= -1.1666$

$\simeq -1.17$

$\therefore$ Z ની કિંમત 0 થી –1.17 વચ્ચેની સંભાવના = 0.3790

$\therefore$ $P(x \geq 46) = 0.5 + 0.3790$

$= 0.879$

6.8 સૂત્રોની યાદી

- પ્રામાણ્ય વિતરણનું સંભાવના વિધેય :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; -\infty \leq x \leq \infty$$

$\mu \leq \infty$

$\sigma > 0$

- પ્રામાણ્ય વિતરણના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન :

મધ્યક = μ

પ્રમાણિત વિચલન = σ

- પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણનું સંભાવના વિધેય :

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{\frac{-1}{2}Z^2} \quad ; -\infty \leq Z \leq \infty$$

જ્યાં $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$; $\sqrt{2\pi} = 2.5079$

મધ્યક = 0 અને પ્રમાણિત વિચલન = 1

- પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે
  - મધ્યક = મધ્યસ્થ = બહુલક
  - વિષમતાંક = 0
  - મધ્યક (μ) અને વિચરણ (σ^2); μ અને σ આ વિતરણના પ્રાચલો છે.
  - $\bar{x} = M = Z = \dfrac{Q_3 + Q_1}{2}$ અને ચતુર્થક વિચલન = $\dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$
  - સરેરાશ વિચલન = $\dfrac{4}{5}\sigma$
  - ચતુર્થક વિચલનાંક = $\dfrac{2}{3}\sigma$

6.9 સ્વાધ્યાય

સૈદ્ધાંતિક પ્રશ્નો :

(1) પ્રામાણ્ય સંભાવના વિતરણનું ગાણિતિક સ્વરૂપ આપો અને તેના ગુણધર્મો અને ઉપયોગો જણાવો.

(2) આંકડાશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં પ્રામાણ્ય વિતરણનું મહત્ત્વ સમજાવો.

(3) સંભાવના વિતરણ પ્રામાણ્ય છે તેમ ક્યારે કહી શકાય ?

(4) પ્રામાણ્ય વિતરણનું સંભાવના વિધેય લખી તેમાં આવતી દરેક વિગતની સમજૂતી આપો.

(5) પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણનું સંભાવના વિધેય લખો અને તેના ગુણધર્મો જણાવો.

(6) પ્રામાણ્ય વક્ર નીચેનાં અગત્યનાં પાંચ ક્ષેત્રફળો આકૃતિ દોરીને જણાવો.

(7) પ્રામાણ્ય વિતરણના પ્રમાણિત વિચલન અને ચતુર્થક વિચલન વચ્ચેનો સંબંધ જણાવો. પ્રામાણિત પ્રામાણ્ય ચલના પ્રાચલો લખો.

(8) પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણ વિશે ટૂંકનોંધ લખો.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો :

(1) પ્રામાણ્ય વક્ર અને x-અક્ષ વચ્ચે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ કેટલું ?

(જવાબ : ક્ષેત્રફળ 1)

(2) જો $\mu = 50$ અને $\sigma = 3$ સાથેનો પ્રામાણ્ય ચલ હોય તો તેનું ચતુર્થક વિચલન શોધો.
(જવાબ : 2)

(3) એક પ્રામાણ્ય વિતરણના ચતુર્થકો 10 અને 40 છે. તો તેનો મધ્યસ્થ શોધો.

(જવાબ : 25)

(4) પ્રામાણ્ય વિતરણમાં 95% પ્રાપ્તાંકો ………… અને ………… વચ્ચે આવેલ હોય છે.

(જવાબ : $\mu - 1.96\sigma$, $\mu + 1.96\sigma$)

(5) પ્રામાણ્ય વિતરણમાં ચતુર્થક વિચલન = ………… પ્ર. વિ. અને સરેરાશ વિચલન ………… પ્ર.વિ. છે.

(જવાબ : $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$)

(6) જો x, મધ્યક μ અને વિચરણ σ^2 સાથેનો પ્રામાણ્ય ચલ હોય તો $\frac{x-\mu}{\sigma}$ નો મધ્યક ………… થાય ?

(જવાબ : 0)

(7) જો x એ N (μ, σ^2) હોય તો $P(\mu - 3\sigma < x < \ + 3\sigma)$ ………… થાય.

(જવાબ : (a) 0.9973)

(a) 0.9973 (b) 0.6826 (c) 0.9544

(8) એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે અને $Q_1 = 20$ અને $Q_3 = 40$ છે. તો તેનું બહુલક શું થાય ?

(જવાબ : 30)

(9) પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે મધ્યક = 20, મધ્યસ્થ = 10 અને બહુલક = 30 મળે છે. શું આ વિધાન સાચું છે કે ખોટું ?

(જવાબ : ખોટું, $\therefore$ મધ્યક = મધ્યસ્થ = બહુલક થાય)

(10) પ્રામાણ્ય વિતરણમાં વિષમતા 1 હોય છે. શું આ વિધાન સાચું છે કે ખોટું ?

(જવાબ : ખોટું : 0 થાય)

(11) પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક .... અને વિચરણ .... થાય ?

(જવાબ : 0, 1)

(12) પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે β_1 = ... અને β_2 = ...

(જવાબ : 0, 3)

(13) જો $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ હોય તો, $P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma)$ = ...

(જવાબ : 0.6826)

(14) પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે સાચો વિકલ્પ નક્કી કરો.

(A) મધ્યક > મધ્યસ્થ > બહુલક

(B) મધ્યક = મધ્યસ્થ = બહુલક

(C) મધ્યક < મધ્યસ્થ < બહુલક

(D) મધ્યક = 4 (મધ્યસ્થ) = 5 (બહુલક)

(જવાબ : (B))

(15) પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે ચતુર્થક વિચલન, મધ્યક વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલનનો ગુણોત્તર .... બનશે ?

(A) $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} : 1$ (B) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} : 1$

(C) $1 : \frac{4}{5} : \frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{2} : 1 : \frac{4}{5}$

(જવાબ : (B))

(16) પ્રામાણ્ય વિતરણમાં સંભાવના ઘટતા વિધેયની મહત્તમ કિંમત .... થાય.

(A) $\mu - \sigma$ (B) $\mu + \sigma$ (C) $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

(જવાબ : (C))

(17) $P(-1 \le \ge \le 1)$ = ...

(A) 0.3413 (B) 0.0438 (C) 0.3438 (D) 0.6826

(જવાબ : (D))

(18) $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ માટે $Q_1 = 20$ અને $Q_3 = 40$ હોય તો μ અને σ શોધો.

(જવાબ : 30, 15)

વ્યવહારિક પ્રશ્નો :

(1) પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની નીચેની કિંમતો વચ્ચેનાં ક્ષેત્રફળ મેળવો.

(i) $Z \geq 1.5$

(ii) $Z = 1.2$ થી $Z = 2.2$

(iii) $Z \geq -0.5$

(જવાબ : (i) 0.0668 (ii) 0.1012 (iii) 0.691)

(2) જો પ્રામાણ્ય ચલ માટે $\mu = 20$, $\sigma = 3$ છે. તો તે ચલની નીચે આપેલ કિંમતો વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(i) 14 થી 18.5 (ii) 24.5 થી ઓછી.

(જવાબ : 0.2857, 0.9332)

(3) નીચે આપેલ પ્રામાણ્ય વિતરણના મધ્યક અને વિચરણ મેળવો.

$$f(x) = k \cdot exp\left[\frac{-1}{24}(x^2 - 6x + 9)\right]$$

(જવાબ : મધ્યક = 3, વિચરણ = 12)

(4) જો $x \sim N(12, 16)$ હોય તો (i) $P(x < 20)$, (ii) $P(x < 0 \cup x > 12)$ મેળવો.

(જવાબ : 0.9722, 0.5014)

(5) જો $x \sim N(30, 25)$ હોય તો, (i) $P(x < 45)$ તથા (ii) $P(|x - 30| \leq 5)$ મેળવો.

(જવાબ : 0.9986, 0.6826)

(6) જો $x \sim N(20, 16)$ તો $P(x > 23)$ ની કિંમત શોધો.

(જવાબ : 0.2266)

(7) જો પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક $\mu = 5{,}000$ અને $\sigma = 1{,}200$ છે. તો 6,800 થી વધુ કિંમતવાળા અવલોકનોની ટકાવારી શોધો.

(જવાબ : 6.68%)

(8) એક શાળામાં 1000 બાળકોની પરીક્ષા લેતાં તેમના સરેરાશ ગુણ 42 અને ગુણનું પ્રમાણિત વિચલન 24 મળે છે. જો બાળકોએ મેળવેલા ગુણ પ્રામાણ્ય રીતે વિપરીત હોય તો 30 થી 54 વચ્ચે ગુણ મેળવનાર બાળકોની સંખ્યા શોધો.

(જવાબ : લગભગ 383)

(9) સૈનિકોના એક સમૂહની સરેરાશ ઊંચાઈ 67.22" અને ઊંચાઈનું વિચરણ 9 છે. તો આવા 500 સૈનિકોમાંથી કેટલા સૈનિકોની ઊંચાઈ 6 ફૂટથી વધુ હશે. તેનું અનુમાન મેળવો.

(જવાબ : લગભગ 28)

(10) એક વિઘા જમીનમાં ઘઉંનું સરેરાશ ઉત્પાદન 660 કિલો થાય છે અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન 30 કિલો છે. જે ઘઉંના ઉત્પાદનનું વિતરણ પ્રામાણ્ય લેવામાં આવે તો કોઈ એક વિઘા જમીનમાં ઘઉંનું ઉત્પાદન (i) 600 કિલો થી ઓછું હોય, (ii) 500 કિલો થી વધુ હોય, તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : 0.0228, 1)

(11) વિદ્યાર્થીના કોઈ એક વિષયમાં મેળવેલ માર્કસનું વિતરણ ધારો કે પ્રામાણ્ય વિતરણ છે. જેનો મધ્યક 60 તથા પ્રમાણિત વિચલન 15 છે. જો આ વિષયના 100 વિદ્યાર્થીઓ પસંદ કરવામાં આવે તો તેમાંથી કેટલા વિદ્યાર્થીના માર્ક્સ, (i) 80 થી વધુ હશે ? (ii) કેટલા વિદ્યાર્થીના માર્ક્સ 50 થી ઓછા હશે ?

(જવાબ : 0.0918, 0.2514)

(12) 1000 બેટરીના આયુષ્ય જાણવા માટેનો પ્રયોગ હાથ ધરાયેલ હતો. જેમાં તેમનું સરેરાશ આયુષ્ય 12 કલાક તથા તેમનું પ્રમાણિત વિચલન 3 કલાક માલૂમ પડ્યું. જો આયુષ્યનું વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણ ધારવામાં આવે તો 100 બેટરીમાંથી કેટલી બેટરીનું આયુષ્ય (i) 15 કલાક કરતાં ઓછું હશે ? (ii) 6 કલાક કરતાં વધારે હશે ?

(જવાબ : 841, 23)

(13) એક ફેક્ટરીમાં કામ કરતા કામદારોનો સરેરાશ દૈનિક પગાર રૂ. 115 છે અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન રૂ. 10 છે. જેમનો દૈનિક પગાર રૂ. 100 થી રૂ. 200 ની વચ્ચે હોય તેવા કામદારોની ટકાવારી પ્રામાણ્ય વિતરણનો ઉપયોગ કરીને શોધો.

(જવાબ : 93.32%)

(14) એક ATM મશીનમાંથી દૈનિક કોઈ એક ગ્રાહક દ્વારા થતા ઉપાડની સરેરાશ રકમ રૂ. 500 છે અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન રૂ. 100 છે. તો પ્રામાણ્ય વિતરણની મદદથી દૈનિક ઉપાડ (i) રૂપિયા 300 થી ઓછો હોય, (ii) રૂપિયા 900 થી વધારે હોય, તેવા ગ્રાહકની ટકાવારી શોધો.

(જવાબ : 2.28%, 0%)

(15) એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત સ્કુની સરેરાશ લંબાઈ 3 ઈંચ છે અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન 0.5 ઈંચ છે. પ્રામાણ્ય વિતરણનો ઉપયોગ કરીને 1000 સ્કુના બોક્ષમાંથી કેટલા સ્કુની લંબાઈ 2.7 ઈંચથી 2.8 ઈંચની વચ્ચે હશે તે નક્કી કરો.

(જવાબ : 70 સ્કુ)

(16) સૈનિકોની ઊંચાઈનું માપ ધારો કે પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. એક ગ્રુપમાં સૈનિકોની સરેરાશ ઊંચાઈ 63 ઈંચ હોય અને પ્રમાણિત વિચલન 6 ઈંચ હોય તો (i) સૌથી ઓછી ઊંચાઈ ધરાવતા 10% સૈનિકની મહત્તમ ઊંચાઈ શોધો. (ii) સૌથી વધુ ઊંચાઈ ધરાવતા 10% સૈનિકોની લઘુત્તમ ઊંચાઈ શોધો.

(જવાબ : 55.32 ઈંચ, 70.68 ઈંચ)

(17) 100 પ્રાપ્તાંકોવાળા એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે $Q_1 = 75$ અને $\sigma = 12$ તો (i) મધ્યસ્થ અને (ii) વચ્ચેના 50% પ્રાપ્તાંકોનો ગાળો શોધો.

(જવાબ : મધ્યસ્થ 83; ગાળો 73 થી 93)

(18) એક હોટલમાં આવતા ગ્રાહકોના જમવાનું બિલ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. જેનો મધ્યક રૂ. 400 અને પ્રમાણિત વિચલન રૂ. 50 છે. કોઈ એક દિવસે રૂ. 475 થી વધારે બિલ હોય તેવા ગ્રાહકોની સંખ્યા 38 છે. તો તે દિવસના તે હોટલના કુલ ગ્રાહકોની સંખ્યા શોધો.

(જવાબ : અંદાજે 569 ગ્રાહકો)

(19) એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે પ્રથમ ચતુર્થક 40 અને તૃતીય ચતુર્થક 60 છે. તો તેના મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલક, પ્રમાણિત વિચલન અને સરેરાશ વિચલન શોધો.

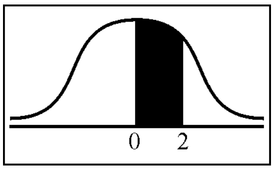
(જવાબ : મધ્યક = મધ્યસ્થ = બહુલક = 40, સરેરાશ વિચલન = 12, પ્રમાણિત વિચલન = 15)

(20) એક પ્રામાણ્ય ચલ x નું સંભાવના વિધેય નીચે પ્રમાણે છે :

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{72\pi}} \; e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-46}{6}\right)^2}$ તો $P(40 < x < 52)$ શોધો.

(જવાબ : 0.6826)

Standard Normal (Z) Table
Area between 0 and z



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0159
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.2019	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.1664	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4484	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

♦ ♦ ♦

એકમ 7 સહસંબંધ

7.1 પ્રસ્તાવના :

આપણે પ્રથમ પ્રકરણમાં શીખી ગયા કે, એક જ ચલ માટે જુદી જુદી માહિતીની સરખામણી કરવા માટે મધ્યક, પ્રમાણિત વિચલન, વિચરણ જેવા પ્રસારના માપો ઉપયોગી છે. પરંતુ ઘણી પરિસ્થિતિ એવી ઉદ્‌ભવતી હોય છે કે, જેમાં બે કે તેથી વધુ ચલોનો સંયુક્ત અભ્યાસ ઇચ્છનીય અને જરૂરી હોય છે. પરંતુ બે અથવા બે થી વધારે ચલોનો અભ્યાસ કરવા માટે ઉપરોક્ત માપો ઉપયોગી નીવડતા નથી. તેથી બે અથવા બે થી વધારે ચલોના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે સહસંબંધ, નિયત સંબંધ જેવા માપોનો ઉપયોગ થાય છે.

આપણે આ પ્રકરણ અને આ પછીના પ્રકરણમાં બે પરસ્પર સંબંધિત ચલોના સંબંધ વિશે અભ્યાસ કરીશું.

7.2 સહસંબંધનો અર્થ અને વ્યાખ્યા :

સૌ પ્રથમ આપણે સહસંબંધ એટલે શું ? તેનો અર્થ સમજીએ.

વ્યવહારમાં આપણે જાણીએ છીએ કે, ઘણી પરિસ્થિતિમાં બે ચલોની કિંમતમાં એક સાથે ફેરફાર થતો જોવા મળે છે. બે ચલોની કિંમતોમાં થતાં ફેરફાર મુખ્યત્વે બે કારણને લીધે થઈ શકે.

(1) બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ હોય.

(2) કોઈ અન્ય કારણની અસરને લીધે બંને ચલોની કિંમતમાં ફેરફાર થતાં હોય.

કોઈ કંપનીનું વેચાણ વધે તો તેનો નફો વધે અને વેચાણ ઘટે તો નફો ઘટે છે. અહીં વેચાણ એ 'કારણ' છે જ્યારે નફો એ 'કાર્ય' છે. તે જ રીતે કોઈ વિસ્તારમાં વરસાદ વધારે પડે (અમુક હદ સુધી) તો ખેતરની ઊપજ પણ વધે છે અને વરસાદ ઓછો પડે તો ખેતરની ઊપજ પણ ઘટે છે. તેથી વરસાદ એ 'કારણ' છે અને ખેતરની ઉપજ એ 'કાર્ય' છે.

ઉપરોક્ત બન્ને ઉદાહરણોમાં બંને ચલોમાં થતા ફેરફારો કાર્ય કારણનો સંબંધ દર્શાવે છે. ઘણી વખત બે ચલો પરસ્પર આધારિત પણ હોય છે અને એટલે કોઈ એક ચલને 'કારણ' અને બીજા ચલને 'કાર્ય' ચોક્કસપણે કહી શકાય નહીં. દા.ત. માંગ અને પુરવઠો.

આમ એક ચલમાં ફેરફાર થવાથી બીજા ચલમાં પણ ફેરફાર થતા હોય છે. ઉપરોક્ત ઉદાહરણો ઉપરથી આપણે સહસંબંધને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

વ્યાખ્યા - 1 : જો બે ચલોની કિંમતોમાં પ્રત્યક્ષ કે પરોક્ષ કાર્ય કારણને લીધે એક સાથે ફેરફાર થતા હોય તો તે બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

વ્યાખ્યા - 2 : બે સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતાં ફેરફાર લગભગ અચલ પ્રમાણમાં હોય તો તે બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

દા.ત. વર્તુળની ત્રિજ્યા અને પરિઘ.

આંકડાશાસ્ત્રી કિંગે આપેલી વ્યાખ્યા મુજબ, ''સહસંબંધ એટલે બે શ્રેણી અથવા સમૂહ વચ્ચેનો કાર્ય કારણનો સંબંધ.''

7.3 સહસંબંધના પ્રકારો :

સહસંબંધના મુખ્યત્વે બે પ્રકારો છે.

(1) ઘન સહસંબંધ (2) ઋણ સહસંબંધ

(1) ઘન સહસંબંધ : જયારે બંન્ને સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એક જ દિશામાં થતાં હોય ત્યારે તે બે ચલ વચ્ચે ઘન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

એટલે કે જયારે એક ચલની કિંમત ઘટે ત્યારે તેના સંબંધિત બીજા ચલની કિંમત પણ ઘટે અથવા તો એક ચલની કિમત વધે ત્યારે તેના સંબંધિત બીજા ચલની કિંમત પણ વધે તો તેમની વચ્ચે ઘન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય. વ્યક્તિની આવક અને ખર્ચ, કોઈ વસ્તુનું વેચાણ અને તેનાથી થતો નફો, વસ્તુની કિંમત અને પુરવઠો એ ઘન સહસંબંધ ના ઉદાહરણો છે.

(2) ઋણ સહસંબંધ : જયારે બંન્ને સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતાં ફેરફારો એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં થતાં હોય ત્યારે તે બે ચલ વચ્ચે ઋણ સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

એટલે કે જયારે એક ચલની કિંમત ઘટે (વધે) ત્યારે તેના સંબંધિત બીજા ચલની કિંમત વધે (ઘટે) તો તેમની વચ્ચે ઋણ સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

વ્યક્તિનો ખર્ચ અને બચત, વસ્તુનો ભાવ અને માંગ, ઋણ સહસંબંધના ઉદાહરણો છે.

7.4 સહસંબંધાંકની વ્યાખ્યા, લાક્ષણિકતાઓ / ગુણધર્મ :

સહસંબંધાંક : બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધના સંખ્યાત્મક માપને સહસંબંધાંક કહેવાય છે અને તેને સંકેતમાં 'r' વડે દર્શાવવામાં આવે છે. દા.ત. વસ્તુના વેચાણ અને તેના નફા વચ્ચેના સહસંબંધના સંખ્યાત્મક માપને સહસંબંધાંક કહેવાય છે.

(1) સહસંબંધાંકની કિંમત –1 થી 1 સુધીના અંતરાલમાં હોય છે. એટલે કે $-1 \le r \le 1$

(2) જયારે સહસંબંધાંકની કિંમત 1 હોય તો, તે બે ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ ઘન સહસંબંધ દર્શાવે છે.

(3) જયારે સહસંબંધાંકની કિંમત –1 હોય તો તે બે ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ દર્શાવે છે.

(4) સહસંબંધાંક એકમ રહિત માપ છે.

(5) x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક તથા y અને x વચ્ચેનો સહસંબંધાંક સરખા હોય છે એટલે કે, $r(x, y) = r(y, x)$

જયારે ચલની કિંમતોમાં કોઈ અચળ સંખ્યા ઉમેરવામાં કે બાદ કરવામાં આવે તો તેને ઉગમબિંદુ પરિવર્તન કહે છે એટલે કે $X \pm A$. જયારે ચલની કિંમતોને કોઈ ઘન અચળ સંખ્યા વડે ગુણવા કે ભાગવામાં આવે તો તેને માપ પરિવર્તન કહે છે એટલે કે $\frac{X}{C_x}$ or $X \cdot C_x$

(6) ઉગમબિંદુ (Origin) અને માપ (Scale)ના પરિવર્તનથી સહસંબંધાંક બદલાતો નથી.

(7) $r(-x, y) = -r(x, y)$

$r(x, -y) = -r(x, y)$

જો બે ચલમાંથી કોઈ પણ એક ચલની કિંમતોના ચિહ્નો બદલવામાં આવે તો સહસંબંધાંકનું ચિહ્ન પણ બદલાય છે. જો બંને ચલોની કિંમતોના ચિહ્નો બદલવામાં આવે તો સહસંબંધાંકનું ચિહ્ન બદલાતું નથી.

એટલે કે, $r(-x, -y) = r(x, y)$

7.5 સહસંબંધના અભ્યાસની રીતો :

બે ચલો વચ્ચે રહેલા સહસંબંધનો પ્રકાર અને તે સંબંધની ઘનિષ્ઠતા જાણવા માટે મુખ્યત્વે નીચેની પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ થાય છે.

(1) વિકીર્ણ આકૃતિની રીત

(2) કાર્લ પિયર્સનની ગુણનપ્રધાતની રીત

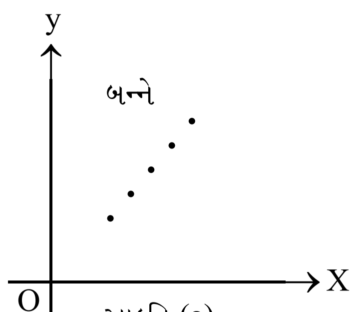
(3) સ્પિયરમેનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત

(1) વિકીર્ણ આકૃતિની રીત : બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધનું સ્વરૂપ જાણવા માટે વિકીર્ણ આકૃતિની રીતનો ઉપયોગ થાય છે. આ રીતથી થોડા ઘણા અંશે બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનો ખ્યાલ પણ મળે છે એટલે કે, બે ચલ વચ્ચે પૂર્ણ ઘન, પૂર્ણ ઋણ, આંશિક ઘન, આંશિક ઋણ સહસંબંધ છે તે નક્કી કરી શકીએ છીએ.

આ રીતમાં ધારો કે, ચલ x અને y ની n કિંમતોની ક્રમિત જોડ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ આપેલ હોય અને આ ક્રમિત જોડને આલેખ પત્ર ઉપર x-અક્ષર ઉપર x ની કિંમત અને y-અક્ષ ઉપર yની કિંમત બિંદુઓરૂપે મુકવામાં આવે છે. આ રીતે બિંદુઓરૂપે મળતી આકૃતિને વિકીર્ણ આકૃતિ કહેવામાં આવે છે.

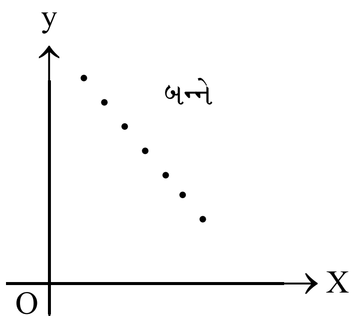
વિકીર્ણ આકૃતિમાં દર્શાવેલા બિંદુઓની ઢબ પરથી સહસંબંધના પ્રકાર તથા તેમની વચ્ચેની સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનો ખ્યાલ નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

જો બન્ને ચલોના બિંદુઓ આકૃતિ (a)માં દર્શાવ્યા મુજબ ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરની દિશા તરફ જતી સુરેખ પર આવેલ હોય તો તે બે ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ ઘન સહસંબંધ છે તેમ કહી શકાય.

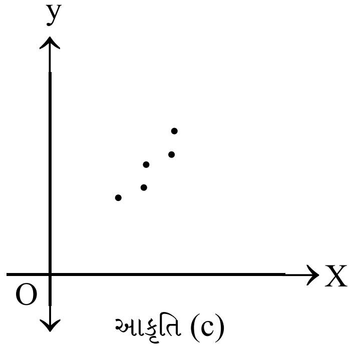


આકૃતિ (a)

જો બન્ને ચલોના બિંદુઓ આકૃતિ (b)માં દર્શાવ્યા મુજબ ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચેની દિશા તરફ જતી સુરેખ પર આવેલ હોય તો તે બે ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ છે તેમ કહી શકાય.

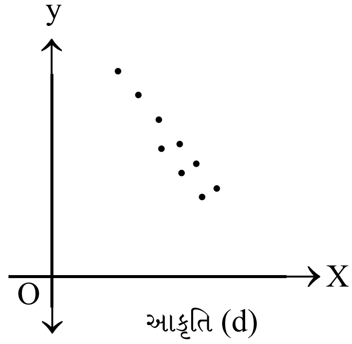


આકૃતિ (b)



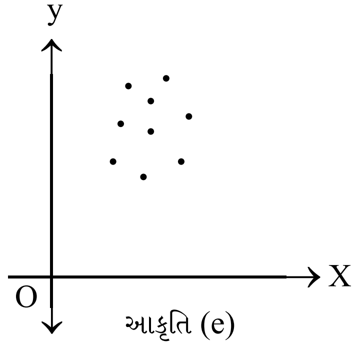
આકૃતિ (c)

જો બન્ને ચલોના બિંદુઓ આકૃતિ (c)માં દર્શાવ્યા મુજબ ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપર તરફ જતી સુરેખની આજુબાજુ આવેલ હોય તો બે ચલો વચ્ચે આંશિક ધન સહસંબંધ છે તેમ કહી શકાય.



આકૃતિ (d)

જો બન્ને ચલોના બિંદુઓ આકૃતિ (d)માં દર્શાવ્યા મુજબ ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચે તરફ જતી સુરેખની આજુબાજુ આવેલ હોય તો બે ચલો વચ્ચે આંશિક ઋણ સહસંબંધ છે તેમ કહી શકાય.



આકૃતિ (e)

જો બન્ને ચલોના બિંદુઓ આકૃતિ (e)માં દર્શાવ્યા મુજબ યાદચ્છિક રીતે વિખરાયેલા હોય અને કોઈ ચોક્કસ ઢબ (pattern)માં ન હોય ત્યારે તે બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધનો અભાવ છે તેમ કહી શકાય.

વિકીર્ણ આકૃતિની રીતના ગુણદોષ :

ગુણ :

(1) બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધ નક્કી કરવાની આ સરળ રીત છે.

(2) આ રીતમાં ફક્ત આલેખમાં બિંદુના નિરૂપણ અંગેની સમજની જરૂર પડે છે.

(3) આ રીતથી બે ચલો વચ્ચે કયા પ્રકારનો સહસંબંધ છે તે જ માત્ર જાણી શકાય છે.

દોષ : આ રીતથી સહસંબંધના પ્રમાણ વિશેનું ચોક્કસ માપ મળતુ નથી.

(2) કાર્લ પિયર્સનની ગુણનપ્રઘાતની રીત :

સહસંબંધાંકનું માપ આંકડાશાસ્ત્રી કાર્લ પિયર્સને સૌ પ્રથમ સૂચવ્યુ હતું. તેથી તેને 'પિયર્સન સહસંબંધાંક' કે 'ગુણનપ્રઘાતઆંક' તરીકે પણ ઓળખાય છે.

ધારો કે બે ચલ x અને y પર મેળવેલા એક નિદર્શના n અવલોકનોની જોડ (x_1, y_1), (x_2, y_2),.....,(x_n, y_n) છે. $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ અનુક્રમે x અને yના મધ્યક છે તથા S_x અને S_y અનુક્રમે x અને yના પ્રમાણિત વિચલન હોય તો કાર્લ પિયર્સને આ માપોને લક્ષમાં લઈ સહસંબંધાંક (r)નું સૂત્ર નીચે મુજબ મેળવેલ હતું.

સહસંબંધાંક $= r = \dfrac{\text{Cov}(x,y)}{S_x S_y} = \dfrac{\text{સહવિચલન}(x,y)}{(x \text{ નું પ્રમાણિત વિચલન})(y\text{નું પ્રમાણિત વિચલન})}$

જ્યાં સહવિચલન (x, y) = Cov (x, y) $= \dfrac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$

xનું પ્રમાણિત વિચલન $= S_x = \sqrt{\dfrac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$

yનું પ્રમાણિત વિચલન $= S_y = \sqrt{\dfrac{\sum(y-\bar{y})^2}{n}}$

xનો મધ્યક $= \bar{x} = \dfrac{\sum x}{n}$

yનો મધ્યક $= \bar{y} = \dfrac{\sum y}{n}$

Cov (x, y), S_x, S_y ની ઉપર્યુક્ત કિંમતોને સૂત્ર (1) માં મૂકતા, ‘r’નું નીચેનું સ્વરૂપ મળે છે.

$$r = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y-\bar{y})^2}}$$

સામાન્ય રીતે જ્યારે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક હોય ત્યારે ઉપરોક્ત સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.

સહસંબંધાંક r માટેના બીજા કેટલાક સૂત્રો નીચે મુજબ છે. :

જ્યારે x અને yના પ્રાપ્તાંકની કિંમત નાની હોય ત્યારે $\sum x, \sum y, \sum xy, \sum x^2, \sum y^2$ મેળવીને નીચેના સૂત્રમાં મુકી r ની કિંમત મેળવવી સરળ પડે છે.

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

જ્યારે x અને y ના પ્રાપ્તાંકની કિંમત મોટી હોય અને $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે નવા રૂપાંતરિત ચલ d_x અને d_yનો ઉપયોગ કરી ‘r’ની કિંમત નીચેના સૂત્ર મુજબ મેળવી શકાય.

$$r = \frac{n\sum d_x d_y - \sum d_x \sum d_y}{\sqrt{n\sum d_x^2 - (\sum d_x)^2}\sqrt{n\sum d_y^2 - (\sum d_y)^2}}$$

જ્યાં $d_x = \dfrac{x-A}{C_x}$ અને $d_y = \dfrac{y-B}{C_y}$

અહીં A, B, C_x, C_y એ અનુકૂળ વાસ્તવિક અચળાંકો છે.

જ્યારે $\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y}), S_x, S_y$ અને n જેવા માપ આપેલ હોય ત્યારે ‘x’ની કિંમત નીચેના સૂત્ર મુજબ મેળવી શકાય.

$$r = \frac{\sum(x - \overline{x})(y - \overline{y})}{nS_x S_y}$$

જ્યારે $\sum xy, \overline{x}, \overline{y}, S_x, S_y$ અને n જેવા માપ જાણતા હોઈએ ત્યારે 'r'ની કિંમત નીચે મુજબના સૂત્ર પ્રમાણે મેળવી શકાય.

$$r = \frac{\sum xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{nS_x\, S_y}$$

કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની ધારણાઓ :

કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક નીચેની ધારણાઓ પર આધારિત છે.

(1) બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સંબંધ હોવો જોઈએ.

(2) બે ચલ વચ્ચે કાર્યકારણનો સંબંધ હોવો જોઈએ.

(a) વર્ગના મૂલ્યોની રીત (Square of values method) :

ઉદાહરણ -1 નીચે આપેલ બે ચલોના જોડકાં ઉપરથી કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

(1,2) (2, 4) (3, 8) (4, 7) (5, 10) (6, 5) (7, 14) (8, 16) (9, 2) (10, 20)

જવાબ : અહીં આપેલ જોડકાંની સંખ્યા 10 છે. તેથી n = 10

x	y	x^2	y^2	xy
1	2	1	4	2
2	4	4	16	8
3	8	9	64	24
4	7	16	49	28
5	10	25	100	50
6	5	36	25	30
7	14	49	196	98
8	16	64	256	128
9	2	81	4	18
10	20	100	400	200
$\sum x = 55$	$\sum y = 88$	$\sum x^2 = 385$	$\sum y^2 = 1114$	$\sum xy = 586$

$$r_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\,\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

$$r_{xy} = \frac{10(586) - (55)(88)}{\sqrt{10(385) - (55)^2}\,\sqrt{10(1114) - (88)^2}}$$

$$r = \frac{1020}{\sqrt{825}\,\sqrt{3396}}$$

$$r = \frac{1020}{1673.827} \quad r = 0.609$$

(b) સીધી રીત (Direct method) :

ઉદાહરણ - 2 આપેલ માહિતી ઉપરથી ભાઈ અને બહેનની ઊંચાઈના કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

ભાઈની ઊંચાઈ	65	66	67	68	69	70	71
બહેનની ઊંચાઈ	67	68	66	69	72	72	69

જવાબ : ધારો કે ભાઈની ઊંચાઈ x અને બહેનની ઊંચાઈ y છે.

અહીં $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{476}{7} = 68$ અને $\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{483}{7} = 69$ થશે.

x	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	y	$(y-\bar{y})$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
65	-3	9	67	-2	4	6
66	-2	4	68	-1	1	2
67	-1	1	66	-3	9	3
68	0	0	69	0	0	0
69	1	1	72	3	9	3
70	2	4	72	3	9	6
71	3	9	69	0	0	0
કુલ		28			32	20

$$r_{xy} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y-\bar{y})^2}}$$

$$r = \frac{20}{\sqrt{28}\sqrt{32}}$$

$r = 0.668$

(c) ટૂંકી રીત (Short method)

ઉદાહરણ - 3 આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

x	2	6	8	10	14	16	20
y	1	3	4	5	7	8	10

જવાબ : અહીં $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{76}{7} = 10.85$ અને $\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{38}{7} = 5.42$ થશે.

અહીં x અને yના મધ્યકો અપૂર્ણાંકમાં છે. તેથી x અને yના ધારેલ મધ્યક અનુક્રમે 10 અને 5 લેતાં.

x	$d_x = x - 10$	d_x^2	y	$d_y = y - 5$	d_y^2	$d_x d_y$
2	-8	64	1	-4	16	32
6	-4	16	3	-2	4	8
8	-2	4	4	-1	1	2
10	0	0	5	0	0	0
14	4	16	7	2	4	8
16	6	36	8	3	9	18
20	10	100	10	5	25	50
કુલ	6	236		3	59	118

$$r = \frac{n\sum d_x d_y - \sum d_x \sum d_y}{\sqrt{n\sum d_x^2 - \left(\sum d_x\right)^2}\sqrt{n\sum d_y^2 - \left(\sum d_y\right)^2}}$$

$$r = \frac{7\,(118) - (6)(3)}{\sqrt{7(236) - (6)^2}\sqrt{7(59) - (3)^2}}$$

$r = 1$

ઉદાહરણ - 4 આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

x	78	89	96	69	59	79	68	61
y	125	137	156	112	107	136	123	108

અહીં x અને yના ધારેલ મધ્યકો અનુક્રમે 69 અને 112 લઈને ગણતરી કરો.

જવાબ :

x	$d_x = x - 69$	d_x^2	y	$d_y = y - 112$	d_y^2	$d_x d_y$
78	9	81	125	13	169	117
89	20	400	137	25	625	500
96	27	729	156	44	1936	1188
69	0	0	112	0	0	0
59	-10	100	107	-5	25	50
79	10	100	136	24	576	240
68	-1	1	123	11	121	-11
61	-8	64	108	-4	16	32
કુલ	47	1475		108	3468	2116

$$r = \frac{n\sum d_x d_y - \sum d_x \sum d_y}{\sqrt{n\sum d_x^2 - \left(\sum d_x\right)^2}\sqrt{n\sum d_y^2 - \left(\sum d_y\right)^2}}$$

$$r = \frac{8(2116) - (47)(108)}{\sqrt{8(1475) - (47)^2}\sqrt{8(3468) - (108)^2}}$$

$r = 0.955$

ઉદાહણ - 5 એક વ્યક્તિએ બે ચલના 25 અવલોકનો ઉપરથી નીચેની માહિતી મેળવેલ છે.

$\sum x = 125, \sum x^2 = 650, \sum y = 100, \sum y^2 = 460, \sum xy = 508$

ઉપરોક્ત માહિતી તપાસતા માલૂમ પડ્યું કે અવલોકનો બે જોડકાં (6, 14) અને (8, 6) ખોટા લખાયેલ હતાં જ્યારે સાચા અવલોકનો (8, 12) અને (6, 8) છે. તો સાચો સહસંબંધાંક શોધો.

જવાબ : અહીં ખોટાં જોડકાં (6, 14) અને (8, 6) છે. જ્યારે સાચા (8, 12) અને (6, 8) છે.

તેથી સાચી કિંમત $\sum x = 125 - 6 - 8 + 8 + 6 = 125$

$\sum y = 100 - 14 - 6 + 12 + 8 = 100$

$\sum x^2 = 650 - 6^2 - 8^2 + 8^2 + 6^2 = 650$

$\sum y^2 = 450 - 14^2 - 6^2 + 12^2 + 8^2 = 436$

$\sum xy = 508 - (6)(14) - (8)(6) + (8)(12) + (6)(8) = 520$ થશે.

ઉપરોક્ત સાચી કિંમત નીચેના સૂત્રમાં મૂકતા,

$$r=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{\sqrt{n\sum x^2-(\sum x)^2}\sqrt{n\sum y^2-(\sum y)^2}}$$

$$r=\frac{25(520)-(125)(100)}{\sqrt{25(650)-(125)^2}\sqrt{25(436)-(100)^2}}$$

$r = 0.67$

ઉદાહરણ - 6 નીચેની કિંમત ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો.

$$n=100, 1.5\,\overline{x}=\overline{y}=30, \sum y(y+4)=104500, \sum x(x+y)=103200$$

જવાબ : $n=100, 1.5\overline{X}=30, \sum X(X+3)=47600$

$\overline{X} = 30/1.5 = 20$

$\overline{x}=20$

$\sum x=n\overline{x}\Rightarrow\sum x=100(20)=2000$

$\overline{y}=30\Rightarrow\sum y=n\overline{y}\Rightarrow\sum y=100(30)=3000$

$\sum x(x+3)=47600\Rightarrow\sum(x^2+3x)=47600$

$\Rightarrow\sum x^2+3\sum x=47600$

$\Rightarrow\sum x^2+3(2000)=47600$

$\Rightarrow\sum x^2=41600$

$\sum y(y+4)=104500\Rightarrow\sum(y^2+4y)=104500$

$\Rightarrow\sum y^2+4\sum y=104500$

$\Rightarrow\sum y^2+4(3000)=104500$

$\Rightarrow\sum y^2=92500$

$\sum x(x+y)=103200\Rightarrow\sum(x^2+xy)=103200$

$\Rightarrow\sum x^2+\sum xy=103200$

$\Rightarrow 41600+\sum xy=103200$

$\Rightarrow\sum xy=61600$

ઉપરોક્ત કિંમતો નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{\sqrt{n\sum x^2-(\sum x)^2}\sqrt{n\sum y^2-(\sum y)^2}}$$

$$r_{xy} = \frac{100(61600) - (2000)(3000)}{\sqrt{100(41600) - (2000)^2}\sqrt{100(92500) - (3000)^2}}$$

$$r = \frac{160000}{(400)(500)}$$

$$r = \frac{16}{20} = 0.8$$

ઉદાહરણ - 7 નીચેની માહિતી પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

$$n = 10, \bar{x} = 21, \bar{y} = 22, \sum xy = 4220, V(x) = 100, V(y) = 144$$

જવાબ : $r_{xy} = \dfrac{\sum xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{ns_x s_y}$

$[V(x) = 100 \Rightarrow S_x = 10,\ V(y) = 144 \Rightarrow S_y = 12]$

$$r_{xy} = \frac{4220 - 10(21)(22)}{10(10)(12)}$$

$$r_{xy} = \frac{-400}{1200} = -0.33$$

ઉદાહરણ - 8 જો બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધાંક 0.3 હોય, તેનું સહવિચલન 9 હોય તથા xનું વિચલન 16 હોય તો yનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

જવાબ : $Cov.(x, y) = 9, r = 0.3, S_x^2 = 16 \Rightarrow S_x = 4$

$$r = \frac{Cov.(x, y)}{S_x S_y}$$

$$0.3 = \frac{9}{4S_y} \Rightarrow S_y = \frac{9}{(0.3)(4)} \Rightarrow S_y = 7.5$$

દ્વિચલ વર્ગીકૃત માહિતી પરથી સહસંબંધાંક :

બે ચલની કિંમતોના જોડકાં પરથી સહસંબંધાંક કેવી રીતે શોધવો તે આપણે જોયું. જ્યારે બે ચલોની કિંમતોના જોડકાંની સંખ્યા ખૂબ જ મોટી હોય ત્યારે માહિતીને ટૂંકા સ્વરૂપમાં દર્શાવવા વર્ગીકરણનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. અહીં પ્રત્યેક ચલની કિંમતોને ધ્યાનમાં લઈ બંને ચલની કિંમતો દર્શાવતા પ્રત્યેક જોડકાંનું વર્ગીકરણ કરવામાં આવે છે. આ પ્રકારના વર્ગીકરણને દ્વિચલ વર્ગીકૃત કોષ્ટક તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

દ્વિચલ કોષ્ટક પરથી સહસંબંધાંક શોધવા માટેનું કાર્લ પિયર્સનનું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે છે.

$$r = \frac{n\sum fd_x d_y - \sum f_x d_x \sum f_y d_y}{\sqrt{n\sum f_x d_x^2 - (\sum f_x d_x)^2}\sqrt{n\sum f_y d_y^2 - (\sum f_y d_y)^2}}$$

જ્યાં $d_x = \dfrac{x - A}{C_x}$ અને $d_y = \dfrac{y - B}{C_y}$

A અને B અનુક્રમે x અને yના ધારેલા મધ્યકની કિંમત તથા C_x અને C_y અનુક્રમે x અને yની વર્ગલંબાઈ છે.

ઉપરના સૂત્રમાં જરૂરી કિંમતો મેળવવાની રીત નીચે મુજબ છે.

(1) હારમાં દર્શાવેલ વર્ગોને ચલ xના વર્ગો તથા સ્તંભમાં દર્શાવેલા વર્ગોને ચલ yના વર્ગો કહો.

(2) હારમાં દરેક વર્ગની મધ્યકિંમતને x તથા સ્તંભના દરેક વર્ગની મધ્યકિંમત y વડે દર્શાવો.

(3) હાર તથા સ્તંભ માટે ધારેલા મધ્યકો અનુક્રમે A અને B લો. ચલ xની વર્ગલંબાઈ C_x અને ચલ yની વર્ગ લંબાઈ C_y હોય તો મધ્યકિંમતો x અને y ઉપરથી વિચલનો d_x અને d_y નીચે પ્રમાણે મેળવો.

$$d_x = \frac{x - A}{C_x}, \quad d_y = \frac{y - B}{C_y}$$

(4) x ના પ્રત્યેક વર્ગ માટે આવૃત્તિ f_x અને d_xના ગુણાકાર કરી તેનો સરવાળો $\sum f_x d_x$ મેળવો. તેવી જ રીતે d_yના પ્રત્યેક વર્ગ માટે આવૃત્તિ f_y અને d_yના ગુણાકાર કરી તેનો સરવાળો $\sum f_y d_y$ મેળવો.

(5) xના પ્રત્યેક વર્ગ માટે $f_x d_x$ અને d_x ના ગુણાકાર કરી $\sum f_x d_x^2$ મેળવો.તેવી જ રીતે $\sum f_y d_y^2$ મેળવો.

(6) દરેક ખાના માટે f, d_x, d_y નો ગુણાકાર મેળવી અને તે જ ખાનામાં જમણી બાજુ ઉપરની બાજુએ ખાનામાં દર્શાવો. હવે પ્રત્યેક વર્ગ માટે આ ખાનામાં દર્શાવેલ કિંમતોનો સરવાળો $\sum f d_x d_y$ મેળવો.

ઉદાહરણ - 9 નીચે આપેલ દ્વિચલ આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક ઉપરથી ઊંચાઈ અને વજન વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

વજન	**ઊંચાઈ (ઈંચ)**					
(પાઉન્ડ)	**40-44**	**44-48**	**48-52**	**52-56**	**56-60**	**60-64**
35-55	4	40	60	-	-	-
55-75	-	-	24	88	12	-
75-95	-	-	-	8	32	8
95-115	-	-	-	-	4	8
115-135	-	-	-	4	-	-
135-155	-	-	-	-	4	4

જવાબ : ધારો કે x શ્રેણીમાં ધારેલ મધ્યક 50 છે. તેથી $d_x = \dfrac{x - 50}{4}$ થશે. ધારો કે y શ્રેણીમાં ધારેલ મધ્યક 85 છે. તેથી $d_y = \dfrac{y - 85}{10}$ થશે.

			ઊંચાઈ									
			40-44	44-48	48-52	52-56	56-60	60-64				
		મ.કિ.x	42	46	50	54	58	62				
	મ.કિ.y	d_y d_X	-2	-1	0	1	2	3	f_y	$f_y d_y$	$f_y d_y^2$	$fd_x d_y$
35-55	45	-2	$\boxed{16}$ 4	$\boxed{80}$ 40	$\boxed{0}$ 60	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	104	-208	416	96
55-75	65	-1	0	0	$\boxed{0}$ 24	$\boxed{-88}$ 88	$\boxed{-24}$ 12	$\boxed{0}$	124	-124	124	-112
75-95	85	0	0	0	0	$\boxed{0}$ 8	$\boxed{0}$ 32	$\boxed{0}$ 8	48	0	0	0
95-115	105	1	0	0	0	0	$\boxed{8}$ 4	$\boxed{24}$ 8	12	12	12	32
115-135	125	2	0	0	0	$\boxed{8}$ 4	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 0	4	8	16	8
135-155	145	3	0	0	0	0	$\boxed{24}$ 4	$\boxed{36}$ 4	8	24	72	60
		$_x \rightarrow$	4	40	84	100	52	20	n = 300	$\Sigma f_y d_y$ - 288	Σfd_y^2 = 640	$\Sigma fd_x d_y$ = 84
		$f_x d_x \rightarrow$-	8	-40	0	100	104	60	$\Sigma f_x d_x$ = 216			
		$f_x d_x^2 \rightarrow$	16	40	0	100	208	180	$\Sigma f_x d_x^2$ = 544			
		$fd_x d_y \rightarrow$	16	80	0	-80	8	60	$\Sigma fd_x d_y$ = 84			

ઉપરોક્ત કોષ્ટક પરથી મળેલ કિંમતો નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$N = 300 \sum fd_x d_y = 84, \sum f_x d_x = 216$$

$$\sum f_x d_x^2 = 544, \sum f_y d_y = -288, \sum f_y d_y^2 = 640$$

$$r = \frac{n \sum fd_x d_y - \left(\sum f_x d_x\right)\left(\sum f_y d_y\right)}{\sqrt{n \sum f_x d_x^2 - \left(\sum f_x d_x\right)^2} \sqrt{n \sum f_y d_y^2 - \left(\sum f_y d_y\right)^2}}$$

$$r = \frac{300 \times 84 - (216)(-288)}{\sqrt{300 \times 544 - (216)^2} \sqrt{300 \times 640 - (-288)^2}}$$

$$r = \frac{25200 + 62208}{\sqrt{163200 - 46656} \sqrt{192000 - 82944}}$$

$$r = \frac{87408}{\sqrt{116544} \times \sqrt{109056}}$$

$$r = \frac{87408}{(341.39) \times (330.23)}$$

$$r = 0.78$$

કાર્લ પિયર્સનની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ :

ગુણ :

(1) સહસંબંધ મેળવવા માટેની આ એક મહત્ત્વની રીત છે.

(2) જ્યારે જથ્થાવાચક માહિતી આપેલ હોય ત્યારે ઉપયોગી થાય છે.

(3) બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધનો પ્રકાર તેમજ તેમની વચ્ચેના સંબંધની ઘનિષ્ઠતા પણ જાણી શકાય છે.

(4) તે સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા (વધુ, સામાન્ય કે ઓછી) ને એક સંખ્યામાં દર્શાવે છે.

(5) નિદર્શ સહસંબંધાંક અને સંભવિત દોષ (Probable Error) ઉપરથી સમષ્ટિના સહસંબંધાંકનો વિસ્તાર મેળવી શકાય.

મર્યાદા

(1) આ રીત બે ચલ વચ્ચે રેખીય સંબંધ હોય ત્યારે જ ઉપયોગ કરી શકાય છે.

(2) અંતિમ અવલોકના (ખૂબ મોટા અથવા ખૂબ નાના પ્રાપ્તાંકો)ની સહસંબંધાંક ઉપર ખૂબ જ અસર થાય છે.

(3) સહસંબંધાંકની બીજી રીતો કરતા આ રીત વધારે સમય લે છે.

(4) આ રીતે મળતા સહસંબંધાંકનું અર્થઘટન બહુ જ સાવચેતીપૂર્વક કરવું પડે છે.

3. સ્પિયરમેનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત :

આપણે આગળ જોયું કે, જ્યારે બંને ચલોને સંખ્યાત્મક રીતે માપી શકાય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનની રીતનો ઉપયોગ થાય છે પણ ઘણી વાર બે ચલોની માહિતી ગુણધર્મને આધારે આપેલી હોય છે. જેમ કે, સુંદરતા, પ્રામાણિકતા, આવડત વગેરે. આ પરિસ્થિતિમાં આ ગુણધર્મો (લક્ષણો)ને સંખ્યાત્મક સ્વરૂપે માપી શકાતા નથી. પરંતુ તે ચલને કિંમતને બદલે તેને ક્રમ આપી શકાય છે.

આ રીતે મળતા બે લક્ષણોની ક્રમોની જોડ પરથી મેળવેલા સહસંબંધાંકને સ્પિયરમેનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક કહેવાય છે.

સ્પિયરમેનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીતમાં 'n' કિંમતોના બે સમૂહોને કોઈ ચોક્કસ ગુણધર્મ (પ્રામાણિકતા, ગરીબાઈ, સાક્ષરતા, હોશિયારી વગેરે) પ્રમાણે ક્રમાંક આપવામાં આવે છે.

કેટલીક વખત જ્યારે ચલના પ્રાપ્તાંકોની કિંમત ખૂબ જ મોટી હોય અને તેનો પ્રસાર પણ વધારે હોય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક મેળવવાને બદલે ક્રમાંક સહસંબંધાંક મેળવાય છે.

આ રીતમાં જ્યારે અવલોકનની n જોડ સંખ્યાત્મક ચલની હોય ત્યારે સામાન્ય રીતે એક ચલના સૌથી નાના અવલોકનને ક્રમ 1, ત્યાર બાદ તેનાથી મોટા પણ બાકીના અવલોકનોથી નાના હોય તેવા અવલોકન ને ક્રમ 2 એ મુજબ બધા જ અવલોકનોને ક્રમ આપવામાં આવે છે. તે જ રીતે બીજા ચલની કિંમતોને ક્રમ આપવામાં આવે છે.

આમ જ્યારે બે શ્રેણી વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધ મેળવવો હોય તો તે બે શ્રેણીના અવલોકનોને ઉપર મુજબ ક્રમ આપવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ દરેક જોડકાંના ક્રમોનો તફાવત d મેળવી d^2 શોધવામાં આવે છે અને તેનો સરવાળો $\sum d^2$ મેળવાય છે.

ઉપરોક્ત $\sum d^2$ ની કિંમત સ્પિયરમેનના નીચે મુજબના સૂત્રમાં મૂકવાથી ક્રમાંક સહસંબંધાંકની કિંમત મળશે.

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n\left(n^2 - 1\right)}$$

ઉદાહરણ - 10 નીચેના કોષ્ટકમાં અમૂક કંપનીના શેર તથા ડિબેન્ચરના અલગ અલગ વર્ષના ભાવ આપવામાં આવેલ છે.

વર્ષ	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
શેર	97.5	99.4	98.6	92.2	95.1	98.4	97.1
ડિબેન્ચર	75.1	75.9	77.1	78.2	79.0	74.8	76.2

ક્રમાંક સહસંબંધની રીતે શેર અને ડિબેન્ચર વચ્ચેના ભાવોનો સંબંધ શોધો

જવાબ : સૌથી પહેલા x અને y શ્રેણીને ચઢતા ક્રમમાં ક્રમ આપો.

x	**R_x**	**y**	**R_y**	**$d = R_x - R_y$**	**d^2**
97.5	4	75.1	2	2	4
99.4	7	75.9	3	4	16
98.6	6	77.1	5	1	1
92.2	1	78.2	6	-5	25
95.1	2	79.0	7	-5	25
98.4	5	74.8	1	4	16
97.1	3	76.2	4	-1	1
				કુલ	$\sum d^2 = 88$

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n\left(n^2 - 1\right)}$$

$$r = 1 - \frac{6(88)}{7(7^2 - 1)}$$

$$r = 1 - 1.571$$

$$r = -0.571$$

અવલોકનો સમાન હોય (Tie in Observations) :

જ્યારે ચલ x અથવા y અથવા બંન્ને ચલના અવલોકનોની અમુક કિંમત સમાન હોય તેને ગાંઠ (Tie) ઉદ્‌ભવે છે તેમ કહી શકાય. આવા કિસ્સામાં પુનરાવર્તન પામતા બધા અવલોકનોને તેમને અનુરૂપ ક્રમોની સરેરાશ જેટલો ક્રમ ગાંઠમાંના દરેક અવલોકનોને આપવામાં આવે છે.

ધારો કે 5 વિદ્યાર્થીના I.Q. Testના ગુણ અનુક્રમે 83, 85, 87, 84, 85 છે. તો આ ગુણને ક્રમ આપવા હોય તો સૌથી ઓછા ગુણ 83ને ક્રમ 1 અપાય, ગુણ 84 ને ક્રમ 2 અપાય હવે ગુણ 85 બે વિદ્યાર્થીને છે. તેમનો ક્રમ 3 અને ક્રમ 4 છે. તેથી બંનેને ક્રમ 3 અને ક્રમ 4 નો સરેરાશ ક્રમ $\frac{3+4}{2} = 3.5$ આપવો પડે. ત્યારબાદ ગુણ 87 ને ક્રમ 5 અપાય.

હવે જ્યારે અમુક અવલોકનો સમાન હોય ત્યારે ક્રમાંક સહસંબંધાંકની ગણતરી કરવા માટે, CF (Correction factor)ની વધારાની ગણતરી કરવી પડે.

CF શોધવા માટે પ્રત્યેક પુનરાવર્તન પામતા અવલોકનના સમુહ દીઠ $\left(\frac{m^3 - m}{12}\right)$ પદ $\sum d^2$ માં ઉમેરવામાં આવે છે. જ્યાં m, અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે છે તે સંખ્યા દર્શાવે છે. ઉપરોક્તથી ઉદાહરણમાં 85 બે વખત આવેલ છે તેથી m = 2 થશે.

આમ જ્યારે ક્રમ આપવામાં અમુક અવલોકનો સમાન હોય ત્યારે ક્રમાંક સહસંબંધાંકનું સૂત્ર નીચે મુજબ થશે.

$$r = 1 - \frac{6\left[\sum d^2 + \frac{1}{12}\left(m^3 - m\right) + \frac{1}{12}\left(m^3 - m\right) + ...\right]}{n\left(n^2 - 1\right)}$$

ઉદાહરણ - 11 નીચેના કોષ્ટકમાં વિદ્યાર્થીઓએ એકાઉન્ટ અને આંકડાશાસ્ત્રમાં આવેલ ગુણ આપેલ છે. તે બંને વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધની રીતે સહસંબંધાંક મેળવો.

એકાઉન્ટના ગુણ	15	20	25	12	40	60	20	80
આંકડાશાસ્ત્રના ગુણ	40	30	50	30	20	10	30	60

જવાબ :

x	R_x	y	R_y	$d = R_x - R_y$	$d^2 = (R_x - R_y)^2$
15	2	40	6	-4	16
20	3.5	30	4	-0.5	0.25
25	5	50	7	-2	4.0
12	1	30	4	-3	9.00
40	6	20	2	4	16.00
60	7	10	1	6	36.00
20	3.5	30	4	-0.5	0.25
80	8	60	8	0	0
					$\sum d^2 = 81.5$

અહીં શ્રેણી xમાં 20, એ 2 વખત આવે છે $\therefore m = 2$ થશે.

તેમજ શ્રેણી yમાં 30, એ 3 વખત આવે છે. $\therefore m = 3$ થશે. આ કિંમત નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં.

$$r = 1 - \frac{6\left\{\sum d^2 + \frac{1}{12}\left(m^3 - m\right) + \frac{1}{12}\left(m^3 - m\right) + ...\right\}}{n^3 - n}$$

$$r = 1 - \frac{6\left\{81.5 + \frac{1}{12}\left(2^3 - 2\right) + \frac{1}{12}\left(3^3 - 3\right)\right\}}{8^3 - 8}$$

$$r = 1 - \frac{6\left\{81.5 + 0.5 + 2\right\}}{504}$$

$$r = 1 - \frac{504}{504}$$

$r = 0$

ઉદાહરણ - 12 ત્રણ નિર્ણાયકોએ 10 સ્પર્ધકોને આપેલ ક્રમ નીચે મુજબ છે. કયા બે નિર્ણાયકો વચ્ચે વધારે સંબંધ છે તે શોધો.

નિર્ણાયક-1	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7
નિર્ણાયક-2	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
નિર્ણાયક-3	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8

જવાબ :

R_1	R_2	R_3	$d_{12} = R_1 - R_2$	d_{12}^2	$d_{13} = R_1 - R_3$	d_{13}^2	$d_{23} = R_2 - R_3$	d_{23}^2
6	3	1	3	9	5	25	2	4
4	5	6	-1	1	-2	4	-1	1
9	8	5	1	1	4	16	3	9
8	4	10	4	16	-2	4	-6	36
1	7	3	-6	36	-2	4	4	16
2	10	2	-8	64	0	0	8	64
3	2	4	1	1	-1	1	-2	4
10	1	9	9	81	1	1	-8	64
5	6	7	-1	1	-2	4	-1	1
7	9	8	-2	4	-1	1	1	1
			કુલ	$\sum d_{12}^2 = 214$		$\sum d_{13}^2 = 60$		$\sum d_{23}^2 = 200$

$$r_{12} = 1 - \frac{6\sum d_{12}^2}{n\left(n^2-1\right)} \qquad r_{13} = 1 - \frac{6\sum d_{13}^2}{n\left(n^2-1\right)} \qquad r_{23} = 1 - \frac{6\sum d_{23}^2}{n\left(n^2-1\right)}$$

$$r_{12} = 1 - \frac{6(214)}{10(100-1)} \qquad r_{13} = 1 - \frac{6(60)}{10(100-1)} \qquad r_{23} = 1 - \frac{6(200)}{10(100-1)}$$

$$r_{12} = -\,0.2970 \qquad r_{13} = 0.6363 \qquad r_{23} = 0.2121$$

અહીં r_{13} એટલે કે નિર્ણાયક-1 અને નિર્ણાયક-3 વચ્ચે વધારે સંબંધ છે.

ઉદાહરણ - 13 બે ચલ x અને y વચ્ચેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક 0.143 છે તથા ક્રમના તફાવતોનો વર્ગનો સરવાળો 48 છે. અવલોકનોની સંખ્યા મેળવો.

જવાબ : અહીં $r = 0.143, \sum d^2 = 48$ આપેલ છે.

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n\left(n^2-1\right)}$$

$$0.143 = 1 - \frac{6(48)}{n\left(n^2-1\right)}$$

$$0.143 = 1 - \frac{288}{n\left(n^2-1\right)}$$

$$\frac{288}{n\left(n^2-1\right)} = 1 - 0.143$$

$$\frac{288}{n\left(n^2-1\right)} = 0.857$$

$$\therefore n\left(n^2-1\right)=\frac{288}{0.857}$$

$$\therefore n\left(n^2-1\right)=336$$

$$\left(n-1\right)n\left(n+1\right)=6\times 7\times 8$$

$$n=7$$

$\therefore$ આપેલ વિગતોના અવલોકનોની સંખ્યા 7 છે.

સ્પિયરમેનના ક્રમાંક સહસંબંધની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ :

ગુણ :

(1) કાર્લ પિયર્સનની રીત કરતા આ રીત સમજવામાં સરળ છે.

(2) જ્યારે ગુણધર્મ પ્રમાણે માહિતી આપેલ હોય ત્યારે આ રીત ઉપયોગી છે.

(3) જ્યારે માહિતીમાં પ્રસાર વધુ હોય અથવા અવલોકનોની કિંમત ખૂબ જ મોટી હોય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનની રીતને બદલે સ્પિયરમેનની રીતનો ઉપયોગ કરવો યોગ્ય છે.

(4) જ્યારે બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સંબંધ ન હોય ત્યારે આ રીતનો ઉપયોગ થઈ શકે છે.

મર્યાદાઓ :

(1) સતત આવૃત્તિ વિતરણ આપેલ હોય ત્યારે આ રીતનો ઉપયોગ કરી શકાતો નથી.

(2) આ રીત કાર્લ પિયર્સનની રીત જેટલી ચોક્કસ નથી.

(3) જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા વધુ હોય ત્યારે આ રીતનો ઉપયોગ કરવામાં તકલીફ થાય છે.

7.6 સંભવિત દોષ (Probable Error) :

એક જ સમષ્ટિમાંથી જુદા જુદા નિદર્શો લઈ તેનો સહસંબંધાંક શોધવામાં આવે તો તે દરેકની કિંમત જુદી જુદી મળે છે. આ કિંમતો જુદી આવવાનું કારણ નિદર્શન પદ્ધતિને લઈને થતી ભૂલોની અસર છે.

વ્યાખ્યા : સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની કિંમત અને સમષ્ટિમાંથી યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિથી પસંદ કરેલા નિદર્શોના સહસંબંધાંકોની કિંમતો વચ્ચેના તફાવતોની સરેરાશને સંભવિત દોષ કહે છે.

કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની કિંમતના સંભવિત દોષ જાણવા નીચેનું સૂત્ર ઉપયોગમાં લેવાય છે.

P.E. = સંભવિત દોષ $=0.6745\frac{\left(1-r^2\right)}{\sqrt{n}}$

જ્યાં r = નિદર્શ પરથી મળેલ સહસંબંધાંક

n = જોડકાની કુલ સંખ્યા

ઉપરના સુત્રમાં nની કિંમત જેમ જેમ વધે તેમ તેમ સંભવિત દોષની કિંમત ઘટશે.

સંભવિત દોષની મદદથી બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધાંક છે કે નહીં તે નીચે મુજબ નક્કી કરી શકાય.

(1) જો સહસંબંધાંકની કિંમત 6(P.E.) કરતા મોટી હોય (r>6 P.E.) તો બે ચલ વચ્ચે વધુમાં વધુ પ્રમાણમાં સહસંબંધ છે તથા તે સાર્થક છે તેમ કહેવાય.

(2) જો સહસંબંધાંકની કિંમત P.E. કરતા નાની હોય ($r < P.E.$) તો બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધ નથી તેમ કહેવાય.

(3) જો સંભવિત દોષ પ્રમાણમાં નાનો હોય અને જો સહસંબંધાંક 0.5 થી વધુ હોય તો બે ચલો વચ્ચે સૂચક સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

(4) જો સંભવિત દોષ પ્રમાણમાં નાનો હોય અને જો સહસંબંધાંક 0.3 થી ઓછો હોય તો સુરેખ સહસંબંધનું અસ્તિત્વ નહિવત છે તેમ કહેવાય.

(5) સંભવિત દોષ ઉપરથી સમષ્ટિનો સહસંબંધાંક (૧) કયાં વિસ્તારમાં આવેલ હશે તે નીચે મુજબના અંતરાલ ઉપરથી નક્કી કરી શકાય.

(r - P.E. < ૧ < r + P.E.)

ઉદાહરણ - 14 બે ચલ x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક 0.8 છે તો 15 અવલોકનો માટે સંભવિત દોષ (P.E.) તથા સમષ્ટિ સહસંબંધાંકની સીમા શોધો.

જવાબ : અહીં $r = 0.8$, $n = 15$ આપેલ છે.

સંભવિત દોષ = $P.E._r = 0.6745\left(\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}\right)$

$$P.E._r = 0.6745\left(\frac{1-(0.8)^2}{\sqrt{15}}\right) = 0.06274$$

સમષ્ટિ સહસંબંધાંકની સીમા

$= (r - P.E._r,\ r + P.E._r)$

$= (0.8 - 0.06274,\ 0.8 + 0.06274)$

$= (0.73726,\ 0.86274)$

ઉદાહરણ - 15 બે ચલ x અને y ના 15 અવલોકનો સંભવિત દોષ 0.063 છે તો સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

જવાબ : અહીં $n = 15$, $P.E._r = 0.063$ આપેલ છે.

સંભવિત દોષ $P.E._r = 0.6745\left(\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}\right)$

$$0.063 = 0.6745\left(\frac{1-(r)^2}{\sqrt{15}}\right)$$

$$1-r^2 = \frac{0.063}{0.6745}\sqrt{15}$$

$$1-r^2 = 0.3617$$

$$\therefore r^2 = 1-0.3617$$

$$\therefore r^2 = 0.6382$$

$$\therefore r = 0.7989$$

સ્વાધ્યાય

(1) સૈદ્ધાંતિક પ્રશ્નો

1. સહસંબંધનો અર્થ ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.
2. સહસંબંધ અને સહસંબંધાંક એટલે શું ? ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.
3. સહસંબંધના પ્રકાર વર્ણવો.
4. સહસંબંધાંકના ગુણધર્મો વર્ણવો.
5. સહસંબંધનો ઉપયોગ ક્યારે થાય છે ?
6. કાર્ય-કારણનો સંબંધ સમજાવો.
7. સંભવિત દોષનો અર્થ અને તેનું અર્થઘટન સમજાવો.

(2) ટૂંકનોંધ લખો.

1. વિકીર્ણ આકૃતિની રીત
2. સહસંબંધના પ્રકારો
3. કાર્લ પિયર્સનની રીત
4. સ્પિયરમેનના ક્રમાંક સહસંબંધની રીત
5. સંભવિત દોષ

(3) બહુ વિકલ્પ પ્રશ્નો :

નીચે આપેલા બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો.

1. વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખ પર આવેલા હોય તો rની કિંમત .... થાય.

   (a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) −1 અથવા 1

2. સહસંબંધાંક r નો વિસ્તાર .... છે.

   (a) $-1 < r < 1$ (b) $0 < r < 1$ (c) $-1 \le r \le 1$ (d) $0.5 < r$

3. નીચેના પૈકી r ની કઈ કિંમત શક્ય નથી ?

   (a) 0.99 (b) 1.07 (c) −0.99 (d) 0.75

4. ક્રમાંક સહસંબંધની રીતમાં બે ચલોના ક્રમાંકોના તફાવતોનો સરવાળો .... થાય.

   (a) −1 (b) 0 (c) 1 (d) 0.5

5. જો $\sum d^2 = 0$ હોય તો ક્રમાંક સહસંબંધાંકની કિંમત .... થાય.

   (a) −1 (b) 0 (c) 1 (d) 0.25

6. જો r (x, y) = 0.7 હોય તો r (x + 0.2, y + 0.2) = ...

   (a) 0.7 (b) 0.5 (c) 0.9 (d) 1

7. ક્રમાંક સહસંબંધની રીતમાં જો બે ચલોના ક્રમ એક બીજાથી ઊલટા ક્રમમાં હોય તો r = ... થાય.

   (a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) 0.25

8. જો બે ચલ વચ્ચે અચળ પ્રમાણમાં એકબીજાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરફાર થતા હોય તો તે બે ચલ વચ્ચે .... પ્રકારનો સહસંબંધ મળે.

   (a) સંપૂર્ણ ઋણ (b) સંપૂર્ણ ધન (c) આંશિક ઋણ (d) આંશિક ધન

9. જો $\sum d^2 = 127$ અને n = 100 હોય તો r = ...

   (a) 0.20 (b) 0.23 (c) 0.26 (d) 0.30

10. CF (Correction Factor) શોધવા માટે પ્રત્યેક પુનરાવર્તન પામતા અવલોકનના સમૂહ દીઠ .... પદ $\sum d^2$ માં ઉમેરવામાં આવે છે.

(a) $m^3 - m$ (b) $\frac{m^3 - m}{12}$ (c) $m^3 + m$ (d) $\frac{m^3 + m}{12}$

જવાબ : 1. (d) 2. (c) 3. (b) 4. (b) 5. (c) 6. (a) 7. (c) 8. (a) 9. (b) 10. (b)

(4) નીચે આપેલા શબ્દોનો એક લીટીમાં અર્થ સમજાવો.

(1) સહસંબંધ

(2) ધન સહસંબંધ

(3) ઋણ સહસંબંધ

(4) વિકીર્ણ આકૃતિ

(5) સહસંબંધાંક

(6) સંભવિત દોષ

(5) ટૂંકા પ્રશ્નો

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો.

1. સહસંબંધની વ્યાખ્યા આપો.
2. સહસંબંધાંકની વ્યાખ્યા આપો.
3. વિકીર્ણ આકૃતિની મુખ્ય મર્યાદા શું છે ?
4. કાર્લ પિયર્સનની રીતની મુખ્ય મર્યાદા શું છે ?
5. જો સહવિચલનનું મૂલ્ય ઋણ હોય તો સહસંબંધાંકની કિંમત ધન થશે કે ઋણ ?
6. x અને y વચ્ચે સહસંબંધાંક 0.6 છે. હવે xના પ્રત્યેક અવલોકનમાં 10 ઉમેરવામાં આવે અને yના પ્રત્યેક અવલોકનોમાંથી 10 બાદ કરવામાં આવે તો આ ફેરફાર બાદ સહસંબંધાંક શું થશે ?

   [જવાબ : r = 0.6]
7. જો $\sum\left(R_x - R_y\right)^2 = 126$ અને n = 8 તો ક્રમાંક સહસંબંધાંક ની કિંમત મેળવો.

   [જવાબ : r = -0.5]
8. ક્રૂડ ઓઈલની વાર્ષિક આયાત અને તે જ સમયગાળામાં થતા લગ્નોની સંખ્યા વચ્ચેના સહસંબંધ વિશે શું કહી શકાય ?

(6) વ્યવહારિક દાખલાઓ.

1. આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

x	0.21	0.20	0.24	0.23	0.25	0.26	0.28	0.30
y	1200	1500	1600	1900	1700	1800	2000	2100

[જવાબ : r = 0.8374]

2. આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

(1)

X	2	9	8	5	9	7	5
Y	9	5	7	5	3	4	4

[જવાબ : r = -0.59339]

(2)

X	15	12	18	19	16	18	12
Y	22	29	25	30	28	29	19

[જવાબ : r = 0.502108]

(3)

X	0.22	0.29	0.3	0.33	0.35	0.39	0.43
Y	0.94	0.89	0.84	0.8	0.79	0.75	0.71

[જવાબ : r = -0.98355]

(4)

X	0.29	0.22	0.2	0.18	0.15	0.14	0.11
Y	112	114	118	119	121	124	129

[જવાબ : r = -0.94744]

(5)

X	112	115	128	130	134	139	145
Y	51	52	59	59	62	63	69

[જવાબ : r = 0.989054]

3. નીચેના કોષ્ટકમાં પરીક્ષાનું પરિણામ આપેલ છે. આપેલ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીની ઉંમર તથા નાપાસના ટકાવારીનો સહસંબંધાંક શોધો.

વિદ્યાર્થીની ઉંમર	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21
નાપાસના %	39	40	43	43	36	39	48	44

[જવાબ : r = 0.4754]

4. આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

વેચાણ	100	200	300	400	500	600	700
વિજ્ઞાપનનો ખર્ચ	19	21	25	29	36	49	56

[જવાબ : r = 0.9663]

5. આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

$$\sum x = 200,\ \sum x^2 = 4360, \sum y = 250, \sum y^2 = 6810, \sum xy = 5384, n = 10$$

[જવાબ : r = 0.8552]

6. આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

$$\overline{x} = 50, \overline{y} = 60,$$

$$\sum xy = 48256, \sum(x-40) = \sum(y-50) = 160, \sum(x-45)^2 = 656, \sum(y-64)^2 = 1280$$

[જવાબ : r = 0.4967]

7. સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની સીમા 0.375 અને 0.625 નિદર્શો પરથી મેળવેલ છે તો તે પરથી સહસંબંધાંક તથા નિદર્શનું સંખ્યા શોધો.

[જવાબ : r = 0.5, n = 16]

8. આપેલ દ્વિચલ કોષ્ટક ઉપરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

X → Y ↓	90-100	100-100	110-120	120-130
50-55	4	7	6	2
55-60	6	10	7	4
60-65	6	12	10	7
65-70	3	8	6	3

[જવાબ : r = 0.068]

9. આપેલ દ્વિચલ કોષ્ટક ઉપરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

X → Y↓	125	115	105	95
50-55	2	6	7	4
55-60	4	7	10	6
60-65	7	10	12	6
65-70	3	6	8	3

[જવાબ : r = 0.0655]

10. આપેલ દ્વિચલ કોષ્ટક ઉપરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

X → Y↓	80-100	60-80	40-60	20-40	0-20
0-50	2	4	7	-	-
50-100	-	6	14	8	-
100-150	-	1	8	12	3
150-200	-	-	20	6	3
200-250	-	-	-	5	1

[જવાબ : r = 0.46]

11. આપેલ માહિતી પરથી સ્પિયરમેનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

x	9	16	14	15	12	10	20
y	11	15	19	16	9	11	12

[જવાબ : r = 0.5179]

12. આપેલ માહિતી પરથી સ્પિયરમેનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

x	45	59	62	45	59	59	61	67
y	18	20	25	16	18	17	18	20

[જવાબ : r = 0.6547]

13. આપેલ માહિતી પરથી સ્પિયરમેનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

R_1	6	7	1	4	5	3	2	8
R_2	8	6	5	3	2	1	4	7

[જવાબ : r = 0.5238]

14. આપેલ માહિતી પરથી સ્પિયરમેનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

x	110	115	116	117	115	109	118
y	154	155	159	160	155	148	165

[જવાબ : r = 1]

15. આપેલ માહિતી પરથી સ્પિયરમેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

R_1	9	8	7	5	3	2	1	4	6	10
R_2	8	10	6	3	4	1	2	5	7	9

[જવાબ : r = 0.903]

એકમ
8

ગુણાત્મક સંબંધ

-: રૂપરેખા :-

8.1 પ્રસ્તાવના

આપણે સહસંબંધના એકમમાં જોયું કે બે ચલ વચ્ચે જ્યારે સંબંધ શોધવાનો હોય છે ત્યારે સહસંબંધનો ઉપયોગ થાય છે. કોઈપણ માહિતી જથ્થાવાચક (Quantitative) આપેલ હોય તેને ચલ (Variable) કહેવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે વજન અને ઊંચાઈ, વેચાણ અને નફો, વરસાદ અને ઘઉંનો પાક વગેરે જેવી માહિતી જથ્થાવાચક છે અને તેને ચલ કહેવામાં આવે છે. જ્યારે જથ્થાવાચક માહિતી આપેલ હોય અને બે ચલ વચ્ચે સંબંધ શોધવાનો હોય ત્યારે આપણે સહસંબંધાંક (r) નો ઉપયોગ કરીએ છીએ. પણ ઘણી વખત માહિતી લાક્ષણિકતા/ગુણ (Qualitative) દ્વારા દર્શાવેલ હોય છે. તો તે માહિતીને ગુણાત્મક (Attributes) રાશિ કહે છે. જેમ કે ગરીબાઈ, સૌંદર્ય, શિક્ષિતતા, રોજગારી વગેરે જેવી માહિતી, વસ્તુ અથવા વ્યક્તિની લાક્ષણિકતા/ગુણ દર્શાવે છે, તેને ગુણાત્મક રાશિ કહે છે.

આમ, જ્યારે માહિતીનું એકત્રિકરણ કરી અને તેનું વર્ગીકરણ કરવાનું થાય છે, ત્યારે માહિતી બે રીતે વર્ગીકૃત થાય છે.

(1) જથ્થાવાચક (Quantitative) વર્ગીકરણ અને

(2) ગુણવાચક (Qualitative) વર્ગીકરણ.

જથ્થાવાચક વર્ગીકરણ કરેલ માહિતીને ચલ (Variable) દ્વારા દર્શાવાય છે. જેમ કે અલગ-અલગ કંપનીએ વસ્તુનું કરેલું ઉત્પાદન.

ગુણવાચક (લાક્ષણિકતા) વર્ગીકરણ કરેલ માહિતીને ગુણાત્મક રાશિ (Attributes) દ્વારા દર્શાવાય છે. જેમ કે એક શહેરમાં ભણેલ અને અભણ લોકોની સંખ્યા.

8.2 ગુણાત્મક સંબંધનો અર્થ

જ્યારે કોઈપણ માહિતી આપણને ગુણાત્મક રાશિને આધારે મળે છે, ત્યારે તે ગુણાત્મક રાશિઓ સંબંધ દર્શાવે છે કે નહિ તે જાણવા માટેની આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિને ગુણાત્મક સંબંધ કહે છે. જેમ કે શિક્ષણ અને રોજગારી વચ્ચેનો સંબંધ, છોકરા અથવા છોકરીની પરીક્ષામાં સફળતાનો સંબંધ, વ્યક્તિઓનો અભ્યાસ અને વ્યવસાયમાં સફળતા વચ્ચેનો સંબંધ વગેરે.

આમ, કોઈપણ ગુણાત્મક રાશિઓ વચ્ચેના સંબંધને ગુણાત્મક સંબંધ કહેવાય છે.

8.3 ગુણાત્મક સંબંધમાં ઉપયોગમાં લેવાતા પારિભાષિક શબ્દો તથા સંકેતો

ગુણાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ હંમેશાં વસ્તુ અથવા લોકો નિશ્ચિત અથવા સવિશેષ ગુણધર્મ ધરાવે છે કે નહીં તેના આધારે થાય છે. દાખલા તરીકે ભારતમાં શિક્ષિત લોકોની સંખ્યા. તો શિક્ષણ એ બે વિભાગમાં વર્ગીકૃત થશે. (1) શિક્ષિત અને (2) અશિક્ષિત (અભણ).

આમ, ગુણાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ ખાસ ગુણધર્મ હાજર છે અથવા ગેરહાજર છે તે રીતે થાય છે.

ગુણાત્મક માહિતીના વિશ્લેષણમાં ખાસ ગુણધર્મ હાજર હોય તો તેને A, B, C, … વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જ્યારે ખાસ ગુણધર્મ ગેરહાજર હોય તો તેને $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે જ્યારે રોજગાર વિશેની માહિતી એકત્રિત કરવામાં આવે છે, ત્યારે નોકરી કરતા લોકોની સંખ્યાને A વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને બેરોજગાર લોકોની સંખ્યાને α વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

એ જ રીતે, પરિણિત લોકોને A વડે તો અપરિણિત લોકોને α વડે દર્શાવી શકાય.

આમ, ગુણાત્મક માહિતી બે વર્ગ / સમૂહ (Group) માં વહેંચી શકાય. પહેલો સમૂહ ખાસ ગુણની હાજરી દર્શાવે છે, જ્યારે બીજો સમૂહ ખાસ ગુણની ગેરહાજરી દર્શાવે છે.

ગુણાત્મક સંબંધમાં ઉપયોગમાં લેવાતા પરિભાષિક શબ્દો.

(1) **સમષ્ટિ :** કોઈપણ માહિતીના અભ્યાસ માટેના કુલ અભ્યાસ જૂથને સમષ્ટિ કહેવામાં આવે છે.

(2) **લાક્ષણિકતા/ગુણધર્મનું સંયોજન :** બે ગુણધર્મના સંયોજનને AB, Aβ, αB, $\alpha\beta$ વડે દર્શાવાય છે. દાખલા તરીકે A એ પરિણિત અને B એ સફળતાનો ગુણધર્મ દર્શાવે છે. તો AB એ પરિણિત અને સફળ થયેલા લોકોનો ગુણધર્મ દર્શાવશે. અહીં AB ને ઉપવર્ગ કહેવાય છે.

(3) **આવૃત્તિ :** આપેલી માહિતીને જુદા-જુદા વર્ગોમાં વર્ગીકૃત કરવામાં આવે છે. અહીં દરેક વર્ગમાં આવેલ એકમોની સંખ્યાને તે વર્ગની આવૃત્તિ કહેવામાં આવે છે. A વર્ગની આવૃત્તિને (A) વડે, α વર્ગની આવૃત્તિને (α) વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આજ રીતે સંયોજીત (સંયુક્ત) ગુણધર્મ ધરાવતા ઉપવર્ગોની આવૃત્તિ AB ને (AB) વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જ્યારે કુલ આવૃત્તિને N વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

જ્યારે n ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. ત્યારે તેમાં મળતાં ઉપવર્ગોની સંખ્યા 2^n થશે. એટલે કે જો 2 ગુણધર્મો A અને B નો અભ્યાસ કરવામાં આવે તો ઉપવર્ગોની સંખ્યા $2^2 = 4$ થશે. એટલે કે (AB), (Aβ), (αB), ($\alpha\beta$).

જો 3 ગુણધર્મો A, B અને C નો અભ્યાસ કરવામાં આવે તો ઉપવર્ગોની સંખ્યા $2^3 = 8$ થશે. એટલે કે (ABC), (ABγ), (AβC), (Aβγ), (αBC), (αBγ), (αβC) (αβγ).

- ખૂટતા ઉપવર્ગની આવૃત્તિ મેળવવી :

બે ગુણધર્મોનો અભ્યાસ વખતે અમુક ઉપવર્ગની આવૃત્તિ આપેલ હોય છે. ત્યારે બાકીના ઉપવર્ગની ખૂટતી આવૃત્તિ કંટીજેન્સી ટેબલનો ઉપયોગ કરીને મેળવી શકાય.

કન્ટિજેન્સી ટેબલ

	A	α	કુલ
B	(AB)	(αB)	(B)
β	(Aβ)	(αβ)	(β)
કુલ	(A)	(α)	N

ઉપરના ટેબલ પરથી નીચે મુજબનો સંબંધ કહી શકાય

(AB) + (Aβ) = (A)　　(AB) + (αB) = (B)

(αB) + (αβ) = (α)　　(Aβ) + (αβ) = (β)

(A) + (α) = N　　(B) + (β) = N

ઉદા.-1 નીચેની માહિતી પરથી ખૂટતી આવૃત્તિ શોધો.

(i) (AB) = 150, (A) = 400, (B) = 500, N = 900

(ii) N = 1000, (A) = 450, (B) = 300, (AB) = 200

જવાબ : (i) આપેલ માહિતીને 2 × 2 કન્ટિજેન્સી ટેબલમાં મૂકતાં.

કંટીજેન્સી ટેબલ

	A	α	કુલ
B	150 (AB)	(αB)	500 (B)
β	(Aβ)	(αβ)	(β)
કુલ	400 (A)	(α)	N = 900

ઉપરના ટેબલમાં ખૂટતી આવૃત્તિ નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

(i) (A) + (α) = N
400 + (α) = 900
(α) = 900 – 400
(α) = 500

(ii) (B) + (β) = N
500 + (β) = 900
(β) = 900 – 500
(β) = 400

(iii) (AB) + (Aβ) = (A)
150 + (Aβ) = 400
(Aβ) = 400 – 150
(Aβ) = 250

(iv) (AB) + (αB) = (B)
150 + (αB) = 500
(αB) = 500 – 150
(αB) = 350

(v) $(A\beta) + (\alpha\beta) = (\beta)$

$250 + (\alpha\beta) = 400$

$(\alpha\beta) = 400 - 250$

$(\alpha\beta) = 150$

ઉપરોક્ત કિંમતો કન્ટિજેન્સી ટેબલમાં મૂકતાં,

	A	α	કુલ
B	150 (AB)	350 (αB)	500 (B)
β	250 (Aβ)	150 (αβ)	400 (β)
	400	500	
કુલ	(A)	(α)	N = 900

(ii) આપેલ માહિતી N = 1000, (A) = 450, (B) = 300, (AB) = 200 ની ઉપર મુજબ ગણતરી કરતાં, નીચે મુજબનું કોષ્ટક મળે છે.

	A	α	કુલ
B	200 (AB)	100 (αB)	300 (B)
β	250 (Aβ)	450 (αβ)	700 (β)
	450	550	
કુલ	(A)	(α)	N = 1000

8.4 ગુણાત્મક માહિતીની સંગતતા

જ્યારે બધી ઉપવર્ગ આવૃત્તિ એક સમષ્ટિમાંથી લેવામાં/ગણવામાં આવેલ હોય અને તેની ગણતરી અથવા દર્શાવવામાં જો કોઈ ભૂલ ન હોય તો તે આવૃત્તિમાં અથવા માહિતીમાં સંગતતા છે તેમ કહેવાય. વ્યવહારુ રીતે કહીએ તો બધી જ આવૃત્તિની કિંમત હંમેશા ધન (Positive) જ હોય છે. પણ ઘણી વખત ગણતરીમાં ભૂલને લીધે આવૃત્તિની કિંમત ઋણ (Negative) આવે છે. તો તે આવૃત્તિ અથવા માહિતીમાં અસંગતતા છે, તેમ કહેવાય.

ગુણાત્મક માહિતીની સંગતતા ચકાસતી વખતે દરેક ઉપવર્ગ આવૃત્તિની ગણતરી કરવામાં આવે છે. જો બધી જ આવૃત્તિની કિંમત ધન આવે તો માહિતી સંગતતા ધરાવે છે નહિંતર માહિતીમાં અસંગતતા છે તેમ કહેવાય.

બે ગુણધર્મો (A) અને (B) ની સંગતતાની ચકાસણી નીચે મુજબ કરી શકાય.

(i) $(A) > 0$, નહિંતર (A) ની કિંમત ઋણ થશે.

(ii) $(A) < N$, નહિંતર (α) ની કિંમત ઋણ થશે.

(iii) $(AB) < (A)$ એટલે કે (AB) ની કિંમત (A) કરતા વધારે ન હોવી જોઈએ.

(iv) $(AB) < (B)$ એટલે કે (AB) ની કિંમત (B) કરતાં વધારે ન હોવી જોઈએ.

(v) $(AB) > (A) + (B) - N$, નહિંતર ($\alpha\beta$) ની કિંમત ઋણ થશે.

ઉદા.-2 નીચે આપેલ માહિતીની સંગતતા તપાસો.

(i) N = 1000, (A) = 150, (B) = 300, (AB) = 200

(ii) N = 500, (A) = 200, (B) = 150, (AB) = 60

જવાબ : આપેલ માહિતીને 2 × 2 ટેબલમાં મૂકતાં.

	A	α	કુલ
B	200 (AB)	100 (αB)	300 (B)
β	–50 (Aβ)	750 (αβ)	700 (β)
કુલ	150 (A)	850 (α)	N = 1000

$(AB) + (A\beta) = (A)$ $\qquad$ $(A) + (\alpha) = N$

$200 + (A\beta) = 150$ $\qquad$ $150 + (\alpha) = 1000$

$(A\beta) = -50$ $\qquad$ $(\alpha) = 850$

આજ રીતે આપણને $(\beta) = 700$, $(\alpha B) = 100$, $(\alpha\beta) = 750$ મળશે.

અહીં એક ઉપવર્ગ આવૃત્તિ $(A\beta)$ ની કિંમત ઋણ આવે છે. તેથી આપેલ માહિતી અસંગત છે.

(ii) આપેલ માહિતી 2 × 2 ટેબલમાં મૂકતાં,

	A	α	કુલ
B	60 (AB)	90 (αB)	150 (B)
β	140 (Aβ)	210 (αβ)	350 (β)
કુલ	200 (A)	300 (α)	N = 500

$(AB) + (A\beta) = (A)$ $\qquad$ $(A) + (\alpha) = N$

$60 + (A\beta) = 200$ $\qquad$ $200 + (\alpha) = 500$

$(A\beta) = 140$ $\qquad$ $(\alpha) = 300$

આજ રીતે આપણને $(\alpha B) = 90$, $(\alpha\beta) = 210$, $(\beta) = 350$ મળશે.

અહીં દરેક ઉપવર્ગ આવૃત્તિની કિંમત ધન (Positive) છે. તેથી આપેલ માહિતી સંગત છે.

8.5 ગુણાત્મક સંબંધના પ્રકારો

સામાન્ય ભાષામાં જો A અને B બંને અમુક કિસ્સામાં સાથે આવે તો તે બે વચ્ચે સંબંધ (Association) છે તેમ કહી શકાય. પણ આંકડાશાસ્ત્રમાં સંબંધ (Association) નો અર્થ તકનીકી

રીતે અલગ થાય છે. આંકડાશાસ્ત્રમાં બે ગુણધર્મો વચ્ચેનો ગુણાત્મક સંબંધ ત્યારે જ કહેવાય કે જયારે તે બે ગુણધર્મો ધરાવતા એકમોની સંખ્યા તેમની અપેક્ષિત સંખ્યા કરતા વધુ હોય. જો બે ગુણધર્મો ધરાવતા એકમોની સંખ્યા તેમની અપેક્ષિત સંખ્યા કરતા ઓછી હોય તો બે ગુણધર્મો વચ્ચે વિરુદ્ધ દિશામાં સંબંધ છે. તેમ કહી શકાય. એ જ રીતે જો બે ગુણધર્મો ધરાવતા એકમોની સંખ્યા તેમની અપેક્ષિત સંખ્યા જેટલી જ હોય, તો બે ગુણધર્મો સ્વતંત્ર છે એમ કહી શકાય.

આમ ગુણાત્મક સંબંધ ત્રણ પ્રકારના હોય :

(i) ધન ગુણાત્મક સંબંધ : આપેલ માહિતીમાં જો બે ગુણધર્મો ધરાવતા એકમોની સંખ્યા તેમની અપેક્ષિત સંખ્યા કરતા વધારે હોય, તો તે બે ગુણધર્મો વચ્ચે ધન ગુણાત્મક સંબંધ એમ કહેવાય. બે ગુણધર્મો A અને B માટે જો $(AB)\ (\alpha\beta) > (A\beta)\ (\alpha B)$ થાય તો બંને ગુણધર્મ વચ્ચે ધન ગુણાત્મક સંબંધ છે એમ કહેવાય.

(ii) ઋણ ગુણાત્મક સંબંધ : આપેલ માહિતીમાં, જો બે ગુણધર્મો ધરાવતા એકમોની સંખ્યા તેમની અપેક્ષિત સંખ્યા કરતા ઓછી હોય, તો તે બે ગુણધર્મો વચ્ચે ઋણ ગુણાત્મક સંબંધ છે એમ કહેવાય. બે ગુણધર્મો A અને B માટે જો $(AB)\ (\alpha\beta) < (A\beta)\ (\alpha B)$ થાય તો બંને ગુણધર્મો વચ્ચે ઋણ ગુણાત્મક સંબંધ છે એમ કહેવાય.

(iii) ગુણાત્મક સંબંધનો અભાવ : આપેલી માહિતીમાં જો બે ગુણધર્મો ધરાવતા એકમોની સંખ્યા તેમની અપેક્ષિત સંખ્યા જેટલી જ હોય, ત્યારે બે ગુણધર્મો વચ્ચે ગુણાત્મક સંબંધનો અભાવ છે અથવા તો બંને ગુણધર્મો એકબીજાથી સ્વતંત્ર છે તેમ કહી શકાય. બે ગુણધર્મો A અને B માટે જો $(AB)\ (\alpha\beta) = (A\beta)\ (\alpha B)$ થાય તો બંને ગુણધર્મો એકબીજાથી સ્વતંત્ર છે તેમ કહી શકાય.

ઉદા.-3 નીચે આપેલ 2×2 ટેબલ ઉપરથી બે ગુણધર્મો A અને B માટે ગુણાત્મક સંબંધનો પ્રકાર નક્કી કરો.

	A	α	કુલ
B	60 (AB)	90 (αB)	150 (B)
β	140 (Aβ)	210 ($\alpha\beta$)	350 (β)
કુલ	200 (A)	300 (α)	N = 500

જવાબ : અહીં

$(AB)\ (\alpha\beta) = (60)\ (210) = 12600$

$(AB)\ (\alpha\beta) = (90)\ (140) = 12600$

$\therefore (AB)\ (\alpha\beta) = (AB)\ (\alpha\beta)$

$\therefore$ A અને B ગુણધર્મો એક બીજાથી સ્વતંત્ર છે.

8.6 ગુણાત્મક સંબંધના અભ્યાસની પદ્ધતિઓ

બે ગુણધર્મો વચ્ચેના ગુણાત્મક સંબંધના અભ્યાસ કરવા માટેની પદ્ધતિઓ નીચે પ્રમાણે છે.

(i) પ્રમાણની રીત

(ii) અવલોકિત આવૃત્તિ અને અપેક્ષિત આવૃત્તિની સરખામણીની રીત

(iii) યુલની રીત

(iv) યુલનો કોલિગ્નેશન સંબંધાંક

ઉપરોક્ત ચાર પદ્ધતિનું વિસ્તૃત વર્ણન નીચે મુજબ છે :

8.6.1 પ્રમાણની રીત

આ રીતમાં એક ગુણધર્મ ધન શ્રેણીમાં અને બીજો ગુણધર્મ ઋણ શ્રેણીમાં જુદી જુદી ગણતરી કરવામાં આવે છે. જો A અને B વચ્ચે ગુણાત્મક સંબંધ શોધવો હોય તો A અને α નું B માં પ્રમાણ અને B અને β નું A માં પ્રમાણ શોધવામાં આવે છે.

બે ગુણધર્મો A અને B વચ્ચેના ગુણાત્મક સંબંધ નીચેની રીતે દર્શાવી શકાય.

(i) જો $\dfrac{(AB)}{(B)} > \dfrac{(A\beta)}{(\beta)}$ હોય તો A અને B વચ્ચે ધન ગુણાત્મક સંબંધ છે.

(ii) જો $\dfrac{(AB)}{(B)} < \dfrac{(A\beta)}{(\beta)}$ હોય તો A અને B વચ્ચે ઋણ ગુણાત્મક સંબંધ છે.

(iii) જો $\dfrac{(AB)}{(B)} = \dfrac{(A\beta)}{(\beta)}$ હોય તો A અને B ગુણધર્મો સ્વતંત્ર છે.

આ રીતની મર્યાદા એ છે કે, આ રીતથી બે ગુણધર્મો વચ્ચે ગુણાત્મક સંબંધ કેવા પ્રકારનો છે તે જાણી શકાય છે, પણ કેટલો છે તે ગણી શકાતો નથી.

ઉદા.-4 નીચે આપેલ માહિતી માટે પ્રમાણની રીતનો ઉપયોગ કરી A અને B વચ્ચેનો ગુણાત્મક સંબંધ શોધો.

N = 120, (A) = 24, (B) = 100, (AB) = 12

જવાબ : આપેલ માહિતીને 2 × 2 ટેબલમાં દર્શાવતા.

	A	α	કુલ
B	12 (AB)	88 (αB)	100 (B)
β	12 (Aβ)	8 ($\alpha\beta$)	20 (β)
કુલ	24 (A)	96 (α)	N = 120

$(A) + (\alpha) = N$ $\qquad$ $(AB) + (A\beta) = (A)$

$24 + (\alpha) = 120$ $\qquad$ $12 + (A\beta) = 24$

$(\alpha) = 96$ $\qquad$ $(A\beta) = 12$

આજ રીતે બાકીના ઉપવર્ગ આવૃત્તિ શોધી ઉપરના ટેબલ મુકેલ છે.

હવે $\frac{(AB)}{(B)} = \frac{12}{100} = 0.12$ ... (i)

$\frac{(A\beta)}{(\beta)} = \frac{12}{20} = 0.60$ ...(ii)

પ્રમાણ (i) અને (ii) પરથી કહી શકાય કે,

$$\frac{(AB)}{(B)} < \frac{(A\beta)}{(\beta)}$$

$\therefore$ A અને B વચ્ચે ઋણ ગુણાત્મક સંબંધ છે.

ઉદા.-5 નીચે આપેલ માહિતી માટે પ્રમાણની રીતનો ઉપયોગ કરી A અને B વચ્ચેનો ગુણાત્મક સંબંધ શોધો.

N = 10000, (A) = 6000, (B) = 4500, (AB) = 3150

જવાબ : આપેલ માહિતી પરથી ખૂટતી આવૃત્તિ શોધીને 2×2 ટેબલમાં દર્શાવતા.

	A	α	કુલ
B	3150 (AB)	1350 (αB)	4500 (B)
β	2850 (Aβ)	2650 ($\alpha\beta$)	5500 (β)
કુલ	6000 (A)	4000 (α)	N = 10000

$\frac{(AB)}{(B)} = \frac{3150}{4500} = 0.7$ ...(i)

$\frac{(A\beta)}{(\beta)} = \frac{2850}{5500} = 0.518$ ...(ii)

પ્રમાણ (i) અને (ii) પરથી કહી શકાય કે,

$$\frac{(AB)}{(B)} > \frac{(AB)}{(\beta)}$$

$\therefore$ A અને B વચ્ચે ધન ગુણાત્મક સંબંધ છે.

8.6.2 અવલોકિત આવૃત્તિ અને અપેક્ષિત આવૃત્તિને સરખાવવાની રીત

આ રીત સંભાવના પર આધારિત છે. આ રીતમાં અવલોકિત આવૃત્તિને અપેક્ષિત આવૃત્તિ સાથે સરખાવી, ગુણાત્મક સંબંધના પ્રકાર જાણી શકાય છે.

બે ગુણધર્મો A અને B માટેની આપેલી માહિતીને (AB) વડે દર્શાવીએ છીએ, તેને અવલોકિત આવૃત્તિ કહેવાય છે. આ રીતમાં અવલોકિત અને અપેક્ષિત આવૃત્તિ ઉપરથી નીચે મુજબ ગુણાત્મક સંબંધના પ્રકાર જાણી શકાય છે.

(i) જો અવલોકિત આવૃત્તિ અને અપેક્ષિત આવૃત્તિ સરખી હોય તો બે ગુણધર્મો A અને B સ્વતંત્ર છે તેમ કહી શકાય.

એટલે કે $(AB) = \frac{(A)(B)}{N}$ થાય તો A અને B સ્વતંત્ર છે.

(અવલોકિત આવૃત્તિ) = (અપેક્ષિત આવૃત્તિ)

(ii) જો અવલોકિત આવૃત્તિની સંખ્યા અપેક્ષિત આવૃત્તિ કરતા વધારે હોય તો બે ગુણધર્મો A અને B વચ્ચે ધન ગુણાત્મક સંબંધ છે તેમ કહેવાય.

એટલે કે $(AB) > \frac{(A)(B)}{N}$

(અવલોકિત આવૃત્તિ) > (અપેક્ષિત આવૃત્તિ)

(iii) જો અવલોકિત આવૃત્તિની સંખ્યા અપેક્ષિત આવૃત્તિ કરતા ઓછી હોય તો બે ગુણધર્મો A અને B વચ્ચે ૠણ ગુણાત્મક સંબંધ છે તેમ કહેવાય.

એટલે કે $(AB) < \frac{(A)(B)}{N}$

(અવલોકિત આવૃત્તિ) < (અપેક્ષિત આવૃત્તિ)

સામાન્ય રીતે (AB) ની અપેક્ષિત આવૃત્તિ E(AB) વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને સંભાવના પર આધારિત તેનું સમીકરણ $E(AB) = \frac{(A)(B)}{N}$ છે. તે જ રીતે $(A\beta)$, (αB) અને (αB) ની અપેક્ષિત આવૃત્તિ નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

$$E(A\beta) = \frac{(A)(\beta)}{N}, \; E(\alpha B) = \frac{(\alpha)(B)}{N}, \; E = (\alpha\beta) = \frac{(\alpha)(\beta)}{N}$$

આ રીતની મર્યાદાએ છે કે, આ રીતથી બે ગુણધર્મો વચ્ચે ગુણાત્મક સંબંધ કેવા પ્રકારનો છે તે જાણી શકાય છે, પણ કેટલો છે તે ગણી શકાતો નથી.

ઉદા.-6 નીચે આપેલ માહિતી માટે ઉપર મુજબની રીતથી A અને B વચ્ચેનો ગુણાત્મક સંબંધ શોધો.

N = 10000, (A) = 6000, (B) = 4500, (AB) = 3150

જવાબ : આપેલ માહિતી પરથી ખૂટતી આવૃત્તિ શોધીને 2×2 ટેબલમાં દર્શાવતા.

	A	α	કુલ
B	3150 (AB)	1350 (αB)	4500 (B)
β	2850 (Aβ)	2650 (αβ)	5500 (β)
કુલ	6000 (A)	4000 (α)	N = 10000

ઉપરોક્ત ટેબલમાં (AB) ની અવલોકિત આવૃત્તિ 3150 છે.

(AB) ની અપેક્ષિત આવૃત્તિ $= \frac{(A)(B)}{N}$

$= \dfrac{(6000)\,(4500)}{10000}$

(AB) ની અપેક્ષિત આવૃત્તિ = 2700

તેથી (AB) ની અવલોકિત આવૃત્તિ > (AB) ની અપેક્ષિત આવૃત્તિ [(3150) > (2700)] થશે.

$\therefore$ A અને B વચ્ચે ધન ગુણાત્મક સંબંધ છે.

ઉદા.-7 નીચેની માહિતી ઉપરથી નીચેના ગુણધર્મો વચ્ચેનો ગુણાત્મક સંબંધનો પ્રકાર નક્કી કરો. (i) A અને B (ii) A અને β (iii) α અને β

N = 400, (A) = 150, (B) = 200, (AB) = 75

જવાબ : આપેલ માહિતી પરથી ખૂટતી માહિતી શોધી, તેને 2×2 ટેબલમાં દર્શાવતા.

	A	α	કુલ
B	75 (AB)	125 (αB)	200 (B)
β	75 (Aβ)	125 ($\alpha\beta$)	200 (β)
કુલ	150 (A)	250 (α)	N = 400

(i) ઉપરોક્ત ટેબલમાં (AB) ની અવલોકિત આવૃત્તિ = 75

(AB) ની અપેક્ષિત આવૃત્તિ $= \dfrac{(A)(B)}{N} = \dfrac{(150)\,(200)}{400} = 75$

(AB) ની અવલોકિત આવૃત્તિ = (Aβ) ની અપેક્ષિત આવૃત્તિ

$\therefore$ A અને B સ્વતંત્ર ગુણધર્મો છે.

(ii) (Aβ) ની અવલોકિત આવૃત્તિ = 75

(Aβ) ની અપેક્ષિત આવૃત્તિ $= \dfrac{(A)(\beta)}{N} = \dfrac{(150)\,(200)}{400} = 75$

$\therefore$ (Aβ) ની અવલોકિત આવૃત્તિ = (Aβ) ની અપેક્ષિત આવૃત્તિ

$\therefore$ A અને β સ્વતંત્ર ગુણધર્મો છે.

(iii) ($\alpha\beta$) ની અવલોકિત આવૃત્તિ = 125

($\alpha\beta$) ની અપેક્ષિત આવૃત્તિ $= \dfrac{(\alpha)(\beta)}{N} = \dfrac{(250)\,(200)}{400} = 125$

$\therefore$ ($\alpha\beta$) ની અવલોકિત આવૃત્તિ = ($\alpha\beta$) ની અપેક્ષિત આવૃત્તિ

$\therefore$ α અને β સ્વતંત્ર ગુણધર્મો છે.

8.6.3 યુલનો ગુણાત્મક સંબંધાંક

ગુણાત્મક સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે યુલનો સંબંધાંક પ્રખ્યાત રીત છે. ઉપરોક્ત બે રીત, જ્યારે બે ગુણધર્મો વચ્ચેનો સંબંધ કેવા પ્રકારનો છે, તે

જાણવું હોય ત્યારે ઉપયોગી થઈ શકે છે. પણ બે ગુણધર્મો વચ્ચે કેટલો સંબંધ છે તે માપી શકાતો નથી. યુલનો ગુણાત્મક સંબંધાંકનો ઉપયોગ બે ગુણધર્મો વચ્ચે કેટલી માત્રામાં સંબંધ છે તે જણાવે છે.

યુલનો ગુણાત્મક સંબંધાંક Q વડે દર્શાવાય છે અને તે નીચે મુજબના સૂત્રથી મેળવાય છે.

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)}$$

યુલના ગુણાત્માક સંબંધાંકનું અર્થઘટન નીચે મુજબ કરી શકાય છે.

(i) Q ની કિંમત હંમેશા -1 થી 1 વચ્ચે હોય છે. i.e. $-1 \leq Q \leq 1$

(ii) જો $Q = -1$ હોય તો, A અને B વચ્ચે સંપૂર્ણ ઋણ ગુણાત્મક સંબંધ છે.

(iii) જો $Q = 1$ હોય તો, A અને B વચ્ચે સંપૂર્ણ ધન ગુણાત્મક સંબંધ છે.

(iv) જો $Q = 0$ હોય તો, A અને B બંને સ્વતંત્ર ગુણધર્મો છે.

8.6.4 યુલનો કોલિગ્નેશન સંબંધાંક

યુલે બે ગુણધર્મોનો સંબંધ શોધવા માટે "કોલિગ્નેશનનો સંબંધાંક" મેળવેલ હતો. આ સંબંધાંક 'γ' (Gamma) ચિહ્ન થી દર્શાવાય છે અને નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને મેળવાય છે.

$$\gamma = \frac{1 - \sqrt{\frac{(A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta)}}}{1 + \sqrt{\frac{(A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta)}}}$$

ઉપરોક્ત સૂત્ર ઉપરથી, Q અને γ નો સંબંધ નીચે મુજબ છે.

$$Q = \frac{2\gamma}{1+\gamma^2} \text{ અથવા } Q = 2\gamma \text{ અથવા } \gamma = \frac{1}{2}Q.$$

ઉદા.-8 નીચેની માહિતી ઉપરથી યુલનો સંબંધાંક શોધો.

N = 1200, (A) = 500, (B) = 600, (AB) = 400

જવાબ : આપેલી માહિતી પરથી ખૂટતી માહિતી શોધી, તેને 2×2 ટેબલમાં દર્શાવતા.

	A	α	કુલ
B	400 (AB)	200 (αB)	600 (B)
β	100 (Aβ)	500 ($\alpha\beta$)	600 (β)
કુલ	500 (A)	700 (α)	N = 1200

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)}$$

$$Q = \frac{(400)(500)-(200)(100)}{(400)(500)+(200)(100)}$$

$$Q = \frac{1,80,000}{2,20,000} = 0.82$$

ઉદા.-9 નીચેની માહિતી ઉપરથી યુલનો ગુણાત્મક સંબધ તથા યુલનો કોલિગ્નેશન સંબંધાંક શોધો.

N = 100, (AB) = 15, (A) = 52, (B) = 45

જવાબ : આપેલી માહિતી પરથી ખૂટતી માહિતી શોધી, તેને 2×2 ટેબલમાં દર્શાવતા.

	A	α	કુલ
B	15 (AB)	30 (αB)	45 (B)
β	37 (Aβ)	18 (αβ)	55 (β)
કુલ	52 (A)	48 (α)	N = 100

(i) યુલનો ગુણાત્મક સંબંધાંક

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta)-(A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta)+(A\beta)(\alpha B)}$$

$$Q = \frac{(15)(18)-(30)(37)}{(15)(18)+(30)(37)}$$

$$Q = \frac{270-1110}{270+1110} = \frac{-840}{1380} = -0.6086$$

(ii) યુલનો કોલિગ્નેશન સંબંધાંક

$$\gamma = \frac{1-\sqrt{\dfrac{(A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta)}}}{1+\sqrt{\dfrac{(A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta)}}}$$

$$\gamma = \frac{1-\sqrt{\dfrac{(30)(37)}{(15)(18)}}}{1+\sqrt{\dfrac{(30)(37)}{(15)(18)}}}$$

$$Q = \frac{1-\sqrt{4.11}}{1+\sqrt{4.11}} = \frac{1-2.027}{1+2.027} = \frac{-1.027}{3.027} = -0.339$$

ઉદા.-10 નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી યુલનો સંબંધાંક શોધો.

N = 120, (A) = 24, (B) = 100, (AB) = 52

જવાબ : આપેલ માહિતી પરથી ખૂટતી માહિતી શોધી, તેને 2 × 2 ટેબલમાં દર્શાવતા.

	A	α	કુલ
B	52 (AB)	48 (αB)	100 (B)
β	–28 (Aβ)	48 ($\alpha\beta$)	20 (β)
કુલ	24 (A)	96 (α)	N = 120

ઉપરોક્ત ટેબલમાં એક ઉપવર્ગ (Aβ) ની આવૃત્તિ (–28) ઋણ છે. તેથી આપેલ માહિતી અસંગત છે. આથી A અને B ગુણધર્મો વચ્ચે યુલનો સંબંધાંક મળશે નહીં.

ઉદા.-11 જો Q = 0.24 હોય તો γ ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $\gamma = \frac{1}{2} Q$

$$\therefore \gamma = \frac{1}{2}(0.24)$$

$$\therefore \gamma = 0.12$$

8.6.5 વ્યવહારિક પ્રશ્નો

ઉદા.-12 એક શિક્ષકે 280 વિદ્યાર્થીની ગણિત અને વિજ્ઞાનની પરિક્ષા યોજેલ હતી. જેમાં 160 વિદ્યાર્થી ગણિતમાં નાપાસ થયેલ, 140 વિદ્યાર્થી વિજ્ઞાનમાં નાપાસ થયેલ અને 80 વિદ્યાર્થી બંને વિષયમાં નાપાસ થયેલ હતા. આ માહિતી પરથી ગણિત અને વિજ્ઞાનમાં નાપાસ થયેલ વિદ્યાર્થીનો ગુણાત્મક સંબંધ શોધો.

જવાબ : આપેલ માહિતી પરથી સૌપ્રથમ આપણે A અને B ગુણધર્મો દર્શાવીશું. ધારો કે ગણિતમાં નાપાસ થયેલ વિદ્યાર્થીને A વડે અને વિજ્ઞાનમાં નાપાસ થયેલ વિદ્યાર્થીને B વડે દર્શાવતા.

ગણિતમાં નાપાસ થયેલ વિદ્યાર્થી = 160 = (A)

વિજ્ઞાનમાં નાપાસ થયેલ વિદ્યાર્થી = 140 = (B)

$\therefore$ ગણિત અને વિજ્ઞાનમાં નાપાસ થયેલ વિદ્યાર્થી = 80 = (AB)

કુલ વિદ્યાર્થી = 280 = N

ઉપરોક્ત માહિતી 2 × 2 ટેબલમાં મૂકતાં,

		ગણિતમાં નાપાસ A	ગણિતમાં પાસ α	કુલ
વિજ્ઞાનમાં નાપાસ	B	80 (AB)	60 (αB)	140 (B)
વિજ્ઞાનમાં પાસ	β	80 (Aβ)	60 (αβ)	140 (β)
	કુલ	160 (A)	120 (α)	N = 280

યુલનો ગુણાત્મક સંબંધાંક = Q

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)}$$

$$= \frac{(80)(60) - (80)(60)}{(80)(60) + (80)(60)}$$

Q = 0

અહીં Q = 0 થાય છે તેથી ગણિત અને વિજ્ઞાનમાં નાપાસ થવાના ગુણધર્મો સ્વતંત્ર છે.

ઉદા.-13 નીચે આપેલ માહિતી પરથી પિતાની આંખનો રંગ અને પુત્રની આંખના રંગ વચ્ચે ગુણાત્મક સંબંધ શોધો.

પિતાની આંખનો રંગ કાળો અને પુત્રની આંખનો રંગ કાળો = 50

પિતાની આંખનો રંગ કાળો અને પુત્રની આંખનો રંગ કાળો ન હોય = 79

પિતાની આંખનો રંગ કાળો ન હોય અને પુત્રની આંખનો રંગ કાળો = 89

પિતાની આંખનો રંગ કાળો ન હોય અને પુત્રની આંખનો રંગ કાળો ન હોય = 782

જવાબ : આપેલ માહિતી પરથી સૌપ્રથમ આપણે A અને B ગુણધર્મો દર્શાવીશું.

ધારો કે પિતાની આંખનો રંગ કાળો હોય તેને A વડે અને પુત્રની આંખનો રંગ કાળો હોય તેને B વડે દર્શાવીએ.

તો 'α' પિતાની આંખનો રંગ કાળો ન હોય અને 'β' એ પુત્રની આંખનો રંગ કાળો ન હોય તે દર્શાવશે.

તેથી આપેલ માહિતીને નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

(AB) = 50, (αB) = 89, (Aβ) = 79, (αβ) = 782

યુલનો ગુણાત્મક સંબંધાંક = Q

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)}$$

$$= \frac{(50)(782) - (89)(79)}{(50)(782) + (89)(79)}$$

$$= \frac{39100 - 7031}{39100 + 7031} = \frac{32069}{46131} = 0.6951$$

Q = 0.6951 ઉપરથી એમ કહી શકાય કે પિતાની આંખનો રંગ અને પુત્રની આંખના રંગ વચ્ચે વધુ નિકટનો ધન ગુણાત્મક સંબંધ છે.

ઉદા.-14 એક સ્પર્ધાત્મક પરિક્ષામાં 2000 ઉમેદવારોએ ભાગ લીધેલ હતો અને તેમાંથી 600 સફળ થયા, 350 ઉમેદવારોએ કોચીંગ ક્લાસ કરેલ હતા જેમાંથી 230 સફળ થયેલ હતા. યુલની રીતનો ઉપયોગ કરીને કોચીંગ ક્લાસનું મહત્ત્વ શોધો.

જવાબ : આપેલ માહિતીમાં સફળતાને ગુણધર્મ A વડે અને નિષ્ફળતાને α વડે. તેજ રીતે કોચીંગ ક્લાસમાં લીધેલ શિક્ષણને B વડે અને કોચીંગ ક્લાસમાં શિક્ષણ ન લીધેલ ને β વડે દર્શાવીશું.

તેથી આપેલ માહિતીને નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

કુલ ઉમેદવાર = N = 2000

સફળ ઉમેદવાર = (A) = 600

કોચીંગ ક્લાસ કરેલ ઉમેદવાર = (B) = 350

કોચીંગ ક્લાસ કરી અને પાસ થયેલ ઉમેદવાર = (AB) = 230

ઉપરોક્ત માહિતીને 2 × 2 ટેબલમાં મૂકતાં,

		સફળતા A	નિષ્ફળતા α	કુલ
કોચીંગ કરેલ	B	230 (AB)	120 (αB)	350 (B)
કોચીંગ વગર	β	370 (Aβ)	1280 ($\alpha\beta$)	1650 (β)
	કુલ	600 (A)	1400 (α)	N = 2000

A અને B વચ્ચેનો યુલનો ગુણાત્મક સંબંધાંક = Q

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)}$$

$$= \frac{(230)(1280) - (370)(120)}{(230)(1280) + (370)(120)}$$

$$= \frac{294400 - 44400}{294400 + 44400} = 0.7378$$

Q = 0.7378 ઉપરથી એમ કહી શકાય કે સફળતા અને કોચિંગ વચ્ચે વધુ નિકટનો ધન ગુણાત્મક સંબંધ છે.

ઉદા.-15 ગુજરાતના એક જિલ્લામાં 70,000 (illiterate) અશિક્ષિતમાંથી 500 અપરાધી હતા. જ્યારે આ જિલ્લામાં 9,30,000 શિક્ષિતમાંથી 15,000 અપરાધી હતા. આ માહિતીના આધારે અશિક્ષિતતા અને અપરાધ વચ્ચે કોઈ સંબંધ છે તે તપાસો.

જવાબ : આપેલ માહિતીમાં, અશિક્ષિતને ગુણધર્મ A વડે અને શિક્ષિતને ગુણધર્મ α વડે તથા અપરાધને B વડે અને નિર્દોષને β વડે દર્શાવીશું.

તેથી આપેલ માહિતીને નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

અશિક્ષિત વ્યક્તિ = (A) = 70,000

અશિક્ષિત અને અપરાધી = (AB) = 500

શિક્ષિત વ્યક્તિ = (α) = 9,30,000

શિક્ષિત અને અપરાધી = (αB) = 15000

ઉપરોક્ત માહિતીને 2×2 ટેબલમાં મૂકતાં,

		અશિક્ષિત A	શિક્ષિત α	કુલ
અપરાધી	B	500 (AB)	15000 (αB)	15500 (B)
નિર્દોષ	β	69500 (Aβ)	9,15,000 ($\alpha\beta$)	9,84,500 (β)
	કુલ	70,000 (A)	9,30,000 (α)	N = 10,00,000

યુલનો ગુણાત્મક સંબંધાંક = Q

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)}$$

$$= \frac{(500)(9,15,000) - (69,500)(15,000)}{(500)(9,15,000) + (69,500)(15,000)}$$

$Q = -0.39$

આ ઉપરથી કહી શકાય કે અશિક્ષિત અને અપરાધી વચ્ચે ઋણ ગુણાત્મક સંબંધ છે.

ઉદા.-16 900 વ્યક્તિઓમાંથી 300 વ્યક્તિઓ શિક્ષિત છે અને 400 વ્યક્તિઓ સતત પ્રવાસ કરે છે. આપેલ પ્રવાસીઓમાંથી 200 વ્યક્તિઓ શિક્ષિત છે. આ માહિતી ઉપરતી પ્રવાસ અને શિક્ષણ વચ્ચે સંબંધ છે ?

જવાબ : આપેલ માહિતીમાં, શિક્ષિતને ગુણધર્મ A વડે અને અશિક્ષિતને α વડે તથા પ્રવાસી ગુણધર્મ B વડે અને અપ્રવાસીને β વડે દર્શાવીશું.

કુલ વ્યક્તિઓ = N = 900

શિક્ષિત વ્યક્તિઓ = (A) = 300

પ્રવાસી વ્યક્તિઓ = (B) = 400

શિક્ષિત અને પ્રવાસી વ્યક્તિઓ = (AB) = 200

ઉપરોક્ત માહિતીને 2 × 2 ટેબલમાં મૂકતાં,

		શિક્ષિત	અશિક્ષિત	
		A	α	કુલ
પ્રવાસી	B	200 (AB)	200 (αB)	400 (B)
અપ્રવાસી	β	100 (Aβ)	400 ($\alpha\beta$)	500 (β)
	કુલ	300 (A)	600 (α)	N = 900

યુલનો ગુણાત્મક સંબંધાંક = Q

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)}$$

$$= \frac{(200)(400) - (200)(100)}{(200)(400) + (200)(100)}$$

$$= \frac{60{,}000}{10{,}000} = 0.6$$

Q = 0.6 ઉપરથી કહી શકાય કે શિક્ષણ અને પ્રવાસ વચ્ચે નિકટનો ધન ગુણાત્મક સંબંધ છે.

8.7 સ્વાધ્યાય

- **સૈદ્ધાંતિક પ્રશ્નો :**

(1) ગુણાત્મક સંબંધ એટલે શું ? ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

(2) ગુણાત્મક સંબંધનો અર્થ શું ? તે સહસંબંધથી કઈ રીતે જુદો પડે છે ?

(3) ગુણધર્મોના સંબંધનો અર્થ અને તેના પ્રકારો જણાવો.

(4) યુલના ગુણાત્મક સંબંધાંક વિશે સમજાવો.

(5) ગુણાત્મક સંબંધની પ્રમાણની રીત અને યુલની રીત સમજાવો.

- **ટૂંકનોંધ લખો :**

(1) પ્રમાણની રીત

(2) યુલના ગુણાત્મક સંબંધની રીત

- **નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો :**

(1) ગુણાત્મક સંબંધની વ્યાખ્યા આપો.

(2) ગુણાત્મક સંબંધના પ્રકાર જણાવો.

(3) ગુણાત્મક સંબંધ શોધવાની રીતના નામ લખો.

(4) જો N = 1600, (A) = 300, (B) = 1240, (AB) = 140 હોય તો $(\alpha\beta)$ ની કિંમત શોધો. (જવાબ : $(\alpha\beta) = 200$)

(5) જો N = 400, (A) = 100, (B) = 240, $(\alpha\beta) = 100$ હોય તો (AB) ની કિંમત શોધો. (જવાબ : (AB) = 40)

- **બહુ વૈકિલ્પક પ્રશ્નો :**

1. ગુણધર્મ A હાજર હોય પરંતુ ગુણધર્મ B ગેરહાજર હોય તો તેને .... વડે દર્શાવાય છે.

   (a) AB (b) $A\beta$ (c) αB (d) $\alpha\beta$

2. જે માહિતીને આંકડાકીય રીતે માપી ન શકાય તેને .... કહેવાય.

   (a) યાદચ્છિક ચલ (b) અચળ (c) ગુણધર્મ (d) ચલ

3. જો દરેક ઉપવર્ગ આવૃત્તિની કિંમત ધન હોય, તો આ માહિતી .... છે, તેમ કહેવાય.

   (a) શ્રેષ્ઠ (b) સુસંગત (c) સંગત (d) અસંગત

4. જો .... હોય તો, ગુણધર્મો A અને B સ્વતંત્ર છે તેમ કહેવાય.

   (a) $(AB)(\alpha\beta) = (A\beta)(\alpha B)$ (b) $(AB) = (\alpha\beta)$

   (c) $(AB)(\alpha\beta) = (A\beta)$ (d) $(AB)(\alpha\beta) > (A\beta)(\alpha B)$

5. જો $\frac{(AB)}{(B)} > \frac{(A\beta)}{(\beta)}$ હોય તો, ગુણધર્મો A અને B વચ્ચે .... છે.

   (a) ગુણાત્મક સંબંધ (b) ધન ગુણાત્મક સંબંધ

   (c) ઋણ ગુણાત્મક સંબંધ (d) સ્વતંત્ર

6. બે ગુણધર્મો વચ્ચેના ગુણાત્મક સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે .... ની રીત ઉપયોગી છે.

   (a) કાર્લ પીયર્શન (b) ફિશર (c) યુલ (d) પ્રમાણિત

7. જો $Q = -1$ હોય તો બે ગુણધર્મો વચ્ચે .... પ્રકારનો ગુણાત્મક સંબંધ છે.

   (a) ધન (b) સંપૂર્ણ ધન (c) સંપૂર્ણ ઋણ (d) સ્વતંત્ર

8. Q ની કિંમત હંમેશાં .... હોય છે.

   (a) $-1 < Q < 1$ (b) $-1 \le Q \le 1$ (c) $0 < Q < 1$ (d) $-1 < Q < 0$

9. જો (AB) = 200, (Aβ) = 400, (αB) = 100, (αβ) = 300 હોય તો Q = ...

(a) 0.2 (b) 2.0 (c) −2.0 (d) −0.2

10. જો (AB) = 40, (Aβ) = 60, (αB) = 200, (αβ) = 100 હોય તો Q = ...

(a) 0.5 (b) −0.5 (c) 0.25 (d) = 0

જવાબ :

(1) - b	(2) - c	(3) - b	(4) - a	(5) - c
(6) - c	(7) - c	(8) - b	(9) - a	(10) - b

- **હેતુલક્ષી પ્રશ્નો :**

(1) નીચે આપેલ માહિતીની સંગતતા તપાસો.

(i) N = 400, (AB) = 120, (A) = 300, (B) = 100

(ii) N = 12000, (AB) = 400, (A) = 600, (B) = 500

(iii) N = 1000, (AB) = 200, (A) = 150, (B) = 300

(iv) N = 500, (AB) = 225, (A) = 300, (B) = 350

જવાબ : (i) (αβ) = –ve, અસંગત (ii) સુસંગત (iii) (AB) = –ve અસંગત (iv) સુસંગત

(2) નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી ગુણધર્મો A અને B માટે પ્રમાણની રીતથી ગુણાત્મક સંબંધ શોધો.

(i) N = 100, (A) = 40, (B) = (70), (AB) = 30

(ii) N = 200, (A) = 80, (B) = (80), (AB) = 20

જવાબ : (i) ધન સંબંધ (ii) ઋણ સંબંધ

(3) નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી ગુણધર્મો A અને B માટે અવલોકિત અને અપેક્ષિત આવૃત્તિની સરખામણીની રીતથી ગુણાત્મક સંબંધ શોધો.

(i) N = 200, (A) = 50, (B) = 80, (AB) = 30

(ii) N = 2000, (A) = 280, (B) = 260, (AB) = 100

જવાબ : (i) ધન સંબંધ (ii) ધન સંબંધ

(4) નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી ગુણધર્મો A અને B માટે યુલની રીતથી ગુણાત્મક સંબંધ શોધો.

(i) N = 2000, (A) = 600, (B) = 800, (αβ) = 1100

(ii) N = 1200, (A) = 500, (B) = 800, (αβ) = 300

જવાબ : (i) Q = 0.9 (ii) Q 0.5

- **વ્યાવહારિક પ્રશ્નો :**

(1) 1200 વ્યક્તિઓનો ચા અને કોફી પીવાની ટેવ અંગેનો સર્વે કરતા નીચે મુજબની માહિતી મળે છે. ચા અને કોફી પીવાની ટેવ અંગે યુલનો ગુણાત્મક સંબંધાંક શોધો.

	ચા પીનારા	ચા નહીં પીનારા
કોફી પીનારા	400	200
કોફી નહી પીનારા	100	500

જવાબ : Q = 0.818

(2) એક સર્વે અનુસાર નીચેના પરિણામ મેળવેલ હતા.

	છોકરાઓ	છોકરીઓ	(Hint)
પરીક્ષામાં બેઠેલા લોકો	1000	135	N
પરિણીત લોકો	600	80	A
પરિણીત અને સફળ લોકો	241	50	AB
અપરિણીત અને સફળ લોકો	342	25	αB

આપેલ માહિતી પરથી પરિણીત અને સફળ થયેલ વ્યક્તિ વચ્ચેનો ગુણાત્મક સંબંધ શોધો.

જવાબ : Q = –0.7955, Q = 0.33

(3) એક સર્વે અનુસાર નીચેના પરિણામ મેળવેલ હતા.

	શહેર	ગામડા	(Hint)
કુલ વસ્તી	2000	534	N
શિક્ષિત લોકો	600	155	A
ગુન્હેગાર લોકો	350	359	B
શિક્ષિત ગુન્હેગાર લોકો	230	90	AB

આપેલ માહિતી પરથી શિક્ષિત અને ગુનેગાર વ્યક્તિ વચ્ચેનો ગુણાત્મક સંબંધ શોધો.

જવાબ : Q = 0.74, Q = –0.2769

(4) એક કંપનીમાં કુલ 1000 ઉમેદવારોએ ઈન્ટરવ્યુ આપેલ હતો, જેમાંથી 129 છોકરીઓ અને 871 છોકરાઓ હતા. ઈન્ટરવ્યુમાં આવેલાઓમાંથી 139 ઉમેદવારોને નોકરી માટે પસંદ કરવામાં આવેલ હતા. જેમાંથી 50 છોકરીઓ હતી. આ માહિતી પરથી છોકરીઓ અને નોકરીમાં પસંદગી વચ્ચેનો ગુણાત્મક સંબંધ શોધો.

[Hint : A = છોકરીઓ, B = મેળવેલ નોકરી, Q = 0.6951]

(5) નીચે આપેલ માહિતી પરથી યુલનો ગુણાત્મક સંબંધાંક શોધો.

(આંકડા 000')	શહેરી	ગ્રામીણ	(Hint)
કુલ વસ્તી	200	25	N
સ્નાતક	40	10	A
અનુસ્નાતક	12	5	α
સ્નાતક અને નોકરિયાત	4	3	AB

જવાબ : Q = 0.47, Q = 0.357

BAOU
Education for All

યુનિવર્સિટી ગીત

સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ
સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ
સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ

શિક્ષણ, સંસ્કૃતિ, સદ્‌ભાવ, દિવ્યબોધનું ધામ
ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી નામ;
સૌને સૌની પાંખ મળે, ને સૌને સૌનું આભ,
દશે દિશામાં સ્મિત વહે હો દશે દિશે શુભ-લાભ.

અભણ રહી અજ્ઞાનના શાને, અંધકારને પીવો ?
કહે બુદ્ધ આંબેડકર કહે, તું થા તારો દીવો;
શારદીય અજવાળા પહોંચ્યાં ગુર્જર ગામે ગામ
ધ્રુવ તારકની જેમ ઝળહળે એકલવ્યની શાન.

સરસ્વતીના મયૂર તમારે ફળિયે આવી ગહેકે
અંધકારને હડસેલીને ઉજાસના ફૂલ મહેંકે;
બંધન નહીં કો સ્થાન સમયના જવું ન ઘરથી દૂર
ઘર આવી મા હરે શારદા દૈન્ય તિમિરના પૂર.

સંસ્કારોની સુગંધ મહેંકે, મન મંદિરને ધામે
સુખની ટપાલ પહોંચે સૌને પોતાને સરનામે;
સમાજ કેરે દરિયે હાંકી શિક્ષણ કેરું વહાણ,
આવો કરીયે આપણ સૌ
ભવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ...
દિવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ...
ભવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ

DR. BABASAHEB AMBEDKAR OPEN UNIVERSITY
(Established by Government of Gujarat)
'Jyotirmay' Parisar,
Sarkhej-Gandhinagar Highway, Chharodi, Ahmedabad-382 481
Website : www.baou.edu.in

BAOU
Education for All

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી

(ગુજરાત સરકાર દ્વારા સ્થાપિત)

તૃતીય વર્ષ બી.કોમ.

BCSTAN306

આંકડાશાસ્ત્ર

બ્લોક-૩

સ્વાધ્યાયનું અજવાળું

ભારતના સંવિધાનના સર્જક, ભારતરત્ન ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકરની પાવન સ્મૃતિમાં ગરવી ગુજરાતમાં, ગુજરાત સરકારશ્રીએ ઈ.સ. 1994માં યુનિવર્સિટી ગ્રાન્ટ્સ કમિશન અને ડિસ્ટન્સ એજ્યુકેશન કાઉન્સિલની માન્યતા મેળવી અમદાવાદમાં ગુજરાતના એકમાત્ર મુક્ત વિશ્વવિદ્યાલય ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટીની સ્થાપના કરી છે.

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકરની 125મી જન્મજયંતીના અવસરે જ ગુજરાત સરકાર દ્વારા યુનિવર્સિટી માટે અદ્યતન સગવડતા સાથે, શાંત જગ્યા મેળવી, જ્યોતિર્મય પરિસરનું નિર્માણ કરી આપ્યું. BAOUના સત્તામંડળે પણ યુનિવર્સિટીના આગવા ભવિષ્ય માટે ખૂબ સહયોગ આપ્યો, આપતા રહે છે.

શિક્ષણ એટલે માનવમાં થતું મૂડીરોકાણ, શિક્ષણ લોકસમાજની ગુણવત્તા સુધારવામાં અધિક ફાળો આપી શકે છે. અહીં મને સ્વામી વિવેકાનંદનું શિક્ષણ વિષયક દર્શન યાદ આવે છે:

‘જેનાથી ચારિત્ર્યનું ઘડતર થાય, જેનાથી માનસિક ક્ષમતાનું નિર્માણ થાય, જેનાથી બૌદ્ધિક વિકાસ સાધી શકાય અને જેના થકી વ્યક્તિ પગભર બની શકે તેને શિક્ષણ કહેવાય’

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી શિક્ષણમાં આવા ઉમદા વિચારને વરેલી છે. તેથી વિદ્યાર્થીઓને ગુણવત્તાયુક્ત, વ્યવસાયલક્ષી, જીવનલક્ષી શિક્ષણની સગવડ ઘરે બેઠાં મળી રહે એવા પ્રયત્નો મક્કમ બની કરે છે. બહોળા સમાજના લોકોને ઉચ્ચશિક્ષણ પ્રાપ્ત થાય, છેવાડાના માણસોને ઉત્તમ કેળવણી એમનાં રોજિંદાં કામો કરતાં પ્રાપ્ત થતી રહે. વ્યાવસાયિક લોકોને આગળ ભણતરની ઉત્તમ તક સાંપડે અને જીવનમાં પોતાની ક્ષમતાઓ, કૌશલ્યોને પ્રગટ કરી સારી કારકિર્દી ઘડે, સ્વાવલંબી બની ઉત્તમ જીવન જીવતાં સમાજ અને રાષ્ટ્રનિર્માણમાં પોતાનું યોગદાન આપે, એ માટે પ્રયાસરત છે.

‘સ્વાધ્યાય: પરમં તપ:’ સૂત્રને ઓપન યુનિવર્સિટી કેન્દ્રમાં રાખીને અહીં પ્રવેશ કરતા છાત્રોને સ્વઅધ્યયન માટે સરળતાથી સમજાય એવો ગુણવત્તાલક્ષી શૈક્ષણિક અભ્યાસક્રમ ઉપલબ્ધ કરાવી આપે છે. દરેક વિષયની પાયાની સમજણ મળે તેની કાળજી રાખવામાં આવે છે. વિદ્યાર્થીઓને રસ પડે અને રુચિ કેળવાય તેવાં પાઠ્યપુસ્તકો નિષ્ણાત અધ્યાપકો દ્વારા તૈયાર કરવામાં આવે છે. દૂરવર્તી શિક્ષણ પ્રાપ્ત કરવા ખેવના રાખતા કોઈ પણ ઉંમરના છાત્રોને માટે અભ્યાસસામગ્રી તૈયાર કરવા માટે શિક્ષણવિદો સાથે પરામર્શ કરવામાં આવે છે. એ પછી જ માળખું રચી, અભ્યાસસામગ્રી તૈયાર કરી પુસ્તક સ્વરૂપે છાત્રોનાં કરકમળોમાં આપે છે. જેનો ઉપયોગ કરીને વિદ્યાર્થીઓ સંતોષપ્રદ અનુભવ કરી શકે છે.

યુનિવર્સિટીના તજજ્ઞ અધ્યાપકો ખૂબ કાળજીથી આ અભ્યાસસામગ્રીનું લેખન કરે છે. વિષયનિષ્ણાત પ્રોફેસરો દ્વારા એમનું પરામર્શન થયા પછી જ પરિણામલક્ષી અભ્યાસસામગ્રી યુનિવર્સિટીના વિદ્યાર્થીઓને પહોંચે છે. ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી જ્ઞાનનું કેન્દ્રબિંદુ બની રહી છે. વિદ્યાર્થીઓને ‘સ્વાધ્યાય ટેલિવિઝન’, ‘સ્વાધ્યાય રેડિયો’ જેવા દૂરવર્તી ઉપાદાનો થકી પણ એમના ઘરમાં શિક્ષણ પહોંચાડવાનો પુરુષાર્થ થઇ રહ્યો છે. ઉમદા હેતુ, શ્રેષ્ઠ ધ્યેયને આંબવા પરિશ્રમરત યુનિવર્સિટીના જ્ઞાનની પરબ સમા અધ્યાપકો તેમજ કર્મઠ કર્મચારીગણને અભિનંદન અને અમારી યુનિવર્સિટીના વિદ્યાર્થીઓ સફળ થવા ખૂબ મહેનત કરી, જીવન સફળ કરવાની સાથે જીવન સાર્થક કરે એવી પરમેશ્વરને પ્રાથના કરું છું.

પ્રો. (ડૉ.) અમીબહેન ઉપાધ્યાય

કુલપતિશ્રી,

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી,

જ્યોતિર્મય પરિસર,સરખેજ-ગાંધીનગર હાઈવે, છારોડી, અમદાવાદ

લેખન :	ડૉ. કલ્પેશ વાંકાણી	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, ક્રાઈસ્ટ કોલેજ, રાજકોટ.
	ડૉ. પરાગ શાહ	એસોસિયેટ પ્રોફેસર, એચ.એલ. કોલેજ ઓફ કોમર્સ, અમદાવાદ.
	ડૉ. કુંજલ શાહ	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, શ્રી સહજાનંદ વાણિજય મહાવિદ્યાલય, અમદાવાદ.
	ડૉ. લલીતા સોલંકી	એસોસિયેટ પ્રોફેસર, સમર્પણ આર્ટસ એન્ડ કોમર્સ કોલેજ, ગાંધીનગર.
પરામર્શક(વિષય) :	પ્રો. (ડૉ.) મનોજ શાહ	પ્રોફેસર & નિયામક, સ્કૂલ ઓફ કોમર્સ એન્ડ મેનેજમેન્ટ, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ.
	ડૉ. મૌલિક દેસાઈ	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, કે.એસ. સ્કૂલ ઓફ બિઝનેસ મેનેજમેન્ટ, અમદાવાદ.
	ડૉ. કલ્પેશ વાંકાણી	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, ક્રાઈસ્ટ કોલેજ, રાજકોટ.
પરામર્શક(ભાષા) :	ધનશ્યામ કે ગઢવી	નિવૃત આચાર્ય, સાર્વજનિક કોલેજ, મહેસાણા.
	ડૉ. અજય રાવલ	એસોસિયેટ પ્રોફેસર, ગુજરાતી વિભાગ, ઉમિયા આર્ટસ & કોમર્સ, અમદાવાદ.
સંપાદન :	પ્રો. (ડૉ.) મનોજ શાહ	પ્રોફેસર & નિયામક, સ્કૂલ ઓફ કોમર્સ એન્ડ મૅનેજમેન્ટ, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ.

પ્રકાશક :	ડૉ. ભાવિન ત્રિવેદી	કાર્યકારી કુલસચિવ, ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ.
આવૃત્તિ :	પ્રથમ આવૃત્તિ (નવો અભ્યાસક્રમ-2022)	
ISBN :	978-93-5598-213-1	

BAOU Education for all

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી

(ગુજરાત સરકાર દ્વારા સ્થાપિત)

તૃતીય વર્ષ, B.Com.

BCSTAN-306

આંકડાશાસ્ત્ર

આંકડાશાસ્ત્ર

PART - 3

એકમ 9

નિયત સંબંધ

9.1 પ્રસ્તાવના :

આપણે પ્રકરણ 2માં જોઈ ગયા કે એક ચલમાં ફેરફાર થાય એની સાથે બીજા ચલમાં પણ ફેરફાર થતો હોય તથા બંને ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ હોય તો તે બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય. આમ સહસંબંધાંક દ્વારા બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધ ધન છે કે ઋણ છે તે જાણી શકાય છે. પરંતુ એક ચલમાં થતા ફેરફારની અસર બીજા ચલ ઉપર કેટલી થાય છે તેનો ખ્યાલ સહસંબંધાંકથી મળી શકતો નથી. દા.ત. વ્યક્તિની ઊંચાઈમાં અમુક સે.મી.વધારો થતાં તેના વજનમાં કેટલો વધારો થશે ? તે જ રીતે એક ચલની આપેલી કિંમત માટે બીજા ચલની કેટલી અનુમાનિત કિંમત થશે ? આ માહિતી માત્ર સહસંબંધના અભ્યાસથી જાણી શકાતી નથી. પરંતુ તે જાણવા માટે નિયત સંબંધની રીતનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

9.2 નિયત સંબંધનો અર્થ અને વ્યાખ્યા :

નિયત સંબંધ (Regression) શબ્દનો સૌ પ્રથમ ઉપયોગ ફ્રાન્સિસ ગેલ્ટોને 19મી સદીના અંતમાં કર્યો હતો.

નિયત સંબંધનો શાબ્દિક અર્થ ''પ્રતિ ગમન'' અથવા ''સરેરાશ કિંમત તરફ પરત આવવું'' એવો થાય છે.

જો બે સંબંધિત ચલ વચ્ચે લગભગ સંપૂર્ણ સહસંબંધ હોય તો વિકીર્ણ આકૃતિ પરના બિંદુઓ સીધી રેખા કે વક્ર રેખાની આજુબાજુ નજીકમાં પડેલા હોય છે. આ સીધી રેખા કે વક્ર રેખા બે ચલ વચ્ચેના સંબંધનું લગભગ ગણિતીય સ્વરૂપ દર્શાવે છે. આમ નિયત સંબંધ એટલે ''બે ચલ વચ્ચેના સંબંધનું લગભગ ગણિતીય સ્વરૂપ.''

નિયત સંબંધના અભ્યાસથી એક ચલની કિંમતમાં થતા ફેરફારથી બીજા ચલની કિંમતમાં શું ફેરફાર થશે અથવા તેની કેટલી અસર થશે તે જાણી શકાય છે. તે માટે નિયત સંબંધ સમીકરણનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. નિયત સંબંધ સમીકરણો દ્વારા એક ચલની આપેલી કિંમત માટે તેને સંબંધિત બીજા ચલની કિંમતનું આગણન કરી શકાય છે.

હવે આપણે બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે એવી પૂર્વધારણા લઈ તે ચલો વચ્ચેના નિયત સંબંધનો અભ્યાસ કરીશું.

9.3 સુરેખ નિયત સંબંધ મોડેલ

બે ચલ વચ્ચે કાર્યકારણનો સંબંધ હોય તે સંબંધ દર્શાવતા ગણિતીય મોડેલને નિયત સંબંધ મોડેલ કહે છે.

સામાન્ય રીતે કાર્યકારણનો સંબંધ ધરાવતા ચલમાં ''કારણ'' સ્વરૂપ ચલને x વડે દર્શાવાય છે, જેને સ્વતંત્ર અથવા નિરપેક્ષ અથવા કારણભૂત ચલ કહેવાય છે. જ્યારે કાર્ય-સ્વરૂપ ચલને y વડે દર્શાવાય છે, જેને આધારિત અથવા સાપેક્ષ અથવા અસરયુક્ત ચલ કહેવાય છે.

દા.ત. કોઈ પણ વ્યક્તિની 'આવક' અને 'ખર્ચ' વચ્ચેના સંબંધમાં સામાન્ય રીતે 'આવક' વધે (કે ઘટે) તેને કારણે 'ખર્ચ' પણ 'વધે' (કે ઘટે) છે. તેથી આપણે 'આવક' ને સ્વતંત્ર ચલ x તરીકે અને 'ખર્ચ' ને આધારિત ચલ y વડે દર્શાવી શકાય.

નિયત સંબંધ મોડેલમાં આધારિત ચલ yને સ્વતંત્ર ચલ xના ગાણિતિક વિધેય દ્વારા રજૂ કરવામાં આવે છે.

આ સુરેખ નિયત સંબંધ નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

$$y = a + bx + e$$

જ્યાં y = આધારિત અથવા સાપેક્ષ ચલ

x = સ્વતંત્ર અથવા નિરપેક્ષ ચલ

a = અચળ કિંમત

b = અચળ કિંમત

e = મોડેલનો વિક્ષેપ ચલ

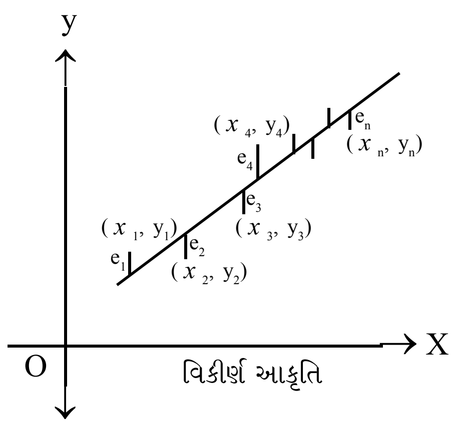
અહીં e એ બે ચલ x અને y વચ્ચે સુરેખ સંબંધની અપૂર્ણતા દર્શાવે છે. ગણિતમાં સંપૂર્ણ સુરેખ સંબંધ શક્ય છે. તેથી આ કિસ્સામાં $e = 0$ થશે. એટલે કે જો બે ચલ x અને y વચ્ચે સંપૂર્ણ સહસંબંધ હોય તો નિયત સંબંધ મોડેલ $y = a + bx$ થાય. પરંતુ વ્યવહારમાં બે ચલ વચ્ચે સામાન્ય રીતે સંપૂર્ણ સહસંબંધ જોવા મળતો નથી કારણ કે, સહસંબંધિત ચલો પર અન્ય પરિબળોની અસર પણ થતી હોય છે. તેથી જ્યારે બે ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ સહસંબંધ ન હોય ત્યારે નિયત સંબંધ મોડેલનું સ્વરૂપ $y = a + bx + e$ થશે.

આ મોડેલ પરથી નિયત સંબંધને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

વ્યાખ્યા : ''બે સહસંબંધિત ચલો વચ્ચેના ગાણિતિક સુરેખ સંબંધ કે જેના દ્વારા સ્વતંત્ર (નિરપેક્ષ) ચલની કોઈ આપેલી કિંમત માટે તેને અનુરૂપ આધારિત (સાપેક્ષ) ચલની કિંમતનું અનુમાન થઈ શકે તેને સુરેખ નિયત સંબંધ કહે છે.''

9.4 નિયત સંબંધ રેખાના અન્વાયોજન માટેની ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત :

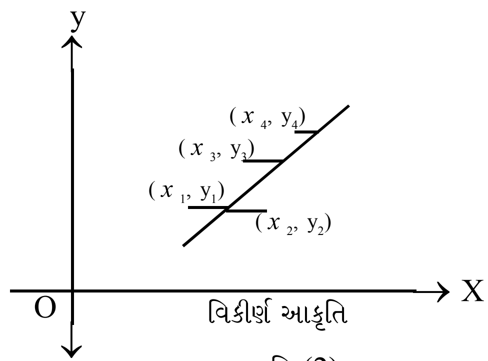
ધારો કે બે સહસંબંધિત ચલો x (સ્વતંત્ર) અને y (આધારિત) ચલના અવલોકનોની n ક્રમિત જોડ $(x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_n, y_n)$ મેળવેલ છે. આપેલ n અવલોકનોને વિકીર્ણ આકૃતિમાં દર્શાવો. જો બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધ હોય તો વિકીર્ણ આકૃતિ પરના બિંદુઓ કોઈ એક સુરેખની આજુબાજુ નજીકમાં પડેલા હોય છે. (આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ)



આકૃતિ (1)

હવે આ બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા એવી રીતે દોરીએ કે જેથી બિંદુઓ (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) અને તે રેખા વચ્ચેના લંબઅંતરોનો વર્ગનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો થાય. તો તે રેખાને શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજન રેખા (Line of best fit) કહેવામાં આવે છે.

આ રેખા બે ચલ વચ્ચેનો શ્રેષ્ઠ સુરેખ સંબંધ રજૂ કરે છે. આ રેખા દોરવાની રીત 'ન્યુનતમ વર્ગની રીત'થી ઓળખાય છે. શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજન રેખા બે રીતે દોરી શકાય છે. આકૃતિ-1 મુજબ જો બિંદુઓ અને અન્વાયોજન રેખા વચ્ચેના y ધરીને સમાંતર લંબ અંતરોનો વર્ગનો સરવાળો ન્યૂનતમ થાય તે રીતે અન્વાયોજન રેખા દોરીએ તો તેથી મળતી શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજન રેખાને yની x પરની નિયત સંબંધ રેખા કહેવામાં આવે છે. $(y = a + bx)$



આકૃતિ (2)

આકૃતિ - 2 મુજબ જો બિંદુઓ અને અન્વાયોજન રેખા વચ્ચેના x - ધરીને સમાંતર લંબ અંતરોનો વર્ગનો સરવાળો ન્યૂનતમ થાય તે રીતે અન્વાયોજન રેખા દોરીએ તો તેથી મળતી શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજન રેખાને xની y પરની નિયત સંબંધ રેખા કહેવામાં આવે છે. $(x = a + by)$

(1) yની x પરની નિયત સંબંધ રેખા સમીકરણ

ગાણિતિક સમજૂતી : જો x અને y વચ્ચેના સુરેખ નિયત સંબંધને દર્શાવતી અન્વાયોજન રેખાનું સમીકરણ $y = a + bx$ હોય તો આ રેખાના અચળાંક a અને b ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

ધારો કે ચલ $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ કિંમતોને અનુરૂપ ચલ yની રેખા પરથી મેળવેલ અવલોકિત કિંમતો $y_1, y_2, \dots. y_n$ છે અને ચલ y ની અનુમાનિત કિંમતો $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots \hat{y}_n$ છે. હવે xની કોઈ કિંમત $x = x_i$ને અનુરૂપ yની અનુમાનિત કિંમત $\hat{y}_i = a + bx_i$ થશે.

ચલ yની અવલોકિત કિંમત y_i અને અનુમાનિત કિંમત $\hat{y}_2$ વચ્ચેના ઊભા અંતરને અનુમાનની ત્રુટી (error) e_i કહે છે.

$$\therefore e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + bx_i) = y_i - a - bx_i$$

જ્યાં $i = 1, 2, 3, \dots\dots. n$

અહીં નિયત સંબંધ રેખા $y = a + bx$ માં રહેલા અચળાંકો a અને b ની કિંમતો એવી રીતે મેળવવામાં આવે છે કે જેથી ત્રુટી (e_i) ના વર્ગોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો થાય. એટલે કે $\sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum (y_i - a - bx_i)^2$ ન્યૂનતમ થાય.

સમીકરણ $\sum e_i^2 = \sum \left(y_i - a - bx_i\right)$ નું આંશિક વિકલન કરી નીચે મુજબના સમીકરણ મેળવી શકાય.

$\sum y = na + b\sum x$ ....(i)

$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$ ....(ii)

સમીકરણ (i) અને (ii) ઉકેલતા આપણને a અને bની કિંમત નીચે મુજબ મળશે.

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

તથા $a = \dfrac{\sum y}{n} - b\dfrac{\sum x}{n}$

$a = \overline{y} - b\overline{x}$

આ રીતથી મળતી b ની કિંમતને y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનો નિયત સંબંધાંક કહે છે અને તેને b_{yx} વડે દર્શાવાય છે. અચળાંક ‘a’ને નિયત સંબંધ રેખાનો અંતઃખંડ કહે છે.

આ રીતે મેળવેલી રેખા $\hat{y} = a + bx$, વિકીર્ણ આકૃતિના બધાં જ બિંદુઓની શક્ય તેટલી નજીકથી પસાર થતી રેખા છે. આ રેખાને yની x પરની નિયત સંબંધ રેખા કહેવામાં આવે છે.

અહીં નિયત સંબંધ રેખા મેળવતી વખતે ત્રુટીઓના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ કરવામાં આવે છે. તેથી આ રીતને ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત કહે છે.

(2) xની y પરના નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

જો yને સ્વતંત્ર ચલ અને xને આધારિત ચલ તરીકે લઈ (આકૃતિ-2 મુજબ) ન્યૂનતમ વર્ગોનો સિદ્ધાંત વાપરવામાં આવે તો xની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$\hat{x} = a + by$ થશે.

જ્યાં

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2}$$

અને $a = \overline{x} - b\overline{y}$ થશે.

આ રીતથી મળતી bની કિંમત ને xની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનો નિયત સંબંધાંક કહે છે અને તેને b_{xy} વડે દર્શાવાય છે. અચળાંક ‘a’ને નિયત સંબંધ રેખાનો અંતઃખંડ (intercept) કહે છે.

9.5 નિયત સંબંધ સમીકરણો, નિયત સંબંધાંક :

નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણોમાં બે અચળાંક a અને bની કિંમતો શોધવા માટે આપણે ન્યૂનતમ વર્ગની રીતનો અભ્યાસ કર્યો. આપણે બે નિયત સંબંધ સમીકરણોમાં અચળાંક a અને bની કિંમત નીચે મુજબના અલગ અલગ સૂત્ર પરથી પણ મેળવી શકાય.

(1) y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ :

y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ નીચે મુજબ છે.

$y = a + bx$

જ્યાં $b = b_{yx}$ = y નો x પરનો નિયત સંબંધાંક છે.

અહીં b_{yx}, xમાં એકમ ફેરફાર કરવાથી yમાં થતો ફેરફાર દર્શાવે છે.

હવે, $b_{yx} = r\frac{S_y}{S_x}$

જ્યાં r = ચલ x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક

S_x = ચલ xનું પ્રમાણિત વિચલન

S_y = ચલ yનું પ્રમાણિત વિચલન

→ જ્યારે x અને yના અવલોકનોની કિંમત નાની હોય ત્યારે $\sum x, \sum y, \sum xy, \sum x^2$ ની કિંમત મેળવી નીચેના સૂત્રમાં મૂકી b_{yx}ની કિંમત મેળવવી સરળ પડે છે.

$$b_{yx} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

→ જ્યારે x અને y ના અવલોકનોની કિંમત મોટી હોય અને $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ની પૂર્ણાંક કિંમત હોય ત્યારે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી b_{yx}ની કિંમત મેળવવી સરળ પડે છે.

$$b_{yx} = \frac{\sum\left(x-\overline{x}\right)\left(y-\overline{y}\right)}{\sum\left(x-\overline{x}\right)^2}$$

→ જ્યારે x અને y ના અવલોકનોની કિંમત મોટી હોય અને $\overline{x}$ અથવા $\overline{y}$ અપૂર્ણાંક કિંમત હોય ત્યારે ધારેલા મધ્યકમાંથી વિચલનો લઈને નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી b_{yx}ની કિંમત મેળવવી સરળ પડે છે.

$$b_{yx} = \frac{n\sum d_x d_y - \sum d_x \sum d_y}{n\sum d_x^2 - \left(\sum d_x\right)^2}$$

→ જો માહિતી દ્વિચલ કોષ્ટકમાં આપવામાં આવી હોય તો b_{yx}ની કિંમત નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ મેળવી શકાય.

$$b_{yx} = \frac{n\sum fd_x d_y - \sum f_x d_x \sum f_y d_y}{n\sum f_x d_x^2 - \left(\sum f_x d_x\right)^2}\left(\frac{C_y}{C_x}\right)$$

જ્યાં $d_x = \frac{x-A}{C_x}, d_y = \frac{y-B}{C_y}$

અચળાંક 'a' ની કિંમત $a = \overline{y} - b\overline{x}$ વડે મેળવી શકાય.

(2) x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ :

x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ નીચે મુજબ છે.

x = a + by

જ્યાં $b = b_{xy}$ = x નો y પરનો નિયત સંબંધાંક છે.

અહીં b_{xy}, yમાં એકમ ફેરફાર કરવાથી xમાં થતો ફેરફાર દર્શાવે છે.

હવે $b_{xy} = r\frac{S_x}{S_y}$ છે.

ઉપરોક્ત વર્ણન કર્યા મુજબ b_{xy}ની કિંમત નીચે મુજબના સૂત્રો ઉપરથી મેળવી શકાય.

$$b_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2}$$

$$b_{xy} = \frac{\sum\left(x - \overline{x}\right)\left(y - \overline{y}\right)}{\sum\left(y - \overline{y}\right)^2}$$

$$b_{xy} = \frac{n\sum d_x d_y - \left(\sum d_x\right)\left(\sum d_y\right)}{n\sum d_y^2 - \left(\sum d_y\right)^2}$$

દ્વિચલ માહિતી માટે b_{xy} નું સૂત્ર નીચે મુજબ છે.

$$b_{xy} = \frac{n\sum fd_x d_y - \left(\sum f_x d_x\right)\left(\sum f_y d_y\right)}{n\sum f_y d_y^2 - \left(\sum f_y d_y\right)^2} \times \left(\frac{C_x}{C_y}\right)$$

અચળાંક ‘a’ની કિંમત $a = \overline{x} - b\overline{y}$ વડે મેળવી શકાય.

નિયત સંબંધના અન્ય જરૂરી સૂત્રો

(1) yની x પરની નિયત સંબંધ રેખાના સૂત્રો :

$$b_{yx} = \frac{Cov.(x, y)}{Sx^2}$$

$$b_{yx} = \frac{\sum xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum x^2 - n\left(\overline{x}\right)^2} \text{ અને } a = \overline{y} - b\overline{x}$$

(2) xની y પરની નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણનાં સૂત્રો :

$$b_{xy} = \frac{\sum xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum y^2 - n\left(\overline{y}\right)^2}; \quad b_{xy} = \frac{Cov.(x.y)}{S_y^{\,2}} \text{ અને } a = \overline{x} - \overline{by}$$

9.6 નિયત સંબંધાંકના ગુણધર્મ

1. સહસંબંધાંક r, નિયત સંબંધાંક b_{xy} અને b_{yx}ના ચિહ્નો સમાન હોય છે.
2. બે નિયત સંબંધાંકો ઉગમબિંદુ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર (નિરપેક્ષ) છે. પરંતુ સ્કેલમાપ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર (નિરપેક્ષ) નથી.
3. બે નિયત સંબંધાંકોમાંથી કોઈ પણ એકની કિંમત 1 કરતાં ઓછી હોવી જોઈએ અને બીજો એક કરતા વધુ હોઈ શકે પરંતુ બંનેનો ગુણાકાર 1 કરતા ક્યારેય મોટો ન હોઈ શકે.
4. બે નિયત સંબંધાંકોનો ગુણાકાર સહસંબંધાંકના વર્ગ જેટલો થાય છે.

   $$\therefore r^2 = b_{xy} \,.\, b_{yx}$$

   $$r = \pm\sqrt{b_{xy}\; b_{yx}}$$

   આમ, સહસંબંધાંક, નિયત સંબંધાંકોનો ગુણોત્તર મધ્યક છે.
5. જો બન્ને ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ સહસંબંધ હોય તો નિયત સંબંધાંકો એક બીજાના વ્યસ્ત હોય છે. સંપૂર્ણ સહસંબંધ એટલે કે r = 1 અથવા r = –1

$$\therefore r^2 = 1$$

$$\therefore 1 = b_{xy} \cdot b_{yx} \Rightarrow b_{xy} = \frac{1}{b_{yx}}$$

9.7 નિયત સંબંધ રેખાના ગુણધર્મ

(1) જો બે નિયત સંબંધ રેખા એક બીજાને લંબ હોય તો $r = 0$ થાય.

(2) જો બે નિયત સંબંધ રેખા એકાકાર હોય તો $r = \pm 1$ થાય.

(3) બે નિયત સંબંધ રેખા એક બીજા ને $(\bar{x}, \bar{y})$ યામમાં છેદે છે.

(4) જેમ નિયત સંબંધ રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો મોટો તેમ બે ચલ વચ્ચેનો સંબંધ ઓછો અને જેમ ખૂણો નાનો તેમ સહસંબંધ વધુ. આમ, નિયત સંબંધ રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાઓ સંબંધાકનું માપ પૂરું પાડે છે.

9.8 નિયત સંબંધના અભ્યાસની ઉપયોગિતા :

નિયત સંબંધ બે ચલ વચ્ચે ગાણિતિક વિધેય દ્વારા રજૂ કરાતો સંબંધ છે. તેની ઉપયોગિતા નીચે મુજબ છે.

(1) બે સહસંબંધિત ચલો વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ જાણી શકાય છે.

(2) બે ચલો વચ્ચે ગાણિતિક સંબંધ પ્રસ્થાપિત થઈ જાય પછી સ્વતંત્ર (નિરપેક્ષ) ચલ x (અથવા y)ની જ્ઞાત કિંમત પરથી આધારિત (સાપેક્ષ) ચલ y (અથવા x)ની અજ્ઞાત કિંમતનું અનુમાન મેળવી શકાય છે.

(3) એક ચલની કિંમતમાં થતાં એકમ ફેરફારની અસર બીજા ચલની કિંમત ઉપર કેટલી થાય છે તે જાણી શકીએ છીએ.

(4) નિયત સંબંધ દ્વારા મળતી અંદાજીત કિંમતમાં થતી ભૂલનું (ત્રુટીનું) પ્રમાણ જાણી શકાય છે.

9.9 સહસંબંધ અને નિયત સંબંધ વચ્ચેનો તફાવત

બે ચલ વચ્ચેના સંબંધના સંપૂર્ણ અભ્યાસ માટે સહસંબંધ અને નિયત સંબંધનો અભ્યાસ જરૂરી છે તેમના વચ્ચેના તફાવતો નીચે પ્રમાણે છે.

1. સહસંબંધાંક બે ચલ વચ્ચેના સંબંધની નિકટતા તેમજ તેનો પ્રકાર દર્શાવતું સંખ્યાત્મક માપ છે.

   નિયત સંબંધ દ્વારા એક ચલની કિંમતને અનુરૂપ બીજા ચલની કિંમતનું આગણન કરવામાં આવે છે.

2. બે ચલ વચ્ચેનો સહસંબંધ 1 કરતાં વધુ હોય શકે નહીં. નિયત સંબંધાંક બે હોય છે. બે નિયત સંબંધાંકનો ગુણાકાર 1 કરતાં વધુ હોઈ શકે નહીં. નિયત સંબંધાંકની કિંમત એક કરતાં વધુ હોય શકે છે.

3. સહસંબંધાંકની કિંમત સ્કેલ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર છે. નિયત સંબંધાંકની કિંમત સ્કેલ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર નથી.

4. બે નિયત સંબંધાંકો ઉપરથી સહસંબંધાંક મેળવી શકાય છે. ફક્ત સહસંબંધાંક ઉપરથી નિયત સંબંધાંકો મેળવી શકાતા નથી.

ઉદાહરણ - 1 નીચેની માહિતી ઉપરથી યોગ્ય નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

કારની ઉંમર (વર્ષ)	2	4	6	8	10
રખરખાવ ખર્ચ ('00રૂા.)	1	2	2.5	3	4

જવાબ :

	કારની ઉંમર(x)	રખરખાવ ખર્ચ (y)	x^2	xy
	2	1	4	2
	4	2	16	8
	6	2.5	36	15
	8	3	64	24
	10	4	100	40
કુલ	30	12.5	220	89

y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $y = a + bx$

$$b_{yx} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

$$= \frac{5(89) - (30)(12.5)}{5(220) - (30)^2}$$

$$= \frac{445 - 375}{1100 - 900}$$

$$b_{xy} = \frac{70}{200} = 0.35$$

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\overline{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{12.5}{5} = 2.5$$

ઉપરોક્ત કિંમતો $a = \overline{y} - b\overline{x}$ માં મૂકતાં,

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

$$a = (2.5) - (0.35)(6)$$

$$a = 2.5 - 2.1 = 0.4$$

$\therefore$ y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા $y = 0.4 + 0.35x$. થશે.

ઉદાહરણ - 2 નીચેની માહિતીમાંથી યોગ્ય નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

સ્વતંત્ર ચલ (x)	2	4	5	6	8	11
આધારિત ચલ (y)	18	12	10	8	7	5

જવાબ :

	x	y	x^2	xy
	2	18	4	36
	4	12	16	48
	5	10	25	50
	6	8	36	48
	8	7	64	56
	11	5	121	55
કુલ	36	60	266	293

y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = a + bx છે.

$$b_{yx} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

$$b_{yx} = \frac{6(293)-(36)(60)}{6(266)-(36)^2}$$

$$b_{yx} = \frac{1758-2160}{1596-1296} = -\frac{402}{300} = -1.34$$

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{36}{6} = 6$$

$$\overline{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{60}{6} = 10$$

ઉપરોક્ત કિંમતો $a = \overline{y} - b\overline{x}$ માં મૂકતાં,

a = 10 – (–1.34) (6)

a = 10 + 8.04 = 18.04

$\therefore$ y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = 18.04 - 1.34x થશે.

ઉદાહરણ - 3 નીચેની માહિતી પરથી બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણ શોધો તે ઉપરાંત

(1) નિયત સંબંધાંકની કિંમતનો ઉપયોગ કરી સહસંબંધાંકની કિંમત મેળવો.

(2) જ્યારે અર્થશાસ્ત્રના ગુણ 30 હોય ત્યારે આંકડાશાસ્ત્રના ગુણનું અનુમાન કરો.

અર્થશાસ્ત્ર (x)	25	28	35	32	31	36	29	38	34	32
આંકડાશાસ્ત્ર(y)	43	46	49	41	36	32	31	30	33	39

જવાબ :

x	y	$(x-\overline{x})$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
25	43	-7	49	5	25	-35
28	46	-4	16	8	64	-32
35	49	3	9	11	121	33
32	41	0	0	3	9	0
31	36	-1	1	-2	4	2
36	32	4	16	-6	36	-24
29	31	-3	9	-7	49	21
38	30	6	36	-8	64	-48
34	33	2	4	-5	25	-10
32	39	0	0	1	1	0
કુલ 320	380	0	140	0	398	-93

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{320}{10} = 32 \qquad \overline{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{380}{10} = 38$$

(1) y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = a + bx છે.

$$b_{yx} = \frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sum(x-\overline{x})^2}$$

$$= \frac{-93}{140}$$

= - 0.664

ઉપરોક્ત કિંમતો $a = \overline{y} - b\overline{x}$ માં મૂકતાં,

a = 38 - (-0.664) (32)

a = 38 + 21.12

a = 59.12

$\therefore$ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = 59.12 – 0.664x થશે.

(2) x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખા સમીકરણ x = a + by થશે.

$$b_{xy} = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\Sigma(y-\overline{y})^2}$$

$a = \overline{x} - b\overline{y}$ માં મૂકતાં ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ

$$b_{xy} = \frac{-93}{398}$$

$$a = 32 - (-0.23)(38)$$

b_{xy} = -0.23

a = 40.74

$\therefore$ x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા સમીકરણ x = 40.74 – 0.23y થશે.

(3) હવે $r = \pm\sqrt{b_{xy}b_{yx}}$

$= -\sqrt{(-0.664)(-0.23)}$

$= -0.39$

(4) જ્યારે x = 30 (અર્થશાસ્ત્રના ગુણ) હોય ત્યારે, આ કિંમત y = 59.12 – 0.664xમાં મૂકતાં

y = 59.12 – 0.664 (30)

y = 39

આંકડાશાસ્ત્રના 39 ગુણ થશે.

ઉદાહરણ - 4. નીચેની માહિતી પરથી બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણ શોધો.

x	28	41	40	38	35	33	46	32	36	33
y	30	34	31	34	30	26	28	31	26	31

જવાબ :

	x	y	d_x	d_y	d_x^2	d_y^2	d_xd_y
	28	30	-8	0	64	0	0
	41	34	5	4	25	16	20
	40	31	4	1	16	1	4
	38	34	2	4	4	16	8
	35	30	-1	0	1	0	0
	33	26	-3	-4	9	16	12
	46	28	10	-2	100	4	-20
	32	31	-4	1	16	1	-4
	36	26	0	-4	0	16	0
	33	31	-3	1	9	1	-3
કુલ	362	301	2	1	244	71	17

(1) y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા સમીકરણ y = a + bx છે.

$$b_{yx} = \frac{n\sum d_x d_y - \sum d_x \sum d_y}{n\sum d_x^2 - \left(\sum d_x\right)^2}$$

$$= \frac{10(17) - (2)(1)}{10(244) - (2)^2}$$

$$= \frac{168}{2436} = 0.07$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{362}{10} = 36.2$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{301}{10} = 30.1$$

ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ $a = \bar{y} - b\bar{x}$ માં મૂકતાં

a = (30.1) – (0.07) (36.2) = 27.56

$\therefore$ y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = 27.56 + 0.07 x થશે.

(2) x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા સમીકરણ x = a + by છે.

$$b_{xy} = \frac{n\sum d_x d_y - \sum d_x \sum d_y}{n\sum d_y^2 - \left(\sum d_y\right)^2}$$

$$= \frac{10(17) - (2)(1)}{10(71) - (1)^2}$$

$$= \frac{168}{709}$$

= 0.2369

ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ $a = \bar{x} - b\bar{y}$ માં મૂકતાં,

a = (36.2) – (0.2369) (30.1)

$a = 29.07$

$\therefore$ x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખા સમીકરણ x = 29.07 + 0.2369 y થશે.

ઉદાહરણ - 5 નીચેના દ્વિચલ કોષ્ટક પરથી બે નિયત સંબંધ રેખાનાં સમીકરણ મેળવો. તથા તેના પરથી સહસંબંધાંક મેળવો.

	વિજ્ઞાપનનો ખર્ચ			
વેચાણની આવક	5 - 15	15 -25	25 - 35	35 - 45
75 - 125	4	1	-	-
125 - 175	7	6	2	1
175 - 225	1	3	4	2
225 - 275	1	1	3	4

જવાબ :

વિજ્ઞાપનનો ખર્ચ

વેચાણની આવક		5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45				
	d_y $d_x \rightarrow$ ↓	-1	0	1	2	f_y	$f_y d_y$	$f_y d^2_y$	$fd_x d_y$
75 - 125	-1	$\boxed{4}$ 4	$\boxed{0}$ 1	$\boxed{0}$ –	$\boxed{0}$ –	5	-5	5	4
125 - 175	0	$\boxed{0}$ 7	$\boxed{0}$ 6	$\boxed{0}$ 2	$\boxed{0}$ 1	16	0	0	0
175 - 225	1	$\boxed{-1}$ 1	$\boxed{0}$ 3	$\boxed{4}$ 4	$\boxed{4}$ 2	10	10	10	7
225 - 275	2	$\boxed{-2}$ 1	$\boxed{0}$ 1	$\boxed{6}$ 3	$\boxed{16}$ 4	9	18	36	20
કુલ	f_x	13	11	9	7	40	23	51	31
	$f_x d_x$	-13	0	9	14	10			
	$f_x d^2_x$	13	0	9	28	50			
	$fd_x d_y$	1	0	10	20	31			

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_x d_x}{n} C_x \qquad d_x = \frac{x - A}{C_x} \Rightarrow d_x = \frac{x - 20}{10}$$

$$= 20 + \frac{10}{40} 10 = 20 + 2.5 = 22.5$$

$$\bar{y} = B + \frac{\sum f_y d_y}{n} C_y \qquad d_y = \frac{y - B}{C_y} \Rightarrow d_y = \frac{y - 150}{50}$$

$$= 150 + \frac{23}{40} 50 = 150 + 28.75 = 178.75$$

(1) y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = a + bx છે.

$$b_{yx} = \frac{n \sum f d_x d_y - \sum f_x d_x \sum f_y d_y}{n \sum f_x d_x^2 - \left(\sum f_x d_x\right)^2} \left(\frac{C_y}{C_x}\right)$$

$$b_{yx} = \frac{40(31) - (10)(23)}{(40)(50) - (10)^2} \times \frac{50}{10} = \frac{1240 - 230}{2000 - 100} \times \frac{50}{10} = \frac{1010}{1900} \times \frac{50}{10} = 2.657$$

ઉપરોક્ત કિંમત સમીકરણ a $= \bar{y} - b\bar{x}$ માં મૂકતાં,

a = 178.75 – 2.657 (22.5)

a = 178.75 – 59.8

a = 118.95

$\therefore$ y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = 118.95 + 2.657x થશે.

(2) x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = a+by છે.

$$b_{xy} = \frac{n \sum f d_x d_y - \sum f_x d_x \sum f_y d_y}{n \sum f_y d_y^2 - \left(\sum f_y d_y\right)^2} \left(\frac{C_x}{C_y}\right)$$

$$b_{xy} = \frac{40(31) - (10)(23)}{40(51) - (23)^2} \times \frac{10}{50} = \frac{1240 - 230}{2040 - 529} \times \frac{10}{50} = \frac{1010}{1511} \times \frac{10}{50} = 0.1336$$

ઉપરોક્ત કિંમત સમીકરણ a $= \bar{x} - b\bar{y}$ માં મૂકતાં,

a = 22.5 – (0.1336) (178.75)

a = –1.381

$\therefore$ x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = –1.381 + 0.1336y થશે.

(3) x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક :

$$r = \pm\sqrt{b_{xy} b_{yx}}$$

$$= \sqrt{(2.657)(0.1336)} = 0.596$$

ઉદાહરણ - 6 નીચેની માહિતી પરથી નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણ શોધો.

	x	y
મધ્યક	6	5
પ્રમાણિત વિચલન	5	40/3
સહસંબંધાંક	8/15	

જ્યારે x = 100 હોય ત્યારે yની કિંમતનું આગણન કરો.

જવાબ : (1) y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $y = a + bx$ છે.

જ્યાં $b_{yx} = r\frac{S_y}{S_x}$

$$b_{yx} = \frac{8}{15}\,\frac{40/3}{5} = \frac{8}{15}\,\frac{40}{15} = \frac{64}{45}$$

ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ $a = \overline{y} - b\overline{x}$ માં મૂકતાં

$$a = 5 - \left(\frac{64}{45}\right)6 = 5 - \frac{384}{45} = 5 - 8.53 = -3.53$$

$\therefore$ y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $y = -3.53 + \frac{64}{45}x$ થશે.

(2) x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $x = a + by$ છે.

જ્યાં $b_{xy} = r\frac{S_x}{S_y}$

$$b_{xy} = \frac{8}{15}\,\frac{5}{40/3} = \frac{8}{15}\,\frac{15}{40} = \frac{1}{5}$$

ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ $a = \overline{x} - b\overline{y}$ માં મૂકતાં

$$a = 6 - \frac{1}{5}(5) = 5$$

x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $x = 5 + \frac{1}{5}y$ થશે.

(3) હવે જ્યારે x = 100 હોય ત્યારે

$$y = -3.53 + \frac{64}{45}x$$

$$y = -3.53 + \frac{64}{45}(100)$$

$$y = 138.69$$

ઉદાહરણ - 7 x અને y ચલ વચ્ચેનો સહસંબંધાંક 0.6 છે. તેમના મધ્યકો અનુક્રમે 10 અને 20 છે અને વિચરણ અનુક્રમે 2.25 તથા 4 છે. આ માહિતી પરથી બે નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણ શોધો.

જવાબ : અહીં $\bar{x}=10, \bar{y}=20, S_x^2=2.25, S_y^2=4$ તેથી $\boxed{S_x=1.5, S_y=2,}$ થાય, $r=0.6$ છે તો

(1) y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = a + bx છે.

જ્યાં $b_{yx}=r\frac{S_y}{S_x}=(0.6)\frac{2}{1.5}=0.8$

ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ $a=\bar{y}-b\bar{x}$ માં મૂકતાં

$a=20-(0.8)(10)=12$

y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = 12 + 0.8x થશે.

(2) xની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = a + by છે.

જ્યાં $b_{xy}=r\frac{S_x}{S_y}=(0.6)\frac{1.5}{2}=0.45$

ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ $a=\bar{x}-\overline{by}$ માં મૂકતાં $a=10-0.45(20)=1$ માં મૂકતાં

x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = 1 + 0.45y થશે.

ઉદાહરણ - 8 બે નિયત સંબંધ સમીકરણ 5x – y = 22 અને 64x – 45y = 24 છે અને xનું પ્રમાણિત વિચલન 5 છે. આ માહિતી પરથી

(1) x અને y ના મધ્યક

(2) x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક

(3) yનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

જવાબ : (1) અહીં બે નિયત સંબંધ સમીકરણ આપેલ છે.

5x – y = 22 ....(i)

64x – 45y = 24 ....(ii)

સમીકરણ (i) ને 45 વડે ગુણી સમીકરણ (ii) માંથી બાદ કરતા,

225x	– 45y	= 990	હવે x = 6 ની કિંમત સમીકરણ
64x	– 45y	= 24	5x - y = 22 માં મૂકતાં
–	+	–	5 (6) - y = 22
161x		= 966	y = 8 $\Rightarrow$ $\bar{y}=8$ થશે.

$\therefore\ x = 6 = \bar{x} = 6$

(2) ધારો કે, 5x – y = 22 સમીકરણ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ છે.

y = – 22 + 5x (કારણ કે y = a + bx છે.)

$\therefore b_{yx}=5$

ધારો કે $64x - 45y = 24$ સમીકરણ x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ છે.

$$\therefore \quad 64x = 24 + 45y$$

$$x = \frac{24}{64} + \frac{45}{64}y \quad \text{(કારણ કે } x = a + by \text{ છે.)}$$

$$\therefore \quad b_{xy} = \frac{45}{64}$$

x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક :

$$r = \pm\sqrt{b_{xy}\, b_{yx}} = \sqrt{\frac{45}{64}(5)} = 1.87 > 1$$

અહીં $r > 1$ છે તેથી આપણે ધારેલ સમીકરણ ખોટા છે.

$\therefore$ સમીકરણ $5x - y = 22$ એ x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ થશે.

$$x = \frac{22}{5} + \frac{y}{5}$$

$$\therefore b_{xy} = \frac{1}{5}$$

તેમજ સમીકરણ $64x - 45y = 24$ એ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ થશે.

$$y = -\frac{24}{45} + \frac{64}{45}x$$

$$\therefore b_{yx} = \frac{64}{45}$$

સાચો x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક :

$$r = \pm\sqrt{b_{xy} b_{yx}}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{5}\ \frac{64}{45}} = 0.53$$

(3) જ્યારે x નું પ્રમાણિત વિચલન 5 હોય ત્યારે y નું પ્રમાણિત વિચલન :

$$b_{xy} = r\frac{S_x}{S_y} \Rightarrow \quad S_y = r\frac{S_x}{b_{xy}}$$

$$S_y = \frac{0.53(5)}{1/5}$$

$$\therefore \ S_y = 13.25$$

ઉદાહરણ - 9 બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણો અનુક્રમે $12x - 15y + 99 = 0$ અને $60x - 27y - 321 = 0$ છે. અને xનું પ્રમાણિત વિચલન 6 હોય તો,

(1) x અને y ના મધ્યકો

(2) x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક

(3) y નું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

જવાબ : અહીં બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણો આપેલ છે.

$12x - 15y + 99 = 0$ ....(i)

$60x - 27y - 321 = 0$ ....(ii)

સમીકરણ (i) ને 5 વડે ગુણી સમીકરણ (ii)માંથી બાદ કરતાં

$$\begin{array}{l} 60x - 75y + 495 = 0 \\ 60x - 27y - 321 = 0 \\ - \quad\quad + \quad\quad + \\ \hline \quad\quad - 48y + 816 = 0 \end{array}$$

$$y = \frac{816}{48} = 17$$

$$\overline{y} = 17$$

હવે y = 17ની કિંમત સમીકરણ 12x - 15y + 99 = 0માં મૂકતાં,

$12x - 15(17) + 99 = 0$

$x = 13 \Rightarrow \overline{x} = 13$

(2) ધારો કે $12x - 15y + 99 = 0$ એ સમીકરણ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા છે.

$15y = 99 + 12x$

$$y = \frac{99}{15} + \frac{12}{15}x \text{ (કારણ કે } y = a + bx \text{ છે.)}$$

$$\therefore b_{yx} = \frac{12}{15}$$

ધારો કે $60x - 27y - 321 = 0$ એ સમીકરણ xની y પરની નિયત સંબંધ રેખા છે.

$$\therefore x = \frac{321}{60} + \frac{27}{60}y \text{ (કારણ કે } x = a + by \text{ છે.)}$$

$$\therefore b_{xy} = \frac{27}{60}$$

x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક :

$$r = \pm\sqrt{b_{xy}\ b_{yx}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{12}{15}\frac{27}{60}} = \sqrt{\frac{324}{900}} = 0.6$$

(3) જ્યારે x નું પ્રમાણિત વિચલન 6 હોય ત્યારે yનું પ્રમાણિત વિચલન :

$$b_{xy} = r\frac{S_x}{S_y} \Rightarrow \quad S_y = r\frac{S_x}{b_{xy}}$$

$$S_y = \frac{0.6(6)}{27/60} = 8$$

$$\therefore S_y = 8$$

ઉદાહરણ - 10 બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણો અનુક્રમે $12x - 85y = -99$ અને $60x + 27y = 321$ છે. x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

જવાબ : ધારો કે સમીકરણ $12x - 85y = -99$ એ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા છે.

$\therefore y = \frac{99}{85} + \frac{12}{85}x$ (કારણ કે y = a + bx છે.)

$\therefore b_{yx} = \frac{12}{85}$

ધારો કે સમીકરણ 60x + 27y = 321 એ x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખા છે.

$x = \frac{321}{60} - \frac{27}{60}y$, (કારણ કે x = a + by છે.)

$\therefore b_{xy} = -\frac{27}{60}$

અહીં b_{xy} અને b_{yx} બંનેની કિંમત વિરુદ્ધ એટલે કે એક ઘન કિંમત અને બીજી ઋણ કિંમત છે. જે શક્ય નથી. આમ, આ આપેલ માહિતી અસંગત હોવાથી સહસંબંધાંક મળશે નહીં.

ઉદાહરણ - 11 નીચે આપેલ માહિતી પરથી બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણ મેળવો તથા xની કિંમત 60 હોય ત્યારે yની કિંમત મેળવો.

$\overline{x} = 48, \overline{y} = 20, S_x = 6, S_y = 9, r = -0.6$

જવાબ :

(1) y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = a + bx છે.

જ્યાં $b_{yx} = r\frac{S_y}{S_x} = (-0.6)\left(\frac{9}{6}\right) = -0.9$

તથા $a = \overline{y} - b\overline{x}$

$= 20 - (-0.9)(48) = 63.2$

$\therefore$ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = 63.2 – 0.9x થશે.

(2) x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = a + by છે.

જ્યાં $b_{xy} = r\frac{S_x}{S_y} = (-0.6)\left(\frac{6}{9}\right) = -0.4$

તથા $a = \overline{x} - b\overline{y}$

$= 48 - (-0.4)(20)$

$a = 56$

$\therefore$ x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $x = 56 - 0.4y$ થશે.

(3) હવે જ્યારે x ની કિંમત 60 હોય ત્યારે y ની કિંમત :

y = 63.2 – 0.9x

y = 63.2 – 0.9(60) = 9.2

ઉદાહરણ - 12 નીચે આપેલ માહિતી પરથી જ્યારે x = 0.42 હોય ત્યારે y ની કિંમત અને y = 100 હોય ત્યારે xની કિંમત મેળવો.

x	0.36	0.32	0.37	0.34	0.35	0.33	0.38
y	85	84	84	83	85	81	82

જવાબ :

	x	y	d_x	d_y	d_x^2	d_y^2	d_xd_y
	0.36	85	1	1	1	1	1
	0.32	84	-3	0	9	0	0
	0.37	84	2	0	4	0	0
	0.34	83	-1	-1	1	1	1
	0.35	85	0	1	0	1	0
	0.33	81	-2	-3	4	9	6
	0.38	82	3	-2	9	4	-6
કુલ	2.45	584	0	-4	28	16	2

અહીં $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2.45}{7} = 0.35$ $\quad \therefore d_x = \frac{x-A}{C_x} \Rightarrow d_x = \frac{x-0.35}{1/100}$

અને $\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{584}{7} = 83.4$ $\quad \therefore d_y = \frac{y-B}{C_y} \Rightarrow d_y = \frac{y-84}{1}$

(1) y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = a + bx છે.

જ્યાં $b_{yx} = \frac{n\sum d_xd_y - \sum d_x \sum d_y}{n\sum d_x^2 - (\sum d_x)^2}\left(\frac{C_y}{C_x}\right)$

$$= \frac{7(2)-(0)(-4)}{7(28)-(0)^2}\left(\frac{1}{1/100}\right)$$

$$= \frac{14}{196}100 = 7.14$$

ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ $a = \bar{y} - b\bar{x}$ માં મૂકતાં,

a = 83.4 – (7.14) (0.35) = 80.9

$\therefore$ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $y = 80.9 + 7.14x$ થશે.

(2) x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = a + by છે.

જ્યાં $b_{xy} = \frac{n\sum d_xd_y - \sum d_x \sum d_y}{n\sum d_y^2 - (\sum d_y)^2}\left(\frac{C_x}{C_y}\right)$ ઉપરોક્ત કિંમત સમીકરણ $a = \bar{x} - b\bar{y}$ માં મૂકતાં,

$$= \frac{7(2)-(0)(-4)}{7(16)-(-4)^2}\left(\frac{1}{100}\right)$$

a = 0.35 – (0.0014) (83.4)

$b_{xy} = 0.0014$ $\qquad$ $a = 0.228$

$\therefore$ x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $x = 0.228 + 0.0014y$ થશે.

(3) હવે જ્યારે $x = 0.42$ હોય ત્યારે y ની કિંમત

$y = 80.9 + 7.14x$

$y = 80.9 + 7.14\,(0.42)$

$y = 83.8988$

હવે જ્યારે $y = 100$ હોય ત્યારે x ની કિંમત :

$x = 0.228 + 0.0014y$

$x = 0.228 + 0.0014\,(100)$

$x = 0.228 + 0.14$

$x = 0.368$

ઉદાહરણ - 13 બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણ ઉપરથી આપેલ x અને yની કિંમતો માટે y અને xની કિંમતો મેળવેલ છે. તે પરથી બે નિયત સંબંધ રેખાઓ શોધો. તથા તે રેખાઓ પરથી x અને yના મધ્યકો અને x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

આપેલ કિંમત	અંદાજીત કિંમત
x = 8	y = 9
x = 5	y = 6
y = 5	x = 2.2
y = 10	x = 4.2

જવાબ : (1) y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $y = a + bx$ છે.

$$\underset{\text{અંદાજીત કિંમત}}{\underset{\uparrow}{y}} = \underset{\text{આપેલ કિંમત}}{\underset{\uparrow}{a+bx}}$$

આપણને આપેલ xની કિંમત તથા yની અંદાજીત કિંમત સમીકરણમાં મૂકતાં,

$a + 8b = 9$ $\qquad$ $[x = 8,\ y = 9,\ x = 5,\ y = 6]\ (a + bx = y)$

$a + 5b = 6$

$-\quad -\quad -$

$3b = 3$

$\therefore b = b_{yx} = 1$

હવે સમીકરણ $a + 8b = 9$માં $b = 1$ મૂકતાં,

$a + 8\,(1) = 9$

$a = 1$ થશે.

$\therefore$ y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $y = 1 + x$ ....(i) થશે.

(2) x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $x = a+by$ છે.

$$\underset{\text{અંદાજીત કિંમત}}{\underset{\uparrow}{x}} = a + \underset{\text{આપેલ કિંમત}}{\underset{\uparrow}{by}}$$

આપણને આપેલ yની કિંમત તથા xની અંદાજીત કિંમત સમીકરણમાં મૂકતાં,

a + 5b = 2.2 [y = 5, x = 2.2, y = 10, x = 4.2] (a + by = x)

a + 10b = 4.2

− − −

−5b = −2

$\therefore b = b_{xy} = 0.4$

હવે a + 5b = 2.2 માં b = 0.4 મૂકતાં,

a + 5 (0.4) = 2.2 a + 2 = 2.2 થશે.

a = 0.2

$\therefore$ x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = 0.2 + 0.4y.......(ii) થશે.

સમીકરણ (i) અને (ii) ઉકેલતા

$\overline{x} = 1$ અને $\overline{y} = 2$ મળશે.

(3) x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક :

$r = \pm\sqrt{b_{xy} b_{yx}}$

$r = \sqrt{(1)(0.4)}$

r = 0.632

સ્વાધ્યાય

1. સૈદ્ધાંતિક પ્રશ્નો

(1) નિયત સંબંધાંકની વ્યાખ્યા આપી તેના ગુણધર્મ અને ઉપયોગ જણાવો.

(2) નિયત સંબંધ રેખાઓ અને તેના ગુણધર્મો સમજાવો.

(3) નિયત સંબંધ રેખાના ઉપયોગો જણાવો.

(4) નિયત સંબંધનું મહત્ત્વ સમજાવો.

(5) નિયત સંબંધના અભ્યાસનું મહત્ત્વ તેમના પ્રકાર, ગાણિતિક સ્વરૂપ અને ઉપયોગ જણાવો.

(6) નિયત સંબંધ રેખાના અન્વાયોજન માટેની ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત સમજાવો.

2. ટૂંકનોંધ

(1) નિયત સંબંધ પૃથકકરણ

(2) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

3. બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો

(1) નિયત સંબંધની શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજન રેખા કઈ રીતથી મેળવાય છે ?

(અ) મહત્ત્વ વર્ગોની રીત (બ) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

(ક) કાર્લ પિયર્સનની રીત (ડ) સહસંબંધની રીત

(2) .... બે ચલ વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ દર્શાવે છે.

(અ) મધ્યક (બ) વિચલન (ક) સહસંબંધ (ડ) નિયત સંબંધ

(3) b_{yx} એટલે શું ?

(અ) xની કિંમતમાં એક એકમનો ફેરફાર કરવાથી y ની કિંમતમાં થતો અંદાજીત ફેરફાર

(બ) yની કિંમતમાં એક એકમનો ફેરફાર કરવાથી x ની કિંમતમાં થતો અંદાજીત ફેરફાર

(ક) અંતઃખંડ (ડ) સાપેક્ષ ચલ

(4) નીચેના પૈકી y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા કઈ છે ?

(અ) $\hat{y} = a + bx$ (બ) $\hat{x} = a + by$ (ક) $\hat{y} = a + bx + cx^2$ (ડ) $\hat{y} = a^2 + bx$

(5) સહસંબંધાંકની કઈ કિંમત માટે નિયત સંબંધાંકની કિંમત શૂન્ય થાય છે ?

(અ) $r = -1$ (બ) $r = 0$ (ક) $r = 1$ (ડ) $r = 2$

(6) બે નિયત સંબંધ રેખા કયા બિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

(અ) $(0, 0)$ (બ) $(\bar{x}, 0)$ (ક) $(0, \bar{y})$ (ડ) $(\bar{x}, \bar{y})$

(7) નીચેનામાંથી સાચું સમીકરણ પસંદ કરો.

(અ) $b_{yx} = r\dfrac{S_x}{S_y}$ (બ) $b_{xy} = r\dfrac{S_y}{S_x}$ (ક) $b_{yx} = r\dfrac{S_y}{S_x}$ (ડ) $b_{xy} = \dfrac{S_x}{S_y}$

(8) y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાના કિસ્સામાં e = ... થશે.

(અ) $x - \hat{x}$ (બ) $y - \hat{y}$ (ક) $x - \hat{y}$ (ડ) $\hat{x} - y$

(9) જો y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા $\hat{y} = 25 + 3x$ હોય તો $x = 10$ માટે y ની અનુમાનિત કિંમત .... થાય.

(અ) 50 (બ) 55 (ક) 20 (ડ) 45

10. જો y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા $3x + 2y = 50$ હોય તો b_{yx} = ...

(અ) $\dfrac{2}{3}$ (બ) $\dfrac{3}{2}$ (ક) $\dfrac{-2}{3}$ (ડ) $\dfrac{-3}{2}$

જવાબ : 1. (બ) 2. (ડ) 3. (અ) 4. (અ) 5. (બ) 6. (ડ) 7. (ક) 8. (બ) 9. (બ) 10. (ડ)

4. નીચેના પદો સમજાવો.

(1) નિયત સંબંધ

(2) નિયત સંબંધાંક

(3) ત્રુટી

(4) નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણ

5. નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો.

(1) નિયત સંબંધની વ્યાખ્યા આપો.

(2) નિયત સંબંધાંકની વ્યાખ્યા આપો.

(3) નિયત સંબંધ રેખાના સંદર્ભમાં ત્રુટી એટલે શું ?

(4) નિયત સંબંધની શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા મેળવવા માટેની રીતનું નામ આપો.

(5) નિયત સંબંધાંક શેના પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર નથી ?

(6) નિયત સંબંધાંક શેના પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર છે ?

(7) નિયત સંબંધ રેખાઓ બે શા માટે હોય છે ?

(8) નિયત સંબંધનું મહત્વ સમજાવો.

(9) જો $S_x = 2$, $S_y = 4$, $r = 0.5$ હોય, તો નિયત સંબંધાંક b_{xy} ની કિંમત કેટલી થશે?

[જવાબ : b_{xy}=0.25]

(10) જો $y = 2 + x$ એ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા હોય તો નિયત સંબંધાંક b_{yx}ની કિંમત શું થશે ?

[જવાબ : b_{xy}=1]

6. નીચેના પદોના તફાવત આપો.

(1) નિયત સંબંધ અને નિયત સંબંધાંક

(2) સહસંબંધાંક અને નિયત સંબંધાંક

(3) સહસંબંધ અને નિયત સંબંધ

(4) નિરપેક્ષ ચલ અને સાપેક્ષ ચલ

7. વ્યવહારિક દાખલાઓ :

(1) નીચે આપેલી માહિતી પરથી જ્યારે y = 100 હોય ત્યારે x અને x = 100 હોય ત્યારે y ની અનુમાનિત કિંમત મેળવો.

$\overline{x} = 30.4, \overline{y} = 26.5, S_x = 6, S_y = 0.8, r = 0.56$

[જવાબ : $y = 24.22 + 0.075\ x$, $x = -80.9 + 4.2\ y$, $y_e = 31.72$, $x_e = 339.1$]

(2) જો $\overline{x} = 10, \overline{y} = 50, S_x = 5, S_y = 10,\ r = 0.80$ હોય તો, બે નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવી અને જ્યારે x = 20 હોય ત્યારે y ની અનુમાનિત કિંમત મેળવો.

[જવાબ : $y = 34 + 1.6\ x$, $x = -10 + 0.4\ y$, $y_e = 66$]

(3) એક લિમિટેડ કંપનીના શેરની કિંમત બે સ્ટોક એક્ષચેંજમાં નીચે મુજબ આપેલ છે. આ માહિતી ઉપરથી બે નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવો. જ્યારે અમદાવાદ સ્ટોક એક્ષચેંજમાં ભાવ રૂ. 22 હોય ત્યારે મુંબઈ સ્ટોક એક્ષચેંજનો ભાવ શું હશે તે શોધો.

	અમદાવાદ સ્ટોક એંક્ષચેજ	મુંબઈ સ્ટોક એક્ષચેંજ	
મધ્યક	16	20	
પ્રમાણિત વિચલન	4	5	r = 0.08

[જવાબ : $y = 4 + x$, $x = 3.2 + 0.64\ y$, $y_e = 26$]

(4) જો બે નિયત સંબંધ રેખા $65x + 100y = 165$ અને $10x + 13y = 23$ તથા yનું પ્રમાણિત વિચલન 2 હોય તો b_{yx}, b_{xy}, r અને S_x શોધો.

[જવાબ :: $b_{xy} = -0.65$, $b_{yx} = -1.3$, $r = -0.9192$, $S_x = 2.8283$]

(5) નીચેની આપેલ માહિતી ઉપરથી બે નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણ મેળવો.

(1) જ્યારે પત્નીની ઉપર 20 વર્ષ હોય ત્યારે પતિની ઉંમર શોધો.

(2) જ્યારે પતિની ઉંમર 30 વર્ષ હોય ત્યારે પત્નીની ઉંમર શોધો.

પત્નીની ઉંમર	પતિની ઉંમર		
	20-25	25-30	30-35
16 - 20	9	14	-
20 - 24	6	11	3
24 - 28	-	-	7

[જવાબ : x = પતિની ઉંમર, y = પત્નીની ઉંમર, $y = 8.03 + 0.47x$,
$x = 12 + 0.7235\,y$, $x_e = 26.47$ વર્ષ $y_e = 22.13$ વર્ષ]

(6) નીચેના કોષ્ટકમાં વિદ્યાર્થીઓનું વજન તથા ઊંચાઈનું આવૃત્તિ વિતરણ આપેલ છે.

ઊંચાઈ *(Y)* (ઈંચ)	વજન (કિ.ગ્રા.) (x) 90-100	100-110	110-120	120-130
50-55	5	3	2	-
55-60	10	4	-	3
60-65	-	8	2	5
65-70	-	-	4	6
70-75	-	-	-	8

જ્યારે વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ 72 ઈંચ હોય ત્યારે તેનું વજન શોધો. જ્યારે વિદ્યાર્થીનું વજન 140 કિ.ગ્રા. હોય ત્યારે તેની ઊંચાઈ શોધો.

[જવાબ : $y = 20.7517 + 0.3673x$, $x = 29.9013 + 1.3196y$, $x_e = 124.9125$ કિ.ગ્રા., $y_e = 72.1737$ ઈંચ]

ધારો કે, x = વિદ્યાર્થીનું વજન y = વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ

(7) બે નિયત સંબંધ રેખા ઉપરથી જ્યારે x ની કિંમત આપેલી હોય ત્યારે yની અંદાજીત કિંમત તથા જ્યારે y ની કિંમત આપેલી હોય ત્યારે xની અંદાજીત કિંમત મેળવેલ છે. આ માહિતી ઉપરથી બે નિયત સંબંધ રેખા તથા $\bar{x}, \bar{y}$ મેળવો.

આપેલ કિંમત	અંદાજીત કિંમત
x = 5	y = 20
x = 7	y = 16
y = 14	x = 7
y = 10	x = 8

[જવાબ : $y = 30 - 2x$, $x = 10.5 - 0.25y$, $\bar{x} = 6$, $\bar{y} = 18$]

(8) 100 વિદ્યાર્થીઓના પ્રશ્નપત્ર - 1 અને પ્રશ્નપત્ર - 2 ના ગુણના મધ્યક તથા પ્રમાણિત વિચલનની માહિતી આપેલ છે.

મધ્યક	પ્રમાણિત વિચલન
પ્રશ્નપત્ર - 1 = 39.5	પ્રશ્નપત્ર - 1 = 10.0
પ્રશ્નપત્ર - 2 = 47.5	પ્રશ્નપત્ર - 2 = 16.8

પ્રશ્નપત્ર - 1 અને તથા પ્રશ્નપત્ર - 2 નો ‘r’ = 0.42

જે વિદ્યાર્થીને પ્રશ્નપત્ર - 1માં 50 ગુણ આવ્યા હોય તેને પ્રશ્નપત્ર - 2 કેટલા ગુણ આવ્યા હશે ?

[જવાબ : x = પ્રશ્નપત્ર-1ના ગુણ, y = પ્રશ્નપત્ર-2ના ગુણ, $y = 19.6288 + 0.7056x$, $y_e = 54.9088$]

(9) નીચેની માહિતી પરથી બે નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણ મેળવો.

x	15	19	20	22	24	27	30
y	16	18	15	14	18	20	25

[જવાબ : $y = 5.452 + 0.559x$, $x = 3.551 + 1.049y$]

(10) નીચે આપેલી માહિતી પરથી યોગ્ય નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

સ્વતંત્ર ચલ	2	4	6	8	10	12
આધારિત ચલ	9	16	12	15	16	18

[જવાબ : $y = 9.533 + 0.686x$]

(11) નીચેની માહિતી પરથી જ્યારે y = 15 હોય ત્યારે xની કિંમત શોધો.

$\sum x = 35$, $\sum y = 170$, $\sum xy = 680$, $\sum x^2 = 145$, $\sum y^2 = 3246$, $n = 10$

[જવાબ : $x = -0.5579 + 0.2387y$, $x_e = 3.0226$]

(12) નીચેની માહિતી પરથી yનું x પરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવો. જ્યારે x = 19 હોય ત્યારે yની કિંમત શોધો.

x	18	26	28	31	25	19	35
y	11	16	19	17	14	11	24

[જવાબ : $y = -2.571 + 0.714x$, $x_e = 10.995$]

(13) y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા $5y = 3x - 5$ તથા x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખા $3y - 5x - 2 = 0$ છે તો x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

[જવાબ : $r = 0.6$]

(14) x અને y બે ચલોની નિયત સંબંધ રેખાઓ $3x + 2y - 26 = 0$, $6x + y - 30 = 0$ હોય તો નીચેની કિંમત શોધો.

(i) $\bar{x}, \bar{y}$, (ii) r (iii) x = 5 હોય ત્યારે yની કિંમત શોધો.

[જવાબ : $\bar{x} = 4.27, \bar{y} = 7.33, b = -1.5, b_{xy} = -0.16, r = -0.5, y_e = 5.5$]

(15) નીચેની માહિતી પરથી x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા શોધો.

$\sum x = 60$, $\sum y = 40$, $\sum xy = 1150$, $\sum x^2 = 4160$, $\sum y^2 = 1720$, $n = 10$

[જવાબ : $x = 3.6668 + 0.5833y$]

(16) બે નિયત સંબંધ રેખા $6x + 10y = 119$ તથા $30x + 45y + 180 = 0$ તથા yનું વિચરણ 4 હોય તો

(i) $\bar{x}, \bar{y}$ (ii) r (iii) S_x^2 શોધો.

[જવાબ : $\bar{y} = 155, \bar{x} = -238.5, r = -0.9486, s_x^2 = 10$]

(17) નીચેની માહિતી પરથી y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા શોધો. ઉપરાંત જ્યારે x = 42 હોય ત્યારે y કિંમત શોધો.

x → ↓ y	20-40	40-60	60-80	80-100
20-30	10	7	-	-
30-40	-	10	3	-
40-50	-	6	5	1
50-60	-	-	2	6

[જવાબ : $y = 2.4576 + 0.658x$, $\hat{y} = 30$]

(18) નીચે આપેલ દ્વિચલ કોષ્ટક પરથી બે નિયત સંબંધ રેખા તથા x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

આંકડાશાસ્ત્રના ગુણ	એકાઉન્ટના ગુણ			
	5-15	15-25	25-35	35-45
0-10	1	1	-	-
10-20	3	6	5	1
20-30	1	8	9	2
30-40	-	3	9	3
40-50	-	-	4	1

[જવાબ : $y = 11.073 + 0.5692x$, $x = 16.684 + 0.3697y$, $r = 0.4587$]

(19) નીચે આપેલી માહિતી દ્વિચલ આવૃતિ વિતરણ પરથી મેળવેલ છે.

x નો મધ્યક = 52.1 yનો મધ્યક = 112.3

x નું વિચરણ = 49 yનું વિચરણ = 64

x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક = 0.3

(i) જ્યારે x = 38 હોય ત્યારે yની કિંમત મેળવો.

(ii) જ્યારે y = 98 હોય ત્યારે x ની કિંમત મેળવો.

[જવાબ : $y = 94.43 + 0.343\,x$, $x = 22.62 + 0.2625y$, $\hat{y} = 107.464$, $\hat{x} = 48.345$]

(20) x અને y ના ચલો પરથી નીચેની માહિતી આપેલ છે.

$\bar{x} = 20, s_x = 4, \bar{y} = 15, s_y = 3, r = 0.7$

આ માહિતી ઉપરથી બે નિયત સંબંધ રેખા મેળવો તથા જ્યારે x = 20 હોય ત્યારે y ની કિંમત મેળવો.

[જવાબ : $y = 4.5 + 0.525x$, $x = 6 + 0.933\,y$, $y_e = 15$]

એકમ 10

સામાયિક શ્રેણી

10.1 પ્રસ્તાવના

વ્યવહારમાં સમયની સાથે વિવિધ બાબતોની માહિતીમાં સતત ફેરફાર થતો રહેતો હોય છે. સમયની સાથે બદલાતી ચલ કિંમતો વિશેની માહિતીનો અભ્યાસ આપણે આ પ્રકરણમાં કરીશું. મોટા ભાગના આર્થિક ચલો જેવા કે ચીજ વસ્તુના ભાવ, ઉત્પાદન, માંગ, બેરોજગારીના આંકડા, દેશની વસ્તી, વેચાણથી થતો નફો, જાહેર કંપનીઓના શેરના ભાવ, આયાત-નિકાસના આંકડા વગેરેમાં સમયની સાથે ફેરફાર થતો જોવા મળે છે. સમય આધારિત બદલાતા ચલની માહિતી કે શ્રેણીને સામાયિક શ્રેણી કહેવાય છે. ભવિષ્યમાં આ પ્રકારના સામાયિક ચલોની કિંમતનું પૂર્વાનુમાન કરવા માટે સામાયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ ખૂબ ઉપયોગી નીવડે છે.

10.2 સામાયિક શ્રેણીનો અર્થ

સમય અનુસાર ગોઠવવામાં આવતી આંકડાકીય માહિતીને સામાયિક શ્રેણી કહેવાય છે. સામાન્ય રીતે સમાન સમયગાળાના અંતરે આ પ્રકારની માહિતી એકત્રિત કરવામાં આવે છે. જરૂરિયાત મુજબ સમય આધારિત ચલની માહિતી દૈનિક, અઠવાડિક, માસિક, ત્રિમાસિક, વાર્ષિક કે તેથી વધુ સમયના અંતરે એકઠી કરવામાં આવે છે. આ પ્રકારના સામાયિક ચલોની લાંબા ગાળાની માહિતી પરથી ભવિષ્યમાં તે ચલની કિંમત શું થશે તેનું પૂર્વાનુમાન મેળવી શકાય છે.

દા.ત. કોઈ વિસ્તારના વરસાદના આંકડા દર્શાવતી સામયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ કરવાથી તેમાં થતા ફેરફારોની દિશા અને તેમાં થતા ફેરફારોનું પ્રમાણ જાણી શકાય છે. તેને આધારે તે પછીના સમયમાં તે વિસ્તારમાં કેવા પ્રકારનો વરસાદ પડી શકે તેનું અનુમાન મેળવી તેને અનુરૂપ ખેતી વિષયક બાબતો અંગે નિર્ણય, સિંચાઈની પદ્ધતિ, વરસાદ આધારિત આપત્તિનું આયોજન વગેરે અંગે સમયસર નિર્ણય લઈ શકાય છે.

ક્રોક્ષ્ટન અને કાઉડનના મતાનુસાર ''સમયના ક્રમિક અંતરે ગોઠવેલી માહિતી એટલે સામાયિક શ્રેણી.''

સામાન્ય રીતે સમાન સમયાંતરે અવલોકનો લેવામાં આવે છે, તેથી સામાયિક શ્રેણીને નીચે મુજબ ગાણિતીય રીતે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

જો 'સમય'ને નિરપેક્ષ ચલ t વડે અને તેને અનુરૂપ સાપેક્ષ ચલને y_t વડે દર્શાવીએ તો t ની જુદી જુદી કિંમતો 1, 2, 3, ..., n માટે મળતી y_t ની કિંમતો $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ ને સામયિક શ્રેણી કહેવાય.

સરળતા ખાતર આપણે y_t ને ફક્ત y વડે દર્શાવીશું.

10.3 સામાયિક શ્રેણીના ઉપયોગો

અર્થશાસ્ત્ર, સમાજશાસ્ત્ર, વેપાર વાણિજય વગેરેમાં મળતી મોટાભાગની માહિતી સામાયિક શ્રેણી સ્વરૂપમાં હોય છે.તેમાં થતા ફેરફારો અનેક પરિબળોને આધિન હોય છે. તેથી તેનું યોગ્ય પૃથક્કરણ જરૂરી છે. જેના દ્વારા સામાયિક ચલ વિશેના ભવિષ્યના સચોટ અનુમાન મેળવી શકાય છે. સામાયિક શ્રેણીના અભ્યાસના કેટલાક મહત્વના ઉપયોગો નીચે મુજબ છે.

(1) ચલની કિંમતોમાં થતા ફેરફારનો પ્રકાર અને માત્રા ભૂતકાળના આંકડા પરથી જાણી શકાય છે.

(2) ભૂતકાળ અને વર્તમાનની કિંમતો પરથી આંકડાશાસ્ત્રીય રીતો દ્વારા ભવિષ્યની કિંમતનું યોગ્ય અનુમાન થઈ શકે છે.

(3) બે જુદી જુદી સામયિક શ્રેણીનો તુલનાત્મક અભ્યાસ કરી અગત્યના તારણો મેળવી શકાય છે.

(4) ભવિષ્યની કિંમતના યોગ્ય અનુમાનનો ઉપયોગ કરી કાર્યનું આગોતરુ આયોજન કરી શકાય છે.

(5) લાંબાગાળાના નીતિવિષયક નિર્ણયો લેવા માટે અને સમાજના વિકાસ માટેની યોજનાઓ તૈયાર કરવા માટે સામાયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ ઉપયોગી નીવડે છે.

(6) કેટલાંક સામાજિક પ્રશ્નો જેવા કે બાળલગ્નો, જાતિ-અસમાનતા, આપઘાત, સોશિયલ મિડીયાના વધુ ઉપયોગથી દંપતિ વચ્ચે વધતા અણબનાવો વગેરેને લગતી માહિતી પરથી સામાજિક સુધારા કરવા માટે સમાજશાસ્ત્રીઓને સામાયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ ખૂબ જ ઉપયોગી નીવડે છે.

10.4 સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ અને તેનાં ઘટકો

સામાયિક શ્રેણીમાં થતા ફેરફારો વિવિધ પરિબળોને લીધે થાય છે. આ પરિબળો નિયમિત, અનિયમિત કે બિલકુલ કલ્પી ન શકાય તેવા હોય છે. સામાયિક શ્રેણીને અસર કરતાં આ વિવિધ પરિબળોને અલગ તારવી તેનું માપન કરવાની પ્રક્રિયાને સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ કહે છે.

સામાયિક શ્રેણીના યોગ્ય સ્વરૂપને જાણવા માટે તેમાં થતી વધઘટોને મુખ્યત્વે ચાર ઘટકોમાં વિભાજીત કરવામાં આવે છે.

(1) વલણ અથવા દીર્ઘકાલીન વધઘટ

(2) મોસમી વધઘટ

(3) ચક્રિય વધઘટ

(4) અનિયમિત અથવા યાદચ્છિક વધઘટ

સામાયિક શ્રેણીનું વિઘટન કરી પ્રત્યેક ઘટકની અસરનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. વિવિધ ઘટકો વચ્ચે કોઈ ચોક્કસ પ્રકારનો સંબંધ જોવા મળે છે. તેના આધારે સામાયિક શ્રેણીના પૃથક્કરણ માટે યોગનીય (Addilive) મોડલ અથવા ગુણકીય (Multiplicative) મોડલનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જ્યારે બધાં જ ઘટકો એકબીજાથી સ્વતંત્ર હોય ત્યારે યોગનીય મોડલ અને સ્વતંત્ર ન હોય અને ઘટકોની અસર ગુણકીય હોય ત્યારે ગુણકીય મોડલનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

આપણે સામાયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ યોગનીય મોડલ પૂરતો સીમિત રાખીશું.

વલણને ‘T’, વડે મોસમી વધઘટને ‘S’ વડે, ચક્રિય વધઘટને ‘C’ વડે અને અનિયમિત વધઘટને ‘I’ વડે દર્શાવીએ તો સામાયિક શ્રેણીનું યોગનીય મોડલ નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

$y = T + S + C + I$

હવે આપણે વિગતવાર પ્રત્યેક ઘટક વિશે અભ્યાસ કરીશું.

(1) વલણ અથવા દીર્ઘકાલીન વધઘટ

સામાયિક શ્રેણીના ચલ પર લાંબા ગાળે અસર કરતા પરિબળોને લીધે થતી વધઘટને દીર્ઘકાલીન વધઘટ અથવા વલણ કહે છે. સમયના અલ્પગાળામાં ચલની કિંમતોમાં વધઘટ થતી રહે છે પરંતુ લાંબાગાળે સામાયિક ચલની કિંમતો એકંદરે વધતું, ઘટતું કે સ્થિર વલણ ધરાવે છે. વલણ એ સામાયિક ચલના ચલનની દિશા તથા તેના સ્વરૂપ (ગાણિતિક)નો ખ્યાલ દર્શાવતો ઘટક છે. દા.ત. દેશની વસ્તીનો વધારો, મૃત્યુદરમાં થતો ઘટાડો, રૂપિયાનું અવમૂલ્યન, મોબાઈલ ફોનમાં સોશિયલ મિડીયાનો વધતો વપરાશ, બેકારીનું પ્રમાણ વગેરેની અસરો લાંબાગાળાની માહિતી પરથી જ જાણી શકાય છે. સામાન્ય રીતે લાંબાગાળાના ફેરફારો સામાજિક પ્રણાલીઓમાં થતા ફેરફારો, લોકોની પસંદગીમાં થયેલ ફેરફારો, બદલાતી ટેક્નોલોજી વગેરેને આભારી હોય છે.

સામાયિક શ્રેણીમાં ''લાંબા ગાળા''નો અર્થ એક સાપેક્ષ ખ્યાલ છે. કઈ સામાયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ કરવો છે, તે બાબત પર ''લાંબો ગાળો'' એટલે કેટલો સમય, તે નિર્ભર છે.

સામાન્ય રીતે આર્થિક ચલો જેવા કે ઔદ્યોગિક ઉત્પાદન, વસ્તુનાં ભાવ, વેચાણ, ખેત પેદાશો વગેરે માટે 10 થી 15 વર્ષનો ગાળો લાંબો કહી શકાય. પરંતુ ખગોળશાસ્ત્રીઓ માટે કોઈ અવકાશી પદાર્થના ભ્રમણ કે ગતિ અંગેના અભ્યાસમાં સેંકડો વર્ષ પણ 'લાંબો ગાળો' ન હોય તેવુ બની શકે. હોટલના વ્યવસાય માટે કદાચ 5 થી 7 વર્ષ પણ લાંબો ગાળો કહી શકાય. જ્યારે મેલેરિયાના તાવના દર્દીના શરીરના તાપમાનની સામાયિક શ્રેણી માટે 4 થી 5 દિવસનો ગાળો પણ લાંબો ગણાય.

વલણ વધતું, ઘટતું કે સ્થિર હોઈ શકે. જીવનજરૂરી વસ્તુના ભાવ, પ્રતિષ્ઠિત કંપનીની વસ્તુનું વેચાણ, વિકાસશીલ દેશનો આર્થિક વૃદ્ધિદર, વગેરે ચલની કિંમતો લાંબા ગાળે એકંદરે વધતી જોવા મળે છે. આવા વલણને વધતું વલણ કહેવાય. વિકાસશીલ દેશોમાં બેકારીનું પ્રમાણ, મૃત્યુદર, વિકસીત દેશોમાં બેંકના વ્યાજદર, ઇલેક્ટ્રોનિક ચીજ વસ્તુના ભાવ વગેરે ચલની કિંમતોમાં લાંબા ગાળે એકંદરે ઘટાડો જોવા મળે છે. આવા વલણને ઘટતું વલણ કહેવાય. જ્યારે સામાયિક ચલની કિંમતોમાં લાંબાગાળે કોઈ નોંધપાત્ર વધારો કે ઘટાડો નિરંતર જોવા ન મળે તો તેને સ્થિર વલણ કહેવાય. દા.ત. સામાન્ય વ્યક્તિના મિનિટદીઠ ધબકારા, કોઈ જગ્યાનું દૈનિક સરેરાશ તાપમાન, વિકસિત દેશોમાં જન્મદર વગેરે.

જે શ્રેણીમાં વધારો કે ઘટાડો લગભગ અચળ પ્રમાણમાં રહેતો હોય તો તેવા વલણને સુરેખ વલણ કહેવાય છે,પણ જો તે અચળ ન હોય તો તેવા વલણને વક્રીય અથવા અસુરેખ વલણ કહેવાય છે.

સામાયિક શ્રેણીના દીર્ઘકાલીન વધઘટ વલણના અભ્યાસથી ભવિષ્યનું પૂર્વાનુમાન થઈ શકે છે.

(2) મોસમી વધઘટ :

સમયના ટૂંકા ગાળામાં નિયમિત વધઘટ જોવા મળે તો તે મોસમી વધઘટ કહેવાય છે. મોસમી વધઘટની અસર જાણવા માટે માહિતી દૈનિક, અઠવાડિક, માસિક, ત્રિમાસિક હોય તો જ તે શક્ય બને છે. આપણી ઋતુ, રીત રસમ તહેવારો વગેરેને લીધે ઉદ્‌ભવતી વધઘટ મોસમી વધઘટ હોય છે. દા.ત. શિયાળામાં ગરમ કપડાનું વેચાણ, દિવાળીના તહેવારો દરમ્યાન તૈયાર કપડા અને મિઠાઈનું વેચાણ, ઉનાળામાં ઠંડાપીણાનું વેચાણ. સામાન્ય રીતે મોસમી વધઘટના આવર્તનનો ગાળો વધુમાં વધુ 1 વર્ષ હોય છે. ઉપરોક્ત ઉદાહરણોમાં દર વર્ષે વધારો જોવા મળે છે, કેટલાંક કિસ્સામાં એક વર્ષ કરતાં ઓછો સમય પણ મોસમી વધઘટનો ગાળો હોઈ શકે. દા.ત. રેસ્ટોરન્ટની દૈનિક આમદનીની શ્રેણીનો અભ્યાસ કરીએ તો દર શનિ-રવિવારે તેની આમદનીમાં નોંધપાત્ર વધારો જણાય છે. આમ આ ઉદાહરણમાં આવર્તનનો ગાળો માત્ર એક અઠવાડિયું ગણાય. તેવી જ રીતે કોઈ ધર્મસ્થાનમાં દર્શનાર્થીઓની દૈનિક માહિતીમાં જો એમ જણાય કે દર પૂનમના દિવસે શ્રદ્ધાળુઓનો ઘસારો વધુ છે તો આ માહિતીની શ્રેણીમાં મોસમી વધઘટના આવર્તનનો સમય એક મહિનો ગણી શકાય.

આમ, વધુમાં વધુ એક વર્ષ કે તેથી ઓછા સમયે ઉદ્ભવતી નિયમિત વધઘટને મોસમી વધઘટ તરીકે ઓળખાય છે.

(3) ચક્રિય વધઘટ :

એક વર્ષથી વધારે સમયના અંતરે લગભગ નિયમિત રીતે જોવા મળતાં ફેરફારોને ચક્રિય વધઘટ કહી શકાય. મોસમી વધઘટ કરતાં ચક્રિય વધઘટના આવર્તનમાં નિયમિતતા ઓછી જોવા મળે છે. આ વધઘટોમાં દરેક આવર્તનનો ગાળો સમાન ન હોય તેવું પણ બની શકે. દા.ત. શેર બજારમાં તેજી અને મંદી એ ચક્રિય વધઘટનું ઉદાહરણ છે. તેમાં ધારો કે અગાઉનું તેજી-મંદીનું આવર્તન 4 થી 5 વર્ષ હોય તો જ્યારે નવું આવર્તન શરૂ થાય ત્યારે તે 5 થી 7 વર્ષ કે તેનાથી ઓછુ પણ હોઈ શકે. આ પ્રકારની વધઘટ વેપાર ચક્રોને લીધે ઉદ્ભવે છે. કોઈ પણ વેપારચક્રના ચાર તબક્કા હોય છે, મંદી, વૃદ્ધિ, તેજી અને પડતી. વસ્તુઓના ભાવ ઉત્પાદન વેચાણ શેરના ભાવો વગેરેની શ્રેણીમાં વેપાર ચક્રોની અસર જોવા મળે છે ચક્રિય વધઘટ પણ મોસમી વધઘટની જેમ વલણની સરખામણીએ ઓછો આવર્તન સમય ધરાવતી હોઈ તેને અલ્પકાલીન વધઘટ ગણી શકાય.

(4) અનિયમિત વધઘટ અથવા યાદચ્છિક વધઘટ :

જે વધઘટોને વલણ, મોસમી વધઘટ કે ચક્રિય વધઘટ ન કહી શકાય તેવી વધઘટોને અનિયમિત વધઘટ અથવા યાદચ્છિક વધઘટ કહી શકાય. સામાયિક શ્રેણીમાં કોઈ દેખીતા ચોક્કસ કારણો વગર કોઈ આકસ્મિક, અણધાર્યા ફેરફારો થાય તો તે અનિયમિત વધઘટની અસર કહી શકાય. દા.ત. ફેક્ટરીમાં હડતાળને લીધે ઉત્પાદનમાં થતો ઘટાડો, ધરતીકંપને લીધે બહુમાળી મકાનોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો, રોગચાળા વખતે દવાનું વેચાણ વગેરે અનિયમિત વધઘટના ઉદાહરણો છે. આ વધઘટોની આગાહી બિલકુલ અશક્ય છે કેમ કે તે તદ્દન અનિયમિત અને આકસ્મિક ઉદ્ભવે છે અને તેથી જ અનિયમિત વધઘટને અંકુશ કરી શકાતી નથી.

અનિયમિત વધઘટને બાદ કરતાં બાકીની ત્રણેય વધઘટમાં થોડી નિયમિતતાનું પ્રમાણ રહેલું છે તેથી અનિયમિત વધઘટની અસર જાણવા માટે અન્ય વધઘટો શોધી તેની અસરોને મૂળ શ્રેણીમાંથી નાબૂદ કરવામાં આવે છે.

સામાયિક શ્રેણીના પૃથક્કરણનો મુખ્ય હેતુ ભવિષ્યની કિંમતનું અનુમાન કરવાનો છે, પરંતુ અનિયમિત વધઘટની હાજરીને લીધે તેમાં ભૂલ (ત્રુટિ) થવાની સંભાવના રહેલી છે.

હવે આપણે સામાયિક શ્રેણીના પૃથક્કરણના પ્રારંભના પગથિયા તરીકે વલણ શોધવાની રીતોનો અભ્યાસ કરીશું.

10.5 વલણના માપનની રીતો

આપણે વલણ માપવા માટેની નીચેની ત્રણ રીતોનો અભ્યાસ કરીશું.

(1) આલેખની રીત

(2) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

(3) ચલિત સરેરાશની રીત

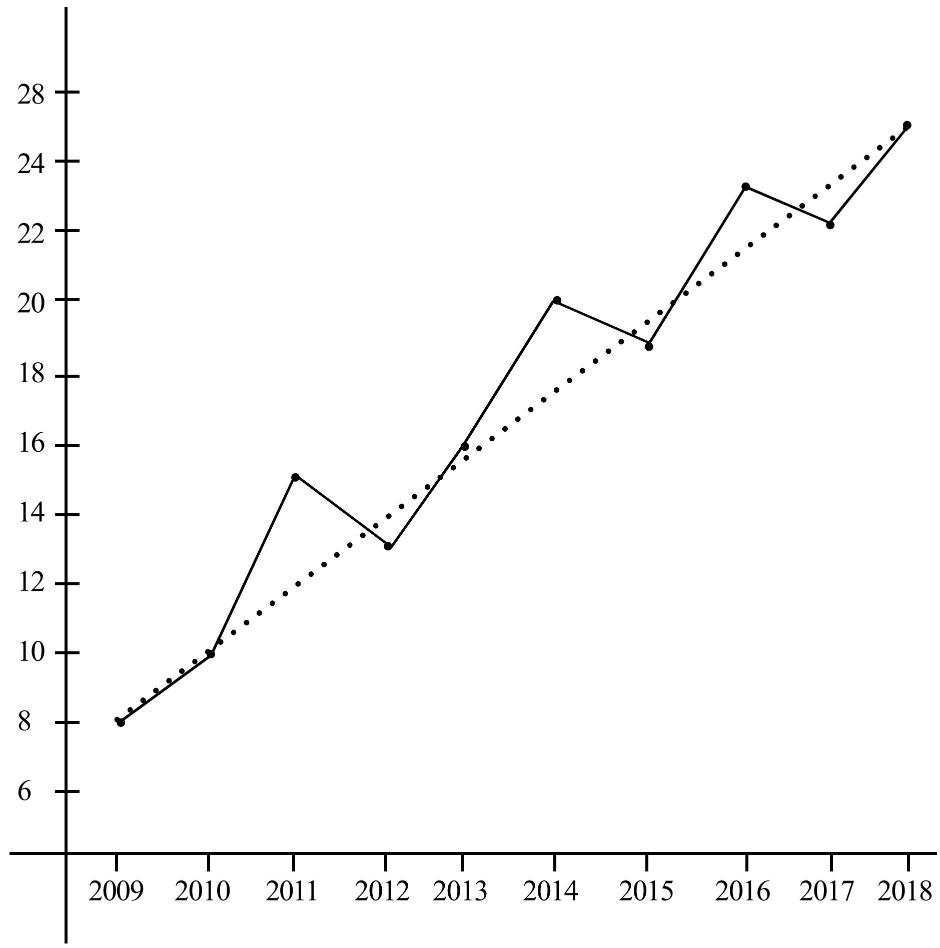
આલેખની રીત

આપેલ સામાયિક શ્રેણીમાં સમયને 't' વડે દર્શાવી x-અક્ષ પર અને સાપેક્ષ સામાયિક ચલ 'y' ને y-અક્ષ પર લઈ બિંદુઓ (t, y) ને આલેખપત્રમાં યોગ્ય સ્કેલમાપ લઈ દર્શાવવામાં આવે છે. આ બધાં જ બિંદુઓને ક્રમમાં સીધા જોડતા મળતા આલેખને સામાયિક શ્રેણીનો આલેખ કહે છે. સામાન્ય રીતે આ આલેખ અલ્પકાલીન વધઘટોને લીધે રેખાખંડોના સમૂહ વાળી વાંકીચૂંકી રેખા જેવો દેખાય છે. ત્યારબાદ માત્ર અંદાજે આ બિંદુઓની વચ્ચેથી પસાર થતો સરળ વક્ર દોરવામાં આવે છે. આમ કરવાથી અલ્પકાલીન વધઘટોને ધ્યાનમાં ન લઈ વલણનો વક્ર મળે છે. આ વક્રને તેની જ ઢબમાં લંબાવીને ભવિષ્ય માટે સામાયિક ચલની કિંમતનું અનુમાન મેળવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ-1 : એક ફેક્ટરીમાં છેલ્લાં દસ વર્ષમાં થયેલ એકમોના ઉત્પાદન (હજારમાં)ની માહિતી નીચે મુજબ છે. તે પરથી આલેખની રીતે સુરેખ વલણ મેળવો.

વર્ષ	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ઉત્પાદન (હજારમાં)	8	10	15	13	16	20	19	23	22	25

જવાબ : x-અક્ષ પર સમય (વર્ષ) અને y-અક્ષ પર ઉત્પાદનની કિંમતો લઈ (વર્ષ, ઉત્પાદન) બિંદુઓને આલેખમાં દર્શાવીએ.

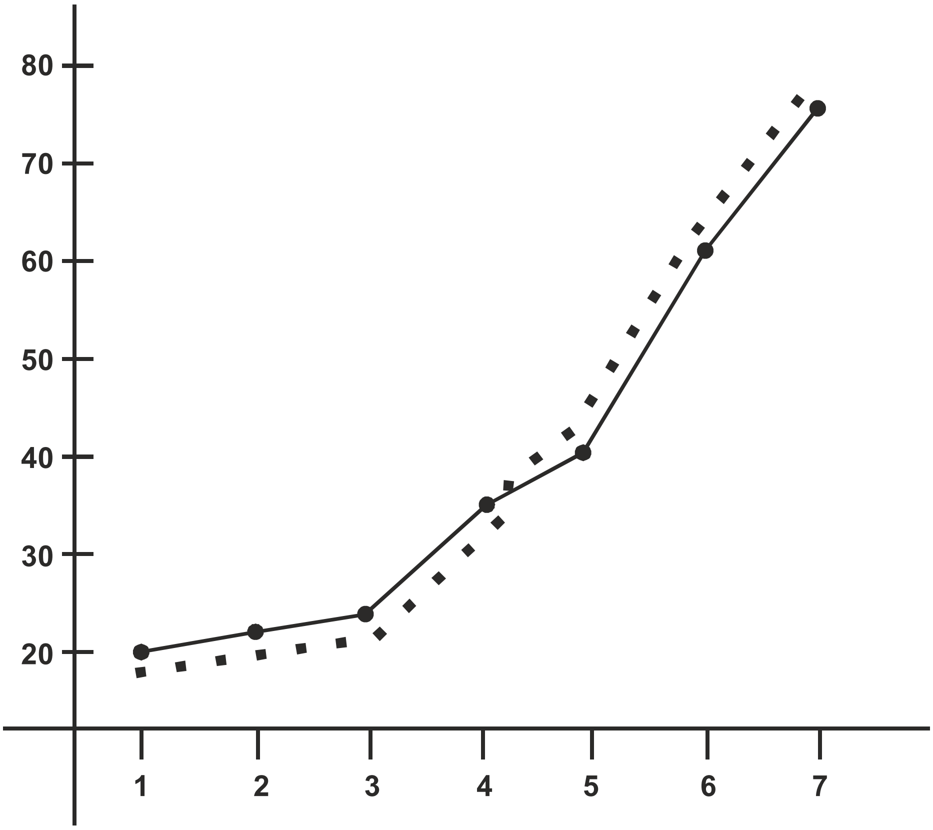


આલેખમાં જોઈ શકાય છે કે શ્રેણીનું વલણ સુરેખ પ્રકારનું છે તેથી વલણ માટે અંદાજે બિંદુઓની વચ્ચેથી પસાર થતી સુરેખ (તૂટક) વલણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ-2 : શેર બજારમાં તેજી દરમ્યાન છેલ્લા સાત દિવસોમાં એક કંપનીના શેરના બંધ ભાવની નીચે આપેલી માહિતી પરથી આલેખની રીતે વલણ મેળવો.

દિવસ	1	2	3	4	5	6	7
શેરનો ભાવ (રૂા.)	20	21	23	35	40	60	75

જવાબ :



આલેખમાં જોઈ શકાય છે કે શ્રેણીનું વલણ સુરેખ નથી પરંતુ વક્રીય છે. તેથી વલણ માટે અંદાજે વચ્ચેથી પસાર થતો વક્ર (તૂટક) વલણ દર્શાવે છે.

આલેખ રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ નીચે મુજબ છે.

ગુણ :

(1) આ રીત ખૂબ જ સરળ છે.

(2) કોઈ પણ ગાણિતિક ક્રિયા કર્યા વગર વલણ અંગે જાણી શકાય છે.

(3) વલણ સુરેખ છે કે વક્રીય તે જાણી શકાય છે.

મર્યાદા :

(1) અંદાજથી જ વલણનો વક્ર દોરવાનો હોઈ જુદી જુદી વ્યક્તિઓ એક જ સામાયિક શ્રેણીના આલેખ પરથી જુદા જુદા વક્ર દોરી શકે છે અને તેથી સામાયિક ચલના અનુમાનો વ્યક્તિ લક્ષી બને છે.

(2) કોઈ ચોક્કસ ગાણિતીય સૂત્રનો ઉપયોગ થતો નથી તેથી વક્ર પરથી મળતા અનુમાનો સંપૂર્ણપણે ચોક્કસ હોતા નથી. અનુમાનોની વિશ્વસનીયતા ચકાસી શકાતી નથી.

ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત :

આપણે જોયુ કે આલેખની રીતે મળતા અનુમાનો સંપૂર્ણપણે વિશ્વસનીય હોય તે જરૂરી નથી અને તે વ્યક્તિલક્ષી પણ હોય છે. ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત એક ગાણિતિક રીત છે કે જેના દ્વારા શ્રેષ્ઠ અનુમાન મેળવી શકાય છે.

જો સામાયિક શ્રેણીના આલેખમાં બિંદુઓ લગભગ સુરેખાની આસપાસ વિખરાયેલા જોવા મળે તો સુરેખ વલણ મેળવવામાં આવે છે. તે જ રીતે જો બિંદુઓ કોઈ વક્રની આસપાસ જોવા મળે તો વક્રીય એટલે કે અસુરેખ વલણ મેળવવામાં આવે છે. આપણે સુરેખ વલણ અને વક્રીય વલણમાં ફક્ત દ્વિઘાતી પરવલય વલણના સમીકરણોનો અભ્યાસ કરીશું.

ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે મળતા સમીકરણને શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજીત સમીકરણ પણ કહેવાય છે કારણ કે આ સમીકરણ મેળવવામાં નીચેની બે બાબતોનું ધ્યાન રાખવામાં આવે છે.

(i) વક્ર પર ન હોય તેવા બિંદુઓથી વક્ર પરના લંબ અંતરો (ત્રુટિ)નો સરવાળો શૂન્ય થાય.

(ii) ત્રુટિઓના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ થાય.

સુરેખ વલણ

જો આપેલ માહિતી સુરેખ વલણ ધરાવતી હોય તો $y = a + bx$ સુરેખ સમીકરણ દ્વારા વલણ રજૂ કરી શકાય છે. અહીં x એ સમય આધારિત ચલ, y એ સામાયિક શ્રેણીની કિંમત છે અને a અને b અચળાંકો છે. આ અચળાંકો મેળવવા માટે નીચેના પ્રામાણ્ય સમીકરણોનો ઉપયોગ થાય છે.

$$\sum y = na + b\sum x$$
$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$

દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ :

જો આપેલ માહિતી દ્વિઘાતી પરવલય પ્રકારનું વક્રીય વલણ ધરાવતી હોય તો $y = a + bx + cx^2$ સમીકરણ સ્વરૂપે તેને રજૂ કરી શકાય છે અને અચળાંકો a, b અને c શોધવા માટે નીચેનાં પ્રામાણ્ય સમીકરણોનો ઉપયોગ થાય છે.

$$\sum y = na + b\sum x + c\sum x^2$$
$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$$
$$\sum x^2y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$$

સુરેખ અને દ્વિઘાતી પરવલય વલણના સમીકરણોમાં રહેલ અચળાંકો શોધી વલણનું ચોક્કસ સ્વરૂપ મળે છે. ત્યારબાદ સમય ચલ (x) ની કિંમત મૂકી તેને અનુરૂપ સામાયિક ચલની કિંમતનું અનુમાન મેળવી શકાય છે.

નોંધ : (1) સામાન્ય રીતે સામાયિક શ્રેણી સમયના ક્રમિક અંતરે જ મેળવવામાં આવે છે. આ સંજોગોમાં ગણતરીની સરળતા ખાતર સમય (t) પરથી સમય આધારિત ચલ (x) નીચે મુજબ લેવાય છે.

★ જો વર્ષો (સમય)ની સંખ્યા એકી હોય તો,

$$x = \frac{t - \text{મધ્ય વર્ષ}}{\text{સમાન અંતર}}$$

આમ કરવાથી x = ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.......... મળે છે, કે જેથી $\sum x = 0$ થાય છે.

★ જો વર્ષો (સમય)ની સંખ્યા બેકી હોય તો,

$$x = \frac{t - \text{મધ્યવર્ષ}}{\text{સમાનઅંતર}/2} = 2\left(\frac{t - \text{મધ્યવર્ષ}}{\text{સમાનઅંતર}}\right)$$

આમ કરવાથી x = ..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ... મળે છે, કે જેથી $\sum x = 0$ થાય છે.

(2) જો કોઈ આકસ્મિક કારણોસર સામાયિક શ્રેણીની કિંમતોના સમય ક્રમિક અંતરે ન હોય તો

x = (t-મધ્યવર્ષ) લઈ જરૂરી ગણતરી કરી શકાય છે, પરંતુ આ સંજોગોમાં $\sum x = 0$ હંમેશા થતુ નથી.

ઉદાહરણ-3 : નીચે આપેલ માહિતી પરથી સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરો અને તે પરથી વર્ષ 2016નું વેચાણનું પૂર્વાનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
વેચાણ (હજાર રૂ.માં)	120	135	155	165	185

જવાબ : ધારો કે સુરેખ વલણનું સમીકરણ y = a + bx છે અને a અને b તેના અચળાંકો છે.

વર્ષ t	વેચાણ (હજારમાં) y	x $=\left(\frac{t-2013}{1}\right)$	x^2	xy
2011	120	-2	4	-240
2012	135	-1	1	-135
2013	155	0	0	0
2014	165	1	1	165
2015	185	2	4	370
n = 5	760	0	10	160

પ્રામાણ્ય સમીકરણોમાં મેળવેલી કિંમતો મૂકતાં,

$$\sum y = na + b\sum x \qquad \sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$

$$760 = 5a + b(0) \qquad 160 = a(o) + b(10)$$

$$\therefore a = \frac{760}{5} = 152 \qquad \therefore b = \frac{160}{10} = 16$$

સુરેખ વલણનું સમીકરણ y = a + bx માં અચળાંકો a અને b ની કિંમતો મૂકતાં તેનું ચોક્કસ સ્વરૂપ નીચે મુજબ મળે.

$$y = 152 + 16x$$

જ્યાં, $x = \left(\frac{t-2013}{1}\right)$

હવે વર્ષ 2016 માટે પૂર્વાનુમાન શોધવા માટે. t = 2016 લેતાં $x = \left(\frac{2016-2013}{1}\right) = 3$ થશે.

તેથી, વેચાણનું પૂર્વાનુમાન y = 52 + 16 (3)
= 152 + 48
= 200 (હજાર રૂ.)

ઉદાહરણ-4 : નીચેની માહિતી પરથી સુરેખ વલણનું સમીકરણ મેળવો અને આપેલા વર્ષો માટે વલણની કિંમતો શોધો.

વર્ષ	2001	2002	2003	2004	2005	2006
ઉત્પાદન (કરોડ રૂ.માં)	7	10	12	14	17	24

જવાબ : ધારો કે સુરેખ વલણનું સમીકરણ y = a + bx છે અને a અને b તેનાં અચળાંકો છે.

અહીં વર્ષોની સંખ્યા n = 6 બેકી છે. તેથી સ્પષ્ટ છે કે મધ્યવર્ષ 2003.5 થશે.

વર્ષ t	ઉત્પાદન (કરોડ રૂ.માં) y	x $x = 2\left(\frac{t-2003.5}{1}\right)$	x^2	xy	અનુમાનિત વલણ y = 14+1.54x
2001	7	-5	25	-35	14 + 1.54 (-5) = 6.3
2002	10	-3	9	-30	14 + 1.54 (-3) = 9.38
2003	12	-1	1	-12	= 12.46
2004	14	1	1	14	= 15.54
2005	17	3	9	51	= 18.62
2006	24	5	25	120	= 21.7
n = 6	84	0	70	108	

પ્રામાણ્ય સમીકરણોમાં મેળવેલી કિંમતો મૂકતાં,

$$\sum y = na + b\sum x \qquad \sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$

$$84 = 6a + b(0) \qquad 08 = a(0) + b(70)$$

$$\therefore a = \frac{84}{6} = 14 \qquad \therefore b = \frac{108}{70} = 1.54$$

સુરેખ વલણ y = a + bx નીચે મુજબ મળે.

y = 14 + 1.54x

જ્યાં, $x = 2\left(\frac{t-2003.5}{1}\right)$

હવે, ઉપરોક્ત વર્ષો માટે x = -5, -3, -1, 1, 3, 5 મૂકતાં વલણની કિંમતો મળે જે કોષ્ટકમાં છેલ્લાં ખાનામાં દર્શાવેલી છે.

ઉદાહરણ-5 : નીચે આપેલ માહિતી પરથી સુરેખ વલણ શોધો અને વર્ષ 2020 માટે નફાનું પૂર્વાનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2008	2010	2012	2014	2016
નફો (લાખ રૂ.માં)	25	37	50	65	78

જવાબ : ધારો કે સુરેખ વલણનું સમીકરણ y = a + bx છે અને a અને b તેના અચળાંકો છે.

અહીં વર્ષોની સંખ્યા એકી છે અને ક્રમિક અંતર 2 વર્ષ છે તેથી મધ્ય વર્ષ 2012 થશે.

વર્ષ t	નફો (લાખ રૂ.માં) y	$x=\left(\frac{t-2012}{2}\right)$	x^2	xy
2008	25	-2	4	-50
2010	37	-1	1	-37
2012	50	0	0	0
2014	65	1	1	65
2016	78	2	4	156
n = 5	255	0	10	134

પ્રામાણ્ય સમીકરણોમાં મેળવેલી કિંમતો મૂકતાં,

$$\sum y = na + b\sum x \qquad \sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$

$$255 = 5a + b(0) \qquad 134 = a(0) + 6(10)$$

$$\therefore a = \frac{255}{5} = 51 \qquad \therefore b = \frac{134}{10} = 13.4$$

તેથી, સુરેખ વલણનું સમીકરણ y = a + bx નીચે મુજબ મળે.

y = 51 + 13.4 x

જ્યાં, $x=\left(\frac{t-2015}{2}\right)$

વર્ષ 2020 માટે $x=\left(\frac{2020-2012}{2}\right)=4$ થશે.

તેથી નફાનું પૂર્વાનુમાન y = 51 + 13.4 (4)

= 51 + 53.6

= 104.6 (લાખ રૂ.)

ઉદાહરણ-6 નીચેની માહિતી પરથી દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ મેળવો અને વર્ષ 2018 માટે પૂર્વાનુમાન શોધો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
ઉપજ (ટનમાં)	11.3	10.1	11.5	15.5	22.1

જવાબ : ધારો કે દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ $y = a + bx + cx^2$ અને a, b તથા c તેના અચળાંકો છે.

વર્ષ t	ઉપજ (ટનમાં) y	$x = \left(\frac{t-2013}{1}\right)$	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
2011	11.3	-2	4	-8	16	-22.6	45.2
2012	10.1	-1	1	-1	1	-10.1	10.1
2013	11.5	0	0	0	0	0	0
2014	15.5	1	1	1	1	15.5	15.5
2015	22.1	2	4	8	16	44.2	88.4
n = 5	70.5	0	10	0	34	27	159.2

પ્રામાણ્ય સમીકરણોમાં મેળવેલી કિંમતો મૂકતાં,

$$\sum y = na + b\sum x + c\sum x^2$$
$$70.5 = 5a + b(0) + c\,(10)$$
$$\therefore 5a + 10C = 70.5 \quad ....(i)$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$$
$$27 \quad = a(0) + b\,(10) + (0)$$
$$\therefore b \quad = \frac{27}{10} = 2.7$$

$$\sum x^2y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$$
$$159.2 = a\ (10) + b\ (0) + c\ (34)$$
$$\therefore 10a + 34c = 159.2 \quad ....(ii)$$

સમીકરણ (i) અને (ii) ને ઉકેલતાં,

$$5a + 10c = 70.5 \qquad \times 2$$
$$10a + 34 = 159.2$$

$$10\,a + 20\,c = 141$$
$$10\,a + 34\,c = 159.2$$
$$- \quad - \qquad -$$
$$-14c = -\ 18.2$$

$\therefore c = \dfrac{18.2}{14} = 1.3$

સમીકરણ (i) માં c = 1.3 મૂકતાં,

5a + 10 (1.3) = 70.5

5a + 13 = 70.5

5a = 70.5 - 13 = 57.5

$\therefore a = \dfrac{57.5}{5} = 11.5$

અચળાંકો a, b અને c ની કિંમતો $y = a + bx + cx^2$ માં મૂકવાથી દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ નીચે મુજબ મળે.

$y = 11.5 + 2.7\ x + 1.3\ x^2$

જ્યાં $x = \left(\dfrac{t - 2013}{1}\right)$

વર્ષ 2018 માટ $x = \left(\dfrac{2018 - 2013}{1}\right) = 5$ મૂકતાં,

ઉપજનું પૂર્વાનુમાન y $= 11.5 + 2.7\ (5) + 1.3\ (5)^2$

$= 11.5 + 13.5 + 32.5$

$= 57.5$ (ટન)

ઉદાહરણ-7 : નીચેની માહિતી પરથી દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ મેળવો અને વર્ષ 2025 માટે પૂર્વાનુમાન શોધો.

વર્ષ	1990	1995	2000	2005	2010	2015
શેરનો ભાવ (રૂ.માં)	25	15	13	19	33	55

જવાબ : ધારો કે દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ $y = a + bx + cx^2$ છે. અને a, b તથા c તેના અચળાંકો છે (મધ્ય વર્ષ = 2002.5)

વર્ષ t	શેરનો ભાવ (રૂ.માં) y	$x = 2\left(\dfrac{t - 2002.5}{5}\right)$	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1990	25	-5	25	-125	-625	-125	625
1995	15	-3	9	-27	81	-45	135
2000	13	-1	1	-1	1	-13	13
2005	19	1	1	1	1	19	19
2010	33	3	9	27	81	99	297
2015	55	5	25	125	625	275	1375
n = 6	160	0	70	0	1414	210	2464

પ્રામાણ્ય સમીકરણોમાં મેળવેલી કિંમતો મૂકતાં,

$$\sum y = na + b\sum x + c\sum x^2$$
$$160 = 6a + b\,(0) + (70)$$
$$\therefore 6a + 70c = 160$$
$$\therefore 3a + 35c = 80 \text{ ....(i)}$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$$
$$210 \;= a\,(0) + b\,(70) + c\,(0)$$
$$\therefore b \;= \frac{210}{70} = 3$$

$$\sum x^2 y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$$
$$2464 \;= a\;(70) + b\;(0) + c\;(1414)$$
$$\therefore 70a + 1414c = 2464$$
$$\therefore 35a + 707c = 1232 \quad \text{................(ii)}$$

સમીકરણ (i) અને (ii) ઉકેલતાં,

$$\begin{array}{llll} 3a + 35\,c = 80 & & & \times\ 35 \\ 35a + 707\,c = 1232 & & & \times\ 3 \\ 105a & + 1225c & = 2800 & \\ 105a & + 2121c & = 3696 & \\ - & - & - & \\ \hline & -\ 896c & = -\ 896 & \end{array}$$

$$\therefore c = 1$$

c ની કિંમત સમીકરણ (i) માં મૂકતાં,

$3a + 35\ (1) = 80$

$3a \ = 80 - 35$

$3a \ = 45$

$$\therefore a = 15$$

અચળાંકો a, b અને c ની કિંમતો $y = a + bx + cx^2$ માં મૂકવાથી દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ નીચે મુજબ મળે.

$y = 15 + 3x + x^2$

જ્યાં, $x = 2\left(\dfrac{t - 2002.5}{5}\right)$

વર્ષ 2025 માટે $x = 2\left(\dfrac{2025 - 2002.5}{5}\right) = 9$ મૂકતાં,

શેરના ભાવનું પૂર્વાનુમાન y $= 15 + 3\ (9) + (9)^2$

$= 15 + 27 + 81$

$= 123$ રૂ.

ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતના ગુણ અને મર્યાદા :

ગુણ :

(1) વલણ શોધવાની એક ચોક્કસ ગાણિતિક રીત છે.

(2) પ્રત્યેક સમય માટે વલણનું અનુમાન આ રીતથી મેળવી શકાય છે.

(3) વલણ શોધવાની અન્ય રીતો કરતાં આ રીતથી સચોટ અનુમાન કરી શકાય છે.

મર્યાદા :

(1) આ રીત સંપૂર્ણ ગાણિતિક હોવાથી અન્ય રીતો કરતા વધુ ગણતરીની જરૂર પડે છે.

(2) જો વલણના વક્રનું સ્વરૂપ સ્પષ્ટ ખ્યાલ ન હોય તો કેવા પ્રકારના વક્રનું અન્વાયોજન કરવું તે નક્કી કરવું મુશ્કેલ બને છે.

(3) માહિતીમાં ફક્ત એક જ અવલોકન ઉમેરવામાં આવે તો સમગ્ર ગણતરી ફરી કરવી પડે છે.

ચલિત સરેરાશની રીત :

સરેરાશ (મધ્યકના) લક્ષણનો ઉપયોગ કરી સામાયિક શ્રેણીમાં રહેલી અલ્પકાલીન વધઘટોની અસર દૂર કરી વલણ શોધવા માટેની આ એક સરળ ગાણિતિક રીત છે. અલ્પકાલીન વધઘટોના આવર્તનનો સમય પાછલાં અનુભવો પરથી જાણી તે મુજબ તેટલાં સમયના અવલોકનોની સરેરાશ મેળવવામાં આવે છે. આમ કરવાથી અલ્પકાલીન વધઘટોની અસર દૂર થાય છે અને શોધેલી સરેરાશ કિંમતો સામાયિક ચલનું વલણ દર્શાવે છે.

જ્યારે એકી સંખ્યા (જેમ કે 3, 5, 7......)માં અવલોકનોની ચલિત સરેરાશ શોધવામાં આવે તો તે સરેરાશ મધ્યના અવલોકનની સામે મૂકવામાં આવે છે. દા.ત. જો 5 વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈએ તો તે સરેરાશ મધ્યના એટલે કે ત્રીજા અવલોકનની સામે મૂકવામાં આવે છે. તે જ મુજબ શ્રેણીમાં ઉપરથી એક એક અવલોકન અવગણી જેટલા વર્ષની ચલિત સરેરાશ શોધવાની હોય તે મેળવવામાં આવે છે. આ જ સરેરાશ કિંમતો શ્રેણીનું વલણ દર્શાવે છે.

પરંતુ જ્યારે બેકી સંખ્યા (જેમ કે, 4, 6, 8.......) અવલોકનોની ચલિત સરેરાશ મેળવવાની હોય તો ગણતરીની રીત થોડી બદલાય છે. ધારો કે 4 વર્ષની ચલિત સરેરાશ શોધવાની છે, તો પહેલા પ્રથમ ચાર અવલોકનોની સરેરાશ શોધી મધ્યમાં એટલે કે બીજા અને ત્રીજા અવલોકનની વચ્ચે તે સરેરાશ મૂકવામાં આવે છે. તે જ રીતે શ્રેણીમાં ઉપરથી એક એક અવલોકન અવગણી પછીના ચાર કિંમતોની સરેરાશ તે અવલોકનોના મધ્યની સામે મૂકવામાં આવે છે. આ બધી જ સરેરાશો કોઈ બે વર્ષની વચ્ચે આવતી હોવાથી ફરી બબ્બે સરેરાશોની પણ સરેરાશ શોધી તેઓની મધ્યની સામે મૂકવામાં આવે છે. આમ કરવાથી 4 વર્ષની ચલિત સરેરાશો મળે છે. પણ ગણતરીની સરળતા ખાતર ચાર ચાર વર્ષના ચલિત સરવાળા શોધી તે પછી બબ્બે વર્ષના સરવાળા કરવામાં આવે છે અને આ સરવાળાને 8 વડે ભાગવાથી આપણને 4 વર્ષની રીતે ચલિત સરેરાશની કિંમતો મળે છે.

નોંધ : ચલિત સરેરાશની રીતમાં શરૂઆત અને અંતના અવલોકનો (કેટલા વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈએ છીએ તે મુજબ)ની સામે વલણની કિંમતો મેળવી શકાતી નથી કારણકે શોધેલા ચલિત સરેરાશો મધ્યના વર્ષની સામે મૂકવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ-8 : કોઈ એક જીવન જરૂરિયાતની વસ્તુના છેલ્લા દસ વર્ષના ભાવ નીચે મુજબ છે. ત્રણ વર્ષની ચલિત સરેરાશોની રીતે વલણ શોધો. અલ્પકાલીન વધઘટો પણ મેળવો.

વર્ષ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ભાવ (રૂ.માં)	5	7	10	7	11	13	10	12	15	14

જવાબ :

વર્ષ	ભાવ y (રૂા.માં)	ત્રણ વર્ષનો ચલિત સરવાળો	ત્રણ વર્ષની ચલિત સરેરાશ વલણ (T)	અલ્પકાલીન વધઘટ y − T
1	5	–	–	–
2	7	5+7+10 = 22	$\frac{22}{3} = 7.33$	7 - 7.33 = -0.33
3	10	7+10+7 = 24	$\frac{24}{3} = 8$	10 - 8 = 2
4	7	10+7+11 = 28	$\frac{28}{3} = 9.33$	7 - 9.33 = -2.33
5	11	7+11+13 = 31	$\frac{31}{3} = 10.33$	11 - 10.33 = 0.67
6	13	11+13+10 = 34	$\frac{34}{3} = 11.33$	13 - 11.33 = 1.67
7	10	13+10+12 = 35	$\frac{35}{7} = 11.67$	10 - 11.67 = -1.67
8	12	10+12+15 = 37	$\frac{37}{3} = 12.33$	12 - 12.33 = -0.33
9	15	12+15+14 = 41	$\frac{41}{3} = 13.67$	15 - 13.67 = 1.33
10	14	-	-	-

ઉદાહરણ-9 : એક ફેક્ટરીના છેલ્લા દસ ત્રિમાસના વેચાણના આંકડા પરથી પાંચ વર્ષની રીતે ચલિત સરેરાશો લઈ વલણ તેમજ ટૂંકાગાળાની વધઘટો મેળવો.

વર્ષ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
વેચાણ (લાખ રૂા.માં)	52	54	58	60	65	56	60	63	68	69

જવાબ :

ત્રિમાસ	વેચાણ (લાખ રૂ.માં) y	પાંચ વર્ષનો ચલિત સરવાળો	પાંચ વર્ષની ચલિત સરેરાશ વલણ (T)	ટૂંકાગાળાની વધઘટ (y-T)
1	52	-	-	-
2	54	-	-	-
3	58	52+54+58+60+65 = 289	$\frac{289}{5} = 57.8$	58 - 57.8 = 0.2
4	60	54+58+60+65+56 = 293	$\frac{293}{5} = 58.6$	60 - 58.6 = 1.4
5	65	58+60+65+56+60 = 299	$\frac{299}{5} = 59.8$	65 - 59.8 = 5.2
6	56	60+65+56+60+63 = 304	$\frac{304}{5} = 60.8$	56 - 60.8 = 4.8
7	60	65+56+60+63+68 = 312	$\frac{312}{5} = 62.4$	60 - 62.4 = -2.4
8	63	56+60+63+68+69 = 316	$\frac{316}{5} = 63.2$	63 - 63.2 = -0.2
9	68	-	-	-
10	69	-	-	-

ઉદાહરણ-10 : ચાર વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ નીચેની વિગત પરથી વલણ શોધો. અલ્પકાલીન વધઘટો પણ મેળવો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ઉત્પાદન (ટનમાં)	20	32	40	51	26	40	52	60

જવાબ :

વર્ષ	ઉત્પાદન (ટનમાં) y	ચાર વર્ષનો ચલિત સરવાળો	બબ્બે કિંમતોનો સરવાળો	ચાર વર્ષની ચલિત સરેરાશ (T)	અલ્પકાલીન વધઘટ y - T
2011	20	-	-	-	
2012	32		-	-	-
		143			
2013	40		292	36.5	3.5
		149			
2014	51		306	38.25	12.75
		157			
2015	26		326	40.75	-14.75
		169			
2016	40		347	43.38	-3.38
		178			
2017	52		-	-	-
2018	60		-	-	-

નોંધ : અહીં, 'બબ્બે કિંમતોનો સરવાળો' મથાળું ધરાવતા સ્તંભની કિંમતો ખરેખર 8 મૂળ અવલોકનોનો સરવાળો હોઈ ચાર વર્ષની ચલિત સરેરાશ શોધતી વખતે તેને 8 વડે ભાગવામાં આવે છે.

ચલિત સરેરાશની રીતના ગુણ અને મર્યાદા :

ગુણ :

(1) આ સરળ રીત છે અને ગણિતીય રીત હોવાથી જુદી જુદી વ્યક્તિઓ દ્વારા એક સમાન પરિણામ મળે છે.

(2) આલેખની રીત કરતાં વધુ વિશ્વસનીય છે.

(3) જો અવલોકનો શ્રેણીમાં ઉમેરવામાં આવે તો પણ સમગ્ર ગણતરી ફરી કરવી પડતી નથી.

(4) ચક્રિય વધઘટની અસર તેના વધઘટના ગાળા જેટલી જ ચલિત સરેરાશ લેવાથી આપોઆપ દૂર કરી શકાય છે.

મર્યાદા :

(1) શરૂઆત અને અંતના અવલોકનો માટે વલણ મળતુ નથી.

(2) જો વલણ સુરેખ ન હોય તો આ રીત યોગ્ય નથી.

(3) કોઈ ચોક્કસ ગાણિતિક સૂત્ર મળતુ ન હોઈ, ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત જેટલું સચોટ અનુમાન થઈ શકતુ નથી.

મોસમી વધઘટ માપવાની રીતો

સામાયિક શ્રેણીમાં રહેલ મોસમી વધઘટ શોધવા માટેની નીચેની બે રીતોનો આપણે અભ્યાસ કરીશું.

(1) સાદી સરેરાશની રીત (અથવા મોસમી સૂચકઆંકની રીતે)

(2) ચલિત સરેરાશની રીત

સાદી સરેરાશ (મોસમી સૂચકઆંક)ની રીત

આ એક ખૂબ જ સરળ રીત છે. સામાયિક શ્રેણીમાં રહેલ સામાન્ય મોસમી ફેરફારોની સરખામણીએ કોઈ ચોક્કસ મોસમી ફેરફાર દર્શાવતું ટકાવારી માપ એટલે જ મોસમી સૂચકઆંક. જ્યારે સામાયિક શ્રેણીની માહિતી વર્ષ અને મોસમ મુજબ આપેલી હોય ત્યારે નીચે મુજબ મોસમી સૂચકઆંક મેળવી શકાય છે. અહીં મોસમ તરીકે અઠવાડિયું, દિવસ, મહિનો, ત્રિમાસ વગેરે હોઈ શકે છે.

(i) સૌ પ્રથમ પ્રત્યેક મોસમ માટે અવલોકનોનો સરવાળો કરી તેમની સરેરાશો મેળવવામાં આવે છે.

(ii) દરેક મોસમી સરેરાશોની સરેરાશ એટલે કે સર્વસામાન્ય સરેરાશ મેળવવામાં આવે છે.

(iii) ત્યારબાદ દરેક મોસમ માટે મોસમી સૂચકઆંક નીચેના સૂત્ર પરથી શોધવામાં આવે છે.

$$\text{મોસમી સૂચક આંક} = \frac{\text{મોસમની સરેરાશ}}{\text{સર્વ સામાન્ય સરેરાશ}} \times 100$$

ઉદાહરણ-11 : નીચે આપેલી માહિતી પરથી મોસમી સૂચકઆંકો મેળવો.

	મોસમ			
વર્ષ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2001	25	29	36	40
2002	28	33	40	45
2003	22	27	34	39
2004	24	30	36	42
2005	26	30	38	44

જવાબ : અહીં પ્રત્યેક વર્ષમાં ત્રિમાસ આપેલા છે તેથી તે મોસમ ગણાય. હવે નીચે મુજબ મોસમી સૂચકઆંકોની ગણતરી કરીશું.

	મોસમ			
વર્ષ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2001	25	29	36	4
2002	28	33	40	45
2003	22	27	34	39
2004	24	30	36	42
2005	26	30	38	44
સરવાળો	125	149	184	210
સરેરાશ	25	29.8	36.8	42
મોસમી સૂ.આંક.	$\frac{25}{33.4}\times 100$	$\frac{29.8}{33.4}\times 100$	$\frac{36.8}{33.4}\times 100$	$\frac{42}{33.4}\times 100$
$=\frac{\text{સરેરાશ}}{\text{સર્વસા.સ}}\times 100$	= 74.85	= 89.22	= 108.98	= 125.75

સર્વ સામાન્ય સરેરાશ $= \frac{25 + 29.8 + 36.8 + 42}{4}$

$= \frac{133.6}{4}$

$= 33.4$

ઉદાહરણ-12 : એક કંપનીનું સરેરાશ ત્રિમાસિક વેચાણ રૂા. 250000 થયું હતું. વિવિધ ત્રિમાસના સૂચકઆંકો નીચે મુજબ છે. તો તે પરથી દરેક ત્રિમાસના વેચાણનું અનુમાન શોધો.

ત્રિમાસ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
સૂચકઆંક	90	120	80	110

જવાબ : અહીં, કંપનીનું સરેરાશ ત્રૈમાસિક વેચાણ એટલે કે સર્વ સામાન્ય સરેરાશ રૂા. 250000 છે.

કોઈ ત્રિમાસનો સૂચકઆંક $= \frac{\text{તે ત્રૈમાસનું સરેરાશ વેચાણ}}{\text{સર્વસામાન્ય સરેરાશ}} \times 100$

$\therefore$ મોસમી સૂચકઆંક $= \frac{\text{સરેરાશ વેચાણ}}{250000} \times 100$

$\therefore$ સરેરાશ વેચાણ = 2500 $\times$ મોસમી સૂચકઆંક

ત્રિમાસ	સૂચકઆંક	સરેરાશ વેચાણ = 2500 $\times$ સૂચકઆંક	
Q_1	90	2500 $\times$ 90	= 225000
Q_2	120	2500 $\times$ 120	= 300000
Q_3	80	2500 $\times$ 80	= 200000
Q_4	110	2500 $\times$ 110	= 275000

મોસમી વધઘટ શોધવા માટેની ચલિત સરેરાશની રીત :

સામાન્ય રીતે ચક્રિય વધઘટના એક આવર્તન જેટલો જ ચલિત સરેરાશનો ગાળો લેવામાં આવે છે. તેથી ચક્રિય વધઘટની અસર શ્રેણીમાંથી આપોઆપ દૂર થાય છે. ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ શોધી શ્રેણીના અવલોકનોમાંથી તે બાદ કરતા જે અલ્પકાલીન વધઘટ મળે તેમાં ફક્ત મોસમી વધઘટ અને અનિયમિત વધઘટની અસર જ જોવા મળે છે. આ અલ્પકાલીન વધઘટોની મદદથી દરેક મોસમની સરેરાશ શોધી તે પરથી મોસમી વધઘટ મેળવવામાં આવે છે. અને છેલ્લે અલ્પકાલીન વધઘટમાંથી મોસમી વધઘટ બાદ કરવાથી અનિયમિત વધઘટ શોધી શકાય છે.

ઉદાહરણ-13 : એક ઈલેક્ટ્રોનિક્સ સાધનોનું ઉત્પાદન કરતી કંપનીના છેલ્લા ત્રણ વર્ષના ત્રૈમાસિક નફા (લાખ રૂા.)ની નીચે આપેલી વિગત પરથી મોસમી વધઘટો શોધો.

મોસમ				
વર્ષ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2011	56	48	62	46
2012	60	54	66	52
2013	70	56	68	54

જવાબ : અહીં, પ્રત્યેક વર્ષમાં ચાર ત્રિમાસ એટલે કે મોસમ આપી છે. તેથી સૌ પ્રથમ આપેલ માહિતી પરથી ચાર વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટો નીચે મુજબ મેળવવામાં આવે છે.

વર્ષ		નફો (લાખ રૂા.) y	ચાર વર્ષનો ચલિત સરવાળો	બબ્બે કિંમતોનો સરવાળો	ચલિત સરેરાશ વલણ (T)	અલ્પકાલીન વધઘટ
2011	Q_1	56		-	-	-
	Q_2	48		-	-	-
			212			
	Q_3	62		428	53.5	8.5
			216			
	Q_4	46		438	54.75	-8.75
			222			
2012	Q_1	60		448	56	4
			226			
	Q_2	54		458	57.25	-3.25
			232			
	Q_3	66		474	59.25	6.75
			242			
	Q_4	52		486	60.75	-8.75
			244			
2013	Q_1	70		490	61.25	8.75
			246			
	Q_2	56		494	61.75	-5.75
			248			
	Q_3	68		-	-	-
	Q_4	54		-	-	-

અલ્પકાલીન વધઘટો પરથી મોસમી વધઘટો નીચે મુજબ મેળવી શકાય છે.

અલ્પકાલીન વધઘટ				
વર્ષ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2011	-	-	8.5	-8.75
2012	4	-3.25	6.75	-8.75
2013	8.75	-5.75	-	-
સરવાળો	12.75	-9	15.25	-17.5
સરેરાશ	6.375	-4.5	7.625	-8.75

હવે સરેરાશોની સરેરાશ એટલે કે સર્વ સામાન્ય સરેરાશ મેળવી તેનું ચિહ્ન બદલતાં જે સુધારો મળે તે દરેક મોસમની સરેરાશમાં ઉમેરવાથી મોસમી વધઘટ શોધી શકાય છે. જે નીચે મુજબ છે.

સુધારો = - (સર્વ સામાન્ય સરેરાશ)

$$= -\left[\frac{6.375+(-4.5)+7.625+(-8.75)}{4}\right]$$

$$= -\left(\frac{0.75}{4}\right) = -0.1875$$

મોસમી વધઘટ = સરેરાશ + સુધારો

Q_1 માટે : મોસમી વધઘટ = 6.375 - 0.1875 = 6.1875

Q_2 માટે : મોસમી વધઘટ = -4.5 - 0.1875 = -4.6875

Q_3 માટે : મોસમી વધઘટ = 7.625 - 0.1875 = 7.4375

Q_4 માટે : મોસમી વધઘટ = -8.75 - 0.1875 = -8.9375

સ્વાધ્યાય

1. નીચે આપેલ પ્રશ્ન માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો.

(i) 'ફેક્ટરીમાં આગ લાગવાથી ઉત્પાદનમાં થયેલો ઘટાડો' કઈ વધઘટ દર્શાવે છે ?

(a) અનિયમિત (b) મોસમી (c) ચક્રિય (d) દીર્ઘકાલીન

(ii) નીચેનામાંથી કયા ફેરફારો મોસમી ઘટકની અસર છે ?

(a) મોબાઈલ ફોનના વેચાણમાં થયેલો સતત વધારો

(b) પેટ્રોલના ભાવમાં થતા ફેરફારો

(c) રેસ્ટોરન્ટ માલિકના દૈનિક આવકમાં શનિ-રવિએ થતો વધારો

(d) આમાંથી એક પણ નહિ

(iii) મોસમી વધઘટોનો આવર્તન સમય કેટલો હોય છે ?

(a) 5 થી 10 વર્ષ

(b) 10 થી 20 વર્ષ

(c) વધુમાં વધુ 1 વર્ષ

(d) એક વર્ષથી વધુ

(iv) વલણ શોધવા દ્વિઘાતી પરવલયનું અન્વાયોજન કરવાની રીત કઈ છે ?

(a) આલેખની રીત (b) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

(c) ચલિત સરેરાશની રીત (d) અર્ધ-સરેરાશની રીત

(v) નીચેના પૈકી કઈ વધઘટનું અનુમાન સીધી રીતે મેળવી શકાતું નથી.

(a) અનિયમિત વધઘટ

(b) ચક્રિય વધઘટ

(c) વલણ

(d) મોસમી વધઘટ

(vi) જો સુરેખ વલણનું સમીકરણ y = 11.5 + 0.75x છે જ્યાં $x = \left(\frac{\text{વર્ષ - 2015}}{5}\right)$. આ

માહિતી પરથી વર્ષ 2025 નું પૂર્વાનુમાન શોધો.

(a) 13 (b) 12.25 (c) 1530.25 (d) એક પણ નહિ

(vii) નીચેના પૈકી કયુ ચક્રિય વધઘટનું ઉદાહરણ છે ?

(a) ચોમાસમાં છત્રીના વેચાણમાં થયેલો વધારો.

(b) રોગચાળા દરમ્યાન થયેલ દવાના વેચાણનો વધારો

(c) શેર બજારમાં તેજીને લીધે થયેલ શેરના ભાવમાં વધારો

(d) આમાંથી એક પણ નહિ.

(viii) નીચેના પૈકી કઈ વધઘટ લાંબાગાળાની વધઘટ છે ?

(a) વલણ (b) મોસમી (c) ચક્રિય (d) અનિયમિત

(ix) સામાયિક શ્રેણીમાં સુરેખ વલણ હોય તો તે શું સૂચવે છે ?

(a) ગુણોત્તર શ્રેણીમાં ફેરફાર (b) અચળ ફેરફાર

(c) હરાત્મક શ્રેણીમાં ફેરફાર (d) ઘાંતાકીય ફેરફાર

(x) નીચેના પૈકી કઈ કઈ વધઘટો અલ્પકાલીન વધઘટો ગણાય છે ?

(a) મોસમી વધઘટ (b) ચક્રિય વધઘટ

(c) અનિયમિત વધઘટ (d) (a) (b) અને (c) બધી જ

2. નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો.

(i) સામાયિક શ્રેણી એટલે શું ?

(ii) સામાયિક શ્રેણીમાં જોવા મળતી વિવિધ વધઘટોના નામ જણાવો.

(iii) સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ એટલે શું ?

(iv) એક વર્ષ કે તેથી ઓછા સમયમાં ફરી જોવા મળતી વધઘટ ને આપ કઈ વધઘટ કહેશો?

(v) અનિયમિત વધઘટનું અનુમાન કરવું અશક્ય છે. આ વિધાનની યથાર્થતા ચકાસો.

(vi) સામાયિક શ્રેણીમાં દસ અવલોકનો આપેલા હોય અને ત્રણ વર્ષની ચલિત સરવાળાની રીતે વલણ શોધીએ તો વલણની કેટલી કિંમતો મળે છે ?

(vii) ચક્રિય વધઘટ એટલે શું ?

(viii) વલણ શોધવાની ચલિત સરેરાશની રીતની મર્યાદાઓ જણાવો.

(ix) સામાયિક શ્રેણીના યોગનીય મૉડેલ વિશે જણાવો.

(x) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતમાં કઈ બે બાબતોનું ધ્યાન રાખવામાં આવે છે ?

3. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) સામાયિક શ્રેણીના ઉપયોગો જણાવો.

(ii) વલણનો અર્થ જણાવી તેના વિશે સમજાવો.

(iii) મોસમી વધઘટ અને ચક્રિય વધઘટ વિશે ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

(iv) આલેખની રીતમાં ગુણ અને મર્યાદાઓ જણાવો.

(v) ચલિત સરેરાશની રીત સમજાવો.

(vi) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત વર્ણવો.

(vii) સુરેખ વલણ અને દ્વિઘાતી પરવલયની રીતે વલણ શોધવા માટેના પ્રામાણ્ય સમીકરણો લખો.

4. નીચેની સામાયિક શ્રેણી પરથી આલેખની રીતે વલણ મેળવો.

માસ	જાન્યુ.	ફેબ્રુ.	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટે.	ઓક્ટો.
ભાવ (રૂા.)	5	7	8	10	13	12	15	17	21	25

5. નીચેની માહિતી પરથી આલેખની રીતે વલણ મેળવો.

વર્ષ	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
ઉત્પાદન (લાખ રૂા.)	63	64	65	70	76	86	98	100	108

6. કાર બનાવતી એક કંપનીનો નફો (કરોડ રૂા.માં) નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે સુરેખ વલણ મેળવો અને વર્ષ 2018 માટે નફાનું અનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
નફો (કરોડ રૂા.)	28	39	46	40	56	52	61

7. નીચેની માહિતી પરથી સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરી દરેક વર્ષ માટે વલણની કિંમતો શોધો.

વર્ષ	2006	2008	2010	2012	2014
વેચાણ (લાખ રૂા.)	35	56	79	80	90

8. નીચે આપેલ વિગત પરથી સુરેખ વલણનું સમીકરણ મેળવી તે પરથી વર્ષ 2019 માટે પૂર્વાનુમાન શોધો.

વર્ષ	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ઉત્પાદન (કરોડ રૂા.)	7	10	12	14	17	24

9. નીચે આપેલ માહિતી પરથી દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ મેળવો. તે પરથી 2014ના વર્ષ માટે ઉપજનું અનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012
ઉપજ (ટનમાં)	250	310	330	390	320

10. નીચેની માહિતી પરથી દ્વિઘાતી વક્રીય વલણનું અન્વાયોજન કરો અને તે પરથી 2012 અને 2013 વર્ષનું પૂર્વાનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2006	2007	2008	2009	2010	2011
શેરનો ભાવ (રૂા.)	144	148	154	172	186	252

11. ત્રણ વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ તેમજ અલ્પકાલીન વધઘટો શોધો.

વર્ષ	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
વેચાણ (હજાર રૂા.)	7	11	12	10	14	18	15	19	21	18

12. એક મોબાઈલ ફોનનું વેચાણ કરતી દુકાનમાં છેલ્લા 12 મહિનામાં વેચાયેલા મોબાઈલ ફોનની સંખ્યા નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી ત્રણ વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ મેળવો. તે પરથી ટૂંકા ગાળાની વધઘટો પણ મેળવો.

મહિનો	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
વેચાણ	70	81	86	73	81	80	67	90	92	88	84	74

13. નીચેની માહિતી પરથી પાંચ વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ શોધો.

વર્ષ	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
ઉત્પાદન (હજાર કિ.ગ્રા.)	19	26	30	37	45	16	25	35	39	47

14. એક કંપનીના છેલ્લા દસ ત્રિમાસના ઉત્પાદનના આંકડાની સામાયિક શ્રેણી પરથી પાંચ વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટો મેળવો.

ત્રિમાસ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ઉત્પાદન (ક્વિ.)	65	69	75	84	91	67	72	78	83	93

15. નીચેની માહિતી પરથી ચાર વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટો મેળવો.

વર્ષ	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
ભાવ (રૂા.)	2	5	4	7	3	6	6	8	6	10

16. નીચે આપેલ વિગત પરથી ચાર વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ શોધો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
સૂચક આંક	164	160	170	216	172	166	174	220

17. નીચેની માહિતી પરથી મોસમી સૂચકઆંકો મેળવો.

મોસમી				
વર્ષ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2011	51	50	52	51
2012	53	60	55	52
2013	55	55	53	53
2014	59	53	60	56

18. નીચેની માહિતી પરથી મોસમી સૂચક આંકો મેળવો.

વર્ષ	શિયાળો	ઉનાળો	ચોમાસુ
2008	90	25	68
2009	85	30	65
2010	78	40	60
2011	93	29	70
2012	80	35	64

19. નીચેની માહિતી પરથી મોસમી વધઘટો શોધો.

વર્ષ	શિયાળો	ઉનાળો	ચોમાસુ
2014	35	30	20
2015	50	44	35
2016	60	55	48

જવાબો :

1. (i) a (ii) c (iii) c (iv) b (v) a

   (vi) a (vii) c (viii) a (ix) b (x) d

2. (iv) મોસમી વધઘટ (v) સાચું છે. (vi) 8 કિંમતો

6. સુરેખ વલણ $y = 46 + 4.82x$ જ્યાં, $x =$ (વર્ષ-2014) અને 2018 માટે નફાનું અનુમાન = 65.28 કરોડ રૂા.

7. સુરેખ વલણ $y = 68 + 13.4x$ જ્યાં $x = \left(\frac{\text{વર્ષ - 2010}}{2}\right)$

   વલણ : 41.2, 54.6, 68, 81.4, 94.8

8. સુરેખ વલણ $y = 14 + 1.54x$ જ્યાં, $x = 2\left(\frac{\text{વર્ષ - 2015.5}}{1}\right)$ અને 2019 વર્ષ માટે

   ઉત્પાદનનું અનુમાન = 24.78 કરોડ રૂા.

9. દ્વિઘાતી વલણ $y = 351.42 + 22x - 15.71x^2$

   જ્યાં $x =$ (વર્ષ-2010) અને વર્ષ 2014 માટે પૂર્વાનુમાન = 188.06

10. દ્વિઘાતી વલણ $y = 158.19 + 9.6x + 1.53x^2$

    જ્યાં $x = 2\left(\frac{\text{વર્ષ - 2008.5}}{1}\right)$

    2012 માટે પૂર્વાનુમાન = 300.36

    2013 માટે પૂર્વાનુમાન = 368.52

11. વલણ : -, 10, 11, 12, 14, 15.67, 17.33, 18.33, 19.33, -

    અલ્પકાલીન વધઘટ : -, 1, 1, -2, 0, 2.33, -2.33, 0.67, 1.67, -

12. વલણ : -, 79, 80, 80, 78, 76, 79, 83, 90, 88, 82, -

    ટૂંકાગાળાની વધઘટ : -, 2, 6, -7, 3, 4, -12, 7, 2, 0, 2, -

13. વલણ : -, -, 31.4, 30.8, 30.6, 31.6, 32, 32.4, -, -

14. વલણ : -, -, 76.8, 77.8, 77.8, 78.4, 78.2, 78.6, -, -

15. વલણ : -, -, 4.63, 4.88, 5.25, 5.63, 6.13, 7, -, -

    અલ્પકાલીન : -, -, -0.63, 2.12, -2.25, 0.67, -0.13, -1, -, -

16. વલણ : -, -, 178.5, 180.25, 181.5, 182.5, -, -

17. મોસમી સૂચકઆંક : 100.46, 100.46, 101.38 અને 97.70

18. મોસમી સૂચકઆંક : 140.13, 52.30 અને 107.57

19. મોસમી વધઘટ : 11.07, 1.18, -12.26

એકમ 11

ધંધાકીય પૂર્વાનુમાન

-: રૂપરેખા :-

11.1 ધંધાકીય પૂર્વાનુમાનનો અર્થ અને ઉપયોગો

11.2 પૂર્વાનુમાનનાં પ્રકાર

11.3 ધંધાકીય પૂર્વાનુમાનની ઉપયોગિતા

11.4 ધંધાકીય પૂર્વાનુમાનની રીત

11.5 સ્વાધ્યાય

11.1 ધંધાકીય પૂર્વાનુમાનનો અર્થ અને ઉપયોગો

અર્થ :

(1) **ફ્રેડરિક એ એકબ્લાડનાં મંતવ્ય અનુસાર :** 'કોઈ એક સમયે આપણી પાસે જે માહિતી હોય, તેનું કોઈ બીજા સમયે શું બનશે, તે માટે ઉપયોગ કરવાની રીતને ધંધાકીય પૂર્વાનુમાન કહી શકાય. સમયનાં બે ગાળાને લીધે પૂર્વાનુમાનનો પ્રશ્ન ઉદ્ભવે છે.'

ધંધાકીય પૂર્વાનુમાન એ ભૂતકાળની માહિતીનું પૃથક્કરણ કરી તેનાં આધારે ભવિષ્યમાં કેવા બનાવો બનશે તેનું અનુમાન છે. આથી જ ભૂતકાળની માહિતીની સચોટતા પર ધંધાકીય પૂર્વાનુમાનની સત્યતા આધાર રાખે છે.

(2) **ટી.એસ.લેવિસ અને આર.એ.ફોડુસનાં અભિપ્રાય મુજબ :** 'ધંધાકીય પૂર્વાનુમાન એટલે કોઈપણ એક સમયે આપણી પાસે જે માહિતી છે, તેને આધારે ભવિષ્યમાં કોઈ ચોક્કસ સમય માટે અનુમાન કરવાની રીત.'

ધંધાનાં એક થી વધુ પાસાં માટે ભવિષ્ય અંગે હકીકત પર આધારિત બુદ્ધિપૂર્વકની ગણતરી એટલે પૂર્વાનુમાન. આવી આગાહીઓ ધંધાની માંગ, કાચામાલની કિંમત, મૂડી ખર્ચની નફાકારકતા તેમજ નાણાંની પ્રાપ્તિ અંગે હોઈ શકે.

(3) **કિમ્બાલ અને કિમ્બાલનાં મત મુજબ :** 'આધારણ એટલે અમુક અંશે ભૂતકાળનાં અનુભવો પરથી સંબંધિત ઔદ્યોગિક ક્ષેત્રોમાંની પરિસ્થિતિઓની તપાસ દ્વારા માહિતી મેળવી ભાવિનાં ગર્ભમાં રહેલા બનાવો આલેખવાની કળા.'

(4) **લીઓ બાર્નેસનાં શબ્દોમાં :** ધંધાકીય પૂર્વાનુમાન એટલે 'ભવિષ્ય અંગે બધી વાજબી શક્યતાઓની ગણતરી.

જે અનુભવસિદ્ધ તાર્કિક અને સંગીન આંકડાશાસ્ત્રીય તેમ જ આર્થિક પદ્ધતિઓ દ્વારા છેલ્લામાં છેલ્લી બધી જ તાજેતરની માહિતીનાં પૃથક્કરણ રચાયેલી ઘટનાઓ હોય તેમજ, જેને સંચાલકે પોતાનાં અંગત બુદ્ધિપૂર્વકનાં નિર્ણયને આધારે તેમજ પોતાનાં ઉદ્યોગનાં ધંધાકીય જ્ઞાનને આધારે સુધારેલી હોય.'

ઉપરોક્ત વ્યાખ્યાઓને આધારે નીચે મુજબનાં તારણો મેળવી શકાય.

(1) પૂર્વાનુમાન તાજેતરની છેલ્લામાં છેલ્લી તમામ માહિતીને આધારે કરવામાં આવે છે, પરંતુ આ માહિતીઓ પ્રશ્ન સાથે સુસંગત હોવી જોઈએ.

(2) આ પદ્ધતિમાં આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ કરવાથી વધુ ચોક્કસ પરિણામો મેળવી શકાય છે. પરંતુ પદ્ધતિઓ અનુભવસિદ્ધ અને તાર્કિક હોવી જોઈએ.

(3) આ પદ્ધતિ દ્વારા મળનાર પરિણામો અંગે, ઉચ્ચ સંચાલકો વિચારણા કરીને તેને પોતાનાં જ્ઞાન અને અનુભવને આધારે મુલવતાં હોવા જોઈએ.

ઉપયોગો :

પૂર્વાનુમાન એ સંચાલનનું એક મહત્ત્વનું કાર્ય છે એનો સૌપ્રથમ ખ્યાલ હેનરી ફેયોલે રજૂ કરેલો. તેમણે જણાવેલું કે ધંધાકીય યોજના અનેક નાની-નાની યોજનાઓના સમૂહ વડે બનતી હોય છે. જે બીજું કશું નહિ પણ ફક્ત એક પૂર્વાનુમાન છે.

અહીં સ્પષ્ટ કરવું જરૂરી બને છે કે, પૂર્વાનુમાન એટલે નજીકનાં ભવિષ્ય એટલે કે એક દિવસ, એક અઠવાડિયું કે એક મહિના માટે હોય શકે અથવા તો પાંચ કે દસ વર્ષ જેવા લાંબાગાળા માટે પણ હોઈ શકે.

પૂર્વાનુમાન અને આગણન વચ્ચેનો મુખ્યભેદ તપાસતા એમ કહી શકાય કે કોઈપણ માહિતી જે અસ્તિત્વમાં હોય તેના વિશેની વૈજ્ઞાનિક ધારણાને આગણન કહી શકાય, જ્યારે ભવિષ્યની કોઈ માહિતીનાં અનુમાન કે વર્તારાને પૂર્વાનુમાન કહે છે.

પૂર્વાનુમાન આપણને આર્થિક ચલરાશિઓ જેવી કે વસ્તી, રોજગારી, રોકાણ, વ્યાપાર, સમતુલા વગેરેના અભ્યાસમાં મદદ કરે છે. આ પ્રકારનાં ચલ માટે પૂર્વાનુમાન મહ્દ અંશે લાંબાગાળા એટલે કે પાંચ, દસ કે વીસ વર્ષ માટે કરવાનું હોય છે.

આ પ્રકારનાં પૂર્વાનુમાનને 'પ્રેક્ષપ' પણ કહી શકાય અને તે મળેલી કિંમત યોગ્ય ધંધાકીય નીતિ ઘડવામાં ઉપયોગી બને છે. ધંધાકીય ક્ષેત્રે ઉત્પાદન, વેચાણ વગેરે અંગે પૂર્વાનુમાન કરવાનું જરૂરી બને છે અને તે બાબતે પૂર્વાનુમાન કરી શકાય તો વ્યાપાર અંગે લાભદાયક કાર્યક્રમ ઘડી શકાય.

ધંધાકીય પૂર્વાનુમાન એ વ્યાપારી, અર્થશાસ્ત્રી, તેમજ સમગ્ર સમાજ માટે ઉપયોગી છે. જો કોઈપણ વ્યાપારી ક્ષેત્રે નજીકનાં ભવિષ્યમાં મંદીની સંભાવના હોય તેવું આપણે જાણી શકતા હોઈએ તો તેની અસર ઓછી કરવા માટેનાં પગલાં આપણે લઈ શકીએ. તેવી જ રીતે જો નજીકનાં ભવિષ્યમાં ફુગાવા વિશે પૂર્વાનુમાન થઈ શકે તો તેનાથી મળતાં લાભ પણ લઈ શકાય. ભવિષ્યમાં ઉદ્‌ભવનાર માંગ અથવા વસ્તુની કિંમત, વ્યાપાર જો યોગ્ય રીતે અનુમાન કરી શકે તો તે સફળતા મેળવી શકે.

પૂર્વાનુમાનમાં સમયગાળો/ગાળો ખૂબ જ અગત્યનો હોય છે. પૂર્વાનુમાનનો ગાળો એટલે છેલ્લામાં છેલ્લી મળતી માહિતીનો સમય અને સમય માટે પૂર્વાનુમાન કરવાનું હોય તે સમય વચ્ચેનો ગાળો. પૂર્વાનુમાન કોઈ એક દિવસ અથવા એક મહિનો કે 10 વર્ષ માટે પણ હોય શકે. આમ પૂર્વાનુમાન નજીકનાં ભવિષ્ય માટે કે દૂરના ભવિષ્ય માટે હોઈ શકે.

ધંધાકીય સંચાલનમાં મેનેજરનું મુખ્ય કાર્ય સામાન્ય રીતે પૂર્વાનુમાન કરવાનું હોય છે. તેમના ધંધાના એકમ દ્વારા ઉત્પાદિત વસ્તુની ભવિષ્યમાં માંગ કેટલી થશે તે રીતે અનુમાન કરીને ઉત્પાદનની વ્યવસ્થા તેમણે ગોઠવવાની હોય છે. ધંધામાં રોકાયેલા મજૂરો અને બીજા કર્મચારીઓનાં વર્તન તેમજ ઉત્પાદન માટેનાં કાચા માલ વગેરેને ધ્યાનમાં લઈ ઉત્પાદિત થતા માલની ભવિષ્યમાં કેટલી કિંમત રાખવી તેનું તેમણે અનુમાન કરવાનું હોય છે. આ ઉપરાંત વેચાણને પહોંચી વળવા માટે કેટલો જથ્થો તેમણે અગાઉથી બનાવી તૈયાર રાખવો પડશે તે વિશે પણ યોગ્ય પૂર્વાનુમાનો નક્કી કરવાનાં હોય છે. ધંધાકીય પૂર્વાનુમાનની યોગ્ય પદ્ધતિ

વગર સમગ્ર ધંધા ઉપર અંકુશ રાખવો શક્ય નથી. કોઈપણ ધંધાની પ્રગતિ તેમાં ઉત્પાદિત થતા માલની માંગ વગેરે માટે સચોટ પૂર્વાનુમાન ઉપર અવલંબે છે.

ભૂતકાળમાં બનેલા બનાવો ઉપરથી ભવિષ્યમાં બનનાર બનાવો વિશે આગાહી કરી શકાય છે અને પૂર્વાનુમાનનો આ જ પાયો છે. ભૂતકાળ, વર્તમાનકાળ અને ભવિષ્યકાળને સાંકળવાથી જ યોગ્ય પૂર્વાનુમાન કરી શકાય છે. સામાન્ય રીતે કોઈપણ સમયે બનેલાં આર્થિક બનાવોનું બીજા કોઈ સમયે સંપૂર્ણતઃ પુનરાવર્તન ઉદ્ભવી શકે નહિ. છતાંય ભૂતકાળનો આધાર લઈ ભવિષ્ય વિશે યોગ્ય અનુમાનો કરવાં જ પડતાં હોય છે અને આવા અનુમાનોમાં કેટલેક અંશે ત્રુટિ રહેવાની જ. અનુમાનમાં રહેલી ત્રુટિનું માપ સંભાવનાના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને મેળવી શકાય છે.

11.2 પૂર્વાનુમાનનાં પ્રકાર

પૂર્વાનુમાનનાં પ્રકારો તેમાં રહેલી મુદ્દત અને સપાટીને આધારે ગણાવી શકાય. જે નીચે મુજબ છે.

પૂર્વાનુમાનનાં પ્રકાર

(A) મુદ્દતની દૃષ્ટિએ	(B) સપાટીની દૃષ્ટિએ	(C) હેતુની દૃષ્ટિએ
(1) દીર્ઘ મુદ્દતી	(1) વિશાળ પૂર્વાનુમાન	(1) એક હેતુક
(2) મધ્યમ મુદ્દતી	(2) સૂક્ષ્મ પૂર્વાનુમાન	(2) બહુ હેતુક
(3) ટૂંકી મુદ્દતી		

(A) મુદ્દતની દૃષ્ટિએ થતા પૂર્વાનુમાન મુખ્યત્વે ત્રણ પ્રકાર છે :

(1) દીર્ઘ મુદ્દતી પૂર્વાનુમાન :

પાંચ વર્ષથી વધુ સમય માટેનાં અંદાજોને દીર્ઘ મુદ્દતી કે લાંબાગાળાનું પૂર્વાનુમાન કહેવામાં આવે છે. લાંબાગાળાનાં અંદાજો ખૂબ ચોક્કસ હોતા નથી. કારણ કે ધંધા પર અસર કરતાં પરિબળોનો ચોક્કસ અંદાજ કાઢવો શક્ય નથી, છતાં સ્થાન પસંદગી, ધંધાના વિકાસ કે સંશોધન વગેરે લાંબાગાળાનાં પૂર્વાનુમાન ઉપયોગી છે. વસ્તી વધારે, રાષ્ટ્રીય આવક અને સંપત્તિ, ઔદ્યોગિક અને કૃષિ ઉત્પાદનમાં થઈ રહેલા ફેરફારોને ધ્યાનમાં લેવા માટે દીર્ઘ મુદ્દતી પૂર્વાનુમાન ઉપયોગી થઈ શકે છે.

(2) મધ્યમ મુદ્દતી પૂર્વાનુમાન :

મધ્યમ મુદ્દતી પૂર્વાનુમાન સામાન્ય રીતે પાંચ વર્ષથી ઓછા પણ એક વર્ષથી મુદ્દત ધરાવતા ગાળાના હોય છે. આવું પૂર્વાનુમાન પ્રમાણમાં થોડું વધુ ચોક્કસ હોય છે. ખાસ કરીને મૂડી ખર્ચની યોજનાઓની નફાકારકતા જાણવા માટે આ પ્રકારનું પૂર્વાનુમાન ઉપયોગી છે.

(3) ટૂંકી મુદ્દતી પૂર્વાનુમાન :

એક વર્ષ કે તેથી ઓછી મુદ્દતનાં પૂર્વાનુમાનને ટૂંકી મુદ્દતી પૂર્વાનુમાનનાં નામથી ઓળખવામાં આવે છે. માંગને અસર કરતાં પરિબળોની અસર ટૂંકાગાળા માટે

અંદાજવાનું કામ મુશ્કેલ નથી. કેટલીકવાર તો આ રીતે ખૂબ ચોક્કસ પરિણામો પણ મેળવી શકાય છે. દા.ત. એલી લીલી કંપનીએ પોતાની દવાનાં વેચાણ અંગે કરેલ આવા ટૂંકાગાળાનાં પૂર્વાનુમાન અને વાસ્તવિક વેચાણ વચ્ચે માંડ 2 ટકાનો તફાવત હતો.

(B) સપાટીની દૃષ્ટિએ થતાં પૂર્વાનુમાનનાં મુખ્યત્વે બે પ્રકાર છે :

(1) વિશાળ પૂર્વાનુમાન (Macro Forecast) :

આખા અર્થતંત્ર કે વાણિજ્ય જગતને આવરી લેતાં પૂર્વાનુમાનને 'વિશાળ પૂર્વાનુમાન' કહેવામાં આવે છે. દા.ત. રાષ્ટ્રીય કુલ આવક, રાષ્ટ્રીય કુલ ઉત્પાદન, દેશની કુલ રોજગારી, ઘરેલું વસ્તુઓનું કુલ વેચાણ, કુલ માંગ વિ…

(2) સૂક્ષ્મ પૂર્વાનુમાન (Micro Forecast) :

પેઢીની સપાટીએ થતાં પૂર્વાનુમાન સંચાલકોની દૃષ્ટિએ સૌથી મહત્ત્વનાં છે. જેને 'સૂક્ષ્મ પૂર્વાનુમાન' કહેવામાં આવે છે. દા.ત. વ્યક્તિગત પેઢી પોતાના માલની માંગ અંદાજે, નફાનો અંદાજ મૂકે, ખર્ચની તારિજ અંદાજે અથવા પોતાનાં મૂડી રોકાણની યોજનામાંથી ઉદ્ભવતા રોકડ પ્રવાહનો અંદાજ મૂકે તો તે સૂક્ષ્મ પૂર્વાનુમાન ગણાય.

(C) હેતુની દૃષ્ટિએ થતાં પૂર્વાનુમાનનાં બે પ્રકાર છે :

(1) એક હેતુક પૂર્વાનુમાન :

જે પૂર્વાનુમાન માત્ર એક જ હેતુની પૂર્તિ માટે કરવામાં આવે છે તેને એક હેતુક પૂર્વાનુમાન કહેવાય. દા.ત. ગ્રાહકોની માંગ થતા ફેરફારો નોંધવા વસ્તુની કિંમત કેટલી રાખવી જોઈએ.

(2) બહુ હેતુક પૂર્વાનુમાન :

એક કરતાં વધુ હેતુની પ્રાપ્તિ માટે જો પૂર્વાનુમાન કરવામાં આવે તો તે બહુ હેતુલક્ષી પૂર્વાનુમાન કહેવાય છે. દા.ત. માંગમાં થતા ફેરફારો જાણવા-પુરવઠાની સપાટી અંગેનો અંદાજ મેળવવો, તેમજ ભાવ-વલણો તપાસવા કિંમત વધ-ઘટ તપાસવી વિ…

11.3 ધંધાકીય પૂર્વાનુમાનની ઉપયોગીતા/મહત્ત્વ (Importance of Forecasting)

પૂર્વાનુમાન એ સંચાલક માટે દીવાદાંડી સમાન છે. તેને આધારમાં રાખીને સાવચેતીપૂર્વક આગળ વધવામાં જોખમનું પ્રમાણ ઓછું અને સફળતાની શક્યતા વધુ છે. જેમ હવાઈ જહાજમાં સલામત અને સફળ ઉડ્ડયન માટે હવામાનની આગાહીનું મહત્ત્વ છે, તેમ સંચાલકોને પૂર્વાનુમાનનું મહત્ત્વ છે. કેમ કે તે ભવિષ્યમાં આર્થિક વાવાઝોડાં કે ઝંઝાવાતનો ખ્યાલ અગાઉથી આપે છે. વેપાર ઉદ્યોગનાં આદિકાળથી એક યા બીજા સ્વરૂપે પૂર્વાનુમાન કરવામાં આવે છે. આધુનિક યુગને પૂર્વાનુમાન યુગ કહીએ તો કાંઈ જ અતિશયોક્તિ નથી. પૂર્વાનુમાનની ઉપયોગીતા કે મહત્ત્વ નીચેના મુદ્દાઓ દ્વારા દર્શાવી શકાય.

(1) વેચાણ આયોજનમાં મદદરૂપ :

સંચાલકોને આયોજન કરવામાં અને આગળ વધવામાં તે પથદર્શક બની રહે છે. ફેયોલે જણાવ્યું છે કે, મેં પચાસ વર્ષ પહેલાં પૂર્વાનુમાનની આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ શરૂ કરેલો.

જ્યારે હું કોલસાની એક ખાણનું સંચાલન કરતો હતો. ત્યારે આ પદ્ધતિ દ્વારા મને એવી સરસ સેવા મળેલી કે ત્યાર પછી જે-જે જુદા-જુદા ઉદ્યોગો મને સોંપાયા તે દરેકમાં તેનો ઉપયોગ મેં ખચકાયા વિના કર્યો. હું તો તેને સંચાલનનું એક કિંમતી હથિયાર માનું છું.

(2) સર્વગ્રાહી અંકુશ :

પૂર્વાનુમાન કરતાં કંપનીની ભૂતકાળની સિદ્ધિ અને વર્તમાન પરિસ્થિતિ સરખાવતાં કેટલીક ખામીઓ જોવા મળે છે. જે સંચાલકો માટે લાલબત્તી સમાન છે. દા.ત. પૂર્વાનુમાન એમ સૂચવે કે વેચાણ ઘટશે, તો સંચાલકોને પોતાનાં વેચાણ પ્રયત્નો સુધારવા કયા અને કેવા પ્રયત્નો કરવા તેનો વિચાર કરવાની તક મળે છે.

(3) સંચાલકોની દૂરંદેશી :

પૂર્વાનુમાન વડે સંચાલકો ભવિષ્યનો યોગ્ય અંદાજ લગાવીને વિચારતા થાય છે. જેમ હોકાયંત્ર અને બેરોમિટર દરિયામાં વહાણ ચલાવવામાં જરૂરી દિશાસૂચન અને હવામાનની આગાહી કપ્તાનને પૂરી પાડે છે, તેમ પૂર્વાનુમાન, સંચાલકને ભાવિ-દિશાસૂચન અને જરૂરી માર્ગદર્શન પૂરું પાડે છે. તેથી સંચાલકો વધુ વાસ્તવિક અને દૂરંદેશીવાળા બને છે.

(4) નાણાંકીય આયોજનનાં આધારણ માટે ઉપયોગી :

નાણું એ કોઈપણ સાહસની જીવાદોરી સમાન છે. સાહસ પાસે જો પૂરતાં પ્રમાણમાં મૂડી ના હોય તો સાહસનું અસ્તિત્વ જોખમમાં મૂકાય છે. પૂરતી મૂડીના પ્રમાણનો આધાર વૈજ્ઞાનિક પૂર્વાનુમાન પર રહેલો હોય છે.

(5) નવા વેપાર-ઉદ્યોગ શરૂ કરવા પૂર્વાનુમાન ઉપયોગી :

નવા ઉદ્યોગની સ્થાપના વખતે અનેક પરિબળોનો વિચાર કરવો પડે છે. જે વૈજ્ઞાનિક પૂર્વાનુમાન વગર શક્ય નથી. જો પૂર્વાનુમાન યોગ્ય રીતે કરવામાં આવ્યું હોય તો, સંચાલકોને ધંધાની સફળતા માટે નસીબ આધારિત રહેવું પડતું નથી.

(6) નફો કમાવવાની શક્તિ વિશે :

મૂડી રોકાણની મોટી યોજનાઓ તેની નફાકારકતાનાં પૂર્વાનુમાન વિના શક્ય નથી. અનેક યોજનાઓ પૈકી એવી યોજના પસંદ કરવાની હોય છે કે જે સૌથી વધુ નફાકારક હોય. આ દરેક માટે નફાનું પૂર્વાનુમાન જ ઉપયોગી નીવડે.

(7) યોગ્ય અને સાચા નિર્ણયોનો આધાર :

ધંધાની દરેક પ્રવૃત્તિની બાબતમાં અગાઉથી નિર્ણયો લેવા માટે પૂર્વાનુમાન માર્ગદર્શક નીવડે છે. કાચો માલ કેટલો ખરીદવો, ઉત્પાદન કેટલું કરવું, કયા પ્રકારનાં કેટલા કર્મચારીઓ કેટલા રાખવા વગેરે નિર્ણયો પૂર્વાનુમાનને આધારે જ લઈ શકાય.

(8) સહકાર, સંકલન અને સમૂહ ભાવના વધે :

પૂર્વાનુમાનની પ્રક્રિયામાં મહત્ત્વનાં અધિકારીઓ ભાગ લેતા હોઈ જૂથ-ભાવનાનો વિકાસ કરવામાં, તેમનો સહકાર મેળવવામાં અને તેમનાં કાર્યનું સંકલન કરવામાં પણ તે ઉપયોગી બને છે. ફેરફાર સાથે તાલ મિલાવવાની અધિકારીઓની માનસિક તૈયારી લીધેલ અમુક નિર્ણયોનાં કારણો વગેરેની માહિતી તેનું દૃષ્ટિબિંદુ વિશાળ બનાવે છે.

(9) રાષ્ટ્રીય સમસ્યાનાં ઉકેલમાં મદદરૂપ :

રાષ્ટ્રનાં કેટલાંક પ્રશ્નોનાં ઉકેલમાં પૂર્વાનુમાનનો ફાળો પણ ઉલ્લેખનીય છે, જેને આધારે વ્યાપાર ચક્રની તીવ્રતા ઘટી છે. મંદીનો ગાળો ટૂંકો બન્યો છે અને અમુક અંશે રોજગારીની પરિસ્થિતિમાં સુધારો કરવામાં પણ તેનો ફાળો છે.

11.4 ધંધાકીય પૂર્વાનુમાનની રીત

કોઈપણ વ્યાપાર અથવા ધંધામાં સંચાલક પોતાનાં અનુભવને આધારે અથવા આંતરસૂઝથી ભવિષ્યની માંગ, તેની પડતરકિંમત વગેરે માટે અનુમાનો કરતાં જ હોય છે. પરંતુ કેટલીક વખત બિનઅનુભવી સંચાલક આ રીતનાં અનુમાનો કરે તો તે અનુમાનો ખોટાં પડે તેવું બની શકે છે અને તે દ્વારા લેવામાં આવતા નિર્ણયો નુકસાનકારક સાબિત થાય. આથી જ ધંધાકીય પૂર્વાનુમાન માટે જુદી-જુદી વૈજ્ઞાનિક પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ અનિવાર્ય બની રહે છે.

સંચાલન ક્ષેત્રે ઉદ્ભવતા અનેક પૂર્વાનુમાનના પ્રશ્નો માટે વિવિધ પૂર્વાનુમાનની રીતો અસ્તિત્વમાં છે અને દરેક રીત, વિવિધ પરિસ્થિતિ અનુસાર ઉપયોગીતા ધરાવે છે. નીચે દર્શાવેલ પૂર્વાનુમાનની રીતો વાણિજ્ય ક્ષેત્રેનાં પૂર્વાનુમાન માટે વધુ પ્રચલિત છે.

(1) સૂચક આંકની રીત (2) બહિર્વેશનની રીત (3) નિયત સંબંધની રીત (4) આર્થિક મોડેલની રીત (5) મોજણીની રીત (6) આલેખની રીત (7) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત (8) ઘાતાંકીય સરળીકરણની રીત.

વિદ્યાર્થી મિત્રો, ઉપરોક્ત પૂર્વાનુમાનની રીતો પૈકી તમારાં અભ્યાસક્રમમાં 'ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત' અને 'ઘાતાંકીય સરળીકરણ'ની રીત હોવાથી તેનો અભ્યાસ વિશદ્ છણાવટથી કરીશું.

- **ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત :**

જો માહિતીને કોઈ ગાણિતિક પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને વિધેયનાં સ્વરૂપમાં રજૂ કરવામાં આવે તો તે દ્વારા રચાતી શ્રેણીની કોઈપણ વર્ષ માટેની કિંમતનું અનુમાન કરી શકાય છે. આપેલી માહિતીનું વલણ રજૂ કરતું કોઈ સમીકરણ મેળવવામાં આવે તો તે, સમીકરણ ઉપરથી પૂર્વાનુમાન થઈ શકે. માહિતીને રજૂ કરવા માટે જુદાં-જુદાં વિધેયો રચી શકાય. પરંતુ અહીં આપણે એવા પ્રકારની માહિતી વિશે વિચારીશું કે જે સુરેખ અથવા દ્વિઘાતી પરવલય દ્વારા રજૂ કરી શકાય. જો આપેલી માહિતી રૈખિક વલણ ધરાવતી હોય તો તે વલણને $y = a + bx$ સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય. અચલાંકો a અને b મેળવવા માટે ન્યૂનતમ વર્ગોની પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

ન્યૂનતમ વર્ગોની પદ્ધતિ દ્વારા અચલાંકો a અને b મેળવવા માટે નીચે પ્રમાણે બે સમીકરણો મળી શકે.

$\Sigma y = na + b\Sigma x$ ....(1)

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$ ....(2)

જ્યાં 'n' એ x અને y નાં અવલોકનોની જોડ દર્શાવે છે. a અને b ની કિંમતો મેળવી રૈખિક વલણનું અન્વાયોજન કરી શકાય અને તે દ્વારા ભવિષ્યનાં કોઈપણ વર્ષ માટે y ની કિંમતનું પૂર્વાનુમાન થઈ શકે.

જો આપેલી માહિતી દ્વિઘાતી પરવલય $y = a + bx + cx^2$ દ્વારા રજૂ કરવી હોય તો ન્યૂનતમ વર્ગોનાં સિદ્ધાંત દ્વારા તે માટેનાં સમીકરણો આગળ દર્શાવ્યા મુજબ મળી શકે.

$\Sigma y = na + b\Sigma x + c\Sigma x^2$ ....(1)

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^2$ ....(2)

$\Sigma x^2y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4$ ....(3)

ઉપરોક્ત ત્રણ સમીકરણો પરથી ત્રણ અચલાંકો a, b અને c ની કિંમતો મેળવી અને દ્વિઘાતી પરવલયનું અન્વાયોજન કરી શકાય. તે ઉપરથી ભવિષ્યનાં વર્ષ માટે y ની કિંમતનું પૂર્વાનુમાન થઈ શકે.

ઉદા.-1 નીચેની માહિતી ઉપરથી સુરેખાનું અન્વાયોજન કરો અને તે ઉપરથી 1998 નાં વર્ષ માટે ઉત્પાદનનું પૂર્વાનુમાન મેળવો.

વર્ષ	1992	1993	1994	1995	1996
ઉત્પાદન (હજાર ટનમાં)	40	50	62	58	60

જવાબ : અહીં વર્ષને ચલ x અને ઉત્પાદનને ચલ y તરીકે દર્શાવીશું. ઉપરાંત x ની કિંમતો મોટી હોવાથી તેને x માં ફેરવીશું.

આ માટે $x = x - 1994$ લઈએ અને x અને y વચ્ચેનો સુરેખ સંબંધ $y = a + bx$ મેળવીએ. x અને y વચ્ચેનો સંબંધ મેળવવા છેલ્લે $x = x - 1994$ મૂકીશું. પ્રમાણ્ય સમીકરણો નીચે પ્રમાણે મળશે.

$\Sigma y = na + b\Sigma x$

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$

ગણતરી માટે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ, $n = 5$

વર્ષ x	ઉત્પાદન હજાર ટનમાં y	$x =$ $(x–1994)$	xy	x^2
1992	40	–2	–80	4
1993	50	–1	–50	1
1994	62	0	0	0
1995	58	1	58	1
1996	60	2	120	4
	270	0	48	10

આ કિંમતો ઉપરનાં સમીકરણમાં મૂકતાં,

$270 = 5a + b(0)$

$48 = a(0) + b(10)$

$\therefore\ a = \dfrac{270}{5} = \therefore\ a = 54$

$\therefore\ b = \dfrac{48}{10} = b = 4.8$

હવે $y = a + bx$ માં a અને b ની કિંમતો મૂકતાં,

$y = 54 + 4.8\ (x - 1994)$ મૂકતાં

$y = 54 + 4.8\ (x - 1994)$

જો x અને y ની વચ્ચે સુરેખ સંબંધ દર્શાવે છે.

1998 નાં વર્ષ માટે ઉત્પાદનનું પૂર્વાનુમાન મેળવવા, આ સંબંધમાં $x = 1998$ મૂકીએ તો.

$y = 54 + 4.8\ (1998 - 1994)$

$y = 54 + 4.8$

$y = 54 + 19.2$

$\therefore\ y = 73.2$ ટન

આમ 1998 ના વર્ષ માટે ઉત્પાદનનું પૂર્વાનુમાન 73.2 હજાર ટન થશે.

ઉદા.-2 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સુરેખાનું અન્વાયોજન કરો. તે ઉપરથી 1992 માટે નફાનું પૂર્વાનુમાન મેળવો.

વર્ષ	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
નફો (લાખ રૂ.માં)	38	40	65	72	69	60	87	95

જવાબ : અહીં વર્ષને ચલ x અને નફાને ચલ y તરીકે દર્શાવીશું. ઉપરાંત x ની કિંમત મોટી હોવાથી તેને x માં ફેરવીશું. આ માટે $x = 2\ (x - 1986.5)$ લઈશું.

(નોંધ : અવલોકનની જોડ બેકી સંખ્યામાં હોય ત્યારે x ની મધ્યની બે કિંમતોની સરેરાશને ઉગમબિંદુ તરીકે લઈને x ની કિંમતો વચ્ચેનાં ગાળાને અડધા વડે ભાગી x મેળવવા જોઈએ. જેથી $\Sigma x = 0$ થાય. આમ કરવાથી ગણતરી સરળ બને છે.)

ધારો કે $y = a + 6x$ એ x અને y વચ્ચેનો રૈખિક સંબંધ દર્શાવે છે. પ્રામાણ્ય સમીકરણો નીચે પ્રમાણે મળશે :

$\Sigma y = na + b\Sigma x$

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$

જેની ગણતરી માટે નીચે મુજબનું કોષ્ટક બનાવીશું. $n = 8$ છે :

વર્ષ x	નફો (લાખ રૂ.માં) y	$x = 2$ $(x - 1986.5)$	xy	x^2
1983	38	–7	–266	49
1984	40	–5	–200	25
1985	65	–3	–195	9
1986	72	–1	–72	1
1987	69	1	69	1
1988	60	3	180	9
1989	87	5	435	25
1990	95	7	665	49
	526	0	616	168

આ કિંમતો ઉપરનાં સમીકરણમાં મૂકતાં,

$526 = 8a + b(0)$ $616 = a(0) + 168b$

$\therefore\ 526 = 8a$ $\therefore\ 616 = 168b$

$\therefore\ a = \frac{526}{8}$ $\therefore\ b = \frac{616}{168}$

$\therefore\ a = 65.75$ $\therefore\ b = 3.67$

$\therefore$ સુરેખાનું સમીકરણ $y = 65.75 + 3.67\, x$ થશે.

આ સમીકરણમાં $x = 2\,(x - 1986.5)$ એ માગેલી સુરેખા દર્શાવે છે. હવે, જ્યારે $x = 1992$ હોય ત્યારે y ની અંદાજીત કિંમત,

$y = 65.75 + 3.67 \times 2\,(1992 - 1986.5)$

$y = 65.75 + 3.67 \times 11$

$y = 65.75 + 40.37$

$y = 106.12$ લાખ રૂ. નફો

$\therefore$ 1992 નાં વર્ષનો અંદાજી નફો 106.12 લાખ રૂ. થાય.

ઉદા.-3 નીચેની માહિતી ઉપરથી સુરેખાનું અન્વાયોજન કરો. તે ઉપરથી 1998 નાં વર્ષ માટે ઉત્પાદનનું પૂર્વાનુમાન કરો, નિરીક્ષિત અને અપેક્ષિત કિંમતો વચ્ચેનાં તફાવતનું કારણ સમજાવો. 2000 નાં વર્ષ માટેનું પૂર્વાનુમાન પણ મેળવો :

વર્ષ	1990	1992	1994	1996	1998
ઉત્પાદન	30	45	54	70	85

જવાબ : વર્ષ ચલ x અને ઉત્પાદનને ચલ y તરીકે દર્શાવીશું. ગણતરી સરળ બનાવવા માટે, $x = \frac{x - 1994}{2}$, $y = Y - 50$ લઈ સુરેખા $y = a + bx$ નું અન્વાયોજન કરીએ. આ માટેનાં પ્રામાણ્ય સમીકરણો નીચે પ્રમાણે થશે :

$\Sigma y = na + b\Sigma x$

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$

ગણતરી માટે નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવીએ, જ્યાં $n = 5$

વર્ષ x	ઉત્પાદન y	$x = \frac{x - 1994}{2}$	$y = Y - 50$	xy	x^2
1990	30	–2	–20	40	4
1992	45	–1	–5	5	1
1994	54	0	4	0	0
1996	70	1	20	20	1
1998	85	2	35	70	4
		0	34	135	10

આ કિંમતો ઉપરનાં સમીકરણોમાં મૂકતાં,

$34 = 5a + b(0)$

$135 = a(0) + b(10)$

$\therefore\ 5a = 34 \qquad \therefore\ 10b = 135$

$\therefore\ a = \frac{34}{5} \qquad \therefore\ b = \frac{135}{10}$

$\therefore\ a = 6.8 \qquad \therefore\ b = 13.5$

સુરેખાનાં સમીકરણ $y = a + bx$ માં, આ કિંમતો મૂકતાં,

$y = 6.8 + 13.5\ x$

$\therefore\ y = y - 50$ અને $x = \frac{x-1994}{2}$ મૂકીએ તો.

સુરેખાનું સમીકરણ $y - 50 = 6.8 + 13.5\left(\frac{x-1994}{2}\right)$ થશે.

હવે $x = 1998$ મૂકતાં y ની અનુમાનિત કિંમત

$y - 50 = 6.8 + 13.5\left(\frac{1998-1994}{2}\right)$

$\therefore\ y - 50 = 6.8 + 27$

$y = 83.8$

1998 માટે y ની નિરીક્ષણ કિંમત 85 છે. જ્યારે અપેક્ષિત કિંમત 83.8 છે. આમ, અહીં અપેક્ષિત અને નિરીક્ષિત કિંમત વચ્ચે તફાવત જોવા મળે છે. કારણ કે અપેક્ષિત કિંમત સુરેખાનાં સમીકરણો દ્વારા મળતી શ્રેષ્ઠ અનુમાનિત કિંમત છે, જે સામાન્ય રીતે આપેલી કિંમત કરતાં જુદી હોય.

હવે 2000 નાં વર્ષ માટેનું પૂર્વાનુમાન શોધીએ.

$y - 50 = 6.8 + 13.5\left(\frac{2000-1994}{2}\right)$

$y = 56.8 + 13.5\ (3) = 97.3$

ઉદા.-4 નીચેની માહિતી માટે સુરેખાનું અન્વાયોજન કરો અને 2000 નાં વર્ષ માટે ઉત્પાદનનું પૂર્વાનુમાન મેળવો.

વર્ષ	1985	1987	1988	1989	1992	1995	1996
ઉત્પાદન (હજાર ટનમાં)	2	3	5	6	10	14	15

જવાબ :

વર્ષ x	ઉત્પાદન (હજાર ટનમાં)	$x =$ $(x - 1989)$	xy	x^2
1985	2	–4	–8	16
1987	3	–2	–6	4
1988	5	–1	–5	1
1989	6	0	0	0
1992	10	3	30	9
1995	14	6	84	36
1996	15	7	105	49
	55	9	200	115

ધારો કે સુરેખાનું સમીકરણ $y = a + bx$ છે,

$\therefore$ પ્રમાણ્ય સમીકરણો :

$\Sigma y = na + b\Sigma$

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$ માં કિંમતો મૂકતાં

$55 = 7a + b(9)$ $\qquad$ $200 = a(9) + b(115)$

$\therefore\ 7a + 9b = 55$ ..... (i) $\qquad$ $9a + 115b = 200$ ..... (ii)

સમીકરણ (i) ને 9 વડે ગુણતાં, સમીકરણ (ii) ને 7 વડે ગુણતાં.

$63a + 81b = 495$

$63a + 805b = 1400$

$-\quad -\quad -$

$-724b = -905$

$$\therefore\ b = \frac{905}{724} = 1.25$$

હવે $7a + 9b = 55$

$\therefore\ 7a + 9(1.25) = 55$

$\therefore\ 7a + 11.25 = 55$

$\therefore\ a = \dfrac{43.75}{7} = a = 6.25$ થાય.

$\therefore$ સુરેખાનું સમીકરણ $= y = 6.25 + 1.25x$ થાય.

$\therefore\ y = 6.25 + 1.25\ (x - 1989)$

$x = 2000$ મૂકતાં

$y = 6.25 + 1.25\ (2000 - 1989)$

$y = 6.25 + 1.25\ (11)$

$y = 6.25 + 13.75$

$y = 20$ (હજાર ટન)

ઉદા.-5 નીચેની માહિતી પરથી દ્વિઘાતી પરવલયનું અન્વાયોજન કરો અને વર્ષ 1972 માટે ઉત્પાદનનું પૂર્વાનુમાન કરો.

વર્ષ	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
ઉત્પાદન (હજાર ટનમાં)	2	6	7	8	10	11	11	10	9

જવાબ : અહીં વર્ષને ચલ x અને ઉત્પાદનને ચલ y વડે દર્શાવીએ અને $x = x - 1967$ લઈ દ્વિઘાતી પરવલય $y = a + bx + cx^2$ નું અન્વાયોજન કરીએ, આ માટે પ્રમાણ્ય સમીકરણો નીચે પ્રમાણે મળશે :

$\Sigma y = na + b\Sigma x + c\Sigma x^2$

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3$

$\Sigma x^2y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4$

ગણતરી માટે નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવીએ, $n = 9$

વર્ષ x	ઉત્પાદન (હજાર ટનમાં) y	$x = x - 1967$	xy	x^2	x^2y	x^3	x^4
1963	2	-4	-8	16	32	-64	256
1964	6	-3	-18	9	54	-27	81
1965	7	-2	-14	4	28	-8	16
1966	8	-1	-8	1	8	-1	1
1967	10	0	0	0	0	0	0
1968	11	1	11	1	11	1	1
1969	11	2	22	4	44	8	16
1970	10	3	30	9	90	27	81
1971	9	4	36	16	144	64	256
	74	0	51	60	411	0	708

→ સમીકરણોમાં કોષ્ટકો મુજબની કિંમતો મૂકતાં,

$74 = 9a + b(0) + c(60)$ ..... (i)

$51 = a(0) + b(60) + c(0)$ ..... (ii)

$411 = a(60) + b(0) + c(708)$ ..... (iii)

→ સમીકરણ (ii) ઉપરથી $51 = 60b$

$\therefore\ b = \frac{51}{60} = b = 0.85$ ..... (1)

→ સમીકરણ (i) અને (iii) ઉપરથી

$74 = 9a + 60c$ ..... (1)

$411 = 60a + 708c$ ..... (2)

$\therefore\ 1480 = 180a + 1200c$ ..... ((1) ને 20 વડે ગુણતાં)

$\therefore\ 1233 = 180a + 2124c$ ..... ((2) ને 3 વડે ગુણતાં)

$-\quad -\quad -$

$247 = -924c$

$\therefore\ c = -\dfrac{247}{924} = (-0.27)$

સમીકરણ (i) માં $c = -0.27$ મૂકતાં

$\therefore 74 = 9a + 60\ (-0.27)$ $y = a + bx + cx^2$ માં આ કિંમતો મૂકતાં

$\therefore\ 74 = 9a - 16.20$ $\therefore\ y = 10.02 + 0.85\ x - 0.27x^2$

$\therefore\ 9a = 90.20$ $\therefore\ x = x - 1967$ મૂકતાં

$a = 10.2$

$y = 10.02 + 0.85\ (x - 1967) - 0.27\ (x - 1967)^2$ એ દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ થશે. 1972 નાં વર્ષ માટે ઉત્પાદનનું પૂર્વાનુમાન મેળવવા $x = 1972$ મૂકીએ તો :

$y = 10.02 + 0.85\ (1972 - 1967) - 0.27\ (1972 - 1967)^2$

$\therefore\ y = 10.02 + 4.25 - 6.75$

$y = 7.52$

$\therefore$ 1972 નાં વર્ષ માટે પૂર્વાનુમાન = 7.52 હજાર ટન.

ઉદા.-6 નીચેની માહિતી પરથી $y = a + bx + cx^2$ પરવલયનું અન્વાયોજન કરો અને તે ઉપરથી 1996-97 વસ્તુનાં ભાવનું પૂર્વાનુમાન કરો.

વર્ષ	1990-91	1991-92	1992-93	1993-94	1994-95	1995-96
ભાવ (રૂ.માં)	100	107	128	140	181	192

જવાબ : અહીં વર્ષને ચલ x તરીકે અને ભાવને y તરીકે દર્શાવીએ અને ગણતરીની સરળતા માટે $x = 2\ (x - 1992.5)$ અને $y = y - 140$ લઈ દ્વિઘાતી પરવલય $y = a + bx + cx^2$ નું અન્વાયોજન કરીએ. તે માટે પ્રામાણ્ય સમીકરણો નીચે પ્રમાણે મળશે :

$\Sigma y = na + b\Sigma x + c\Sigma x^2$

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3$

$\Sigma x^2 y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4$

ગણતરી માટે નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવીએ, $n = 6$

વર્ષ	x	ભાવ y (રૂ.માં)	$x = 2(x - 3.5)$	$y = y - 140$	xy	x^2	x^2y	x^3	x^4
1990-91	1	100	-5	-40	200	25	-1000	-125	625
1991-92	2	107	-3	-33	99	9	-297	-27	81
1992-93	3	128	-1	-12	12	1	-12	-1	1
1993-94	4	140	1	0	0	1	0	1	1
1994-95	5	181	3	41	123	9	369	27	81
1995-96	6	192	5	52	260	25	1300	125	625
			0	8	694	70	360	0	1414

ઉપરનાં સમીકરણોમાં આ કિંમતો મૂકતાં,

$8 = 6a + b(0) + c(70)$ ..... (i)

$69a = a(0) + b(70) + c(0)$ ..... (ii)

$360 = a(70) + b(0) + c(1414)$ ..... (iii)

સમીકરણ (ii) ઉપરથી

$694 = 70b$

$\therefore\ b = 9.91$

સમીકરણ (i) અને (iii) ઉપરથી

$8 = 6a + 70c$

$360 = 70a + 1414c$

સમીકરણ (1) ને 70 વડે અને સમીકરણ (2) ને 6 વડે ગુણતાં અને સમીકરણ (1) માંથી સમીકરણ (2) બાદ કરતાં,

$\therefore\ 560 = 420a + 4900c$

$2160 = 420a + 8484c$

$-\quad -\quad -$

$-1600 = -3584c$

અન્વાયોજન =

$\therefore\ c = \dfrac{1600}{3584}$

$\therefore\ c = 0.45$

સમીકરણ (1) માં $c = 0.45$ મૂકતાં

$8 = 6a + 70\,(0.45)$

$8 = 6a + 31.5$

$\therefore\ 6a = -23.5$

$\therefore\ a = 3.92$

$y = a + bx + cx^2$ માં આ કિંમતો મૂકતાં પરવલયનું સમીકરણ

$y = -3.92 + 9.91x + 0.45x^2$ થશે.

$x = 2\,(x - 3.5)$ અને $y = Y - 140$ મૂકતાં

$y - 140 = -3.92 + 9.91\ \{2(x - 3.5)\} + 0.45\ \{(2(x - 3.5)\}^2$

$\therefore\ y = 136.08 + 9.91\ \{2(x - 3.5) + 0.45\}\ \{2(x - 3.5)\}^2$

એ દ્વિઘાતી પરવલય વક્રનું સ્વરૂપ છે, તેમાં વર્ષ 1996-97 માટે ભાવ શોધવા માટે $x = 7$ મૂકતાં ભાવની પૂર્વમાનિત કિંમત =

$y = 136.08 + 9.91\ (7) + 0.45\ (49)$

$y = 136.08 + 69.37 + 22.05$

$\therefore\ y = 227.50$ રૂ. થશે.

- **ઘાતાંકીય સરળીકરણની રીત :**

વલણ શોધવા એક નવી રીત એટલે ઘાતાંકીય સરળીકરણની રીત છે. ચલિત સરેરાશની રીતમાં વલણ શોધવા માટે આપણે દરેક કિંમતોને સમાન ભાર આપીએ છીએ. પરંતુ ઘાતાંકીય સરળીકરણની રીતમાં જુદા-જુદા પ્રાપ્તાંકોને જે ભાર આપવામાં આવે છે, તે ગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય છે, સૌથી નજીકનાં પ્રાપ્તાંકને સૌથી વધુ ભાર આપવામાં આવે છે અને જેમ જેમ અગાઉનાં પ્રાપ્તાંકો લેવામાં આવે, તેમ તેમ ભાર ગુણોત્તર શ્રેણીમાં ઘટતો જાય છે. સૌથી નજીકનાં પ્રાપ્તાંકને પૂર્વાનુમાન માટે સૌથી વધુ ઉપયોગી ગણી શકાય છે, તે સમજી શકાય તેમ છે. ઘાતાંકીય સરળીકરણ દ્વારા t સમયે મળતી કિંમતને St દ્વારા દર્શાવાય છે. જો સૌપ્રથમ આપેલા અવલોકનને x_1 વડે દર્શાવીએ તો $S_1 = ax_1$ અને બીજા સમય માટે $S_2 = ax_2 + a(1 - a)x_1 = ax_2 + (1 - a)\ S_1$ અહીં a એ સરળીકરણનો આંક કહેવાય છે અને તેની કિંમત 0 અને 1 ની વચ્ચે હોય છે, એટલે $0 \leq a \leq 1$

$S3 = ax_3 + a(1 - a)x_2 + a\ (1 - a)_2\ x_1$

$= ax_3 + (1 - a)\ [ax_2 + a(1 - a)x_1]$

$= ax_3 + (1 - a)S_2$

આ જ પ્રમાણે

$St = a\ xt + (1 - a)St - 1$

જ્યાં $St = 1$ સમયે મળતી ઘાતાંકીય સરળ કિંમત.

$St - 1 = t$ સમય અગાઉનાં બધાં જ પ્રાપ્તાંકોની ઘાતાંકીય ભારિત સરેરાશ.

હવે $St = axt + (1 - a)\ St - 1$

$\therefore\ St = axt + St - 1 - aSt - 1$

$= St - 1 + a\ (xt - St - 1)$

પાછળ આપેલા સૂત્રથી જુદા-જુદા સમયગાળા માટે સરળ કિંમત શોધી શકાય. ત્યારબાદ સરળ કિંમતમાં થયેલો ફેરફાર ΔSt નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય.

$\Delta S_1 - S_0$

$\Delta S_2 = S_2 - S_1$ ..... વગેરે

ત્યારબાદ વલણનું અનુમાન Tt નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય.

$Tt = a\Delta St + (1 - a)\ Tt - 1$

આમ, $T_1 = a\Delta S_1 + (1 - a)\ T_0$

$T_2 = a\Delta S_2 + (1-a)\, T_1$ ..... વગેરે

છેલ્લે, પૂર્વાનુમાન $\hat{x}\,t$ નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય.

$$\hat{x}\,t = St + \left(\frac{1-a}{a}\right) Tt$$

આમ, $\hat{x}\,t = S_1 + \left(\frac{1-a}{a}\right) T_1$

$\hat{x}_2 = S_2 + \left(\frac{1-a}{a}\right) T_2$ ..... વગેરે

આ સમજવા આપણે નીચેનું ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદા.-7 ઘાતાંકીય સરળીકરણનો ઉપયોગ કરીને શરૂઆતની અનુમાનિત કિંમત = 100 અને સરળીકરણનો આંક $a = 0.4$ લઈ નીચેની માહિતી માટે પૂર્વાનુમાન મેળવો.

સમયગાળો t	1975	1976	1977	1978	1979	1980
નિરીક્ષણ કિંમતો xt	110	120	121	125	124	122

જવાબ : અહીં $a = 0.4$, $1-a = 0.6$, $\frac{1-a}{a} = 1.5$ છે.

સમયગાળો t	નિરીક્ષણ કિંમત xt	સરળ કિંમત St	સરળ કિંમતમાં થયેલો ફેરફાર ΔSt	વલણનું અનુમાન Tt	પૂર્વાનુમાન $\hat{x}\,t = St + 1.5\, Tt$
શરૂઆતનું અનુમાન	-	100	-	-	-
1975	110	104	4	1.6	106.4
1976	120	110.4	64	3.52	115.08
1977	121	114.64	4.24	3.81	120.355
1978	125	118.78	4.14	3.96	124.7
1979	124	120.87	2.09	3.21	125.685
1980	122	121.32	0.45	2.11	124.485

$St = St - 1 + a\,(x1 - St - 1)$

1975 માટે $S_1 = S_0 + a(x_1 - S_0)$

$S_1 = 100 + 0.4\,(110 - 100)$

$= 100 + 0.4\,(10)$

$= 100 + 4 = 104$

1976 માટે $S_2 = S_1 + a(x_2 - S_1)$

$S_2 = 104 + 0.4\,(120 - 104)$

$= 104 + 6.4$

$= 110.4$

1977 માટે $S_3 = S_2 + a(x_3 - S_2)$

$S_3 = 110.4 + 0.4\ (121 - 110.4)$

$= 110.4 + 0.4\ (10.6)$

$= 110.4 + 4.24$

$= 114.64$

1978 માટે $S_4 = S_3 + a(x_4 - S_3)$

$S_4 = 114.64 + 0.4\ (125 - 114.64)$

$= 114.64 + 0.4\ (10.36)$

$= 114.64 + 4.14$

$= 118.78$

1979 માટે $S_5 = S_4 + a(x_5 - S_4)$

$S_5 = 118.78 + 0.4\ (124 - 118.78)$

$= 118.78 + 0.4\ (5.22)$

$= 118.78 + 2.09$

$= 120.87$

1980 માટે $S_6 = S_5 + a(x_6 - S_5)$

$S_6 = 120.87 + 0.4\ (122 - 120.87)$

$= 120.87 + 0.4\ (1.13)$

$= 120.87 + 0.45$

$= 121.32$

વલણનું અનુમાન :

$Tt = a\Delta St + (1 - a)\ Tt - 1$

$T_1 = a\Delta St + (1 - a)\ T_0$

1975 માટે $0.4(4) + 0.6(0)$

$= 1.6$

1976 માટે $T_2 = a\Delta S_2 + (1 - a)\ T_1$

$= 0.4(6.4) + 0.6(1.6)$

$= 2.56 + 0.96$

$= 3.52$

1977 માટે $T_3 = a\Delta S_3 + (1 - a)\ T_2$

$= 0.4(4.24) + 0.6(3.52)$

$= 1.7 + 2.11$

$= 3.81$

1978 માટે $T_4 = a\Delta S_4 + (1 - a)\ T_3$

$= 0.4(4.14) + 0.6(3.81)$

$= 1.656 + 2.29$

$= 3.95$

1979 માટે $T_5 = a\Delta S_5 + (1 - a)\ T_4$

$= 0.4(2.09) + 0.6(3.95)$

$= 0.836 + 2.37$

$= 3.21$

1980 માટે $T_6 = a\Delta S_6 + (1 - a)\ T_5$

$= 0.4(0.45) + 0.6(3.21)$

$= 0.180 + 1.93$

$= 2.11$

પૂર્વાનુમાન :

$$\hat{x}\,t = St + \left(\frac{1-a}{a}\right) Tt$$

1975 માટે $\hat{x}\,t = St + \left(\frac{1-a}{a}\right) Tt$

$= 104 + 2.4$

$= 106.4$

1976 માટે $\hat{x}_2 = S_2 + 1.5\ T_2$

$= 110.4 + 1.5(3.52)$

$= 110.4 + 5.28$

$= 115.68$

1977 માટે $\hat{x}_3 = S_3 + 1.5\ T_3$

$= 114.64 + 1.5(3.81)$

$= 114.64 + 5.715$

$= 120.355$

1978 માટે $\hat{x}_4 = S_4 + 1.5\ T_4$

$= 118.78 + 1.5(3.95)$

$= 118.78 + 5.92$

$= 124.70$

1979 માટે $\hat{x}_5 = S_5 + 1.5\ T_5$

$= 120.87 + 1.5(3.21)$

$= 120.87 + 4.815$

$= 125.685$

1980 માટે $\hat{x}_6 = S_6 + 1.5\ T_6$

$= 121.32 + 1.5(2.11)$

$= 121.32 + 3.165$

$= 124.485$

ઉદા.-8 જો $\frac{a}{1-a} = \frac{2}{3}$ અને શરૂઆતનું પૂર્વાનુમાન 100 લઈને વિવિધ વર્ષો માટે ઉત્પાદન અંગેનું પૂર્વાનુમાન મેળવો :

વર્ષ	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
ઉત્પાદન (લાખ રૂ.માં)	120	132	145	161	186	210	225

જવાબ :

સમયગાળો t	નિરીક્ષણ કિંમત xt	સરળ કિંમત St	સરળ કિંમતમાં થયેલો ફેરફાર ΔSt	વલણનું અનુમાન Tt	પૂર્વાનુમાન $\hat{x}\,t$
શરૂઆતનું અનુમાન	-	100	-	-	-
1983	120	108	8	3.2	112.80
1984	132	117.6	9.6	5.76	126.24
1985	145	128.56	10.96	7.84	140.32
1986	161	141.54	12.98	9.89	156.37
1987	186	159.32	17.78	13.04	178.88
1988	210	179.59	20.27	15.93	203.48
1989	225	197.75	18.16	16.82	222.99

$St = St - 1 + a\ (xt - St - 1)$

$\rightarrow\ S_1 = S_0 + a(x_1 - S_0)$

$100 + 0.4\ (120 - 100) = 108$

$\rightarrow\ S_2 = S_1 + a(x_2 - S_1)$

$108 + 0.4\ (132 - 108) = 117.6$

$\rightarrow\ S_3 = S_2 + a(x_3 - S_2)$

$117.6 + 0.4\ (145 - 117.6) = 128.56$

$\rightarrow\ S_4 = S_3 + a(x_4 - S_3)$

$128.56 + 0.4\ (161 - 128.56) = 141.54$

$\rightarrow\ S_5 = S_4 + a(x_5 - S_4)$

$141.54 + 0.4\ (186 - 141.54) = 159.32$

$\rightarrow\ S_6 = S_5 + a(x_6 - S_5)$

$159.32 + 0.4\ (210 - 159.32) = 179.75$

$\rightarrow \quad S_7 = S_6 + a(x_7 - S_6)$

$179.59 + 0.4\ (225 - 179.59) = 197.25$

વલણનું અનુમાન :

$Tt = a\Delta St + (1 - a)\ Tt - 1$

$T_1 = a\Delta St + (1 - a)\ T_0$

$= 0.4(8) + 0.6(0)$

$= 3.2$

$T_2 = a\Delta S_2 + (1 - a)\ T_1$

$= 0.4(9.6) + 0.6(3.2)$

$= 5.76$

$T_3 = a\Delta S_3 + (1 - a)\ T_2$

$= 0.4(10.96) + 0.6(5.76)$

$= 7.84$

$T_4 = a\Delta S_4 + (1 - a)\ T_3$

$= 0.4(12.98) + 0.6(7.84)$

$= 9.89$

$T_5 = a\Delta S_5 + (1 - a)\ T_4$

$= 0.4(17.78) + 0.6(9.89)$

$= 13.04$

$T_6 = a\Delta S_6 + (1 - a)\ T_5$

$= 0.4(20.27) + 0.6(13.04)$

$= 15.93$

$T_7 = a\Delta S_7 + (1 - a)\ T_6$

$= 0.4(18.16) + 0.6(15.93)$

$= 16.82$

પૂર્વાનુમાન :

$$\hat{x}\,t = St + \left(\frac{1-a}{a}\right) Tt$$

$$\hat{x}_1 = S_1 + \left(\frac{1-a}{a}\right) T_1$$

$$= 108 + \left(\frac{1-04}{0.4}\right) 32$$

$$= 112.80$$

$$\hat{x}_2 = S_2 + \left(\frac{1-a}{a}\right) T_2$$

$= 117.6 + 1.5 x (5.76) = 126.24$

$\hat{x}_3 = S_3 + \left(\frac{1-a}{a}\right) T_3$

$= 128.56 + 1.5 (7.84) = 140.32$

$\hat{x}_4 = S_4 + \left(\frac{1-a}{a}\right) T_4$

$= 141.54 + 1.5 (9.89) = 156.37$

$\hat{x}_5 = S_5 + \left(\frac{1-a}{a}\right) T_5$

$= 159.32 + 1.5 (13.04) = 178.88$

$\hat{x}_6 = S_6 + \left(\frac{1-a}{a}\right) T_6$

$= 179.59 + 1.5 (15.93) = 203.48$

$\hat{x}_7 = S_7 + \left(\frac{1-a}{a}\right) T_7$

$= 197.75 + 1.5 (16.82) = 222.99$

11.5 સ્વાધ્યાય

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો :

(1) ધંધાકીય પૂર્વાનુમાન માટે નિયતસંબંધનો ઉપયોગ કરી શકાય છે. આ વિધાનની યથાર્થતા ચકાસો.

(2) ધંધાકીય પૂર્વાનુમાનની પદ્ધતિઓમાં ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતનો મુખ્ય ગેરફાયદો કયો છે ?

(3) ઘાતાંકીય સરળીકરણની પદ્ધતિમાં તાજેતરનાં અવલોકનોને સૌથી વધુ ભાર આપવામાં આવે છે અને ત્યારબાદ તે પહેલાનાં અવલોકનો તરફ જતા .... માં ભાર ઓછો થતો જાય છે.

(4) સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરવા માટે કેટલાં પ્રામાણ્ય સમીકરણોની જરૂર પડે છે ?

(5) ઘાતાંકીય સરળીકરણની રીતમાં જો સરળીકરણ અચલાંક 0.4, $x_1 = 210$ અને શરૂઆતનું પૂર્વાનુમાન 200 હોય તો S_1 ની કિંમત ?

(6) જો $a = 0.4$, $S_1 = 108$, $S_0 = 100$ તો T ની કિંમત શોધો.

(7) શરૂઆતનું પૂર્વાનુમાન 150 તથા $1 - a = 0.6$ લઈ ઘાતાંકીય સરલીકરણનો ઉપયોગ કરી ખૂટતી કિંમતો શોધો.

વર્ષ	વેચાણ	સરળકિંમત	ΔSt	વલણ	પૂર્વાનુમાન
2010	180	?	?	?	?

(8) ચલ y માટેનું સુરેખ વલણ નીચે મુજબ હોય તો વર્ષ 2012 માટે y નું અનુમાન કરો.

$$y = 156.85 + 23.5 \left(\frac{x - 2004}{2}\right)$$

(9) વેચાણ y માટે દ્વિઘાતી પરવલય વલણ નીચે મુજબ છે. જો x એ વર્ષ દર્શાવે, તો વર્ષ 2011 માટે વેચાણ y નું અનુમાન કરો.

$$y = 24.15 + 5.15\,[2(x - 2007.5)] + 0.24\,[2(x - 2007.5)]^2$$

(10) ઘાતાંકીય સરળીકરણની પદ્ધતિમાં $\hat{x} = 116.33$, $S_3 = 110.5$ અને $T3 = 2.5$ હોય તો સરળીકરણ અચલાંક શોધો.

(11) જો $a = 0.4$, $S_1 = 104$, $T_1 = 1.6$ હોય તો $\hat{x}_1$ શોધો.

(12) નીચેની માહિતી ઉપરથી સુરેખાનું અન્વાયોજન કરી, $x = 5$ હોય ત્યારે y શોધો.

(13) ઉત્પાદન y માટે દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ નીચે મુજબ છે. જો x એ વર્ષ દર્શાવે છે, તો વર્ષ 2018 માટે ઉત્પાદનનું અનુમાન મેળવો.

$$y = 6.43 - 0.3\left(\frac{x - 2012}{2}\right) + 0.95\left(\frac{x - 2012}{2}\right)^2$$

(14) સુરેખાનું અન્વાયોજન $y = 12.5 + 0.75\left(\frac{\text{year} - 2015}{5}\right)$ છે, તો વર્ષ 2025 માટે કિંમતનું અનુમાન કરો.

(15) સુરેખાનાં અન્વાયોજનના પ્રામાણ્ય સમીકરણો જણાવો.

(16) દ્વિઘાત પરવલય $y = a + bx + c^2$ માટે અચલાંકો 'a', 'b' તથા 'c' ની કિંમત અનુક્રમે 2, 0.5 અને –0.1 છે, જ્યાં y = ઉત્પાદન અને x = (વર્ષ - 2010) છે, તો વર્ષ 2012 માટે ઉત્પાદનનું અનુમાન મેળવો.

(17) ઘાતાંકીય સરળીકરણની રીતમાં જુદા-જુદા પ્રાપ્તાંકોને જે ભાર આપવામાં આવે છે તે .... માં હોય છે.

(18) જો $a = 0.4$, $S_1 = 108$, $T_1 = 3.2$ હોય તો શરૂઆતનું અનુમાન મેળવો.

(19) જો સુરેખ વલણ $y = 10 + 3x$, જ્યાં y = ઉત્પાદન અને $x = \left(\frac{\text{year} - 2015}{1}\right)$ હોય તો વર્ષ 2020 માટે ઉત્પાદનનું પૂર્વાનુમાન શોધો.

(20) જો પ્રચલિત સંકેતોમાં $S_2 = 105$, $S_3 = 112$ અને $S_4 = 120$ હોય તો ΔS_3 ની કિંમત શોધો.

(21) સુરેખ વલણનાં અન્વાયોજનમાં પાંચ વર્ષની માહિતી માટે પ્રચલિત સંકેતોમાં $\Sigma x = 0$ અને $\Sigma y = 70$ હોય તો, સુરેખ વલણનાં અચળપદ a ની કિંમત શોધો.

જવાબો :

(1) સાચું (2) આ પદ્ધતિમાં દરેક અવલોકનોને સમાનભાર આપવામાં આવે છે. (3) ગુણોત્તર શ્રેણી (4) 2 (5) 204 (6) 3.2 (7) 162, 12, 4.8, 169.2 (8) 250.85 (9) 71.96 (10) a = 0.3 (11) 106.4 (12) 21 એકમો (13) 14.08 (14) 14 (16) 2.6 (17) ગુણોત્તર (18) 100 (19) 25 (20) 7 (21) 14

સ્વાધ્યાય પ્રેક્ટિસ :

(1) ધંધાકીય પૂર્વાનુમાન એટલે શું ? ધંધાકીય પૂર્વાનુમાનનું મહત્ત્વ ટૂંકમાં સમજાવો.

(2) ધંધાકીય પૂર્વાનુમાનનો અર્થ સમજાવો. આયોજનમાં, વ્યવહારમાં અને ઔદ્યોગિક ક્ષેત્રે તેનાં ઉપયોગની ચર્ચા કરો.

(3) પૂર્વાનુમાનની રીતોની ચર્ચા કરો.

(4) આપેલી માહિતી માટે સુરેખાનું અન્વાયોજન કરવા માટેની રીત સમજાવો અને તે ઉપરથી ભવિષ્યનાં વર્ષ માટે પૂર્વાનુમાન કેવી રીતે કરશો તે સમજાવો.

(5) આપેલી માહિતી માટે દ્વિઘાતી પરવલયનું અન્વાયોજન કરવાની રીત સમજાવો અને પૂર્વાનુમાનમાં તેનો ઉપયોગ સમજાવો.

(6) ઘાતાંકીય સરલીકરણની રીત વર્ણવો.

(7) નીચેની માહિતી ઉપરથી સુરેખાનું અન્વાયોજન કરો :

વર્ષ	1991	1992	1993	1994	1995
ઉત્પાદન (હજાર ટનમાં)	20	35	45	40	25

(જવાબ : $y = 33 + 1.5\ (x - 1993)$)

(8) નીચે આપેલી માહિતી પરથી સુરેખાનું અન્વાયોજન કરો અને તે ઉપરથી વર્ષ 1998 માટે 1998 ની કિંમતનું પૂર્વાનુમાન કરો :

વર્ષ	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
y	80	90	92	83	94	99	92

(જવાબ : $y = 90 + 2\ (x - 1994)$; 1998 માટે y ની પૂર્વાનુમાન કિંમત = 98)

(9) એક શહેરની વસ્તી અંગે નીચે આપેલી માહિતી પરથી દ્વિઘાતી પરવલયનું અન્વાયોજન કરો અને તે ઉપરથી વર્ષ 1981 માં તે શહેરની વસ્તી કેટલી હશે તેનું અનુમાન મેળવો :

વર્ષ	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
વસ્તી (લાખમાં)	6	8	10	12.5	15	18	21

(જવાબ : $y = 12.45 + 2.5\ (x - 1997) + 0.12\ (x - 1997)^2$, 24.37 લાખ)

(10) 1990-95 નાં વર્ષો દરમિયાન એક વસ્તુની કિંમતો નીચે આપેલ છે. આ આંકડાઓ ઉપરથી દ્વિઘાતી પરવલયનું અન્વાયોજન કરો અને 1996 નાં વર્ષ માટે વસ્તુની કિંમતનું આગણન કરો :

વર્ષ	1990	1991	1992	1993	1994	1995
કિંમત	100	107	128	141	181	192

(જવાબ : $y = 136.48 + 9.93\ \{2(x - 1992.5)\} + 0.43\ \{2(x - 1992.5)\}^2$, $y =$ 227.05)

(11) $a = 0.25$ અને વર્ષ 1974 માટે શરૂઆતની કિંમત 31.44 લઈ નીચેની માહિતી માટે પૂર્વાનુમાનનો મેળવો :

વર્ષ	1975	1976	1977	1978	1979
નિરીક્ષણ કિંમત	44.5	43.8	46.4	53.6	53.7

(જવાબ : $\hat{x}t$: 37.17, 40.55, 43.78, 48.91, 52.15)

(12) $a = 0.6$ અને શરૂઆતનું પૂર્વાનુમાન 200 લઈને વિવિધ વર્ષો માટે વેચાણ અંગેનું પૂર્વાનુમાન મેળવો :

વર્ષ	1975	1976	1977	1978	1979	1980
વેચાણ (લાખ રૂ.માં)	230	242	255	271	304	315

(જવાબ : 225.24, 241.08, 254.88, 270.59, 301.04, 316.22)

(13) જો $\dfrac{a}{1-a} = 1.5$ અને શરૂઆતનું પૂર્વાનુમાન 300 લઈને વિવિધ વર્ષો માટે ઉત્પાદનનું પૂર્વાનુમાન મેળવો :

વર્ષ	1985	1986	1987	1988	1989	1990
ઉત્પાદન (લાખમાં)	345	363	382	406	456	473

(જવાબ : 337.8, 361.6, 381.9, 405.3, 451.4, 474.7)

(14) $a = 0.25$ અને 1970 નાં વર્ષની શરૂઆતની કિંમત 150 લઈ ઘાતાંકીય સરળીકરણથી પૂર્વાનુમાન નક્કી કરો :

વર્ષ	1971	1972	1973	1974	1975	1976
નિરીક્ષણ કિંમત	200	240	300	360	400	450

(જવાબ : $\hat{x}t$ = 125.6, 143.58, 160.6, 177.06, 193.06, 218.32, 238.1, 258.31)

(15) શરૂઆતનું અનુમાન 100 અને $a = 0.4$ લઈ ઘાતાંકીય સરળીકરણની રીતે નીચેની માહિતી માટે પૂર્વાનુમાન મેળવો :

વર્ષ	2001	2002	2003	2004	2005
વેચાણ	105	110	115	120	125

જવાબ :

St	102	105.2	109.12	113.47	118.08
ΔSt	2	3.2	392	4.35	4.61
Tt	0.8	1.76	2.62	3.31	3.83
$\hat{x}t$	103.2	107.84	113.05	118.44	123.83

એકમ 12

સૂચક આંક

12.1 અર્થ અને વ્યાખ્યા

જુદી જુદી વસ્તુનો ભાવ, વ્યાપારવૃદ્ધિ, ઔદ્યોગિક ઉત્પાદન, કુટુંબોના માસિક ખર્ચ વગેરેમાં થતી વધઘટ એક જ દિશામાં થતી નથી. સમૂહમાં સમાવિષ્ટ કેટલીક વસ્તુઓની કિંમતોમાં વધારો થયો હોય છે તો કેટલીક વસ્તુઓની કિંમતોમાં ઘટાડો થયો હોય છે. આવા સંજોગોમાં નિરપેક્ષ વધઘટનો અભ્યાસ અર્થપૂર્ણ બનતો નથી. આ વધઘટનો સારી રીતે અભ્યાસ કરવા માટે સૂચક આંકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

ધારો કે આપણે એક સમૂહમાં આવતી જુદી જુદી વસ્તુઓના ભાવના વધઘટનું માપ શોધવું છે. સામાન્ય રીતે એક જ સમૂહમાં આવતી વસ્તુઓના ભાવોના એકમો ભિન્ન હોય છે જેમ કે ચોખાની ભાવ દર કિ.ગ્રામ આપેલ હોય, ઈંડાનો ભાવ દર ડઝને આપેલ હોય અથવા દૂધનો ભાવ દર લીટરે આપેલ હોય. ભાવોના એકમો ભિન્ન ભિન્ન હોવાથી તેમને સીધી રીતે સરખાવી શકાતા નથી. આ સરખામણી શક્ય કરવા માટે બધા ભાવોને કોઈ એક નિયત સમયના ભાવોના સાપેક્ષમાં ટકાવારીમાં દર્શાવવા આવે છે. ટકાવારી દર્શાવતા આ બધા આંકડાઓમાંથી જો સરેરાશ ટકાવારી શોધવામાં આવે તો તે સરેરાશ નિયત કરેલા સમયથી ચાલુ સમય સુધીમાં થયેલ ભાવની સપાટીની સામાન્ય વધઘટનું માપ આવશે. આ સરેરાશ દર્શાવતા આંકને ભાવનો સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે.

આજ રીતે સમૂહમાં આવેલી પ્રત્યેક વસ્તુ માટેનો જથ્થામાં થતાં સાપેક્ષ ફેરફાર માટેનો આંક શોધી મેળવેલ સરેરાશ માપને તે સમૂહ માટેનો જથ્થા સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે. જીવનનિર્વાહ, વેચાણ, ઉત્પાદન, આયાત, નિકાસ, વેતન વગેરેમાં થતી વધઘટ માપવા માટે પણ આ જ રીતે સૂચક આંક મેળવી શકાય છે.

વ્યાખ્યા :

કોઈ પણ એક કે તેથી વધુ વસ્તુઓની આપેલ (ચાલુ) સમયની ચલની કિંમતોમાં કોઈ ચોક્કસ (આધાર) સમયની તે વસ્તુઓની ચલની કિંમતોના સાપેક્ષમાં થતા ટકાવારી ફેરફારની સરેરાશને સામાન્ય સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે.

$$\text{સામાન્ય સૂચક આંક } (I) = \frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}{n} \times 100$$

જ્યાં

P_1 = ચાલુ સમય માટે ચલની કિંમત

P_0 = આધાર સમય માટે ચલની કિંમત

n = વસ્તુઓની સંખ્યા.

અહીં આપણે n વસ્તુના સમૂહનો સામાન્ય સરેરાશ કે સામાન્ય મધ્યકનો ઉપયોગ કર્યો છે. પરંતુ ગુણોત્તર મધ્યક કે ભારિત મધ્યકનો ઉપયોગ પણ કરી શકાય.

12.2 સૂચક આંકના લક્ષણો

સૂચક આંકના લક્ષણો નીચે પ્રમાણે છે.

(1) સૂચક આંક ટકાવારી ફેરફાર દર્શાવતું સાપેક્ષ માપ છે.

(2) સૂચક આંક એકમથી મુક્ત માપ છે.

(3) સૂચક આંક તુલનાત્મક માપ છે.

(4) સૂચક આંક એક વિશિષ્ટ સરેરાશ માપ છે.

12.3 સૂચક આંકની ઉપયોગિતા

સૂચક આંક કોઈ પણ વસ્તુમાં થતી વધઘટનું માપ આપે છે. ભાવના વધઘટના માપ ઉપરાંત જીવનનિર્વાહ, વેચાણ, ઉત્પાદન, સામાજિક કે ઔદ્યોગિક પ્રવૃત્તિ, આયાત-નિકાસ વગેરે અનેક ક્ષેત્રે થતા ફેરફારોનો અભ્યાસ કરવાનું ઉપયોગી સાધન છે.

સૂચક આંકના કેટલાક ઉપયોગ નીચે પ્રમાણે છે :

(1) જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંક (જીવનની જરૂરી ચીજવસ્તુઓના ખર્ચનો સૂચક આંક)થી નાણાંની ખરીદશક્તિ મેળવી શકાય છે.

$$\text{નાણાંની ખરીદશક્તિ} = \frac{1}{\text{જીવનાનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક}} \times 100$$

આ ઉપરાંત આ સૂચક આંકનો ઉપયોગ કર્મચારીઓના પગાર, મોંઘવારી જથ્થા, બોનસ વગેરે પણ ઉપયોગમાં લેવાય છે.

(2) જથ્થાબંધ ભાવનો સૂચક આંક સરકાર, ઉત્પાદકો તથા વેપારીઓને નીતિવિષયક નિર્ણયો લેવામાં ઉપયોગી છે.

(3) કૃષિ-પેદાશની સૂચક આંકના ઉપયોગથી સરકાર કૃષિ નીતિઓનું આયોજન કરે છે અને ખેતી ઉત્પાદનના યોગ્ય ટેકારૂપ ભાવ પણ નક્કી કરી શકે છે.

(4) ઔદ્યોગિક ઉત્પાદન સૂચક આંક દેશનો વિકાસદર વધારવા, ઔદ્યોગિક અને વ્યાપારી પ્રવૃત્તિઓનું આયોજન અને નીતિઓ નક્કી કરવામાં ઉપયોગી થાય છે.

(5) માનવવિકાસનો સૂચક આંક માનવવિકાસની કક્ષા, જીવનધોરણ, શિક્ષણ સ્તર વગેરે નક્કી કરવામાં ઉપયોગી છે.

આમ, સૂચક આંક જીવનવ્યવહારના વિવિધ ક્ષેત્રોને ઉપયોગી માર્ગદર્શન પૂરું પાડે છે. જેમ બેરોમીટર હવામાનની આગાહી કરવામાં ઉપયોગી બને છે તેમ સૂચક આંક દેશની સમગ્ર આર્થિક અને સામાજિક પ્રવૃત્તિઓના થતા ફેરફાર માપવા મદદરૂપ થાય છે. તેથી સૂચક આંકને દેશના અર્થતંત્રની પારાશીશી (બેરોમીટર) કહે છે.

12.4 સૂચક આંકની મર્યાદા

સૂચક આંકને આપણે માત્ર એક સંકેતક તરીકે ગણીને જ તેનો ઉપયોગ કરી શકીએ. કારણ કે તેની ગણતરીમાં આધાર વર્ષની પસંદગી, વસ્તુની પસંદગી, યોગ્ય સરેરાશની પસંદગી વગેરે અનેક મુશ્કેલીઓ આવે છે. વળી, એક હેતુ માટે જે સૂચક આંક ઉપયોગી હોય તે અન્ય હેતુ માટે

બિનઉપયોગી પણ નીવડી શકે છે.

આમ, સૂચક આંકની અનેક ક્ષેત્રે ઉપયોગિતા છે પણ તેનો ઉપયોગ તેની મર્યાદાઓને ધ્યાનમાં રાખી કરવો જોઈએ.

12.5 સૂચક આંકની રચના માટેના મુદ્દાઓ

કોઈપણ સૂચક આંકની રચના કરવાની રીતમાં નીચેના મુદ્દાઓ ધ્યાનમાં રાખવા જોઈએ :

(1) હેતુ : સૂચક આંકની રચના કરતાં પહેલાં તેની રચનાના હેતુનું સ્પષ્ટીકરણ કરવું જોઈએ. કારણ કે વસ્તુઓની પસંદગી, તેમની સંખ્યા, આધાર વર્ષની પસંદગી વગેરે હેતુ પર આધાર રાખે છે.

ધારો કે આપણે મજૂર વર્ગની પરિસ્થિતિના અભ્યાસ માટે સૂચક આંકની રચના કરવી છે. હવે મજૂર વર્ગની જરૂરિયાતો તવંગર વર્ગની જરૂરિયાતો કરતાં જુદી જ હોય છે. મોજશોખની વસ્તુઓના ભાવમાં થયેલી વધઘટની તવંગર વર્ગના કૌટુંબિક બજેટમાં ફેરફાર થાય છે પણ તે વધઘટથી મજૂર વર્ગના કૌટુંબિક બજેટમાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી.

તેથી સૂચક આંકની રચના માટે હેતુ સ્પષ્ટ હોવો જરૂરી છે.

(2) વસ્તુઓની પસંદગી અને તેમના ભાવ : જે વર્ગના માણસો માટે સૂચક આંકની રચના કરવાની હોય તે વર્ગના માણસો વડે બહોળી વપરાશમાં લેવાતી વસ્તુની પસંદગી કરવી જોઈએ.

જે વસ્તુઓ પસંદ કરવામાં આવે તે બધી વસ્તુઓના ભાવ પ્રમાણિત કે સરકાર માન્ય જે તે વર્ગના લોકોના ખરીદીના સ્થળની દુકાનોમાંથી મેળવવા જોઈએ. જો એક કરતાં વધારે જગ્યાએથી ભાવ લેવામાં આવે તો ભાવની સરેરાશ લેવી જોઈએ.

(3) આધાર વર્ષની પસંદગી : વસ્તુઓના ભાવ મેળવ્યા પછી તે ભાવને ટકાવારીમાં દર્શાવવા માટે આધાર વર્ષ પસંદ કરવું પડે છે. આધાર વર્ષની પસંદગી માટે નીચેની બે રીતો પ્રચલિત છેઃ

(a) અચલ આધારની રીત (Fixed base method)

(b) પરંપરિત આધારની રીત (Chain base method)

(a) અચલ આધારની રીત : આ રીતમાં સામાન્ય ઘટના કે પરિસ્થિતિવાળા સમય કે વર્ષને સ્થિર ગણી આધાર વર્ષ તરીકે લેવામાં આવે છે. જ્યારે કોઈ એક વર્ષને આધાર વર્ષ નક્કી કરવું મુશ્કેલ હોય ત્યારે અમુક વર્ષોની સરેરાશ કિંમતને આધાર વર્ષની ચલ કિંમત તરીકે લેવી જોઈએ. આધાર વર્ષની ચલ કિંમતને વર્તમાન વર્ષની ચલ કિંમત સાથે સરખાવી સૂચક આંક મેળવવામાં આવે છે. આધાર વર્ષ ઘણા દૂરના ભૂતકાળનું વર્ષ ન બને તે માટે સમયાંતરે આધાર વર્ષ બદલવું જોઈએ.

અચલ આધારની રીતે સૂચક આંક નીચેના સૂત્રથી મેળવાય છે :

$$\text{સૂચક આંક (I)} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષની ચલ કિંમત}}{\text{આધાર વર્ષની ચલ કિંમત}} \times 100$$

(b) પરંપરિત આધારની રીત : અચલ આધારની રીતમાં એક વર્ષને અથવા અમુક વર્ષોની સરેરાશને અચલ આધાર તરીકે લઈ બધી જ ટકાવારી તેને આધારે ગણવામાં આવે છે. જ્યારે પરંપરિત આધારની રીતમાં પ્રત્યેક વર્ષની ટકાવારી તેની અગાઉના વર્ષને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ ગણવામાં આવે છે.

પરંપરિત આધારની રીતે સૂચક આંક નીચેના સૂત્રથી મેળવાય છે :

$$\text{સૂચક આંક (I)} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષની ચલ કિંમત}}{\text{અગાઉના વર્ષની ચલ કિંમત}} \times 100$$

(4) સરેરાશ પસંદગી : જુદી જુદી વસ્તુઓની ટકાવારી શોધ્યા પછી આ બધી વસ્તુઓ માટે એક સૂચક આંક મેળવવાનું જરૂરી છે. આ માટે બધી જ વસ્તુઓની ટકાવારીનો સરેરાશનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ પણ કયા સરેરાશનો ઉપયોગ યોગ્ય રહેશે તે પણ ચકાસવું જરૂરી બને છે.

જ્યારે એક સમૂહની વસ્તુઓને તેમના સાપેક્ષ તફાવતોની દૃષ્ટિએ જોવાની હોય ત્યારે અન્ય કોઈ સરેરાશ કરતાં ગુણોત્તર મધ્યક વધુ ઉપયોગી છે.

(5) ભાવ : સૂચક આંકનો મુખ્ય હેતુ ભાવની સપાટીની વધઘટ માપવાનો છે. સમાંતર મધ્યકની રીતે પ્રત્યેક વસ્તુને સમાન મહત્ત્વ આપવામાં આવે છે પણ સામાન્ય રીતે જુદા જુદા વર્ગોના માણસો માટે જુદી જુદી વસ્તુઓનું મહત્ત્વ એકસરખું હોતું નથી. તેથી સૂચક આંકની ગણતરી જે વસ્તુઓ વધુ મહત્ત્વની હોય તેમને તેમના મહત્ત્વના પ્રમાણમાં ભાર આપવામાં આવે છે.

વસ્તુઓને આપવામાં આવતો ભાર બે પ્રકારનો હોય છે : ગર્ભિત ભાર અને સ્પષ્ટ ભાર.

ગર્ભિત ભાર : ભાર આપવાની આ પરોક્ષ રીતમાં જો સૂચક આંકની ગણતરીમાં એક જ વસ્તુની ચાર જુદી જુદી જાતો પસંદ કરવામાં આવે તો 4ને તે વસ્તુનો ગર્ભિત ભાર ગણવામાં આવે છે.

સ્પષ્ટ ભાર : ભાર આપવાની આ પ્રત્યક્ષ રીતમાં વસ્તુને તેના મહત્ત્વના પ્રમાણમાં ભાર આપવામાં આવે છે. આ રીતમાં વસ્તુનો ભાર વસ્તુના વપરાશ, વેચાણ, ઉત્પાદન કે વસ્તુ પાછળ થતાં ખર્ચના પ્રમાણમાં નક્કી કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ - 1 : પાંચ ખોરાકી વસ્તુઓના વર્ષ 2014 અને 2018માં એકમ દીઠ ભાવ (₹) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા છે. 2014ને આધાર વર્ષ લઈ ખોરાકી વસ્તુઓના ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંક મેળવો.

વસ્તુના એકમ દીઠ ભાવ (₹)

વસ્તુ	એકમ	2014	2018
A	લિટર	20	20
B	ટન	40	60
C	ડઝન	60	100
D	પેકેટ	100	120
E	કિ.ગ્રામ	120	80

જવાબ : અહીં આધાર વર્ષ 2014 લઈને ચાલુ વર્ષ 2018 માટે વસ્તુઓના ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંક મેળવવાનો છે.

વસ્તુ	વસ્તુના ભાવ 2014 P_0	2018 P_1	ભાવ સાપેક્ષ $=\frac{P_1}{P_0}$
A	20	20	$\frac{20}{20}=1.0000$
B	40	60	$\frac{60}{40}=1.5000$
C	60	100	$\frac{100}{60}=1.6667$
D	100	120	$\frac{120}{100}=1.2000$
E	120	80	$\frac{80}{120}=0.6667$
કુલ			6.0334

સામાન્ય સૂચક આંક $= \frac{\Sigma\left(P_1/P_0\right)}{n}\times 100$

$$= \frac{6.0334}{5}\times 100$$

$$= 120.67$$

ઉદાહરણ - 2 : એક વીજ ઉત્પાદન કંપનીના વર્ષ 2010 થી 2018 સુધી વીજ ઉત્પાદનના આંકડા નીચે પ્રમાણે છે. આ માહિતી પરથી

(i) વર્ષ 2012 ને આધાર વર્ષ

(ii) વર્ષ 2011, 2012 અને 2013ના સરેરાશ ઉત્પાદનને આધાર વર્ષનું ઉત્પાદન લઈ અચલ આધારની રીતે સૂચક આંક તૈયાર કરો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ઉત્પાદન ('000 કિ.વોટ)	135	140	140	137	132	137	138	139	140

જવાબ : અહીં (i) 2012ને આધાર વર્ષ લઈ અને (ii) વર્ષ 2011, 2012 અને 2013ની સરેરાશ ઉત્પાદનને લઈ સૂચક આંક મેળવવાના છે.

વર્ષ 2011, 2012 અને 2013નું સરેરાશ ઉત્પાદન

$$= \frac{140+140+137}{3} = 139$$

વર્ષ	ઉત્પાદન ('000 કિ.વોટ)	સૂચક આંક (2012 ને આધાર વર્ષ લઈને)	સૂચક આંક (2011, 2012 અને 2013ની સરેરાશ લઈને)
2010	135	$\frac{135}{140}\times100=96.43$	$\frac{135}{139}\times100=97.12$
2011	140	$\frac{140}{140}\times100=100$	$\frac{140}{139}\times100=100.72$
2012	140	$\frac{140}{140}\times100=100$	$\frac{140}{139}\times100=100.72$
2013	137	$\frac{137}{140}\times100=97.86$	$\frac{137}{139}\times100=98.56$
2014	132	$\frac{132}{140}\times100=94.29$	$\frac{132}{139}\times100=94.96$
2015	137	$\frac{137}{140}\times100=97.86$	$\frac{137}{139}\times100=98.56$
2016	138	$\frac{138}{140}\times100=98.57$	$\frac{138}{139}\times100=99.28$
2017	139	$\frac{139}{140}\times100=99.29$	$\frac{139}{139}\times100=100$
2018	140	$\frac{140}{140}\times100=100$	$\frac{140}{139}\times100=100.72$

ઉદાહરણ - 3 : એક કંપનીના વર્ષ 2009 થી 2018 સુધીના ઉત્પાદનના આંકડા નીચે પ્રમાણે છે. આ માહિતી પરથી પરંપરિત આધારે સૂચક આંક મેળવો.

વર્ષ	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ઉત્પાદન (ટનમાં)	86	96	102	114	120	116	126	130	135	139

જવાબ : અહીં વર્ષ 2009ના અગાઉના વર્ષનું ઉત્પાદન આપેલ નથી. તેથી વર્ષ 2009નો સૂચક આંક 100 લઈશું.

વર્ષ	ઉત્પાદન (ટનમાં)	પરંપરિત આધારે સૂચક આંક
2009	86	100
2010	96	$\frac{96}{86}\times 100 = 111.63$
2011	102	$\frac{102}{96}\times 100 = 106.25$
2012	114	$\frac{114}{102}\times 100 = 111.76$
2013	120	$\frac{120}{114}\times 100 = 105.26$
2014	116	$\frac{116}{120}\times 100 = 96.67$
2015	126	$\frac{126}{116}\times 100 = 108.62$
2016	130	$\frac{130}{126}\times 100 = 103.17$
2017	135	$\frac{135}{130}\times 100 = 103.85$
2018	139	$\frac{139}{135}\times 100 = 102.96$

ઉદાહરણ - 4 : એક કંપનીના વર્ષ 2012 થી 2016 સુધીના ત્રણ અલગ અલગ વસ્તુના વેચાણ અંગેની માહિતી નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી સમાંતર સરેરાશનો ઉપયોગી કરી (i) અચલ આધારની રીતે (આધાર વર્ષ 2012 લેતાં) (ii) પરંપરિત આધારની રીતે વેચાણના સામાન્ય સૂચક આંક શોધો.

વેચાણ (હજાર એકમમાં)

વસ્તુ	2012	2013	2014	2015	2016
A	80	96	112	120	130
B	30	36	42	54	58
C	40	46	50	56	64

જવાબ :

(i) અચલ આધારની રીત :

$$\text{સૂચક આંક (I)} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષની ચલ કિંમત}}{\text{આધાર વર્ષની ચલ કિંમત}}\times 100$$

વસ્તુ	2012	2013	2014	2015	2016
A	100	$\frac{96}{80}\times100=120$	$\frac{112}{80}\times100=140$	$\frac{120}{80}\times100=150$	$\frac{130}{80}\times100=162.5$
B	100	$\frac{36}{30}\times100=120$	$\frac{42}{30}\times100=140$	$\frac{54}{30}\times100=180$	$\frac{58}{30}\times100=193.33$
C	100	$\frac{46}{40}\times100=115$	$\frac{50}{40}\times100=125$	$\frac{56}{40}\times100=140$	$\frac{64}{40}\times100=160$
સરવાળો	300	355	405	470	515.83
સૂચક આંક $=\frac{\text{સરવાળો}}{3}$	$\frac{300}{3}$ = 100	$\frac{355}{3}$ = 118.33	$\frac{405}{3}$ = 135	$\frac{470}{3}$ = 156.67	$\frac{515.83}{3}$ = 171.94

(ii) પરંપરિત આધારની રીત :

$$\text{સૂચક આંક} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષની ચલ કિંમત}}{\text{અગાઉના વર્ષની ચલ કિંમત}}\times100$$

વસ્તુ	2012	2013	2014	2015	2016
A	100	$\frac{96}{80}\times100=120$	$\frac{112}{96}\times100=116.67$	$\frac{120}{112}\times100=107.14$	$\frac{130}{120}\times100=108.33$
B	100	$\frac{36}{30}\times100=120$	$\frac{42}{36}\times100=116.67$	$\frac{54}{42}\times100=128.57$	$\frac{58}{54}\times100=107.41$
C	100	$\frac{46}{40}\times100=115$	$\frac{50}{46}\times100=108.70$	$\frac{56}{50}\times100=112$	$\frac{64}{56}\times100=114.29$
સરવાળો	300	355	342.04	347.71	330.03
સૂચક આંક $=\frac{\text{સરવાળો}}{3}$	$=\frac{300}{3}$ = 100	$=\frac{355}{3}$ =118.33	$=\frac{342.04}{3}$ = 114.01	$=\frac{347.71}{3}$ = 115.90	$=\frac{330.03}{3}$ = 110.01

12.6 સૂચક આંકની ગણતરીની રીતો

સૂચક આંકની ગણતરીની ઘણી અલગ-અલગ રીતો છે. આ બધી જ રીતો મુખ્યત્ત્વે બે પ્રકારની હોય છે : સાપેક્ષ કિંમતોની સરેરાશ અને કિંમતોની સરેરાશનો ગુણોત્તર. સૂચક આંકની ગણતરીની રીતો નીચે આપેલ ચાર્ટમાં દર્શાવામાં આવેલ છે.

સૂચક આંકની ગણતરીની રીતો

- સાપેક્ષ કિંમતોની સરેરાશ (Average of Relatives)
  - સાદી (Simple): $$\frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\times 100\right)}{n}$$
  - ભારિત (Weighted): $$\frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\times 100\right)\times w}{\Sigma w}$$
- કિંમતોની સરેરાશનો ગુણોત્તર (Aggregative)
  - સાદી (Simple): $$\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}\times 100$$
  - ભારિત (Weighted): $$\frac{\Sigma P_1 W}{\Sigma P_0 W}\times 100$$

ઉદાહરણ - 5 : નીચેની માહિતી પરથી સાદી સાપેક્ષ કિંમતોની સરેરાશની રીતે તથા સાદા સરેરાશના ગુણોત્તરની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

ભાવ

વસ્તુ	**આધાર વર્ષ**	**ચાલુ વર્ષ**
A	20	36
B	10	20
C	4	6
D	50	40

જવાબ : અહીં આધાર વર્ષના ભાવને P_0 અને ચાલુ વર્ષના ભાવને P_1 લઈશું.

વસ્તુ	P_0	P_1	$\frac{P_1}{P_0}\times 100$
A	20	36	$\frac{36}{20}\times 100 = 180$
B	10	20	$\frac{20}{10}\times 100 = 200$
C	4	6	$\frac{6}{4}\times 100 = 150$
D	50	40	$\frac{40}{50}\times 100 = 80$
કુલ	84	102	610

સાપેક્ષ કિંમતોની સાદી સરેરાશની રીત

$$\text{સૂચક આંક} = \frac{\Sigma\frac{P_1}{P_0}\times 100}{n}$$

$$= \frac{610}{4} = 152.5$$

સાદી સરેરાશના ગુણોત્તરની રીત

સૂચક આંક $= \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100$

$= \frac{102}{84} \times 100 = 121.43$

ઉદાહરણ - 6 : નીચેની માહિતી પરથી 2015ને આધાર વર્ષ ગણી 2018નો સાપેક્ષ કિંમતોનો ભારિત સરેરાશની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

ભાવ (₹)

વસ્તુ	2015	2018	ભાર
I	50	40	30
II	38	29	40
III	18	24	15
IV	80	90	15

જવાબ : અહીં 2015ને આધાર વર્ષ ગણવાનું હોઈ તેના ભાવને P_0 અને 2018ના ભાવને P_1 અને ભારને W લઈશું.

વસ્તુ	P_o	P_1	W	$\frac{P_1}{P_0} \times 100$	$\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right) \times W$
I	50	40	30	80	2400
II	38	29	40	76.32	3052.8
III	18	24	15	133.33	1999.95
IV	80	90	15	112.5	1087.5
કુલ			100		9140.25

કિંમતોની ભારિત સાપેક્ષ સરેરાશની રીત

સૂચક આંક $= \frac{\sum \left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right) \times w}{\sum w}$

$= \frac{9140.25}{100}$

$= 91.40$

આપણે જાણીએ છે કે ભારિત સરેરાશની રીતથી સમૂહોના સામાન્ય સૂચક આંકનું સૂત્ર નીચે મુજબ છે.

સામાન્ય સૂચક આંક $= \frac{\sum p_1 w}{\sum p_0 w} \times 100$

જ્યાં w = ભાર છે.

અર્થશાસ્ત્રી અને આંકડાશાસ્ત્રીઓ ભારની અલગ અલગ કિંમત લઈ જુદા જુદા સૂચક આંકની રચના કરી શકે છે.

લાસ્પેયરનું સૂત્ર : આ પદ્ધતિમાં આધાર વર્ષના જથ્થા q_0ને ભાર તરીકે લેવામાં આવે છે. આ રીતે મેળવેલ ભારિત સરેરાશના સૂત્રને લાસ્પેયરના સૂચક આંકનું સૂત્ર કહેવામાં આવે છે.

લાસ્પેયરનો સૂચક આંક (I_L) $= \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$

પાશેનું સૂત્ર

આ પદ્ધતિમાં ચાલુ વર્ષના જથ્થા (q_1)ને ભાર તરીકે લેવામાં આવે છે. આ રીતે મેળવેલ ભારિત સરેરાશના સૂત્રને પાશેના સૂચક આંકનું સૂત્ર કહેવામાં આવે છે.

પાશેનો સૂચક આંક $(I) = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100$

માર્શલ-એજવર્થનું સૂત્ર

આ પદ્ધતિમાં આધાર અને ચાલુ વર્ષના જથ્થાની સરેરાશ એટલે કે $\left(\frac{q_0 + q_1}{2}\right)$ ભાર તરીકે લેવામાં આવે છે.આ રીતે મેળવેલ ભારિત સરેરાશના સૂત્રને માર્શલ-એજવર્થનું સૂત્ર કહેવામાં આવે છે.

માર્શલ-એજવર્થનો સૂચક આંક (I_{ME}) $= \frac{\sum p_1 \left(\frac{q_0 + q_1}{2}\right)}{\sum p_0 \left(\frac{p_0 + q_1}{2}\right)} \times 100$

$$= \frac{\sum p_1 (q_0 + q_1)}{\sum p_0 (q_0 + q_1)} \times 100$$

$$= \frac{\sum p_1 q_0 + \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 + \sum p_0 q_1} \times 100$$

ડોરબીશ-બાઉલીનું સૂત્ર

આ પદ્ધતિમાં લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંકના સમાંતર મધ્યકને ડોરબીશ-બાઉલીનો સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે.

ડોરબીશ-બાઉલીનો સૂચક આંક $(I_{DB}) = \frac{I_L + I_P}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} + \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}\right] \times 100$$

ફિશરનું સૂત્ર

લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંકના ગુણોત્તર મધ્યકને ફિશરનો સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે.

ફિશરનો સૂચક આંક $(I_F) = \sqrt{I_L \times I_p}$

$$= \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$$

ફિશરના સૂચક આંકને નીચેના કારણોસર આદર્શ સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે :

(1) તેના સૂચક આંકમાં આધાર અને ચાલુ એમ બંને વર્ષના જથ્થાને ગણતરીમાં લેવામાં આવે છે.

(2) તેના સૂચક આંકની ગણતરીમાં ગુણોત્તર મધ્યકનો ઉપયોગ થાય છે, જે સૂચક આંકની રચના માટે શ્રેષ્ઠ સરેરાશ છે.

(3) આ સૂચક આંક પક્ષપાતથી મુક્ત છે. કારણ કે તે લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંકમાં રહેલા દોષોને સંતુલિત કરે છે.

(4) આ સૂચક આંક બે મૂળભૂત પરીક્ષણો કાલ (સમય) વિપર્યાસ અને પદ વિપર્યાસનું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ - 7 : નીચે આપેલી ખાદ્ય-ખોરાકીની ચીજવસ્તુઓના ભાવ અને વપરાશ અંગેની માહિતી પરથી વર્ષ 2012ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2018 માટે લાસ્પેયર, પાશે, માર્શલ-એજવર્થ, ડોરબીશ-બાઉલી અને ફિશરનો સૂચક આંક શોધો.

		વર્ષ-2012		વર્ષ-2018	
વસ્તુ	**એકમ**	**ભાવ (₹)**	**જથ્થો**	**ભાવ (₹)**	**જથ્થો**
ઘઉં	કિલોગ્રામ	20	25 કિલોગ્રામ	30	30 કિલોગ્રામ
ચોખા	કિલોગ્રામ	45	35 કિલોગ્રામ	60	40 કિલોગ્રામ
કઠોળ	કિલોગ્રામ	60	3 કિલો ગ્રામ	80	4 કિલોગ્રામ
દૂધ	લીટર	36	200 લીટર	44	300 લીટર

જવાબ : અહીં આધાર વર્ષનો ભાવ p_0 અને q_0, ચાલુ વર્ષનો ભાવ p_1 અને q_1 તરીકે લઈશું.

વસ્તુ	p_0	q_0	p_1	q_1	p_oq_o	p_1q_o	p_oq_1	p_1q_1
ઘઉં	20	25	30	30	500	750	600	900
ચોખા	45	35	60	40	1575	2100	1800	2400
કઠોળ	60	3	80	4	180	240	240	320
દૂધ	36	200	44	300	7200	8800	10800	13200
કુલ					9455	11890	13440	16820

લાસ્પેયરનો સૂચક આંક (I_L) $= \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$

$$= \frac{11890}{9455} \times 100$$

$$= 1.2575 \times 100$$

$$= 125.75$$

પાશે સૂચક આંક (I_P) $= \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$

$$= \frac{16820}{13440} \times 100$$

$$= 1.2515 \times 100$$

$$= 125.15$$

માશર્લ-એજવર્થ સૂચક આંક (I_{ME})

$$= \frac{\sum p_1q_0 + \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 + \sum p_0q_1} \times 100$$

$$= \frac{11890 + 16820}{9455 + 13440} \times 100$$

$$= \frac{28710}{22895} \times 100$$

$$= 125.40$$

ડોરબીશ-બાઉલી સૂચક આંક (I_{DB}) $= \frac{I_L + I_P}{2}$

$$= \frac{125.75 + 125.15}{2}$$

$$= 125.45$$

ફિશરનો સૂચક આંક (I_F) $= \sqrt{I_L \times I_p}$

$$= \sqrt{125.75 \times 125.15}$$

$$= 125.45$$

ઉદાહરણ - 8 : નીચે આપેલી માહિતી પરથી 2012ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2018 માટે આદર્શ સૂચક આંક શોધો.

		જથ્થો		ભાવ (₹)	
વસ્તુ	**એકમ**	**2012**	**2018**	**2012**	**2018**
A	મીટર	20 મીટર	30 મીટર	20	25
B	ડઝન	18 નંગ	24 નંગ	24	36
C	ક્વિન્ટલ	40 કિલોગ્રામ	30 કિલોગ્રામ	1500	1800
D	કિલોગ્રામ	2000 ગ્રામ	2800 ગ્રામ	100	120
E	20 કિલોગ્રામ	12 કિલોગ્રામ	24 કિલોગ્રામ	200	280

જવાબ : અહીં આધાર વર્ષ 2012 અને ચાલુ વર્ષ 2018 છે, તેથી વર્ષ 2012નો ભાવ p_0 અને જથ્થો q_0, વર્ષ 2018નો ભાવ p_1 અને જથ્થો q_1 લઈશું. અહીં વસ્તુ B માટેના ભાવ પ્રતિ ડઝન પ્રમાણે છે. જ્યારે વપરાશના જથ્થાનો એકમ નંગ છે. તેથી ભાવને પ્રતિ નંગમાં ફેરવીશું તેથી વર્ષ 2012નો નંગ દીઠ ભાવ $= \frac{24}{12} =$ ₹ 2 અને વર્ષ 2018નો નંગ દીઠ ભાવ $= \frac{36}{12} =$ ₹ 3 થશે.

વસ્તુ C માટેનો ભાવ પ્રતિ ક્વિન્ટલ છે જ્યારે વપરાશના જથ્થાનો એકમ કિલોગ્રામ છે. તેથી ભાવને પ્રતિ કિલોગ્રામમાં ફેરવીશું. તેથી વર્ષ ૨૦૧૨નો કિલોગ્રામ દીઠ ભાવ $= \frac{1500}{100} =$ ₹ 15 અને 2018નો કિલોગ્રામ દીઠ ભાવ $= \frac{1800}{100} =$ ₹ 18 થશે.

વસ્તુ D માટેનો ભાવ પ્રતિ કિલોગ્રામ છે જ્યારે વપરાશના જથ્થાનો એકમ ગ્રામ છે. તેથી જથ્થાને કિલોગ્રામમાં ફેરવવું યોગ્ય રહેશે. તેથી વર્ષ ૨૦૧૨નો જથ્થો $= \frac{2000}{1000} = 2$ કિલોગ્રામ તથા વર્ષ ૨૦૧૮નો જથ્થો $= \frac{2800}{1000} = 2.8$ કિલોગ્રામ થશે.

વસ્તુ E માટેનો ભાવ પ્રતિ ૨૦ કિલોગ્રામ છે ત્યારે વપરાશના જથ્થાનો એકમ કિલોગ્રામ છે. તેથી ભાવને પ્રતિ કિલોગ્રામમાં ફેરવીશું. તેથી વર્ષ ૨૦૧૨નો કિલોગ્રામ દીઠ ભાવ $= \frac{200}{20}$ $=$ ₹ 10 અને વર્ષ 2018નો કિલોગ્રામ દીઠ ભાવ $= \frac{280}{20} =$ ₹ 14 થશે.

		વર્ષ 2012		**વર્ષ 2018**					
વસ્તુ	**એકમ**	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
A	મીટર	20	20	25	30	400	500	600	750
B	નંગ	2	18	3	24	36	54	48	72
C	કિલોગ્રામ	15	40	18	30	600	720	450	540
D	કિલોગ્રામ	100	2	120	2.8	200	240	280	336
E	કિલોગ્રામ	10	12	14	24	120	168	240	288
કુલ						1356	1682	1618	1986

આદર્શ સૂચક આંક એટલે ફિશરનો સૂચક આંક

ફિશરનો સૂચક આંક (I) $= \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{1682}{1356} \times \frac{1986}{1618}} \times 100$$

$$\therefore I_F = 123.39$$

ઉદાહરણ - 9 : ચાર ભિન્ન વસ્તુઓની માહિતી નીચે મુજબ આપેલ છે. વર્ષ 2012ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2015 માટે લાસ્પેયર અને પાશેનો સૂચક આંક ગણો અને તેના પરથી ફિશરનો સૂચક આંક મેળવો.

	2012		2015	
વસ્તુ	**ભાવ (₹)**	**કુલ ખર્ચ**	**વપરાશ**	**કુલ ખર્ચ**
I	10	60	5 કિગ્રા	75
II	12	120	10 લિટર	150
III	18	90	3 કિગ્રા	81
IV	8	40	4 મીટર	48

જવાબ : વર્ષ 2012 માટે વસ્તુઓના ભાવ અને કુલ ખર્ચ આપેલ છે.

$\therefore$ વસ્તુઓનો જથ્થો $= \dfrac{\text{વસ્તુનો કુલ ખર્ચ}}{\text{વસ્તુનો એકમ દીઠ ભાવ}}$

અને વર્ષ 2015 માટે વસ્તુઓના વપરાશ અને કુલ ખર્ચ આપેલ છે.

$\therefore$ વસ્તુઓનો એકમ દીઠ ભાવ $= \dfrac{\text{વસ્તુનો કુલ ખર્ચ}}{\text{વસ્તુનો વપરાશનો જથ્થો}}$

ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી નીચેનું કોષ્ટક મેળવીશું.

	2012			2015				
વસ્તુ	p_0	p_0q_0	$q_0 = \dfrac{p_0q_0}{p_0}$	q_1	p_1q_1	$q_1 = \dfrac{p_1q_1}{p_1}$	p_1q_0	p_0q_1
I	10	60	6	5	75	15	90	50
II	12	120	10	10	150	15	150	120
III	18	90	5	3	81	27	135	54
IV	8	40	5	4	48	12	60	32
કુલ		310			354		435	256

લાસ્પેયરનો સૂચક આંક $= \dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$

$= \dfrac{435}{310} \times 100$

$\therefore I_L = 140.32$

પાશેનો સૂચક આંક $= \dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$

$$= \frac{354}{256} \times 100$$

$$\therefore I_P \quad = 138.28$$

ફિશરનો સૂચક આંક $= \sqrt{I_L \times I_P}$

$$= \sqrt{140.52 \times 138.28}$$

$$\therefore I_F \quad = 139.30$$

4.7 સૂચક આંકના પરીક્ષણો

સૂચક આંક માટે ઘણા સૂત્ર આપણે જોયા પરંતુ દરેક સૂત્રમાં કોઈ ને કોઈ દોષ રહેલ છે. તેથી જે સૂચક આંક અમુક ગાણિતિક પરીક્ષણોનું સમાધાન કરે તેને યોગ્ય સૂચક આંક કહેવાય છે.

સૂચક આંકનો યોગ્યતા ચકાસવા માટે મુખ્ય બે પરીક્ષણો છે.

(1) કાલ વિપર્યાસ પરીક્ષણ (Time Reversal Test) : આ નિયમાનુસાર આધાર વર્ષને આધારે રચિત ચાલુ વર્ષના સૂચક આંકની કિંમત અને ચાલુ વર્ષને આધાર તરીકે લઈ રચેલા આધાર વર્ષના સૂચક આંકની કિંમત પરસ્પરને વ્યસ્ત હોવી જોઈએ.

સરળ શબ્દોમાં, સૂચક આંકના વિવિધ સૂત્રો (P_{01})માં સમયની અદલાબદલી એટલે કે અનુગ (Suffix) 0 ની જગ્યાએ અનુગ 1 અને અનુગ 1 ની જગ્યાએ 0 કરવામાં આવે છે. હવે મૂળ સૂત્ર અને અદલાબદલી બાદ બનતા સૂત્ર (P_{10}) નો ગુણાકાર 1 થાય તો સૂચક આંકનું તે સૂત્ર કાલ વિર્યયાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે.

કાલ વિપર્યાસ પરીક્ષણના સિદ્ધાંત અનુસાર આ બંને કિંમતો પરસ્પરને વ્યસ્ત થવી જોઈએ એટલે કે

$$P_{01} = \frac{1}{P_{10}}$$

અથવા $P_{01} \times P_{10} = 1$ થવું જોઈએ.

નોંધ : ફિશર અને માર્શલ - એજવર્થના સૂચક આંક કાલ વિપર્યાસ પરીક્ષણ સમાધાન કરે છે.

(2) પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણ (Factor Reversal Test) : આ નિયમાનુસાર સૂચક આંકની ગણતરીમાં કિંમત અને જથ્થાની અદલા-બદલી કરવાથી પરસ્પર વિરોધી પરિણામ ન આવવું જોઈએ અથવા કિંમત અને જથ્થાની અદલાબદલી કર્યા પહેલાંના સૂચક આંક અને તે અદલાબદલી કર્યા પછીના સૂચક આંકના ગુણાકારની કિંમત ચાલુ વર્ષના કુલ ખર્ચ અને આધાર વર્ષના કુલ ખર્ચના ગુણોત્તર જેટલી થવી જોઈએ. એટલે કે,

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

નોંધ : ફિશરનો સૂચક આંક પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ - 10 : નીચેની માહિતી પરથી ફિશરના સૂચક આંકની ગણતરી કરો અને તે બંન્ને પરીક્ષણોનું સમાધાન કરે છે કે કેમ તે તપાસો.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ	
વસ્તુ	કિંમત	જથ્થો	કિંમત	જથ્થો
ખોરાક	800	200	900	200
કપડાં	1000	60	1200	100
ભાડું	4000	1	5000	1
બળતણ	800	3	1000	5

જવાબ : અહીં આધાર વર્ષની કિંમત p_0 અને જથ્થો q_0, ચાલુ વર્ષની કિંમત p_1 અને જથ્થો q_1 લઈશું.

વસ્તુ	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
ખોરાક	800	200	900	200	160000	180000	160000	180000
કપડાં	1000	60	1200	100	60000	72000	100000	120000
ભાડું	4000	1	5000	1	4000	5000	4000	5000
બળતણ	800	3	100	5	2000	3000	4000	5000
કુલ					226400	260000	268000	310000

ફિશરનો સૂચક આંક $= \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$

$= \sqrt{\frac{260000}{226400} \times \frac{310000}{268000}} \times 100$

$= 115.26$

હવે આ સૂચક આંક કાલ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે કેમ તે તપાસીએ.

અહીં, $P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} = \sqrt{\frac{260000}{226400} \times \frac{310000}{268000}} = \sqrt{1.1484 \times 1.1567} = 1.1525$

અને $P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1} \times \frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}} = \sqrt{\frac{268000}{310000} \times \frac{226400}{260000}} = \sqrt{0.8645 \times 0.8707} = 0.8676$

$\therefore P_{01} \times P_{10} = 1.1525 \times 0.8676 = 0.9999$

$\therefore P_{01} \times P_{10} \cong 1$

આમ ફિશરનો સૂચક આંક કાલ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે.

હવે પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણ માટે તેને તપાસીએ.

$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0} \times \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}}$

$= \sqrt{\frac{268000}{226400} \times \frac{310000}{260000}}$

$= \sqrt{1.1837 \times 1.1923}$

$=1.1880$

$$\therefore P_{01} \times Q_{01} = 1.1525 \times 1.1880$$
$$= 1.3692$$

હવે $\dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \dfrac{310000}{226400} = 1.3693$

$$\therefore P_{01} \times Q_{01} \cong \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

આમ, ફિશરનો સૂચક આંક પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું પણ સમાધાન કરે છે.

4.8 જીવનનિર્વાહનો સૂચક આંક

ભાવમાં થતી વધઘટને લીધે જુદાં જુદાં વર્ગના લોકોના જીવનનિર્વાહ ખર્ચમાં થતા ફેરફારો માપવા અને તેનો અભ્યાસ કરવા માટે જીવનનિર્વાહ સૂચક આંકની રચના કરવામાં આવે છે. આમ કોઈ પણ એક વર્ગના જીવનનિર્વાહના ખર્ચમાં આધાર વર્ષની સરખામણીમાં થતા ફેરફારને દર્શાવતા આંકને જીવનનિર્વાહનો સૂચક આંક કહેવાય છે.

જીવનનિર્વાહના સૂચક આંકની રચનામાં નીચેના મુદ્દાઓ અગત્યના છે.

સૌપ્રથમ કયા વર્ગના માણસો માટે આ સૂચક આંકની રચના કરવાની છે તે નક્કી કરવામાં આવે છે.

ત્યારબાદ નિદર્શ કૌટુંબિક બજેટ તપાસ કરવામાં આવે છે. આ તપાસ માટે યોગ્ય પ્રમાણમાં કુટુંબો લેવા જોઈએ અને જે સમયમાં અસામાન્ય ઘટનાઓ ન ઘટી હોય તેવા સમયે તપાસ કરવી જોઈએ. આ તપાસમાં જે-તે વર્ગના માણસો વડે વપરાયેલ જુદી જુદી વસ્તુઓ તેમની જાત, ભાવ અને જથ્થા વિષે માહિતી મેળવવવામાં આવે છે. આ માહિતીને મુખ્યત્વે જુદા જુદા પાંચ સમૂહો ખોરાક, કપડાં, બળતણ, ભાડું અને પરચૂરણમાં વહેંચવામાં આવે છે.

અહીં એક એ બાબત અગત્યની છે કે આપણે કુલ ખર્ચના જે પાંચ સમૂહો પાડ્યા છે તે પ્રત્યેક સમૂહમાં આવતી દરેક વસ્તુ ન લેતાં, જે તે વર્ગ માટે અગત્યની એવી અમુક જ વસ્તુઓ લેવી જોઈએ. જે વર્ગના માણસો માટે સૂચક આંકની રચના કરવાની હોય તે વર્ગના માણસો જયાં રહેતા હોય ત્યાંથી અથવા તેઓ જયાંથી ખરીદી કરતા હોય ત્યાંથી વસ્તુઓના છૂટક વેચાણ ભાવ મેળવવા જોઈએ. કૌટુંબિક બજેટની તપાસથી વપરાશમાં આવતી કઈ વસ્તુઓ કેટલી મહત્ત્વની છે તેનો ખ્યાલ આવે છે અને તેથી સૂચક આંકની રચનામાં પ્રત્યેક વસ્તુને કેટલો ભાર આપવો તે નક્કી કરી શકાય છે.

જીવનનિર્વાહ સૂચક આંક શોધવાની બે રીતો છે :

(i) ભારિત સમૂહ પદ્ધતિ

(ii) સાપેક્ષ કિંમતોની ભારિત સરેરાશની પદ્ધતિ

(i) ભારિત સમૂહ પદ્ધતિ (Weighted Aggregative Method)

આ રીતમાં આધાર વર્ષમાં વસ્તુના વપરાયેલા જથ્થાનો ઉપયોગ કરી આધાર વર્ષ અને ચાલુ વર્ષમાં પ્રત્યેક વસ્તુ માટે કુલ ખર્ચ શોધવામાં આવે છે. ચાલુ વર્ષના કુલ ખર્ચ અને આધાર વર્ષના કુલ ખર્ચના ટકાવારી ગુણોત્તરને ભારિત સમૂહ પદ્ધતિથી મેળવેલ સૂચક આંક કહેવાય છે.

સૂચક આંક $(I) = \dfrac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$

જ્યાં p_0 = આધાર વર્ષનો ભાવ

q_0 = આધાર વર્ષનો જથ્થો

p_1 = ચાલુ વર્ષનો ભાવ

q_1 = ચાલુ વર્ષનો જથ્થો

આ રીતને કુલ ખર્ચની રીત (Total Expenditure Method) પણ કહેવાય છે.

(ii) સાપેક્ષ કિંમતોની ભારિત સરેરાશ

આ રીતમાં ચાલુ વર્ષની કિંમતોની આધાર વર્ષના પ્રમાણમાં સાપેક્ષ કિંમતો શોધવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ દરેક વસ્તુનું આધાર વર્ષનું ખર્ચ શોધી તેને ભાવ સાપેક્ષના ભાર તરીકે ગણી ભારિત સરેરાશ સૂચક આંક મેળવવામાં આવે છે.

સૂચક આંક $(I) = \frac{\sum IW}{\sum W}$

જ્યાં,

I = પ્રત્યેક વસ્તુની સાપેક્ષ ટકાવારી $= \frac{p_1}{p_0} \times 100$

અને W = ભાર = $p_0 q_0$

આ રીતને કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીત (Family Budget Method) પણ કહેવાય છે.

નોંધ : કુલ ખર્ચની રીતે અને કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીતે મળતાં સૂચક આંક સમાન હોય છે.

ઉદાહરણ - 11 : ભારિત સમૂહ પદ્ધતિ કૌટુંબિક બજેટની રીતે ધંધાકીય પ્રવૃત્તિઓનો સૂચક આંક મેળવો.

સમૂહ	સૂચક આંક	ભાર
ઔદ્યોગિક ઉત્પાદન	250	35
ખનીજ ઉત્પાદન	135	8
આંતરિક વેપાર	200	25
નાણાકીય પ્રવૃત્તિ	135	20
નિકાસ અને આયાત	325	6
શિપિંગ પ્રવૃત્તિ	300	6

જવાબ : અહીં જુદા જુદા સમૂહના સૂચક આંક અને તેમના ભાર આપેલા છે.

સમૂહ	સૂચક આંક (I)	ભાર (W)	IW
ઔદ્યોગિક ઉત્પાદન	250	35	8750
ખનીજ ઉત્પાદન	135	8	1080
આંતરિક વેપાર	200	25	5000
નાણાંકીય પ્રવૃત્તિ	135	20	2700
વિકાસ અને આયાત	325	6	1950
શિપિંગ પ્રવૃત્તિ	300	6	1800
કુલ		100	21280

સૂચક આંક $= \frac{\sum IW}{\sum W}$

$$= \frac{21280}{100}$$

$$= 212.80$$

ઉદાહરણ - 12 : નીચેની માહિતી પરથી વર્ષ 2016ને આધારે વર્ષ આઠનો કુલ ખર્ચની રીત અને કૌટુંબિક બજેટની સૂચક આંક મેળવો.

			ભાવ (₹)	
વસ્તુ	**વર્ષ 2012નો જથ્થો**	**એકમ**	**2012**	**2016**
A	200 કિ.ગ્રા.	કિ.ગ્રા.	40	48
B	50 કિ.ગ્રા.	કિ.ગ્રા.	120	140
C	50 કિ.ગ્રા.	કિ.ગ્રા.	160	200
D	20 લીટર	લીટર	200	300
E	40 લીટર	લીટર	25	50

જવાબ : અહીં આધાર વર્ષ 2012 છે. તેથી p_0 = 2012નો ભાવ, q_0 = 2012 નો જથ્થો અને p_1 = 2016ના વર્ષનો ભાવ લઈશું.

કુલ ખર્ચની રીત

	2012		**2016**		
વસ્તુ	**જથ્થો (q_0)**	**ભાવ (p_0)**	**ભાવ (p_1)**	**p_1q_0**	**p_0q_0**
A	200	40	48	9600	8000
B	50	120	140	7000	6000
C	50	160	200	10000	8000
D	20	200	300	6000	4000
E	40	25	50	2000	1000
				34600	27000

સૂચક આંક $= \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$

$$= \frac{34600}{27000} \times 100$$

$$= 128.15$$

કૌટુંબિક બજેટ (અંદાજપત્ર)ની રીત

	2012		2016	$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	$W = p_0q_0$	IW
વસ્તુ	જથ્થો (q_0)	ભાવ (p_0)	ભાવ (p_1)			
A	200	40	48	120	8000	960000
B	50	120	140	116.67	6000	700020
C	50	160	200	125	8000	1000000
D	20	200	300	150	4000	600000
E	40	25	50	200	1000	200000
કુલ					27000	34,60020

સૂચક આંક $= \frac{\sum IW}{\sum W}$

$= \frac{3460020}{27000}$

$= 128.15$

સ્વાધ્યાય

Q-1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

1. સૂચક આંક કોને કહેવાય છે ? તેના ઉપયોગો જણાવો.
2. સૂચક આંકના લક્ષણો જણાવો.
3. સૂચક આંકની રચનાને લગતા મુદ્દાઓ સ્પષ્ટ રીતે સમજાવો.
4. ''સૂચક આંકને આર્થિક ફેરફારોની પારાશીશી તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.'' આ વિધાનને સમજાવો.
5. આધાર વર્ષ એટલે શું ? તેની પસંદગીમાં મુખ્ય કઈ બાબતો ધ્યાનમાં લેવી જોઈએ ?
6. સૂચક આંકની રચનામાં ભાર એટલે શું ? ભારના પ્રકાર જણાવો.
7. જીવનનિર્વાહના સૂચક આંકનો અર્થ સમજાવી તેની રચના કરતી વખતે ધ્યાનમાં રાખવાના મુદ્દા જણાવો.
8. ફિશરના સૂચક આંકને આદર્શ સૂચક આંક શા માટે કહે છે ?
9. સૂચક આંકની યોગ્યતા માટેના પરીક્ષણો સમજાવો.
10. જથ્થા સૂચક આંક એટલે શું ?

Q-2 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

1. સૂચક આંકની વ્યાખ્યા આપો.
2. ભાવ સાપેક્ષ એટલે શું ?
3. જીવનનિર્વાહ સૂચક આંકની વ્યાખ્યા આપો.

4. સ્પષ્ટ ભાર અને ગર્ભિત ભાર વચ્ચેનો તફાવત જણાવો.

5. કાલ વિપર્યાસ પરીક્ષણ અને પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણના સૂત્ર જણાવો.

Q-3 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. એક વસ્તુ માટે જથ્થાનો 2018નો સૂચક આંક 230 હોય તો તેનું અર્થઘટન કરો.

2. એક વસ્તુનો ભાર આધાર વર્ષની સરખામણીમાં ચાલુ વર્ષમાં 3.5 ગણો વધે છે તો ભાવ સૂચક આંક કેટલો થશે ?

3. જો આધાર વર્ષ 2012ના સાપેક્ષમાં વર્ષ 2018માં નાણાંની ખરીદ શક્તિ 0.6 હોય તો વર્ષ 2018 માટે ભાવનો સૂચક આંક કેટલો હશે ?

4. જો $I_L = 115.92$ અને $I_p = 115.68$ હોય તો I_F મેળવો.

5. જો $\sum p_1q_0 : \sum p_0q_0 = 4:3$ અને $\sum p_1q_1 : \sum p_0q_1 = 3:2$ હોય તો I_F શોધો.

Q-4 નીચેનાના ઉકેલ મેળવો.

1. ચાર વસ્તુઓના 2012 અને 2018માં એકમ દીઠ ભાવ (₹) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા છે. 2012ને આધાર વર્ષ લઈ ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંક મેળવો.

વસ્તુના એકમ દીઠ ભાવ

વસ્તુ	2012	2018
I	20	23
II	10	14
III	3.50	4.50
IV	70	95

2. કોઈ એક કંપનીનું વર્ષ 2010 થી 2016 સુધીનું વેચાણ અંગેની નીચે મુજબની માહિતી પરથી અચલ આધારની રીતે વર્ષ 2010ને આધાર વર્ષ લઈ સૂચક આંક શોધો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
વેચાણ (કરોડ (₹))	140	148	152	160	168	176	183

3. એક કંપનીના એક માર્કેટિંગ એક્ઝિક્યુટીવનું જાન્યુઆરી 2018 થી ડિસેમ્બર 2018ના વેચાણ અંગેની માહિતી પરથી પરંપરિત આધારે સૂચક આંક ગણો.

મહિનો	જાન્યુઆરી	ફેબ્રુઆરી	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જુન	જુલાઈ	ઓગષ્ટ	સપ્ટેમ્બર	ઑક્ટોબર	ડિસેમ્બર
વેચાણ (હજાર (₹))	80	75	85	89	93	100	110	95	98	100	115

4. એક વસ્તુના ભાવ અંગેની નીચેની માહિતી પરથી વર્ષ 2010, 2011 અને 2012ના સરેરાશ ભાવને આધાર વર્ષનો ભાવ લઈ અચલ આધારની રીતે સૂચક આંક તૈયાર કરો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ભાવ (₹)	30	35	34	39	40	42	39	45	48

5. એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થતી ત્રણ અલગ-અલગ વસ્તુના 2012 થી 2018 સુધીના નફાની માહિતી નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી સમાંતર સરેરાશનો ઉપયોગ કરી

(i) અચલ આધારની રીતે (2012ને આધાર વર્ષ લેવું)

(ii) પરંપરિત આધારની રીતે નફાના સામાન્ય સૂચક આંક શોધો.

નફો (લાખ ₹માં.)							
વસ્તુ	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**
I	50	48	55	60	58	62	65
II	60	62	65	70	72	75	80
III	80	82	75	78	75	82	82

6. નીચેની માહિતી પરથી સાદી સાપેક્ષ કિંમતોની સરેરાશની રીતે તથા સાદી સરેરાશના ગુણોત્તરની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

વસ્તુ	**ભાવ**	
	આધાર વર્ષ	**ચાલુ વર્ષ**
I	30	33
II	40	35
III	50	55
IV	14	18
V	10	8

7. નીચેની માહિતી પરથી સાદા સાપેક્ષ કિંમતોની સાદી સરેરાશની રીતે 2015ને આધાર વર્ષ લઈ 2018 માટે સૂચક આંક મેળવો.

	વસ્તુ	I	II	III	IV
ભાવ	2015	140	80	150	100
(₹)	2018	120	90	180	80

8. નીચેની માહિતી પરથી 2012ને આધાર વર્ષ ગણી 2018નો સાપેક્ષ કિંમતોની ભારિત સરેરાશની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

		ભાવ (₹)	
વસ્તુ	**ભાર**	**2012**	**2018**
A	25	8	10
B	35	15	20
C	10	20	18
D	15	40	44
E	15	50	50

9. નીચેની માહિતી પરથી 2015ને આધાર વર્ષ ગણી 2018નો ભારિત કિંમતોની સરેરાશનો ગુણોત્તરની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

	ભાવ (₹)		
વસ્તુ	2015	2018	ભાર
I	80	100	2
II	70	50	5
III	40	80	3

10. નીચે આપેલી માહિતી પરથી 2012ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ 2018 માટે લાસ્પેયર, પાશે અને ફિશરનો સૂચક આંક ગણો.

	2012		2018	
વસ્તુ	ભાવ (₹)	જથ્થો	ભાવ (₹)	જથ્થો
A	42	25 કિ.ગ્રા.	45	32 કિ.ગ્રા.
B	28	15 લીટર	30	20 લીટર
C	30	10 નંગ	36	20 નંગ
D	60	30 મીટર	65	36 મીટર

11. પાંચ જુદી જુદી વસ્તુઓ અંગે નીચે આપેલ માહિતી પરથી વર્ષ 2012ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ 2016 માટે આદર્શ સૂચક આંક મેળવો.

		2012		2016	
વસ્તુ	એકમ	ભાવ (₹)	જથ્થો	ભાવ (₹)	જથ્થો
A	20 કિ.ગ્રા.	600	5 કિ.ગ્રા.	800	10 કિ.ગ્રા.
B	કિ.ગ્રા.	50	1200 કિ.ગ્રા.	75	1800 કિ.ગ્રા.
C	લીટર	60	30 લીટર	50	20 લીટર
D	મીટર	20	50 મીટર	40	80 મીટર
E	ડઝન	30	20 નંગ	50	30 નંગ

12. ચાર ભિન્ન વસ્તુઓની માહિતી નીચે મુજબ આપેલ છે. વર્ષ 2012ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2018 માટે માશર્લ-એજવર્થ ડોરબીશ-બાઉલી અને ફિશરનો સૂચક આંક મેળવો.

	2012		2018	
વસ્તુ	કુલ ખર્ચ (₹)	જથ્થો	કુલ ખર્ચ (₹)	જથ્થો
I	2000	50 કિ.ગ્રા.	3000	60 કિ.ગ્રા.
II	900	30 લીટર	2400	60 લીટર
III	336	3 કિ.ગ્રા.	400	2.5 કિ.ગ્રા.
IV	40	4 નંગ	120	6 નંગ

13. નીચેની માહિતી ઉપરથી લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંક ગણો. તે બંને કાલ વિપર્યાસ અને પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે કે કેમ તે ચકાસો.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ	
વસ્તુ	ભાવ	જથ્થો	ભાવ	જથ્થો
A	40	15 કિ.ગ્રા.	44	10 કિ.ગ્રા.
B	45	10 લીટર	40	15 લીટર
C	50	3 કિ.ગ્રા.	60	4 કિ.ગ્રા.
D	36	18 નંગ	48	24 નંગ

14. નીચેની માહિતી પરથી માશર્લ-એજવર્થ, ડોરબીશ-બાઉલી અને ફિશરનો સૂચક આંકની ગણતરી કરો. અને તે કાલ વિપર્યાસ અને પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણોનું સમાધાન કરે છે કે કેમ તે ચકાસો.

	ભાવ		જથ્થો	
વસ્તુ	1985	1988	1985	1988
A	20	25	10	12
B	18	32	16	10
C	35	48	8	8
D	28	40	12	10

15. કૌટુંબિક બજેટની રીતે જીવનનિર્વાહ સૂચક આંક ગણો.

સમૂહ	સૂચક આંક	ભાર
ખોરાકી વસ્તુઓ	250	45
કાપડ	150	10
વીજળી-બળતણ	170	8
ઘરભાડું	200	12
પરચૂરણ	230	25

16. નીચેની માહિતી પરથી વર્ષ 2012ને આધારે વર્ષ 2018નો કુલ ખર્ચની રીતે તેમજ કૌટુંબિક બજેટની રીતે જીવનનિર્વાહ સૂચક આંકની ગણતરી કરો.

	2012		2018
વસ્તુ	ભાવ (₹)	જથ્થો	ભાવ (₹)
ઘઉં	30	20 કિ.ગ્રા.	40
ચોખા	70	15 કિ.ગ્રા.	170
દાળ	50	5 કિ.ગ્રા.	70
તેલ	60	5 લીટર	100
કાપડ	30	20 મીટર	60
પેટ્રોલ	73	10 લીટર	78

Q-5 બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો :

1. આધાર વર્ષનો સૂચક આંક .... હોય.
   (a) 0 (b) 1 (c) 100 (d) અનિશ્ચિત
2. સૂચક આંકની વર્ષ પરંપરિત આધારની રીતમાં આધાર
   (a) અચળ હોય (b) નિશ્ચિત વર્ષ હોય (c) અગાઉનું વર્ષ હોય (d) 100 હોય
3. સૂચક આંકની ગણતરીમાં કઈ સરેરાશ વધુ યોગ્ય છે ?
   (a) સમાંતર મધ્યક (b) મધ્યસ્થ (c) બહુલક (d) ગુણોત્તર મધ્યક
4. કયો સૂચક આંક કાલ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે ?
   (a) લાસ્પેયર (b) ફિશર (c) માર્શલ-એજવર્થ (d) (b) અને (c) બન્ને
5. જો લાસ્પેપર સૂચક આંક = 145 અને ફિશર સૂચક આંક = 143.5 હોય તો બાઉલી સૂચક આંક શોધો.
   (a) 142 (b) 143.5 (c) 98.97 (d) 144.25

જવાબ : 1. C 2. C 3. d 4. d 5.b

સ્વાધ્યાયના જવાબ

Q.3 ના જવાબ : 2. 450, 3. 166.67, 4. I_F = 115.80, 5. I_F = 141.42

Q.4 ના જવાબ : 1. 129.82

2.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
સૂચક આંક	100	105.71	108.57	114.29	120	125.71	130.71

3. 100, 93.75, 113.33, 104.71, 105.67, 107.53, 110, 86.36, 103.16, 102.04, 115
4. 90.91, 106,06, 103.03, 118.18, 121.12, 127.27, 118.18, 136.36, 145.45
5.

(i) અચલ આધારની રીતે : 100, 100.61, 104.028, 109.92, 117.17, 121.94

(ii) પરંપતિ આધારની રીતે : 100, 100.61, 103.63, 106.93, 98.56, 106.80, 103.84

6. સાદી સાપેક્ષ કિંમતોની સરેરાશની રીત : 103.21
   સાદી સરેરાશના ગુણોત્તરની રીત : 103.47
7. 99.55, 8. 118.42, 9. 109.52
10. લાસ્પેપર સૂચક આંક = 108.82
    પાશે સૂચક આંક = 109.35
    ફિશર સૂચક આંક = 109.086
11. આદર્શ સૂચક આંક : ફિશર સૂચક આંક = 149.41

12. માશર્લ-એજવર્ધ સૂચક આંક = 130.25
    ડોરબીશ-બાઉલી સૂચક આંક = 130.22
    ફિશર સૂચક આંક = 130.22
13. લાસ્પેપર સૂચક આંક = 113.85
    પારો સૂચક આંક = 113.70
14. માર્શલ-એજવર્ધ સૂચક આંક = 145.39
    ડોરબીશ-બાઉલી સૂચક આંક = 145.27
    ફિશર સૂચક આંક = 145.26
15. 222.6
16. 175.071

એકમ 13

નિર્ણય સિદ્ધાંત

13.1 પ્રસ્તાવના

13.2 અર્થ

13.3 નિર્ણયના સિદ્ધાંતના ઉપયોગો અને મર્યાદા

13.4 નિર્ણયના સિદ્ધાંનું માળખું

13.5 અનિયમિતતા હેઠળ નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિ

13.6 જોખમ હેઠળ નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિ

- સ્વાધ્યાય

13.1 પ્રસ્તાવના

આપણા રોજબરોજના જીવનમાં આપણે હંમેશા પરિસ્થિતિવશ નિર્ણયો લેતા હોઈએ છીએ.

દા.ત. (1) ઉચ્ચ અભ્યાસ માટે એક થી વધુ સંસ્થાઓમાં એડમિશન મળતું હોય તો કઈ સંસ્થા પસંદ કરવી.

(2) મહેમાન ઘરે જમવા આવવાના હોય તો કઈ મીઠાઈ બનાવવી.

(3) બચત કરવા માટે રૂપિયાનું કયાં રોકાણ કરવું.

ઉપરોક્ત બાબતો પરથી એ તો સ્પષ્ટ છે કે જયારે આપણી પાસે ફક્ત એક જ વિકલ્પ હોય તો તે જ વિકલ્પ પસંદ કરવાનો નિર્ણય લેવો પડે, પરંતુ એક થી વધુ વિકલ્પો હોય તો આપણને સૌથી વધુ યોગ્ય હોય તે વિકલ્પની પસંદગીનો નિર્ણય આપણે કરીએ છીએ. આ શ્રેષ્ઠ વિકલ્પની પસંદગી માટેની આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓનો અભ્યાસ આ પ્રકરણમાં હવે કરીશું.

13.2 અર્થ

જયારે સમસ્યાના ઉકેલ માટે આપણે જુદા જુદા વિકલ્પો પૈકી શ્રેષ્ઠ વિકલ્પ પસંદ કરવા ઇચ્છીએ, ત્યારે તે નિર્ણય ઘણી બધી બાહ્ય પરિસ્થિતિઓ પર નિર્ભર હોય છે. આ પરિસ્થિતિઓ નિર્ણય લેનારના નિયંત્રણમાં હોતી નથી. પરંતુ પાછલા અનુભવો અને કોઈ ચોક્કસ પદ્ધતિથી તે પરિસ્થિતિઓના બનવા અંગે અનુમાન કે અટકળ કરીને યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી શકાય છે. આપણે નિર્ણય હંમેશા પરિસ્થિતિઓની સંભવિતતાને આધારે લઈએ છીએ. તેથી લીધેલ નિર્ણય હંમેશા સંપૂર્ણ સાચો કે લાભદાયક નીવડે તે જરૂરી નથી.

નિર્ણયના સિદ્ધાંતનો અર્થ ટૂંકમાં નીચે મુજબ જણાવી શકાય.

''અનિયંત્રિત પરિસ્થિતિઓ હેઠળ જુદા જુદા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય નિર્ણય લેવાની પ્રક્રિયા એટલે નિર્ણયનો સિદ્ધાંત.''

નિર્ણયના સિદ્ધાંતમાં સામાન્ય રીતે નીચેની બાબતોનો સમાવેશ થઈ શકે.

(1) જે સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવાનો હોય તેની વિસ્તૃત જાણકારી.

(2) જુદા જુદા વિકલ્પોની પ્રાપ્યતાની જાણકારી.

(3) કોઈ પણ વિકલ્પની પસંદગી બાદ શક્ય તમામ પરિસ્થિતિઓ વિશેની જાણકારી

(4) નિર્ણય લીધા બાદ થતા નફા-નુકશાનની જાણકારી.

(5) ચોક્કસ ઢબે યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી

(6) યોગ્ય વિકલ્પ લીધા બાદ તેનું અમલીકરણ

13.3 નિર્ણયના સિદ્ધાંતના ઉપયોગો અને મર્યાદા

ઉપયોગો :

(1) સમસ્યાના ઉકેલ માટે શક્ય વિકલ્પોમાંથી જે તે પરિસ્થિતિ હેઠળ શ્રેષ્ઠ નિર્ણય લઈ શકાય છે.

(2) માત્ર અટકળ કે ધારણાને આધારે નહિ પરંતુ યોગ્ય આંકડાશાસ્ત્રીય રીતનો ઉપયોગ કરીને નિર્ણય લેવાથી તેની સચોટતા વધુ હોય છે.

(3) નિર્ણયના સિદ્ધાંતની મદદથી લીધેલા નિર્ણયો બીજી કોઈ પદ્ધતિ દ્વારા લેવાયેલ નિર્ણયો કરતા વધુ યોગ્ય હોય છે, તેથી નિર્ણય લેનાર માટે તે વધુ લાભદાયી નીવડે છે.

(4) જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓને ધ્યાનમાં રાખી નિર્ણયની પસંદગી થયેલ હોઈ નુકશાન થવાની શક્યતા પ્રમાણમાં ઓછી હોય છે.

મર્યાદાઓ :

(1) બધાં જ શક્ય વિકલ્પોની પૂરી જાણકારી ન હોય તો શ્રેષ્ઠ વિકલ્પની પસંદગી મુશ્કેલ બને છે.

(2) ભૂતકાળને આધારે પણ ભવિષ્યને ધ્યાનમાં રાખી શ્રેષ્ઠ નિર્ણય લેવો એ મુશ્કેલ કાર્ય છે.

(3) સમસ્યા વિશે અગાઉની માહિતી પ્રાપ્ય ન હોય તો નિર્ણયના સિદ્ધાંતની મદદથી વ્યાજબી નિર્ણય લેવો લગભગ અશક્ય બને છે.

(4) માહિતી, સમય, સ્રોત ચોકસાઈ વગેરે મર્યાદિત હોય તો તદ્દન યોગ્ય નિર્ણય લેવામાં ઘણી મુશ્કેલ પડે છે.

13.4 નિર્ણયના સિદ્ધાંતનું માળખું

નિર્ણયના સિદ્ધાંતમાં જુદી જુદી બાહ્ય પરિસ્થિતિઓને ધ્યાનમાં રાખી જુદા જુદા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરવામાં આવે છે. નિર્ણયના સિદ્ધાંતના માળખામાં મુખ્યત્વે નીચેના ઘટકોનો સમાવેશ થાય છે.

(1) વ્યૂહ (વિકલ્પ) અથવા ક્રિયાપથ

(2) ઘટના (પરિસ્થિતિ)

(3) પરિણામ

(4) વળતર (નફો-નુકસાન) શ્રેણિક

હવે, આપણે દરેક ઘટકની વિસ્તૃત સમજુતી મેળવી લઈએ.

(1) વ્યૂહ :

જ્યારે કોઈ સમસ્યા અંગે નિર્ણય લેવાનો હોય ત્યારે નિર્ણય લેનાર વ્યક્તિ પાસે જે જુદા-જુદા વિકલ્પો હોય છે, કે જે પૈકી કોઈ વિકલ્પની પસંદગી તેને કરવાની હોય છે તે વિકલ્પોને વ્યૂહ કહેવામાં આવે છે. કયો વિકલ્પ લેવો તે નિર્ણય લેનારના હાથમાં હોય છે.

દા.ત. (1) કોઈ વસ્તુનું વેચાણ વધારવા માટે કંપની વર્તમાન પત્રો, રેડિયો, ટી.વી. વગેરેમાંથી કોઈ એકમાં જાહેરાત આપવા માંગે તો કયુ માધ્યમ પસંદ કરવું તે નિર્ણય લેવા માટે તેની પાસે વર્તમાન પત્રો, રેડિયો, ટી.વી.એ ત્રણ વિકલ્પો એટલે કે વ્યૂહ થયા કહેવાય.

(2) એક રોકાણકારનો મ્યૂચ્યુઅલ ફંડ, ફિક્સ ડિપોઝિટ, શૅર માર્કેટ, રીઆલ્ટી માર્કેટમાંથી કોઈ એકમાં રોકાણ કરવું હોય તો આ ચાર તેના માટે વિકલ્પો (વ્યૂહ) થયા કહેવાય.

સામાન્ય રીતે જુદા જુદા વ્યૂહને A_1, A_2, A_3....... વગેરે દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.

(2) ઘટના :

આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ ચોક્કસ વિકલ્પની પસંદગી બાદ જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓમાંથી કોઈ એક પરિસ્થિતિ ઉદ્‌ભવે છે. આ પરિસ્થિતિઓ નિર્ણય લેનારના નિયંત્રણમાં હોતી નથી. આવી પરિસ્થિતિઓને ઘટના કહેવાય છે.

દા.ત. (1) ખેડૂત ચોમાસાની ઋતુ શરૂ થાય તે પહેલા કયો પાક લેવો તે નક્કી કરે છે. ચોમાસા દરમ્યાન અતિભારે, મધ્યમ અથવા ઓછો વરસાદ પડી શકે છે. આ ત્રણ પરિસ્થિતિઓને ઘટના કહી શકાય.

(2) મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં નાણાં રોકવાનો નિર્ણય લીધા બાદ રોકાણકારને ખૂબ ફાયદો થાય, નહિવત ફાયદો થાય, થોડું નુકશાન જાય અથવા વધુ નુકશાન જાય એવું બની શકે, તો આ ચાર પરિસ્થિતિઓને ઘટના કહી શકાય.

સામાન્ય રીતે જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓ એટલે કે ઘટનાઓને S_1, S_2, S_3 .... અથવા E_1, E_2, E_3 .... વગેરે દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.

(3) પરિણામ :

જુદા જુદા વિકલ્પોમાંથી કોઈ વિકલ્પની પસંદગી કર્યા બાદ શક્ય પરિસ્થિતિઓમાંથી કોઈ એક પરિસ્થિતિ ઉદ્‌ભવે છે. અને આ સંજોગોમાં નિર્ણય લેનારને લાભ કે ગેરલાભ એટલે કે નફો કે નુકશાન થાય છે. પાછલા અનુભવોને આધારે અથવા બીજી કોઈ રીતે પરિસ્થિતિઓ વિશે અટકળ એટલે કે સંભાવનાનું અનુમાન કરવામાં આવે છે. આ અનુમાન માત્ર કોઈ નિર્ણય લીધા બાદ તે યોગ્ય કે અયોગ્ય પૂરવાર થઈ શકે અને તેથી નિર્ણય લેનારને ફાયદો કે નુકશાન થઈ શકે છે. આ સમગ્ર સ્થિતિને નિર્ણયના સિદ્ધાંતના માળખાના સંદર્ભમાં પરિણામ કહી શકાય.

(4) વળતર (નફા-નુકશાન) શ્રેણિક :

કોઈ પણ વિકલ્પની પસંદગી બાદ કોઈ ચોક્કસ ઘટના બનવાથી નિર્ણય લેનારને જે કોઈ આર્થિક પરિણામ મળે તેને વળતર કહે છે. દા.ત. કોઈ નિર્ણય લેનાર પાસે ચાર વિકલ્પો હોય અને કોઈ પણ વિકલ્પની પસંદગીના નિર્ણય બાદ ત્રણ જુદી જુદી ઘટના (પરિસ્થિતિ)માંથી કોઈ ઘટના ઉદ્‌ભવી શકતી હોય તો આપણને $4 \times 3 = 12$ જુદા જુદા વળતરોની માહિતી મળે છે. આ બધાં જ વળતરોને વ્યૂહ અને ઘટનાને ધ્યાનમાં રાખી હાર-સ્તંભમાં ગોઠવવામાં આવે તો તેવી ગોઠવણીને વળતર શ્રેણિક કહે છે.

ધારો કે n વિકલ્પો A_1, A_2, A_3, ...A_n હોય અને m ઘટનાઓ S_1, S_2, S_3, ... S_m હોય તો m×n ક્રમનો વળતર શ્રેણિક નીચે મુજબ મળે.

ઘટના	(વ્યૂહ / વિકલ્પ)				
(પરિસ્થિતિ)	A_1	A_2	A_3	....	A_n
S_1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	....	x_{2n}
S_2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	....	x_{3n}
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
S_m	X_{m1}	X_{m2}	X_{m3}	....	X_{mn}

અહીં, X_{ij} = j મો વ્યૂહ પસંદ કર્યા બાદ iમી ઘટના ઉદ્‌ભવે ત્યારે મળતું આર્થિક વળતર

દા.ત. x_{23} ત્રીજો વ્યૂહ પસંદ કર્યા બાદ બીજી ઘટના બને તો નિર્ણય લેનારને ₹ x_{23} મળે.

નોંધ : x_{ij}ની ધન કિંમતો નિર્ણય લેનાર ને મળતો નફો દર્શાવે છે. જ્યારે ઋણ કિંમતો તેને થતી ખોટ દર્શાવે છે.

13.5 અનિયમિતતા હેઠળ નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિ

જ્યારે પણ જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓ એટલે કે ઘટનાઓ વિશે સંભાવનાના અનુમાનની કોઈ જ જાણકારી ન હોય ત્યારે અનિશ્ચતતા હેઠળ નિર્ણય લેવાની જરૂર પડે છે. હવે સ્પષ્ટ છે કે ભૂતકાળની માહિતી ન હોય તો કઈ ઘટના બનશે તેની સંભાવના મેળવી શકાતી નથી. આવા સંજોગોમાં નિર્ણય લેનાર દરેક વ્યક્તિ પોતાની સૂઝબૂઝ મુજબ અથવા માત્ર અટકળ કરી અંતઃસ્ફૂરણાથી તેને યોગ્ય જણાય તેવો નિર્ણય લે છે. દરેક વ્યક્તિ એક સમાન પરિસ્થિતિમાં જુદુ જુદુ વિચારતા હોય છે. તેથી જુદા જુદા પ્રકારે પરિસ્થિતિનો તાગ મેળવી પોતાની રીતે નિર્ણય લે છે.

કેટલાંક લોકો આશાવાદી હોય, કેટલાંક નિરાશાવાદી, જ્યારે કેટલાંક લોકો પોતે વિચારવાને બદલે બીજા મોટા ભાગના લોકો શું કરે છે તેમ વિચારી નિર્ણય લેતા હોય છે. તેથી અનિશ્ચિતતા હેઠળ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ નક્કી કરવા માટે નીચેની જુદી જુદી રીતોનો ઉપયોગ થાય છે.

(1) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત

(2) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(3) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત

(4) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત

(5) લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત

(1) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત :

જ્યારે પરિસ્થિતિની સંભાવના વિશે માહિતી ન હોય ત્યારે કેટલાંક લોકો જે આશાવાદી હોય છે, તે આ પદ્ધતિથી નિર્ણય લેતા હોય છે. અનિશ્ચિતતા હેઠળ પણ તેઓ મહત્તમ વળતર જ મેળવશે તેવી આશા રાખે છે, તેથી જ ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંતને આશાવાદી અભિગમ કહી શકાય.

આ સિદ્ધાંત અનુસાર સૌ પ્રથમ વળતર શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે મહત્તમ વળતર શોધવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ શોધેલા મહત્તમ વળતરો પૈકી પણ સૌથી મહત્તમ વળતર હોય તેવા વ્યૂહની પસંદગી કરવામાં આવે છે.

(2) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત :

જ્યારે પરિસ્થિતિની સંભાવના વિશે માહિતી ન હોય ત્યારે કેટલાંક લોકો જે નિરાશાવાદી હોય છે, તે આ પદ્ધતિથી નિર્ણય લેતા હોય છે. અનિશ્ચિતતા હેઠળ પણ તેઓ લઘુત્તમ વળતર મેળવશે તેવું નિરાશાવાદી વલણ રાખે છે. તેથી જ ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંતને નિરાશાવાદી અભિગમ કહી શકાય.

આ સિદ્ધાંત અનુસાર સૌ પ્રથમ વળતર શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે લઘુત્તમ વળતર શોધવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ શોધેલા લઘુત્તમ વળતરો પૈકી જે મહત્તમ વળતર હોય તેવા વ્યૂહની પસંદગી કરવામાં આવે છે.

(3) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત :

જ્યારે પરિસ્થિતિની સંભાવના વિશે માહિતી ન હોય ત્યારે કેટલાંક લોકો દરેક પરિસ્થિતિઓની સંભાવના સરખી છે તેવું ધારી લે છે.

આ સિદ્ધાંત અનુસાર દરેક વ્યૂહ માટે જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓથી મળતા વળતરોની મધ્યક (સરેરાશ) શોધવામાં આવે છે. આ બધી જ સરેરાશોમાંથી જે વ્યૂહ માટે સરેરાશ મહત્તમ થાય તે વ્યૂહ પસંદ કરવામાં આવે છે.

(4) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત :

આ સિદ્ધાંતમાં આશાવાદી અને નિરાશાવાદી અભિગમનો સમન્વય છે. આ સિદ્ધાંતમાં સૌથી મહત્તમ વળતર અને સૌથી લક્ષત્તમ વળતરને જ ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે.

આ સિદ્ધાંત મુજબ એક ગુણાંક α લેવામાં આવે છે જેને આપણે આશાવાદીનો ગુણાંક કહીશું, જ્યારે $(1-\alpha)$ ને નિરાશાવાદીના ગુણાંક તરીકે લેવામાં આવે છે. ગુણાંક αની પસંદગી નિર્ણય લેનાર પર નિર્ભર કરે છે. αની કિંમત 0 થી 1 સુધી હોય છે. એટલે કે $0 \le \alpha \le 1$. નિર્ણય લેનાર આશાવાદી હોય તો α ની કિંમત 1 ની નજીક અને નિરાશાવાદી હોય તો αની કિંમત 0 ની નજીક હોય છે. હોર્વિચના સિદ્ધાંતને વાસ્તવવાદ (Realism) નો સિદ્ધાંત તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

હોર્વિચના સિદ્ધાંત મુજબ યોગ્ય વ્યૂહની પસંદગી કરવા માટે દરેક વ્યૂહ માટે નીચેનાની કિંમત શોધવામાં આવે છે.

$H = \alpha$ (મહત્તમ વળતર) + $(1-\alpha)$ (લઘુત્તમ વળતર)

જે વ્યૂહ માટે Hની કિંમત સૌથી વધુ મળે તે વ્યૂહ પસંદ કરવામાં આવે છે.

(5) લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત :

આ સિદ્ધાંત અગાઉ ચર્ચા કરી તે સિદ્ધાંતોથી થોડો અલગ પડે છે. અત્યાર સુધીના સિદ્ધાંતોમાં વળતરોમાંથી મહત્તમ વળતર મળે તે મુજબ વ્યૂહની પસંદગી કરવામાં આવતી હતી. પરંતુ આ સિદ્ધાંતમાં મહત્તમ નુકશાનને ન્યૂનતમ કરવાનો પ્રયત્ન કરવામાં આવે છે.

અહીં 'નુકશાન' એટલે કોઈ પણ ઘટના બને ત્યારે જુદા જુદા વ્યૂહ પૈકી મહત્તમ વળતર આપતા વ્યૂહની પસંદગી ન થવાથી થતો આર્થિક ગેરલાભ. આવા નુકશાનને નિર્ણયની પ્રક્રિયામાં તક નુકશાન (Opportunity Loss) કહે છે.

સામાન્ય રીતે માહિતીમાં વળતર શ્રેણિક આપેલ હોય છે. તે પરથી દરેક પરિસ્થિતિ (ઘટના)માં મહત્તમ વળતર ધરાવતો વ્યૂહ પસંદ ન થવાથી થતા નુકશાનની ગણતરી કરી તક નુકશાનનો શ્રેણિક મેળવવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ તક નુકશાન શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે મહત્તમ નુકશાન શોધવામાં આવે છે. આ બધાં મહત્તમ નુકશાન પૈકી જે વ્યૂહ માટે લઘુત્તમ નુકશાન થતું હોય તે વ્યૂહની પસંદગી કરવામાં આવે છે.

નોંધ : ઉપરોક્ત બધાં જ સિદ્ધાંતો જ્યારે પરિસ્થિતિઓની સંભાવનાની જાણકારી ન હોય ત્યારે નિર્ણય લેનાર પોતાની આંતરસૂઝ મુજબ નિર્ણય લઈ વ્યૂહની પસંદગી કરે છે.

હવે આપણે ઉપરોક્ત સિદ્ધાંતો પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ કેવી રીતે નક્કી કરવામાં આવે છે તે સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ-1 : નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી (i) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (ii) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત (iii) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત (iv) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત $(\alpha = 0.6)$ મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

વળતર શ્રેણિક

	વ્યૂહ			
ઘટના	A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	2	15	3	6
S_2	7	5	10	-1
S_3	12	-2	4	9

જવાબ :

	વ્યૂહ			
ઘટના	A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	2	15	3	6
S_1	7	5	10	-1
S_1	12	-2	4	9
મહત્તમ	12	15	10	9
લઘુત્તમ	2	-2	3	-1
સરેરાશ વળતર	$\frac{2+7+12}{3} = 7$	$\frac{15+15-2}{3} = 6$	$\frac{3+10+4}{3} = 5.67$	$\frac{6-1+9}{3} = 4.67$

(i) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત મુજબ દરેક વ્યૂહના મહત્તમ વળતરો પૈકી સૌથી મહત્તમ વળતર 15 વ્યૂહ A_2 માટે મળે છે. તેથી આ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ A_2 ગણાય.

(ii) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત મુજબ દરેક વ્યૂહના લઘુત્તમ વળતરો પૈકી મહત્તમ વળતર 3 વ્યૂહ A_3 માટે મળે છે. તેથી આ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ A_3 ગણાય.

(iii) લાપ્લાસના સિદ્ધાંત મુજબ દરેક વ્યૂહની શોધેલી સરેરાશો પૈકી મહત્તમ સરેરાશ 7 વ્યૂહ A_1 માટે મળે છે. તેથી આ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ A_1 ગણાય.

(iv) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત

અહીં, $\alpha = 0.6$ આપેલ છે, તેથી $1-\alpha = 1-0.6 = 0.4$ મળે. હવે દરેક વ્યૂહ માટે હોર્વિચના સૂત્ર Hની ગણતરી નીચે મુજબ છે.

$$H = \alpha \begin{pmatrix} \text{મહત્તમ} \\ \text{વળતર} \end{pmatrix} + (1-\alpha)\begin{pmatrix} \text{લઘુત્તમ} \\ \text{વળતર} \end{pmatrix}$$

વ્યૂહ A_1 માટે : $H = 0.6\ (12) + 0.4\ (2)$

$= 7.2 + 0.8 = 8$

વ્યૂહ A_2 માટે : $H = 0.6\ (15) + 0.4\ (-2)$

$= 9 - 0.8 = \boxed{8.2}$

વ્યૂહ A_3 માટે : $H = 0.6\ (10) + 0.4\ (3)$

$= 6 + 1.2 = 7.2$

વ્યૂહ A_4 માટે : $H = 0.6\ (9) + 0.4\ (-1)$

$= 5.4 - 0.4 = 5$

ઉપરોક્ત વિગત પરથી જોઈ શકાય છે કે મહત્તમ વળતર 8.4 વ્યૂહ A_2 માટે મળે છે. તેથી હોર્વિચના સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ A_2 ગણાય.

ઉદાહરણ-2 : નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

વળતર શ્રેણિક વ્યૂહ			
ઘટના	A_1	A_2	A_3
S_1	50	90	80
S_2	100	40	70
S_3	40	60	30

જવાબ : અહીં, લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધવા માટે સૌ પ્રથમ વળતર શ્રેણિક પરથી તક નુકશાન શ્રેણિક નીચે મુજબ મેળવવામાં આવે છે.

તક નુકશાન શ્રેણિક વ્યૂહ			
ઘટના	A_1	A_2	A_3
S_1	90-50 = 40	90-90 = 0	90-80 = 10
S_2	100-100 = 0	100-40 = 60	100-70 = 30
S_3	60-40 = 20	60-60 = 0	60-30 = 30
(મહત્તમ નુકશાન)	40	60	30

તક નુકશાન શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે મહત્તમ નુકશાન અનુક્રમ 40, 60 અને 30 મળે છે, તે પૈકી લઘુત્તમ નુકશાન 30, વ્યૂહ A_3 માટે મળે છે.

તેથી, લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત મુજબ A_3 શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણાય.

ઉદાહરણ-3 : નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી (i) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (ii) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત (iii) લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

	વ્યૂહ			
ઘટના	A	B	C	D
E_1	5	8	-1	7
E_2	9	2	10	5
E_3	3	-4	6	3
E_4	0	11	8	-2

જવાબ : સૌ પ્રથમ વળતર શ્રેણિક પરથી ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત અને ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધીશું. ત્યારબાદ તક નુકશાન શ્રેણિક મેળવી લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ મેળવીશું.

ઘટના	વ્યૂહ			
	A	B	C	D
E_1	5	8	-1	7
E_2	9	2	10	5
E_3	3	-4	6	3
E_4	0	11	8	-2
મહત્તમ	9	11	10	7
લઘુત્તમ	0	-4	-1	-2

(i) **ગુરુ ગુરુ સિદ્ધાંત** મુજબ દરેક વ્યૂહના મહત્તમ વળતરો પૈકી સૌથી મહત્તમ વળતર 11 વ્યૂહ B માટે મળે છે. તેથી આ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ B ગણાય.

(ii) **ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત** મુજબ દરેક વ્યૂહના લઘુત્તમ વળતરો પૈકી મહત્તમ વળતર 0 વ્યૂહ A માટે મળે છે. તેથી આ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ A ગણાય.

હવે આપણે નીચે મુજબ તક નુકશાન શ્રેણિક બનાવી લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધીએ.

ઘટના	તક નુકશાન શ્રેણિક			
	A	B	C	D
E_1	8-5 = 3	8-8 = 0	8-(-1) = 9	8-7 = 1
E_2	10-9 = 1	10-2 = 8	10-10 = 0	10-5 = 5
E_3	6-3 = 3	6-(-4) = 10	6-6 = 0	6-3 = 3
E_4	11-0 = 11	11-111 = 0	11-8 = 3	11-(2) = 13
(મહત્તમ નુકશાન)	11	10	9	13

તક નુકશાન શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે મહત્તમ નુકશાન અનુક્રમે 11, 10, 9 અને 13 મળે છે. તે પૈકી લઘુતમ નુકશાન 9 વ્યૂહ C માટે મળે છે.

તેથી, લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત મુજબ C શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણાય.

13.6 જોખમ હેઠળ નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિ

આપણે અગાઉ જે જે સિદ્ધાંતો જોયા તે જુદી જુદી ઘટનાઓની સંભાવનાની જાણકારી ન હોય ત્યારે કેવી રીતે નિર્ણય લઈ શકાય તે સૂચવે છે. હવે જ્યારે ભૂતકાળની માહિતી પરથી કે અન્ય કોઈ રીતે દરેક ઘટના બનવાની સંભાવના જાણતા હોઈએ તો નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિને જોખમ હેઠળ નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિ કહેવાય છે.

જોખમ હેઠળ નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિમાં નીચેની બે રીતોનો સમાવેશ થાય છે.

(1) અપેક્ષિત આર્થિક મૂલ્ય (અપેક્ષિત નાણાકીય કિંમત) ની રીત [Expected Monetary Value (EMV) Method]

(2) અપેક્ષિત તક નુકશાનની રીત [Expected Opportanity Loss (EOL) Method]

(1) અપેક્ષિત આર્થિક મૂલ્ય (EMV)ની રીત :

આંકડાશાસ્ત્રીય નિર્ણયના સિદ્ધાંતોમાં આ સૌથી પ્રચલિત રીત છે. સૌ પ્રથમ જો વળતર શ્રેણિક આપેલ ન હોય તો જુદા જુદા વ્યૂહ અને જુદી જુદી ઘટનાના સંયોજનથી મળતા આર્થિક પરિણામો

પરથી વળતર શ્રેણિક તૈયાર કરી શકાય છે. ત્યાર બાદ દરેક ઘટનાની સંભાવનાનું અનુમાન મેળવવામાં આવે છે. વળતર શ્રેણિક અને ઘટનાઓની સંભાવના વિશેની જાણકારીની મદદથી દરેક વ્યૂહ માટે અપેક્ષિત આર્થિક મૂલ્ય (EMV) ની ગણતરી કરવામાં આવે છે અને જે વ્યૂહ માટે EMV મહત્તમ મળે તે વ્યૂહ EMVની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણવામાં આવે છે.

દરેક વ્યૂહ માટે EMV શોધવા માટે તે વ્યૂહના જુદી જુદી ઘટનામાં મળતા વળતરને તે ઘટનાની સંભાવના સાથે ગુણાકાર કરી તેઓનો સરવાળો મેળવાય છે.

ટૂંકમાં, $EMV = \sum x_{ij} P_i$

જ્યાં, P_i = iમી ઘટનાની સંભાવના

x_{ij} = j માં વ્યૂહ અને iમી ઘટનાના સંયોજનથી મળતુ વળતર

ઉદાહરણ-4 : નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી અપેક્ષિત આર્થિક મૂલ્ય (EMV)ની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

	વ્યૂહ			
ઘટના	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**
S_1	100	900	400	700
S_2	800	200	700	400
S_3	400	600	200	800

ઘટના S_1, S_2 અને S_3 બને તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.3, 0.4 અને 0.3 છે.

જવાબ : દરેક વ્યૂહ માટે જુદી-જુદી ઘટના સમયે મળતા વળતરોને તેને અનુરૂપ સંભાવનાઓ સાથે ગુણીને સરવાળો કરી EMV નીચે મુજબ મેળવવામાં આવે છે.

		વ્યૂહ			
ઘટના	**સંભાવના (P_i)**	**A_1 ($x_{ii}.P_1$)**	**A_2 ($x_{i2}.P_2$)**	**A_3 ($x_{i3}.P_3$)**	**A_4 ($x_{i4}.P_4$)**
S_1	0.3	$0.3\times100 = 30$	$0.3\times900 = 270$	$0.3\times400 =$ ’10	$0.3\times700 = 210$
S_2	0.4	$0.4\times800 = 320$	$0.4\times200 = 80$	$0.4\times700 = 280$	$0.4\times400 = 160$
S_3	0.3	$0.3\times400 = 120$	$0.3\times600 = 180$	$0.3\times200 = 60$	$0.3\times800 = 240$
	EMV =	470	530	460	610

અહીં, જોઈ શકાય છે કે EMVની મહત્તમ કિંમત 610 વ્યૂહ A_4 માટે મળે છે, તેથી વ્યૂહ A_1 EMV ની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ છે તેમ કહેવાય.

નોંધ : સરળતા ખાતર હવેથી ઉદાહરણોમાં જુદા જુદા વ્યૂહના વળતરોને x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}..........x_{in} ને બદલે ફક્ત x_1, x_2, x_3 .... x_n લખીશું.

ઉદાહરણ-5 : એક દુકાનદાર ઉત્પાદક પાસેથી એક વસ્તુ ખરીદે છે. તેની એકમ દીઠ ખરીદ કિંમત ₹ 10 છે અને દુકાનદાર તે વસ્તુ એકમ દીઠ ₹ 15 માં વેચે છે. દિવસ દરમિયાન ન વેચાયેલી વસ્તુ તે ઉત્પાદકને ₹ 8માં પરત કરે છે. દિવસ દરમિયાન તે વસ્તુની માંગનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે.

વસ્તુની માંગ (એકમો)	0	1	2	3	4
સંભાવના	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

તો તે દુકાનદારે દરરોજ વસ્તુના કેટલા એકમો રાખવા જોઈએ કે જેથી તેનો નફો મહત્તમ થાય ?

જવાબ : સૌ પ્રથમ આપણે એકમ દીઠ નફો અને ખોટ મેળવીશું.

ખરીદ કિંમત ₹ = 10; વેચાણ કિંમત = ₹ 15; પરત કિંમત = ₹ 8

નફો = વેચાણ કિંમત - ખરીદ કિંમત = 15 - 10 = ₹ 5

ખોટ = ખરીદ કિંમત - પરત કિંમત = 10 - 8 = ₹ 2

હવે જુદા જુદા વ્યૂહ (ખરીદેલ એકમો) અને જુદી જુદી ઘટનાઓ (વેચાયેલ એકમો) માટેના વળતરો નીચે મુજબ શોધીએ.

વળતર = (વેચાયેલ એકમો × નફો) - (ન વેચાયેલ એકમો × ખોટ)

જો 0 વસ્તુ ખરીદે :

સ્વભાવિક છે કે જો 0 વસ્તુ એકમો ખરીદે તો માંગ ગમે તેટલા એકમો હોય કોઈ નફો કે નુકશાન થાય નહિ તેથી બધી જ માંગ માટે વળતર 0 જ રહેશે.

★ **જો 1 વસ્તુ ખરીદે :**

માંગ 0 હોય ત્યારે, વળતર = $(0\times5) - (1\times2) = 0-2 = -2$

માંગ 1 હોય ત્યારે, વળતર = $(1\times5) - (0\times2) = 5-0 = 5$

માંગ 1 થી વધુ હશે ત્યારે વળતર 5 જ રહેશે કેમકે 1 જ વસ્તુ ખરીદેલ છે.

★ **જો 2 વસ્તુ ખરીદે તો :**

માંગ 0 હોય ત્યારે, વળતર = $(0\times5) - (2\times2) = 0-4 = -4$

માંગ 1 હોય ત્યારે, વળતર = $(1\times5) - [(2-1)\times2] = 5 - 2 = 3$

માંગ 2 હોય ત્યારે, વળતર = $(2\times5) - [(2-2)\times2] = 10-0 = 10$

માંગ 2 થી વધુ હોય ત્યારે વળતર 10 જ રહેશે કેમ કે 2 જ વસ્તુ ખરીદેલ છે.

આ રીતે જ જ્યારે 3, 4 અને 5 વસ્તુ ખરીદે ત્યારે જુદી જુદી માંગ માટે વળતરોની ગણતરી કરી નીચે મુજબ વળતર શ્રેણિક મેળવવામાં આવે છે.

માંગ (ઘટના)	સંભાવના	ખરીદેલ એકમો (વ્યૂહ)				
		0 (x_1)	1 (x_2)	2 (x_3)	3 (x_4)	4 (x_5)
0	0.1	0	-2	-4	-6	-8
1	0.2	0	5	3	1	-1
2	0.3	0	5	10	8	6
3	0.2	0	5	10	15	13
4	0.2	0	5	10	15	20

હવે, ઉપર મેળવેલા વળતર શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે EMV નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

EMV કોષ્ટક					
ઘટના	x_1p_i	x_2p_i	x_3p_i	x_4p_i	x_5p_i
0	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8
1	0	1	0.6	0.2	-0.2
2	0	1.5	3	2.4	1.8
3	0	1	2	3	2.6
4	0	1	2	3	4
EMV =	0	4.3	7.2	$\boxed{8}$	7.4

અહીં 3 વસ્તુ ખરીદવા માટે EMVની મહત્તમ કિંમત 8 મળે છે. તેથી દુકાનદારે દરરોજ 3 એકમો ઉત્પાદક પાસેથી ખરીદવા જોઈએ.

ઉદાહરણ-6 : એક વસ્તુનું ઉત્પાદન ખર્ચ ₹ 5 છે અને તેની એકમદીઠ વેચાણ કિંમત ₹ 10 છે. જો તે વસ્તુ અઠવાડિયા દરમિયાન ન વેચાય તો નકામી થઈ જાય છે. તેના અઠવાડિયાના વેચાણની માહિતી નીચે મુજબ છે.

અઠવાડિક માંગ	10	15	30	50
અઠવાડિયાની સંખ્યા	5	20	20	5

તો ઉત્પાદકે દર અઠવાડિયે કેટલા એકમો બનાવવા જોઈએ ?

જવાબ : અહીં અઠવાડિક માંગ (ઘટના)ની સંભાવના આપેલ નથી પરંતુ તે માંગ કેટલા અઠવાડિયા માટે છે તે સંખ્યા આપેલ છે તે પરથી દરેક માંગ માટે સંભાવના શોધી શકાય. કુલ 5+20+20+5 = 50 અઠવાડિયાની માહિતી આપેલી છે. હવે માંગ 10 એકમો હોય તેવા અઠવાડિયાની સંખ્યા 50 માંથી 5 છે તેથી તેની સંભાવના $\frac{5}{50} = 0.1$ થાય. તે જ રીતે અન્ય આપેલી માંગ માટે સંભાવનાઓ અનુક્રમે $\frac{20}{50} = 0.4; \frac{20}{50} = 0.4$ અને $\frac{5}{50} = 0.1$ થશે.

હવે, એકમ દીઠ નફો અને ખોટ મેળવીએ.

ઉત્પાદન ખર્ચ = ₹ 5, વેચાણકિંમત = ₹ 10

તેથી નફો = વેચાણ કિંમત - ઉત્પાદન ખર્ચ = 10 - 5 = ₹ 5 થશે. ન વેચાયેલી વસ્તુ નકામી થઈ જાય છે તેથી એકમ દીઠ ખોટ તેના ઉત્પાદન ખર્ચ જેટલી જ એટલે કે ₹ 5 થશે. હવે ઉદાહરણ 5માં દર્શાવેલ સમજુતીની જેમ જ આ ઉદાહરણમાં વળતરોની ગણતરી કરી નીચે મુજબ વળતર શ્રેણિક મળે.

વળતર શ્રેણિક બનાવેલા એકમો (વ્યૂહ)					
માંગ (ઘટના)	સંભાવના p_i	10 (x_1)	15 (x_2)	30 (x_3)	50 (x_4)
10	0.1	50	25	-50	-150
15	0.4	50	75	0	-100
30	0.4	50	75	150	50
50	0.1	50	75	150	250

હવે ઉપર મેળવેલા વળતર શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે EMV નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

EMV કોષ્ટક બનાવેલા એકમો (વ્યૂહ)				
માંગ (ઘટના)	10 $(x_1.p_i)$	15 $(x_2.p_i)$	30 $(x_3.p_i)$	50 $(x_4.p_i)$
10	5	2.5	-5	-15
15	20	30	0	-40
30	20	30	60	20
50	5	7.5	15	25
EMV =	50	$\boxed{70}$	$\boxed{70}$	-10

અહીં 15 અને 30 વસ્તુ બનાવે તો મહત્તમ EMV 70 મળે છે. તેથી ઉત્પાદકે દર અઠવાડિયે 15 એકમો અથવા 30 એકમો બનાવવા જોઈએ.

(2) અપેક્ષિત તક નુકશાનની રીત (EOLની રીત)

આપણે અગાઉ EMVની રીતનો અભ્યાસ કર્યો. તેજ રીતે તક નુકશાન શ્રેણિક વળતર શ્રેણિક પરથી મેળવી દરેક વ્યૂહ માટે અપેક્ષિત તક નુકશાનની કિંમતો શોધવામાં આવે છે. જે વ્યૂહ માટે અપેક્ષિત તક નુકશાન (EOL) સૌથી ઓછું મળે તે વ્યૂહની પસંદગી કરવામાં આવે છે.

$EOL = \sum O_{ij} . p_i$

જ્યાં p_i = iમી ઘટનાની સંભાવના

O_{ij} = j માં વ્યૂહ અને iમી ઘટનાના સંયોજનથી મળેલ તક નુકશાન

નોંધ : (1) તક નુકશાન (O_{ij}) કેવી રીતે મેળવાય તેની ચર્ચા આપણે અગાઉ લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંતની સમજુતી અને તેના ઉદાહરણ (નં. 2)માં વિસ્તૃત રીતે કરેલ છે.

(2) EMV અને EOL આ બંને રીતે લીધેલ નિર્ણયો સરખા હોય છે, કારણકે આ બંને રીતો એકબીજાની પૂરક છે.

ઉદાહરણ-7 : નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી EOL ની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

		વ્યૂહ		
ઘટના	સંભાવના	A_1	A_2	A_3
S_1	0.3	20	70	60
S_2	0.5	90	50	40
S_3	0.2	50	40	80

જવાબ : આપણે જાણીએ છીએ કે સૌ પ્રથમ તક નુકશાન શ્રેણિક મેળવવો પડશે અને ત્યાર બાદ જ અપેક્ષિત તક નુકશાન (EOL) દરેક વ્યૂહ માટે શોધી શકાશે.

		તક નુકશાન શ્રેણિક		
ઘટના	સંભાવના	A_1	A_2	A_3
S_1	0.3	70-20 = 50	70-70 = 0	70-60 = 10
S_2	0.5	90-90 = 0	90-50 = 40	90-40 = 50
S_3	0.2	80-50 = 30	80-40 = 40	80-80 = 0

હવે દરેક વ્યૂહ માટે જુદી જુદી ઘટનાઓની સંભાવના અને તેને અનુરૂપ તક નુકશાનના ગુણાકારોનો સરવાળો કરી (EOL) ની કિંમતો નીચે મુજબ મેળવી શકાય છે.

ઘટના	EOL કોષ્ટક વ્યૂહ		
	A_1	A_2	A_3
S_1	$0.3 \times 50 = 15$	$0.3 \times 0 = 0$	$0.3 \times 10 = 3$
S_2	$0.5 \times 0 = 0$	$0.5 \times 40 = 20$	$0.5 \times 50 = 25$
S_3	$0.2 \times 30 = 6$	$0.2 \times 40 = 8$	$0.2 \times 0 = 0$
EOL =	21	98	28

ઉપરના EOL કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાય છે કે સૌથી ઓછું અપેક્ષિત તક નુકશાન (EOL) વ્યૂહ A_1 માટે મળે છે. તેથી EOL ની રીતે વ્યૂહ A_1 શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણાય.

ઉદાહરણ-8 : નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી

(i) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત (ii) EMV (iii) લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત અને (iv) EOL પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

		વ્યૂહ			
ઘટના	સંભાવના	A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	0.2	5	3	9	-1
S_2	0.3	10	-2	6	5
S_3	0.3	6	8	-3	11
S_4	0.2	-2	9	5	2

જવાબ : વળતર શ્રેણિક પરથી ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત અને EMVની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધી શકાય અને લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત અને EOLની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધવા માટે તક નુકશાન શ્રેણિકનો ઉપયોગ થાય છે.

(i) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ મેળવવા દરેક વ્યૂહમાંથી લઘુત્તમ વળતરો -2, -2, -3 અને -1 અનુક્રમે મળે છે. આ બધાં જ લઘુત્તમ વળતરોમાંથી મહત્તમ વળતર -1 વ્યૂહ A_4 માટે મળે છે. તેથી ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે A_4 શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણાય.

(ii) હવે વળતર શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે EMVની કિંમતો નીચે મુજબ EMV કોષ્ટક બનાવીને શોધીએ દરેક ઘટનાની સંભાવના p_i વડે અને દરેક વ્યૂહની વળતરની કિંમતોને x_1, x_2, x_3, x_4 વડે દર્શાવીએ તો EMVની કિંમતો નીચે પ્રમાણે મળે.

EMV કોષ્ટક વ્યૂહ				
ઘટના	A_1 $(x_1.p_i)$	A_2 $(x_2.p_i)$	A_3 $(x_3.p_i)$	A_4 $(x_4.p_i)$
S_1	1	0.6	1.8	-0.2
S_2	3	-0.6	1.8	1.5
S_3	1.8	2.4	-0.9	3.3
S_4	-0.4	1.8	1	0.4
EMV =	5.4	4.2	3.7	5.0

અહીં જોઈ શકાય છે કે EMVની મહત્તમ કિંમત 5.4 વ્યૂહ A માટે મળે છે. તેથી EMVની રીતે A_1 શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણાય.

હવે, વળતર શ્રેણિક પરથી તક નુકશાન શ્રેણિક નીચ મુજબ મેળવી લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત અને EOLની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધીએ.

ઘટના	સંભાવના	તક નુકશાન શ્રેણિક વ્યૂહ A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	0.2	9-5 = 4	9-3 = 6	9-9 = 0	9-(-1) = 10
S_2	0.3	10-10 = 0	10-(-2) = 12	10-6 = 4	10-5 = 5
S_3	0.3	11-6 = 5	11-8 = 3	11-(-3) = 14	11-11 = 0
S_4	0.2	9-(-2) = 11	9-9 = 0	9-5 = 4	9-2 = 7
મહત્તમ નુકશાન		11	12	14	10

અહીં જોઈ શકાય છે કે દરેક વ્યૂહમાંથી મહત્તમ તક નુકશાન પૈકી સૌથી ઓછું તક નુકશાન 10 વ્યૂહ A_4 માટે મળે છે. તેથી લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે A_4 શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણાય.

હવે EOL ની રીત માટે દરેક વ્યૂહના તક નુકશાનને તેને અનુરૂપ ઘટનાની સંભવના સાથે ગુણાકારો કરી તેઓનો સરવાળો કરી EOL નીચે મુજબ મેળવી શકાય છે.

ઘટના	EOL કોષ્ટક વ્યૂહ A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	0.8	1.2	0	2
S_2	0	3.6	1.2	1.5
S_3	1.5	0.9	4.2	0
S_4	2.2	0	0.8	1.4
EOL =	4.5	5.7	6.2	4.9

અહીં જોઈ શકાય છે કે સૌથી ઓછું અપેક્ષિત તક નુકશાન (EOL) 4.5 વ્યૂહ A_1 માટે મળે છે. તેથી EOLની રીતે A_1 વ્યૂહ એ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણાય.

નોંધ : આ ઉદાહરણ પરથી જોઈ શકાય છે કે EMV અને EOL બંને રીતે નિર્ણય સરખા (વ્યૂહ A_1ની પસંદગી) જ હોય છે.

સ્વાધ્યાય

1. નીચે આપેલ પ્રશ્ન માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરો.

(i) ચાર વ્યૂહ A_1, A_2, A_3 અને A_4 માટે તેમના મહત્તમ વળતરો અનુક્રમે 2, 8, 9 અને 7 છે. ગુરુ સિદ્ધાંત મુજબ કયો વ્યૂહ શ્રેષ્ઠ ગણાય ?

(a) A_1 (b) A_2 (c) A_3 (d) A_4

(ii) ત્રણ વ્યૂહ A, B અને C માટે તેમના લઘુત્તમ વળતરો અનુક્રમે 50, 70 અને 40 છે. ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત મુજબ કયો વ્યૂહ શ્રેષ્ઠ ગણાય ?

(a) A (b) B (c) C (d) બધાં જ

(iii) ત્રણ ઘટનાઓની સંભાવના અનુક્રમે 0.2, 0.4, 0.4 છે અને કોઈ ચોક્કસ વ્યૂહ પસંદ કરવાથી મળતા વળતરો અનુક્રમે 10, 20 ને 15 છે તો તે વ્યૂહની EMVની કિંમત શોધો.

(a) 33 (b) 16 (c) 34 (d) આમાંથી એક પણ નહિ.

(iv) નીચેનામાંથી કયા સિદ્ધાંતને આશાવાદી અભિગમ તરીકે પણ ઓળખાય છે ?

(a) લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (b) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(c) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (d) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત

(v) નીચેનામાંથી કયા સિદ્ધાંતને નિરાશાવાદી અભિગમ તરીકે પણ ઓળખાય છે ?

(a) લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (b) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(c) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (d) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત

(vi) કયા સિદ્ધાંતમાં બધી જ ઘટનાઓની સંભાવના સરખી છે તેમ ધારી લેવામાં આવે છે ?

(a) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (b) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(c) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત (d) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત

(vii) કયા સિદ્ધાંતને આશાવાદી અને નિરાશાવાદી અભિગમોનો સમન્વય એટલે કે મધ્યમાર્ગી અભિગમ ગણવામાં આવે છે ?

(a) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (b) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(c) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત (d) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત

(viii) હોર્વિચના સિદ્ધાંતનો આશાવાદીનો ગુણાંક α ની સીમા જણાવો.

(a) $-1 \le \alpha \le 1$ (b) $-\infty \le \alpha \le \infty$

(c) $0 \le \alpha \le 1$ (d) આમાંથી એક પણ નહિ.

(ix) નીચેનામાંથી કઈ પદ્ધતિને જોખમ હેઠળ નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિ કહેવાય ?

(a) EMV ની રીત (b) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત

(c) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (d) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત

(x) જ્યારે ઘટના E_1 બને ત્યારે વ્યૂહ A_1, A_2, A_3 ની પસંદગી કરવાથી મળતા વળતરો અનુક્રમે 12, 20 અને 25 છે. જો વ્યૂહ A_2 પસંદ કરીએ અને ઘટના E_1 બને તો તક નુકશાન કેટલું થાય ?

(a) 20 (b) 5 (c) 57 (d) 45

2. નીચેના પ્રશ્નોના એક કે બે વાક્યમાં જવાબ આપો.

(i) નિર્ણયનો સિદ્ધાંત એટલે શું ?

(ii) નિર્ણયના સિદ્ધાંતના ઘટકોના નામ આપો.

(iii) વ્યૂહ એટલે શું ?

(iv) ઘટના એટલે શું ?

(v) વળતર શ્રેણિક એટલે શું ?

(vi) અનિશ્ચિતતા હેઠળ નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિઓ પૈકી કોઈ પણ બે સિદ્ધાંતના નામ જણાવો.

(vii) તક નુકશાનની કિંમત ઋણ હોઈ શકે કે કેમ ?

(viii) EMV અને EOLની રીતોથી લેવાતા નિર્ણય સરખાં જ હોય છે કે કેમ ?

3. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) નિર્ણયના સિદ્ધાંતનો અર્થ જણાવી તેના ઘટકો સમજાવો.

(2) અનિશ્ચિતતા હેઠળ નિર્ણય લેવાની જુદી જુદી રીતો સમજાવો.

(3) EMVની રીત વિશે ટૂંકનોંધ લખો.

(4) લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત સમજાવો.

(5) EOLની રીત સમજાવો.

(6) નિર્ણયના સિદ્ધાંતના ઉપયોગો અને મર્યાદા જણાવો.

4. નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી

(i) ગુરુ ગુરુ સિદ્ધાંત (ii) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(iii) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત (iv) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત $(\alpha = 0.8)$ પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

	વ્યૂહ			
ઘટના	A	B	C	D
E_1	5	8	-3	12
E_2	10	-2	9	6
E_3	0	7	5	-4

5. નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી

(i) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (ii) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(iii) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત (iv) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત $(\alpha = 0.7)$ પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

	વ્યૂહ				
ઘટના	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
S_1	10	25	10	15	20
S_2	-5	10	-5	10	-5
S_3	15	5	10	10	10

6. નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી

(i) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (ii) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(iii) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત (iv) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત $(\alpha = 0.6)$ પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

	વ્યૂહ		
ઘટના	P	Q	R
x	8	-4	14
y	0	12	6
z	-10	18	0
w	6	-2	8

7. નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી,

(i) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (ii) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(iii) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત (iv) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત $(\alpha = 0.4)$ પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

	વ્યૂહ			
ઘટના	A_1	A_2	A_3	A_4
E_1	10	40	20	30
E_2	20	12	30	28
E_3	30	20	35	16
E_4	40	30	15	22

8. નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી અપેક્ષિત આર્થિક મૂલ્ય (EMV) ની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ મેળવો.

		વ્યૂહ			
ઘટના	સંભાવના	A	B	C	D
E_1	0.4	15	50	10	15
E_2	0.3	20	15	50	10
E_3	0.2	40	20	15	50
E_4	0.1	60	40	20	15

9. નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી EMVની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

		વ્યૂહ		
ઘટના	સંભાવના	A_1	A_2	A_3
S_1	0.2	-10000	20000	-30000
S_2	0.3	30000	25000	-5000
S_3	0.5	50000	30000	60000

10. એક વસ્તુની પડતર કિંમત ₹ 30 છે. અને તેની વેચાણ કિંમત એકમ દીઠ ₹ 20 છે. દિવસ દરમ્યાન વસ્તુ ન વેચાય તો નકામી થઈ જાય છે. વસ્તુની માંગનું વિતરણ નીચે મુજબ છે.

માંગ	0	1	2	3	4
સંભાવના	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

મહત્તમ નફો મેળવવા દરરોજ એકમો બનાવવા જોઈએ ?

11. એક વસ્તુનું ઉત્પાદન ખર્ચ ₹ 10 છે અને તેની વેચાણકિંમત ₹ 15 છે. દિવસ દરમિયાન ન વેચાયેલ વસ્તુઓ એકમ દીઠ ₹ 8માં દિવસના અંતે પરત કરવામાં આવે છે. વસ્તુની દૈનિક માંગનું વિતરણ નીચે મુજબ છે.

માંગ	10	15	20	25
સંભાવના	0.2	0.3	0.3	0.2

મહત્તમ નફો મેળવવા કેટલા એકમોનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ?

12. એક વસ્તુની ખરીદ કિંમત ₹ 6 અને વેચાણ કિંમત ₹ 10 છે. જો તે વસ્તુ ન વેચાય તો ₹ 4 માં પરત કરવામાં આવે છે. વસ્તુની માંગનું વિતરણ નીચે મુજબ છે.

માંગ (એકમો)	20	21	22	23	24
સંભાવના	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

13. એક ચોકલેટની પડતર કિંમત ₹ 5 છે. અને તેની વેચાણ કિંમત ₹ 10 છે. જો અઠવાડિયા દરમિયાન ચોકલેટ ન વેચાય તો તે નકામી થઈ જાય છે. નીચેની માહિતી પરથી EMVની રીતનો ઉપયોગ કરી દર અઠવાડિયે કેટલી ચોકલેટનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ તે જણાવો.

અઠવાડિક માંગ	10	20	25	50
અઠવાડિયાની સંખ્યા	5	15	25	5

14. નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ મેળવો.

	વ્યૂહ		
ઘટના	A_1	A_2	A_3
E_1	12	7	3
E_2	4	10	6
E_3	8	2	7

15. નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

	વ્યૂહ			
ઘટના	A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	20	50	-10	70
S_2	80	-20	60	40
S_3	10	70	40	-10

16. નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી EOL ની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

		વ્યૂહ		
ઘટના	સંભાવના	A	B	C
E_1	0.2	40	-10	-100
E_2	0.7	400	440	400
E_3	0.1	650	720	760

17. નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી અપેક્ષિત તક નુકશાનની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ નક્કી કરો.

		વ્યૂહ		
પરિસ્થિતિ	સંભાવના	A_1	A_2	A_3
S_1	0.5	-35	120	-100
S_2	0.1	250	-350	200
S_3	0.4	550	650	700

જવાબો :

1. (i) (c) (ii) (b) (iii) (b) (iv) (c) (v) (b)
(vi) (c) (viii) (d) (iii) (c) (ix) (a) (x) (b)

2. (viii) તક-નુકશાનની કિંમત ઋણ ન હોઈ શકે.
(viii) હા, બંને રીતોથી નિર્ણય સમાન હોય છે.

4. (i) D (ii) A (iii) A (iv) D

5. (i) A_2 (ii) A_4 (iii) A_2 (iv) A_2

6. (i) Q (ii) R (iii) R (iv) Q

7. (i) A_1 અથવા A_2 (ii) A_4 (iii) A_2 (iv) A_2

8. વ્યૂહ B માટે મહત્તમ EMV = 32.5

9. વ્યૂહ 2 એકમો માટે મહત્તમ EMV = 32000

10. વ્યૂહ 2 એકમો માટે મહત્તમ EMV = 8

11. વ્યૂહ 20 એકમો માટે મહત્તમ EMV = 75

12. વ્યૂહ 23 એકમો માટે મહત્તમ EMV = 86.6

13. વ્યૂહ 35 એકમો માટે મહત્તમ EMV = 105

14. વ્યૂહ A_1 અથવા A_2

15. વ્યૂહ A_1

16. વ્યૂહ B શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ અને લઘુત્તમ EOL = 14

17. વ્યૂહ A_2 શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ અને લઘુત્તમ EOL = 80

એકમ
14

આંકડાશાસ્ત્રીય ગુણવત્તા નિયંત્રણ

-: રૂપરેખા :-

14.1 પ્રસ્તાવના

આજના જમાનામાં ઉત્પાદન ક્ષેત્ર તથા સર્વિસ ક્ષેત્રમાં ખૂબ જ હરીફાઈ જોવા મળે છે. ઉત્પાદન ક્ષેત્રમાં જુદા જુદા ઉત્પાદકો દ્વારા એક જ પ્રકારની વસ્તુનું ઉત્પાદન કરી અને બજારમાં મુકતાં હોય છે. જેમાં ઉત્પાદકનો મૂળભૂત હેતુ પોતાના દ્વારા ઉત્પાદિત થયેલ વસ્તુનું મહત્તમ વેચાણ થાય અને વધારેને વધારે લોકો સુધી તે વસ્તુ પહોંચે તે જોવાનો હોય છે અને જે વસ્તુનું તે ઉત્પાદન કરે તે વસ્તુની ગુણવત્તા દરેક ગ્રાહકને સંતોષ આપે તેવી હોવી જોઈએ. તેથી વસ્તુના ઉત્પાદનમાં ગુણવત્તાનું નિયંત્રણ જાળવી રાખવું તે ઉત્પાદક માટે ખૂબ જ અગત્યનું છે. આથી ઉત્પાદિત વસ્તુની ગુણવત્તા જાળવવા માટે ગુણવત્તા નિયંત્રણની અનેક પદ્ધતિઓનો અમલ કરવો આવશ્યક છે.

ઉત્પાદિત વસ્તુની ગુણવત્તા ધોરણ જાળવી અને તેની ગુણવત્તામાં ઉત્તરોત્તર સુધારો કરવા આંકડાશાસ્ત્રની જે પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે તેને આંકડાશાસ્ત્રીય ગુણવત્તા નિયંત્રણ કહે છે.

ડૉ. વોલ્ટર એ. શ્યુહર્ટે આંકડાશાસ્ત્રીય ગુણવત્તા નિયંત્રણનો સને 1935 માં આવિષ્કાર કર્યો હતો. તેણે બીજા વિશ્વયુદ્ધ દરમ્યાન લશ્કર માટે ઉત્પાદિત થતા માલમાં બહોળો ઉપયોગ કર્યો હતો અને આજે દુનિયામાં તેનો ઉત્પાદન ક્ષેત્રે મહત્તમ ઉપયોગ થાય છે.

14.2 ગુણવત્તા અને ગુણવત્તા નિયંત્રણ

ગુણવત્તા શબ્દનો અર્થ સામાન્ય વ્યક્તિ માટે 'શ્રેષ્ઠ' એવો થાય છે. એટલે કે ગુણવત્તાવાળી વસ્તુનો અર્થ 'શ્રેષ્ઠ ગુણવત્તાવાળી વસ્તુ' એવો થાય. પરંતુ અહીં આપણે ગુણવત્તા એટલે 'શ્રેષ્ઠ' એવા સંદર્ભમાં અર્થ લેવાનો નથી. પણ ગુણવત્તા એટલે ગ્રાહકની જરૂરિયાત તથા તેણે માગેલ ધારાધોરણ મુજબની વસ્તુ એવા થાય છે. ટૂંકમાં ગુણવત્તા એટલે ઉત્પાદકે ઉત્પાદિત કરેલ વસ્તુ નક્કી કરેલા ધોરણો મુજબની અને ગ્રાહકોની જરૂરિયાત સંતોષતી હોય તેવું ધોરણ.

કોઈપણ ઉત્પાદક માટે હંમેશાં તેણે ઉત્પાદિત કરેલ વસ્તુની ગુણવત્તા જાળવી રાખવી મુશ્કેલ હોય છે. ઉત્પાદકે વસ્તુની ગુણવત્તા જાળવી રાખવા ઉત્પાદિત વસ્તુની ગુણવત્તાની સતત ચકાસણી કરતી રહેવી પડે છે. ઉત્પાદકે અગાઉથી નક્કી કરેલા ધારા ધોરણ મુજબ ઉત્પાદિત વસ્તુની ગુણવત્તા ચકાસવા અને તેની ગુણવત્તા વિશે નિર્ણય કરવાની પદ્ધતિને ગુણવત્તા નિયંત્રણ કહે છે.

14.3 ગુણવત્તામાં ચલનના કારણો

ઉત્પાદક જ્યારે કોઈપણ વસ્તુનું ઉત્પાદન કરે છે, ત્યારે તે વસ્તુ ધારા ધોરણ મુજબ બનેલી છે કે નહીં, તેનું નિરીક્ષણ કહે છે. આ નિરીક્ષણ દરમ્યાન દરેક વસ્તુ, તેના માપ કરતા થોડા ઘણા અંશે ફેરફાર વાળી જોવા મળે છે. એટલે કે ઉત્પાદિત દરેક વસ્તુ ભાગ્યે જ એક સમાન માપવાળી હોય છે અને તેમાં થોડા ઘણા અંશે ચલન (Variation) જોવા મળે છે. ગુણવત્તામાં ચલન એ સ્વાભાવિક ક્રિયા છે. દાખલા તરીકે બોલ બેરીંગ ઉત્પાદન કરતા તેના દરેક એકમનું પરિમાણ (વ્યાસ, જાડાઈ વગેરે) એક સરખું જોવા મળતું નથી, પણ તેમાં નજીવો ફેરફાર હોય છે. ધારો કે બેરીંગ બનાવતી કંપનીએ, બેરીંગના વ્યાસનું ધોરણ 12mm નક્કી કરેલ છે. પણ જ્યારે દરેક બેરીંગના વ્યાસનું માપ લેતાં તેમાં ± 0.001mm નો ફેરફાર જોવા મળે છે. આ માપના ફેરફારને ચલન (Variation) કહેવામાં આવે છે.

ઉત્પાદન કરતી વખતે વસ્તુની ગુણવત્તામાં થતું ચલન મુખ્યત્વે બે પ્રકારનાં કારણોથી હોય છે. આ ચલનના કારણો નીચે મુજબ છે :

(1) યાદચ્છિક અથવા કુદરતી કારણોને લીધે થતું ચલન (Variation Due to Chance Causes) (2) નિર્દેશી શકાય તેવા કારણોને લીધે થતું ચલન (Variation Due to Assignable Causes)

(1) યાદચ્છિક અથવા કુદરતી કારણોને લીધે થતું ચલન :

વસ્તુના ઉત્પાદન વખતે થતું આ પ્રકારનું ચલન યદચ્છ રીતે થાય છે અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વખતે તે કુદરતી રીતે સંકળાયેલા હોય છે. આ રીતે થતા ચલનનું કોઈ દેખીતું કારણ હોતું નથી અને તેને દૂર પણ કરી શકાતું નથી. દાખલા તરીકે આપણે જ્યારે એક સાથે 10 વખત સહી (Signature) કરીએ છીએ ત્યારે હંમેશાં તેમાં ચલન (Variation) આવે છે અને તેને આપણે દૂર કરી શકતા નથી. આ પ્રકારના ચલનને યાદચ્છિક ચલન કહે છે અને તે સ્વીકાર્ય છે.

આજ રીતે ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં આ ચલન સ્વીકાર્ય ગણાય છે અને તે સહ્ય ચલન ગણાય

છે. આ પ્રકારનું ચલન ચોક્કસ આંકડાકીય સંભાવના વિતરણને અનુસરતું હોય છે અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં આ ચલનની હાજરી હોવા છતાં, ઉત્પાદન પ્રક્રિયા આંકડાકીય ગુણવત્તા નિયંત્રણ હેઠળ છે એમ કહેવામાં આવે છે.

(2) નિર્દેશી શકાય તેવા કારણોને લીધે થતું ચલન :

ઉત્પાદિત વસ્તુનું જ્યારે નિરીક્ષણ કરવામાં આવે છે. ત્યારે તેની ગુણવત્તામાં નોંધપાત્ર ફેરફાર થતો જોવા મળે છે. દા.ત. બોલ બેરીંગ બનાવતા ઉત્પાદક, 12mm ના વ્યાસવાળા બેરીંગના જથ્થામાંથી કેટલાક બેરીંગ લઈ અને તેનું માપ લે છે. જો બેરીંગનો વ્યાસ 12.001mm અથવા 12.002mm હોય તો તેને યાદચ્છિક ચલન છે તેમ સ્વીકારી આ જથ્થો ગ્રાહકને આપે છે.

પરંતુ જો બેરીંગનો વ્યાસ 12.2mm અથવા 11.8mm હોય તો માપમાં ચલન વધારે છે. તેમ ગણી માપમાં ચલન કયા કારણોને લીધે થયું છે. તે શોધે છે અને તે દૂર કરે છે.

ઉપરોક્ત ઉદાહરણ ઉપરથી કહી શકાય કે ઉત્પાદિત વસ્તુના માપમાં જ્યારે નોંધપાત્ર ફેરફાર થાય છે, ત્યારે ઉત્પાદક તે ફેરફાર કયા ચોક્કસ કારણોને લીધે થયા છે. તે જાણવા પ્રયત્ન કરે છે. ઉત્પાદિત થતા વસ્તુના આ પ્રકારનાં ચલનને નિર્દેશી શકાય તેવા કારણોને લીધે થતું ચલન કહેવામાં આવે છે. ઉત્પાદનની પ્રક્રિયા વખતે ગુણવત્તામાં થતા નિર્દેશી શકાય તેવા ચલન નીચે મુજબના કારણોને લીધે હોય શકે છે.

(1) **કારીગરોમાં તફાવત :** કારખાનામાં મશીન ઉપર કામ કરતા કારીગરો અલગ-અલગ હોય છે. જ્યારે કોઈ બિનઅનુભવી કારીગર મશીન ઉપર કામ કરતો હોય છે ત્યારે તેની અસર વસ્તુની ગુણવત્તા ઉપર પડે છે. જ્યારે અનુભવી કારીગર વસ્તુ ગુણવત્તા મુજબ બનાવે છે. કારીગરો વચ્ચેના અનુભવી અને બિનઅનુભવી પણાના તફાવતને કારણે વસ્તુની ગુણવત્તામાં નોંધપાત્ર ફેરફાર જોવા મળતો હોય છે.

(2) **કાચા માલમાં થતા ફેરફાર :** ઉત્પાદિત થતી વસ્તુ બનાવવા માટે અલગ-અલગ પ્રકારનાં કાચા માલની જરૂર પડે છે. ઉત્પાદન વખતે કાચો માલ જ્યારે એક સરખી ગુણવત્તા ધરાવતો ન હોય ત્યારે ઉત્પાદિત વસ્તુની ગુણવત્તામાં નોંધપાત્ર ફેરફાર જોવા મળે છે. દાખલા તરીકે પુલ (Bridge) બનાવતી વખતે જો સીમેન્ટ (સ્ટીલ) એક સરખી ગુણવત્તાવાળો ન હોય તો તે પુલની મજબૂતાઈમાં નોંધપાત્ર ફેરફાર થતો હોય છે અને ઘણી વખત તે સમય કરતાં જલ્દી નબળો પડી જાય છે.

કાચા માલની ગુણવત્તામાં ફેરફાર થવાને લીધે ઉત્પાદિત વસ્તુની ગુણવત્તામાં થતા ફેરફાર (ચલન)ને નિર્દેશી શકાય તેવા કારણોને લીધે થતું ચલન કહેવાય છે.

(3) **યંત્રોમાં તફાવત (મશીનમાં તફાવત) :** ઉત્પાદક પોતાની વસ્તુનું ઉત્પાદન કારખાનામાં જુદા-જુદા મશીનમાં કરતાં હોય છે. વસ્તુ એક જ હોય પણ તેનું ઉત્પાદન અલગ-અલગ મશીનમાં થતું હોવાને લીધે પણ વસ્તુની ગુણવત્તામાં ચલન આવી શકે છે. અમુક વખતે કારખાનામાં જૂના અને નવા મશીનમાં વસ્તુનું ઉત્પાદન કરવાથી પણ વસ્તુની ગુણવત્તામાં ફેરફાર થાય છે.

આમ મશીનના તફાવતને કારણે થતા વસ્તુનો ગુણવત્તાના ચલન માટે નિર્દેશી શકાય તેવા કારણો જવાબદાર ગણી શકાય.

(4) સમયમાં થતાં ફેરફારને લીધે થતું ચલન : મોટા ઔદ્યોગિક એકમમાં ઉત્પાદનનું કાર્ય 24 કલાક ચાલતું હોય છે. જેમાં 8 કલાકની ત્રણ પાળી હોય છે. સવારની પાળીમાં કાર્ય કરતા કારીગરની કાર્યક્ષમતા રાત્રીની પાળીમાં કામ કરતા કારીગર કરતા વધારે હોય છે. જેની સીધી અસર વસ્તુની ગુણવત્તા ઉપર પણ પડતી હોય છે. એજ રીતે ઘણી વખત સવારની શરૂઆતમાં કાર્ય કરતા કારીગરની ક્ષમતા બપોર પછી થોડી ઘટી જતી હોય છે. એજ રીતે ઉનાળા કરતા શિયાળામાં કારીગરની કાર્યક્ષમતા વધારે હોય છે.

આવા બધા કારણોને લીધે વસ્તુની ગુણવત્તામાં ચલન આવતું હોય છે. સમયનો ફેરફારના લીધે થતું ચલન એ નિર્દેશથી શકાય તેવા કારણોને લીધે થતું ચલન છે.

ઉપરોક્ત નિર્દેશી શકાય તેવા ચલનના કારણો શોધી તેને દૂર કરી અને વસ્તુની ગુણવત્તામાં ચલન (Variation) ઓછું અથવા દૂર કરી શકાય છે.

14.4 ગુણવત્તા નિયંત્રણના આલેખોનો સિદ્ધાંત

ઉત્પાદન વખતે વસ્તુના પરિમાણ (માપ અથવા લાક્ષણિકતા)માં થતા ચલનની ચર્ચા આપણે કરી. એમાં આપણે જોયું કે યાદચ્છિક કે કુદરતી રીતે થતું ચલન દૂર કરી શકાતું નથી પણ બીજા કારણોને લીધે થતું ચલન ઓળખી અને તેને દૂર કરી શકાય છે. ઉત્પાદનમાં થતા આ પ્રકારના ચલન (Variation) જાણવા અને અલગ કરવા માટે ડૉ. શ્યુહર્ટે ગુણવત્તા નિયંત્રણ આલેખની રચના કરી હતી.

ડૉ. શ્યુહર્ટેનો ગુણવત્તા નિયંત્રણ આલેખનો સિદ્ધાંત યાદચ્છિક ચલન ઉપર આધારિત છે. ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં અલગ-અલગ સમય, મશીન અને કારીગરો દ્વારા વસ્તુનું ઉત્પાદન થતું હોય અને તે વસ્તુઓના નિદર્શ (Sample) અવલોકનો લેવામાં આવે. અને તે અવલોકનોમાં ફેરફાર યાદચ્છિક હોય તો તે અવલોકનો એક ચોક્કસ આંકડાકીય નિયમને અનુસરે છે તથા ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં છે તેમ કહી શકાય. જો આ અવલોકનો ચોક્કસ આંકડાકીય નિયમ અનુસરતા ન હોય, તો ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં નિર્દેશી શકાય તેવા કારણોને લીધે ચલન હોવાની સંભાવના છે અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં નથી તેમ કહેવામાં આવે છે.

ગુણવત્તા નિયંત્રણ આલેખ આલેખી તથા તેનો અભ્યાસ કરીને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં છે કે નહીં તે નક્કી કરવામાં આવે છે. ઉત્પાદન પ્રક્રિયા દરમ્યાન ઉત્પાદિત વસ્તુના એક સરખા કદના નિદર્શ (Sample) સરખા સમયના અંતરે લેવામાં આવે છે. આ નિદર્શનું પ્રમાણ માપ અથવા ગુણવત્તા દર્શાવતું લક્ષણ નોંધવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે બેરીંગના વ્યાસનું માપ મિલિમીટર (mm) માં દર્શાવવામાં આવે છે. તેજ રીતે કાચની બોટલ બનાવતી વખતે તે કાચમાં ખામી છે કે નહીં (કાચમાં એર બબલ જેવી) આવા માપ અથવા લક્ષણને આગણક θ કહેવામાં આવે છે. જો ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં વસ્તુના પરિમાણમાં ફેરફાર (ચલન) યાદચ્છિક હોય તો આ આગણક θ કોઈ ચોક્કસ આંકડાકીય વિતરણને અનુસરે છે.

સામાન્ય રીતે આગણક θ પ્રામાણ્ય વિતરણ (Normal Distribution) ને અનુસરતો હોય છે અથવા θ નું વિતરણ લગભગ પ્રામાણ્ય હોય છે. આગણક 'θ' ના માપ મેળવી તથા તેના વિતરણ ઉપરથી તેનો મધ્યક (μ) અને પ્રમાણિત વિચલન σ_θ નું આગણન કરવામાં આવે છે. પ્રામાણ્ય વિતરણના ગુણધર્મ મુજબ મધ્યક $\pm 3\sigma_\theta$ વચ્ચેનો સીમા θ ના 99.73% અવલોકનોનો સમાવેશ થયેલ હોય છે. એટલે કે 0.27% અવલોકનો આ સીમાની બહાર હોઈ શકે છે. ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં θ ની કિંમત ઉપર મુજબની સીમામાં હોય તો ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં રહેલું ચલન યાદચ્છિક

છે તેમ કહી શકાય. અન્યથા પ્રક્રિયામાં રહેલું ચલન નિર્દેશી શકાય તેવા કારણોને લીધે છે તેમ કહી શકાય.

અહીં આગણક θ ના મધ્યકને ગુણવત્તાનું અપેક્ષિત ધોરણ ગણવામાં આવે છે. તથા θ નો મધ્યક $\pm 3\sigma_\theta$ ને ઉપલી નિયંત્રણ સીમા (Upper Control Limit) અને મધ્યક $-3\sigma_\theta$ ને નીચલી નિયંત્રણ સીમા (Lower Control Limit) કહેવામાં આવે છે.

ઉત્પાદિત વસ્તુઓના ગુણવત્તા નિયંત્રણ આલેખમાં આગણક θ માટે ત્રણ સીમાઓ નક્કી કરવામાં આવે છે.

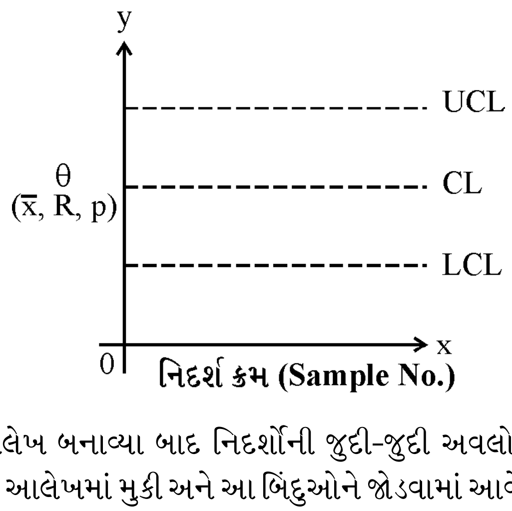
ઉપલી નિયંત્રણ સીમા (UCL) = $\mu_\theta + 3\sigma_\theta$

મધ્ય રેખા (Central Line) = θ ની અપેક્ષિત કિંમત (μ)

નીચલી નિયંત્રણ સીમા (LCL) = $\mu_\theta - 3\sigma_\theta$

ઉપર જણાવ્યા પ્રમાણે ગુણવત્તા નિયંત્રણ આલેખની રચના કરવા માટે ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વખતે, સરખા સમય અંતરાલે એક સરખા કદના નિદર્શ લઈ અને તેના પરિમાણ (માપ અથવા લક્ષણ) નોંધવામાં આવે છે. ત્યારબાદ ઉપર જણાવ્યા મુજબ 'θ' ની અપેક્ષિત કિંમત જે વસ્તુ બનાવતી વખતે નક્કી કરેલ હોય તેને મધ્યરેખા તરીકે લેવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે કાચ બનાવતી વખતે તેની જાડાઈનું માપ 6mm નક્કી કરેલ હોય તો તેને અહીં 'θ' કહેવાય છે. ત્યારબાદ θ ના આપેલ મધ્યક તથા તેના પ્રમાણિત વિચલન σ_θ નો ઉપયોગ કરી ઉપર મુજબ દર્શાવેલ સમીકરણની મદદથી ઉપલી તથા નીચલી (UCL/LCL) નિયંત્રણ સીમાની ગણતરી કરવામાં આવે છે. જયારે અગાઉથી જ 'θ' ના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન આપેલ ન હોય તો નિદર્શની અવલોકન કિંમતો ઉપરથી મધ્યક તથા પ્રમાણિત વિચલનનો ઉપયોગ કરીને UCL અને LCL ની કિંમત મેળવવામાં આવે છે.

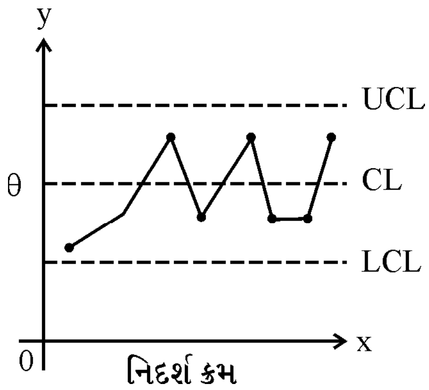
ત્યારબાદ આલેખ પત્ર ઉપર નીચે દર્શાવ્યા મુજબ X-અક્ષ ઉપર નિદર્શનો ક્રમ અને Y-અક્ષ ઉપર θ ની કિંમત લેવામાં આવે છે. આ આલેખમાં UCL, CL અને LCL ત્રૂટક રેખા વડે અંકિત કરવામાં આવે છે.



ઉપરોક્ત આલેખ બનાવ્યા બાદ નિદર્શોની જુદી-જુદી અવલોકિત કિંમત નિદર્શ ક્રમ અનુસાર બિંદુ સ્વરૂપે આલેખમાં મુકી અને આ બિંદુઓને જોડવામાં આવે છે. આ પૂર્ણ આલેખને ગુણવત્તા નિયંત્રણ આલેખ કહે છે.

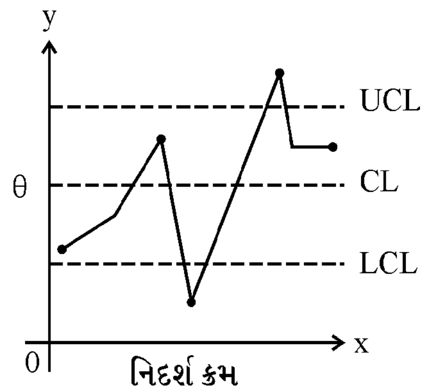
ગુણવત્તા નિયંત્રણ આલેખ ઉપરથી નિર્ણય : (1) ગુણવત્તા નિયંત્રણ આલેખ-1 માં નિદર્શ અવલોકનના બધા જ બિંદુઓ ઉપલી અને નીચલી સીમા વચ્ચે આવેલ હોય તો ઉત્પાદન પ્રક્રિયા

નિયંત્રણમાં છે અને વસ્તુના માપ અથવા લક્ષણોમાં થતા ફેરફાર યાદચ્છિક છે તેમ કહી શકાય.



આલેખ-1

ગુણવત્તા નિયંત્રણ આલેખ-2 માં નિદર્શ અવલોકનોના એક અથવા એકથી વધુ બિંદુ નિયંત્રણ સીમા (UCL અને LCL) ની બહાર આવેલ હોય તો ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં નથી અને વસ્તુના માપ અથવા લક્ષણોમાં થતા ફેરફાર નિર્દેશી શકાય તેવા કારણોને લીધી છે તેમ કહી શકાય.



આલેખ-2

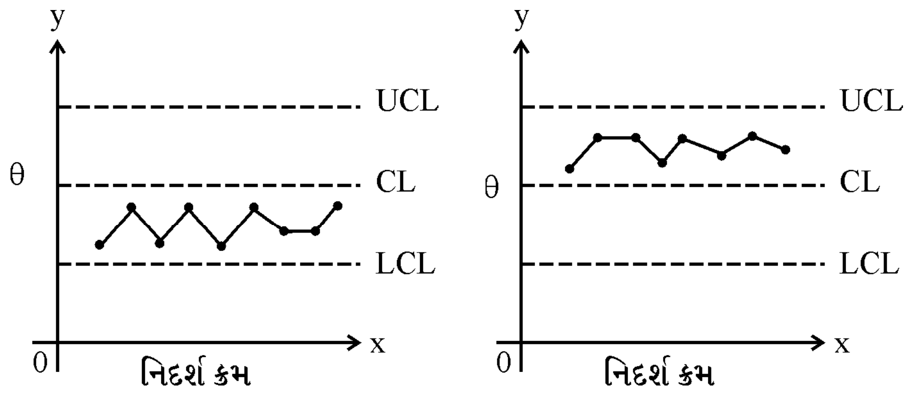
આમ, આલેખ-1 ઉપરથી કહી શકાય કે ઉત્પાદન પ્રક્રિયા આંકડાશાસ્ત્રીય ગુણવત્તા નિયંત્રણમાં છે અને અવલોકિત ફેરફાર યાદચ્છિક છે.

આલેખ-2 ઉપરથી કહી શકાય કે એક બિંદુ UCL ની ઉપર છે અને એક બિંદુ LCL ની નીચે છે. એટલે કે નિયંત્રણ સીમાની બહાર છે. તેથી ઉત્પાદન પ્રક્રિયા આંકડાશાસ્ત્રીય ગુણવત્તા નિયંત્રણમાં નથી અને અવલોકિત ફેરફાર (ચલન) નિર્દેશી શકાય તેવા કારણેને લીધે છે. જે ઓળખી અને દૂર કરવામાં આવે તો ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં લાવી શકાય.

14.4.1 સાનુક્રમનો સિદ્ધાંત

ગુણવત્તા નિયંત્રણ આલેખમાં સૈદ્ધાંતિક રીતે આપેલ અવલોકન બિંદુઓ મધ્યરેખાની બંને તરફ એક સરખા આવેલ હોવા જોઈએ. એટલે કે કોઈપણ બિંદુ મધ્યરેખાથી ઉપર અથવા નીચે તરફ પડવાની સંભાવના સરખી એટલે કે 1/2 થાય છે. પણ ઘણી વખત આલેખમાં બધા જ બિંદુઓ મધ્યરેખા અને ઉપલી સીમા વચ્ચે અથવા મધ્યરેખા અને નીચલી સીમા વચ્ચે પડેલા હોય છે. આ રીતે મળતો આલેખ જેમાં મધ્યરેખાની એક બાજુએ ઉપરાઉપરી પડતા બિંદુઓને સાનુક્રમ (Runs) કહેવામાં આવે છે. આ પરિસ્થિતિમાં ઉત્પાદન

પ્રક્રિયા આંકડાશાસ્ત્રીય ગુણવત્તા નિયંત્રણમાં નથી અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં નિર્દેશી શકાય તેવા કારણોની હાજરી હોય શકે છે.



આલેખ-2

→ **ગુણવત્તા નિયંત્રણ આલેખની સીમાઓ :**

આપણે આગળના મુદ્દામાં જોયું કે ગુણવત્તા નિયંત્રણ આલેખમાં ગુણવત્તા નિયંત્રણ સીમાની ગણતરી કરવી પડે છે. આ સીમાઓ ત્રણ પ્રકારની છે.

(1) નિર્દિષ્ટ સીમાઓ (Specified Limit) : આપણે આગળના આપેલ ઉદાહરણમાં જોયું કે બેરીંગ બનાવતી વખતે તેના વ્યાસનું માપ 12 mm પહેલેથી નક્કી કરેલું હોય છે. ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ઉત્પાદકે/ગ્રાહકે બેરીંગના વ્યાસની નિયંત્રણ સીમાઓ નક્કી કરેલ હોય છે. ધારો કે તે સીમાઓ 11.999 mm અને 12.001 mm નક્કી કરેલ છે. તો આ રીતે ઉત્પાદકે પહેલેથી જ નક્કી કરેલ નીચલી અને ઉપલી નિયંત્રણ સીમાઓને નિર્દિષ્ટ નિયંત્રણ સીમા કહે છે.

ટૂંકમાં ઉત્પાદક અને ગ્રાહક વચ્ચે સમજૂતી મુજબ નિયંત્રણ સીમાઓ નક્કી કરવામાં આવી હોય, તો આ સીમાઓને નિર્દિષ્ટ સીમાઓ કહેવામાં આવે છે.

(2) પ્રક્રિયાની સીમાઓ (Process Limits) : જ્યારે ઉત્પાદિત વસ્તુઓના નિદર્શ અવલોકનોને આધારે ગુણવત્તા નિયંત્રણ સીમાઓ નક્કી કરવામાં આવી હોય, તો આ સીમાઓને પ્રક્રિયાની સીમાઓ કહેવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે એક ઉત્પાદક બેરીંગનું ઉત્પાદન કરે છે. હવે તે સમયાંતરે ઉત્પાદિત બેરીંગમાંથી નિદર્શ અવલોકન કરે છે. એટલે કે દરેક નિદર્શના બેરીંગના વ્યાસનું માપ લઈ અને તેના ઉપરથી તે વ્યાસનો મધ્યક (μ) અને (σ) પ્રમાણિત વિચલન મેળવે છે. આ બંને માપ ઉપરથી તે નીચેના સમીકરણનો ઉપયોગ કરીને ગુણવત્તા નિયંત્રણ સીમાઓ મેળવે છે.

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $\mu - 3\sigma$

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $\mu + 3\sigma$

CL = મધ્યરેખા = μ

આ સીમાઓને પ્રક્રિયાની સીમાઓ કહે છે.

(3) સુધારેલી સીમાઓ (Revised Control Limit) : ગુણવત્તા નિયંત્રણ આલેખ ઉપરથી આપણે નક્કી કરીએ છીએ કે ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં છે કે નહીં. જ્યારે ગુણવત્તા નિયંત્રણ આલેખમાં અમુક બિંદુઓ (નિદર્શના અવલોકન) ઉપલી સીમા અને નીચલી સીમાની હદ બહાર હોય છે ત્યારે કહી શકાય કે ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં નથી. જ્યારે અમુક બિંદુઓ આ સીમાની બહાર હોય ત્યારે તે નિદર્શના અવલોકનો દૂર કરી અને ફરી વખત નિયંત્રણ સીમાઓ શોધવામાં આવે છે. આ ફરી વખત શોધેલી નિયંત્રણ સીમાઓને સુધારેલી નિયંત્રણ સીમા કહેવામાં આવે છે.

14.5 ગુણવત્તા નિયંત્રણના ઉપયોગો

આજનો જમાનો હરિફાઈનો છે. જેમાં કોઈપણ ઉત્પાદકે તેની ઉત્પાદિત વસ્તુ માટે સતત સજાગ રહેવું પડે છે. ઉત્પાદકે બનાવેલી વસ્તુઓની ગુણવત્તા જળવાય રહે અને તે વસ્તુની ગુણવત્તા ઉતરોઉતર વધારે સારી થાય તે ખૂબ જ જરૂરી છે. આ માટે ઉત્પાદકે આંકડાશાસ્ત્રીય ગુણવત્તા નિયંત્રણનો ઉપયોગ કરવો જરૂરી છે. ગુણવત્તા નિયંત્રણનો મુખ્યત્વે ઉપયોગો નીચે પ્રમાણે છે.

(1) ગુણવત્તા નિયંત્રણનો મુખ્ય ઉપયોગ, ઉત્પાદન પ્રક્રિયા ચાલુ હોય તે દરમ્યાન વસ્તુના પરિમાણમાં થતા ચલનનું કારણ શોધી, તે દૂર કરી અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં લાવવાનો છે.

(2) ગુણવત્તા નિયંત્રણના ઉપયોગથી ઉત્પાદિત થતી વસ્તુની પડતર કિંમત અથવા તો ઉત્પાદન ખર્ચમાં ઘટાડો લાવી શકાય છે.

(3) આ પદ્ધતિમાં ઉત્પાદિત વસ્તુની માહિતી સતત મળતી હોવાથી, સમયના લાંબાગાળા દરમ્યાન વધુ લાભદાયક છે.

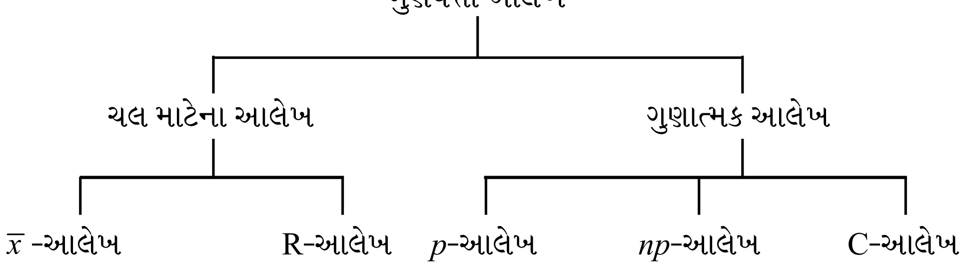
(4) આ પદ્ધતિ સતત હોય ઉત્પાદન સાથે સંકળાયેલ લોકોનું પણ સતત નિરીક્ષણ થતું હોવાથી, તેમની કાર્યદક્ષતામાં સુધારો થાય છે.

(5) આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવાથી ગ્રાહકને જોઈતી ગુણવત્તાવાળી વસ્તુ મળે છે. જેના કારણે ગ્રાહક લાંબાગાળા (જીવન પર્વત) સુધી ઉત્પાદિત કંપની સાથે જોડાયેલ રહે છે.

(6) આંકડાશાસ્ત્રીય ગુણવત્તા નિયંત્રણ માટે મુખ્યત્વે બે પ્રકારના આલેખનો ઉપયોગ થાય છે. જેને લીધે ઉત્પાદિત વસ્તુના માપમાં ચલન અથવા લક્ષણમાં ચલન છે કે નહીં તે જાણી શકાય છે.

14.6 ગુણવત્તા નિયંત્રણના આલેખો

ગુણવત્તા નિયંત્રણ માટે આપણે આલેખનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. આ આલેખ બે પ્રકારના હોય છે. જે નીચે મુજબ છે :



જ્યારે કોઈપણ વસ્તુની માહિતી (અવલોકન) એકત્રિત કરતા હોય ત્યારે તે વસ્તુની માહિતી બે પ્રકારે મળી શકે.

(1) વસ્તુની માહિતી/અવલોકન માટે તે વસ્તુનું માપ લેવામાં આવે છે. જેમ કે બેરીંગનો વ્યાસ, PVC ના પાઈપની લંબાઈ અથવા જાડાઈ વગેરે. આ માહિતીને ચલ (Variable) કહેવામાં આવે છે.

(2) વસ્તુની માહિતી/અવલોકન માટે તે વસ્તુના લક્ષણ નોંધવામાં આવે છે. જેમ કે કાચનો ગ્લાસ સારો છે કે નહીં. ભારતમાં અભણ અને ભણેલા લોકોની સંખ્યા, T.V. માં પિક્ચરની ગુણવત્તા સારી છે કે નહીં વગેરે આ રીતે મળતી માહિતીને ગુણાત્મક (Attribute) ચલ કહેવામાં આવે છે.

એટલે કે ચલમાં માહિતી આંકડાકીય રીતે મેળવવામાં આવે છે. જ્યારે ગુણાત્મક ચલમાં માહિતી વસ્તુના લક્ષણ દ્વારા મેળવવામાં આવે છે.

14.6.1 ચલનાત્મક આલેખો (Charts for Variable) : ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ઉત્પાદિત વસ્તુની ગુણવત્તા માપી (measure) શકાય તેવી હોય, ત્યારે ચલનાત્મક આલેખોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જેમ કે વેફરના પેકેટમાં મુકેલી વેફરનું વજન, ઠંડાપીણાની બોટલમાં ભરેલ ઠંડાપીણાનું માપ (ML or Liter) વગેરે નિયત ધોરણ અનુસાર છે કે નહિ તે નક્કી કરવા માટે ચલનાત્મક આલેખોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

$\overline{x}$ (મધ્યક) અને R (વિસ્તાર) ચલ માટેના મુખ્ય આલેખો છે.

(1) $\overline{x}$ -આલેખ (મધ્યક આલેખ - Mean Chart)

આ આલેખ દોરવા માટે, ઉત્પાદન પ્રક્રિયા દરમ્યાન સમયાંતરે અથવા ઉત્પાદિત વસ્તુના દરેક જથ્થા (Batch) માંથી નિદર્શ (Sample) લેવામાં આવે છે. આવા નિદર્શોને ઉપસમૂહ કહેવામાં આવે છે અને તેને m વડે દર્શાવાય છે. એટલે કે 10 (batch) માંથી તમે નિદર્શ લીધા હોવ તો m = 10 થશે.

દરેક (Batch) જથ્થામાંથી લીધેલ નિદર્શ (Sample) ની સંખ્યાને n વડે દર્શાવાય છે. ધારો કે એક જથ્થા (Batch) માંથી 5 નિદર્શ (Sample) લીધેલ હોય તો n = 5 થશે. વ્યવહારુ રીતે લગભગ 25 ઉપસમૂહો (Sub-group) માંથી નિદર્શ લેવામાં આવે છે અને તેમાં નિદર્શની સંખ્યા (n) 4 અથવા 5 લેવામાં આવે છે.

ઉપરોક્ત રીતે ઉપસમૂહમાંથી નિદર્શ લીધા પછી તે દરેક નિદર્શનું અવલોકન કરી અને તેનું માપ લેવામાં આવે છે. જેને x વડે દર્શાવાય છે. આ રીતે લેવામાં આવેલ માપને કોષ્ટકમાં લખી દરેક ઉપસમૂહનો મધ્યક ($\overline{x}$) અને વિસ્તાર (R) નીચેના સમીકરણની મદદથી શોધવામાં આવે છે.

$$\text{મધ્યક} = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum x}{n}$$

વિસ્તાર = R = અવલોકનની મહત્તમ કિંમત – અવલોકનની ન્યૂનતમ કિંમત

જો ચલ x નું વિતરણ મધ્યક (μ) અને પ્રમાણિત વિચલન σ વાળું પ્રામાણ્ય વિતરણ (Normal Distribution) હોય તો $\bar{x}$ નું વિતરણ પણ પ્રામાણ્ય બને છે, જેનો મધ્યક $\bar{x}$ અને પ્રમાણિત વિચલન $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ થશે.

ત્યારબાદ પ્રામાણ્ય વિતરણના ($\mu \pm 3\sigma$) 3σ સિદ્ધાંતને આધારે $\bar{x}$ - આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓ નીચેના સમીકરણ ઉપરથી મેળવી શકાય.

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $\mu - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$

CL = મધ્યરેખા = μ

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $\mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$

સામાન્ય રીતે સમગ્ર ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ ની કિંમત અજ્ઞાત હોવાથી μ નું આગણન $\bar{\bar{x}}$ વડે કરવામાં અને σ નું આગણન $\frac{\bar{R}}{d_2}$ વડે કરવામાં આવે છે. જ્યાં $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}}{m}$; $\bar{R} = \frac{\sum R}{m}$;

d_2 = અચલાંક છે.

નિદર્શના લીધેલા અવલોકનના કોષ્ટક ઉપરથી આપણને $\bar{x}$ અને $\bar{R}$ ની કિંમત મેળવવામાં આવે છે.

આ કિંમતો ઉપરથી આપણને $\bar{x}$ -આલેખ માટેની નિયંત્રણ સીમાઓ નીચેના સમીકરણ પરથી મળશે.

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $\bar{\bar{x}} - \frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}$

CL = મધ્યરેખા = $\bar{\bar{x}}$

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $\bar{\bar{x}} + \frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}$

ઉપરોક્ત નિયંત્રણ સીમાઓમાં $\frac{3}{d_2\sqrt{n}}$ એ નિદર્શની સંખ્યા n ઉપર આધારિત અચળ સંખ્યા બને છે અને તેને A_2 વડે દર્શાવવામાં આવે છે. (d_2, A_2 વગેરે અચળ કિંમતો ગુણવત્તા નિયંત્રણના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. આ કિંમતો n ઉપર આધારિત છે.)

આથી આપણે જયારે $\bar{x}$ આલેખ દોરવાનો હોય ત્યારે નીચેના સમીકરણનો ઉપયોગ કરીને, નિયંત્રણ સીમાઓ શોધવાની રહેશે.

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $\bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}$

CL = મધ્યરેખા = $\bar{\bar{x}}$

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $\bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}$

ઉપરોક્ત સીમાઓ શોધ્યા પછી, $\overline{x}$ આલેખ માટે આલેખ પત્ર ઉપર યોગ્ય સ્કેલ લઈ x ધરી ઉપર નિદર્શ ક્રમ (Sample Number) અને y ધરી ઉપર $\overline{x}$ (મધ્યક)ની કિંમતો લેવામાં આવે છે. ત્યારબાદ આલેખ પર મધ્યરેખા અને બંને નિયંત્રણ સીમાઓની કિંમત મુજબ x-ધરીને સમાંતર ત્રુટક રેખાઓ દોરવામાં આવે છે. ત્યારબાદ અવલોકન કોષ્ટકમાંથી નિદર્શના $\overline{x}$ ની કિંમત લઈ તેને બિંદુ સ્વરૂપે આલેખ પર દર્શાવી અને તે બિંદુઓ જોડવાથી $\overline{x}$ -આલેખ તૈયાર થઈ જશે.

$\overline{x}$ -આલેખ તૈયાર થયા પછી, ઉત્પાદન પ્રક્રિયાનો નિર્ણય લેવામાં આવે છે. જો આ આલેખમાં નિદર્શના બધા જ બિંદુઓ બંને નિયંત્રણ સીમાઓની વચ્ચે આવેલા હોય અને મધ્યરેખાની બંને બાજુ યદચ્છ રીતે પડેલા હોય, તો ઉત્પાદન પ્રક્રિયા આંકડાકીય ગુણવત્તા નિયંત્રણમાં છે અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ચલન (Variation) યાદચ્છિક કારણને લીધે છે તેમ કહી શકાય.

જો આલેખમાં નિદર્શનના એક અથવા વધારે બિંદુઓ બંનેમાંથી કોઈપણ નિયંત્રણ રેખાની બહાર પડતા હોય, તો ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં નથી અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ચલન (Variation) નિર્દેશી શકાય તેવા કારણોને લીધે છે તેમ કહી શકાય.

(2) R-આલેખ (વિસ્તારનો આલેખ)

ઉપર ($\overline{x}$ -આલેખ) દર્શાવ્યા મુજબ R ની કિંમત મેળવવામાં આવે છે. R ની કિંમત ઉપરથી $\overline{R}$ મેળવી R-આલેખ માટે નીચે મુજબ નિયંત્રણ સીમાઓ મેળવવામાં આવે છે.

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $D_3\overline{R}$

CL = મધ્યરેખા = $\overline{R}$

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $D_4\overline{R}$

અહીં D_3 અને D_4 અચલ કિંમતો છે જે ગુણવત્તા નિયંત્રણ કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. આ કિંમતો n ઉપર આધારિત છે.

ઉપરોક્ત સીમાઓ શોધ્યા પછી R-આલેખ માટે આલેખ પત્ર ઉપર યોગ્ય સ્કેલ લઈ x-ધરી ઉપર નિદર્શ ક્રમ (Sample Number) અને y-ધરી ઉપર R (વિસ્તાર)ની કિંમતો લેવામાં આવે છે. ત્યારબાદ આલેખપત્ર પર મધ્ય રેખા અને બંને નિયંત્રણ સીમાઓની કિંમત મુજબ x-ધરીને સમાંતર ત્રુટક રેખાઓ દોરવામાં આવે છે. ત્યારબાદ અવલોકન કોષ્ટકમાંથી નિદર્શ R ની કિંમત લઈ તેને બિંદુ સ્વરૂપે આલેખ પર દર્શાવી અને બિંદુઓ જોડવાથી R-આલેખ તૈયાર થઈ જશે.

R-આલેખ તૈયાર થયા પછી ઉત્પાદન પ્રક્રિયાનો નિર્ણય લેવામાં આવે છે.

જો આ આલેખમાં નિદર્શના બધા જ બિંદુઓ બંને નિયંત્રણ સીમાઓની વચ્ચે આવેલા હોય અને મધ્યરેખાની બંને બાજુ યદચ્છ રીતે પડેલા હોય, તો ઉત્પાદન પ્રક્રિયા આંકડાકીય ગુણવત્તા નિયંત્રણમાં છે અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ચલન (Variation) યાદચ્છિક કારણને લીધે છે તેમ કહી શકાય.

જો આલેખમાં નિદર્શનના એક અથવા વધારે બિંદુઓ બંનેમાંથી કોઈપણ નિયંત્રણ રેખાની બહાર પડતા હોય, તો ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં નથી અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ચલન (Variation) નિર્દેશી શકાય તેવા કારણોને લીધે છે તેમ કહી શકાય.

$\overline{x}$ -R-આલેખના ઉપયોગ :

$\overline{x}$ અને R (Chart) આલેખનો મુખ્ય ઉપયોગ ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં છે કે નહીં તે વિશે નિર્ણય કરવાનો છે અને જો પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં ન હોય તો, તે નિયંત્રણમાં ન હોવાના કારણે શોધી તેને દૂર કરવા.

ઉદાહરણ :

દા.-1 એક ઉત્પાદક દર કલાકે 100 નંગ વસ્તુ બનાવે છે. દર કલાકે થતા ઉત્પાદનમાંથી યદચ્છ (Random) રીતે ચાર વસ્તુનો એક નિદર્શ (Sample) લઈ અને તેનું માપ લેવામાં આવે છે. આ માપના અવલોકનો નીચે મુજબ આપેલ છે. આ માહિતી પરથી $\overline{x}$ અને R આલેખો દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં છે કે નહીં તે તપાસો.

નિદર્શ	**વસ્તુની લંબાઈ**			
નંબર	x_1	x_2	x_3	x_4
1	27	29	28	24
2	31	24	21	28
3	32	25	29	25
4	35	29	24	24
5	37	22	22	21
6	29	24	20	25
7	28	25	31	29
8	32	28	30	24
9	34	30	34	24
10	30	24	24	29

($n = 4$ માટે $A_2 = 0.729$, $D_3 = 0$, $D_4 = 2.282$)

જવાબ : અહીં 10 નિદર્શો આપેલ છે. સૌપ્રથમ આપેલ દરેક નિદર્શનો મધ્યક ($\bar{x}$) તથા વિસ્તાર (R) શોધીશું.

નિદર્શ		**વસ્તુની લંબાઈ**			**સરવાળો**	**મધ્યક**	**વિસ્તાર**
નંબર	x_1	x_2	x_3	x_4	Σx	$\bar{x}$	R
1	27	29	28	24	108	27	5
2	31	24	21	28	104	26	10
3	32	25	29	25	111	27.75	7
4	35	29	24	24	112	28	11
5	37	22	22	21	102	25.5	16
6	29	24	20	25	98	24.5	9
7	28	25	31	29	113	28.25	6
8	32	28	30	24	114	28.5	8
9	34	30	34	24	122	30.5	10
10	30	24	24	29	107	26.75	6
					$\Sigma\bar{x}$ =	272.75	88 = ΣR

ઉપરના કોષ્ટકમાં ($\bar{x}$) મધ્યકની કિંમત $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ થી મળશે.

નિદર્શ નંબર 1 માટે, $\bar{x} = \frac{108}{4} = 27$ થશે.

તેમજ (R) વિસ્તારની કિંમત

વિસ્તાર = અવલોકનની મહત્તમ કિંમત – અવલોકનની ન્યૂનતમ કિંમત

નિદર્શ નંબર 1 માટે, R = 29 – 24 = 5 થશે.

ત્યારબાદ, $\bar{\bar{x}}$ અને $\bar{R}$ ની કિંમતો નીચેના સમીકરણ પરથી મળશે.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}}{m} = \frac{272.75}{10} = 27.275$$

$$\bar{R} = \frac{\sum R}{m} = \frac{88}{10} = 8.8$$

$\bar{x}$ -આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓ

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $\bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}$

= 27.275 + (0.729) (8.8)

UCL = 33.6902

CL = મધ્ય રેખા = $\bar{\bar{x}}$ = 27.275

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $\bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}$

$$LCL = 27.275 - (0.729)\,(8.8)$$

$$LCL = 20.8598$$

ઉપરોક્ત નિયંત્રણ સીમાઓ મેળવ્યા બાદ, તે નિયંત્રણ સીમાઓને આલેખ ઉપર ત્રૂટક રેખાથી દર્શાવાશે. ત્યારબાદ નિદર્શ નંબરની સામે આવેલ મધ્યકિંમત ($\bar{x}$) ની કિંમતોને આલેખ પર બિંદુ સ્વરૂપે દર્શાવી અને તે બિંદુઓને સીધી લીટીથી જોડી દેવાથી $\bar{x}$ - આલેખ તૈયાર થશે જે નીચે મુજબ છે :

આલેખ-1 અહીં (પેજ નંબર - 98 પર)

R-આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓ

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $D_4\,\bar{R} = (2.282)\,(8.8) = 20.0816$

CL = મધ્ય રેખા = $\bar{R} = 8.8$

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $D_3\,\bar{\bar{R}} = (0)\,(8.8) = 0$

ઉપરોક્ત નિયંત્રણ સીમાઓ મેળવ્યા બાદ, તે નિયંત્રણ સીમાઓને આલેખ પર ત્રૂટક રેખાથી દર્શાવાશે. ત્યારબાદ નિદર્શ નંબરની સામે આવેલ વિસ્તાર (R) ની કિંમતોને આલેખ પર બિંદુ સ્વરૂપે દર્શાવી અને તે બિંદુઓને સીધી લીટીથી જોડી દેવાથી R-આલેખ તૈયાર થશે જે નીચે મુજબ છે :

આલેખ-2 અહીં (પેજ નંબર - 99 પર)

નિર્ણય :

(1) $\bar{x}$ -આલેખમાં બધા જ નિદર્શ બિંદુઓ (અવલોકનો) બંને નિયંત્રણ સીમાની અંદર આવેલા હોવાથી મધ્યક ($\bar{x}$) ને અનુલક્ષીને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં છે તેમ કહી શકાય.

(2) R-આલેખમાં બધા જ નિદર્શ બિંદુઓ બંને નિયંત્રણ સીમાની અંદર આવેલા હોવાથી વિસ્તાર (R) ને અનુલક્ષીને ઉત્પાદ પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં છે તેમ કહી શકાય.

દા.-2 ચાર એકમના એક નિદર્શના 10 નમૂનાના મધ્યક ($\bar{x}$) અને વિસ્તાર (R) નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. આ અવલોકનો ઉપરથી $\bar{x}$ અને R આલેખ દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશે નિર્ણય જણાવો.

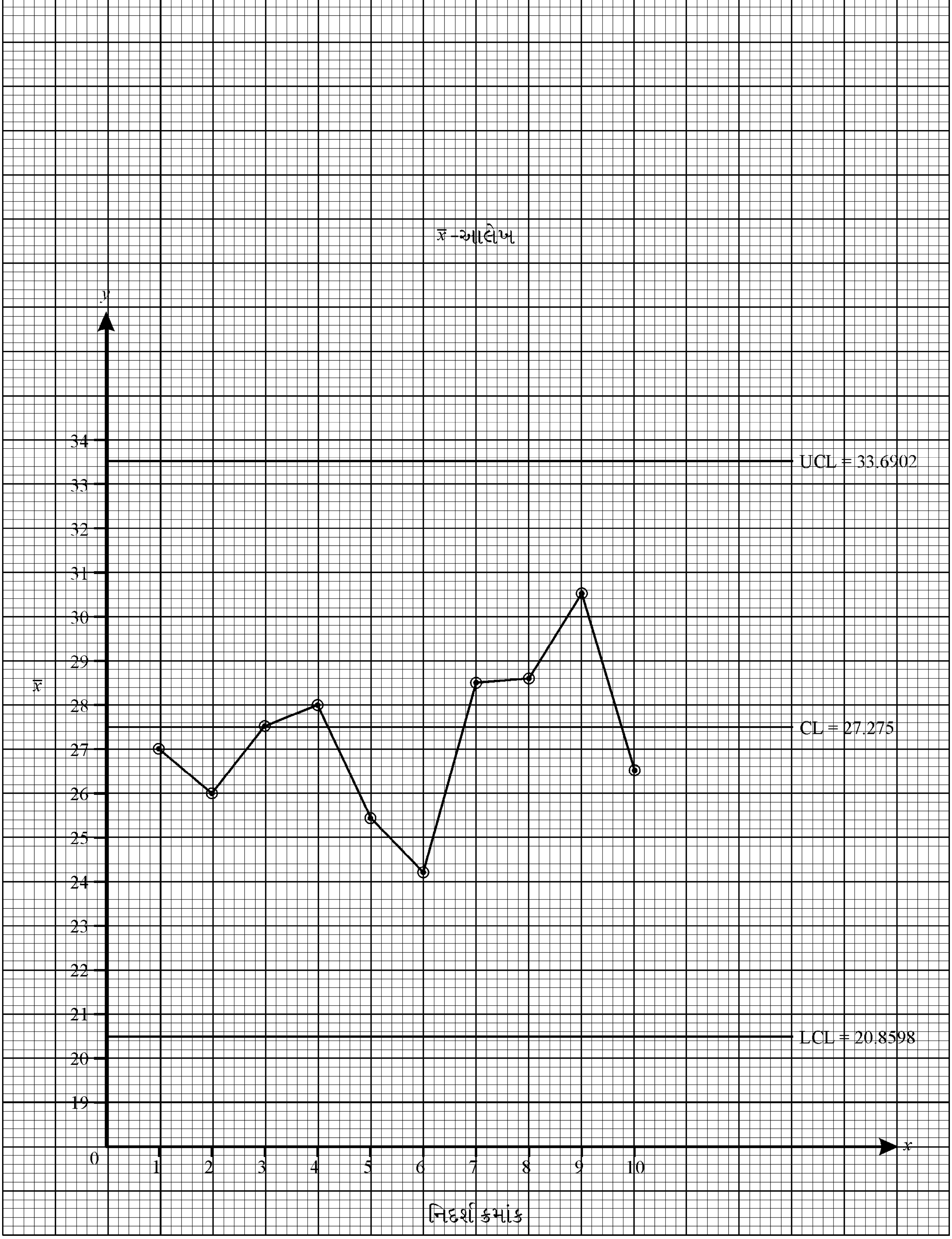
નિદર્શ નંબર	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
મધ્યક ($\bar{x}$)	:	51	46	43	47	45	44	37	49	43	37
વિસ્તાર (R)	:	6	4	6	8	4	7	7	5	6	5

[$n = 4$, $A_2 = 0.729$, $D_3 = 0$, $D_4 = 2.282$]

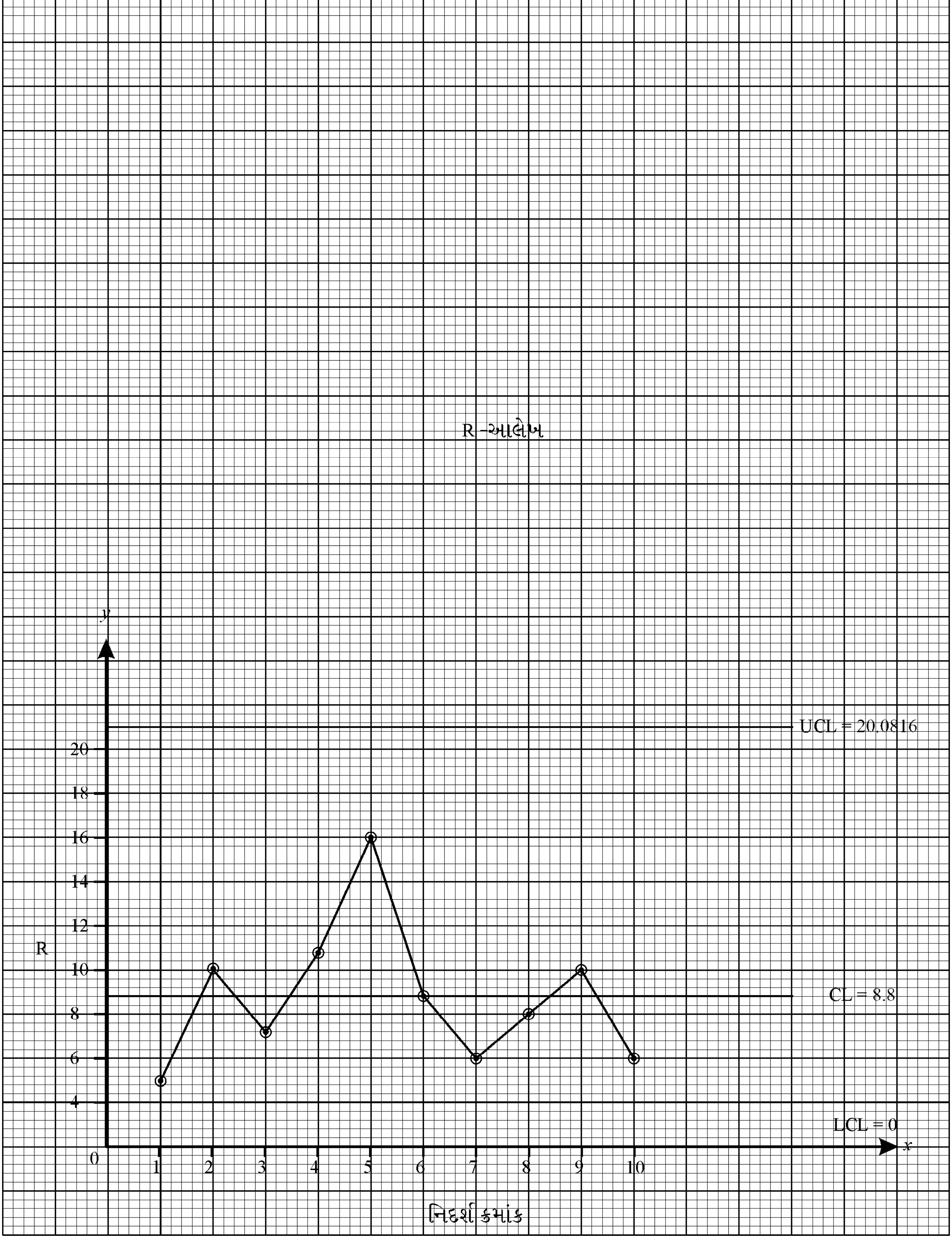
જવાબ : આપેલ માહિતી પરથી સૌપ્રથમ આપણે $\bar{\bar{x}}$ અને $\bar{R}$ મેળવીશું.

નિદર્શ નંબર	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
મધ્યક ($\bar{x}$)	:	51	46	43	47	45	44	37	49	43	37	$= 442 = \Sigma\bar{x}$
વિસ્તાર (R)	:	6	4	6	8	4	7	7	5	6	5	$= 58 = \Sigma R$

આલેખ-1


$\bar{x}$ -આલેખ
y
$\bar{x}$
34
33
32
31
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x
UCL = 33.6902
CL = 27.275
LCL = 20.8598
નિદર્શ ક્રમાંક

આલેખ-2


R -આલેખ
y
R
20
18
16
14
12
10
8
6
4
0
UCL = 20.0816
CL = 8.8
LCL = 0
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
નિદર્શ ક્રમાંક

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}}{m} \qquad \bar{R} = \frac{\sum R}{m}$$

$$= \frac{442}{10} \qquad = \frac{58}{10}$$

$$= 44.2 \qquad = 5.8$$

$\bar{x}$ -આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓ

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $\bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R}$

$= 44.2 + (0.729)(5.8)$

UCL = 48.42

CL = મધ્ય રેખા = $\bar{\bar{x}}$ = 44.2

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $\bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R}$

LCL = 44.2 – (0.729) (5.8)

LCL = 39.98

આલેખ-3 અહીં (પેજ નંબર - 101 પર)

R-આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓ

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $D_4 \bar{R}$

$= (2.282)(5.8)$

$= 13.2356$

CL = મધ્ય રેખા = $\bar{R}$ = 5.8

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $D_3 \bar{R}$

$= (0)(5.8)$

$= 0$

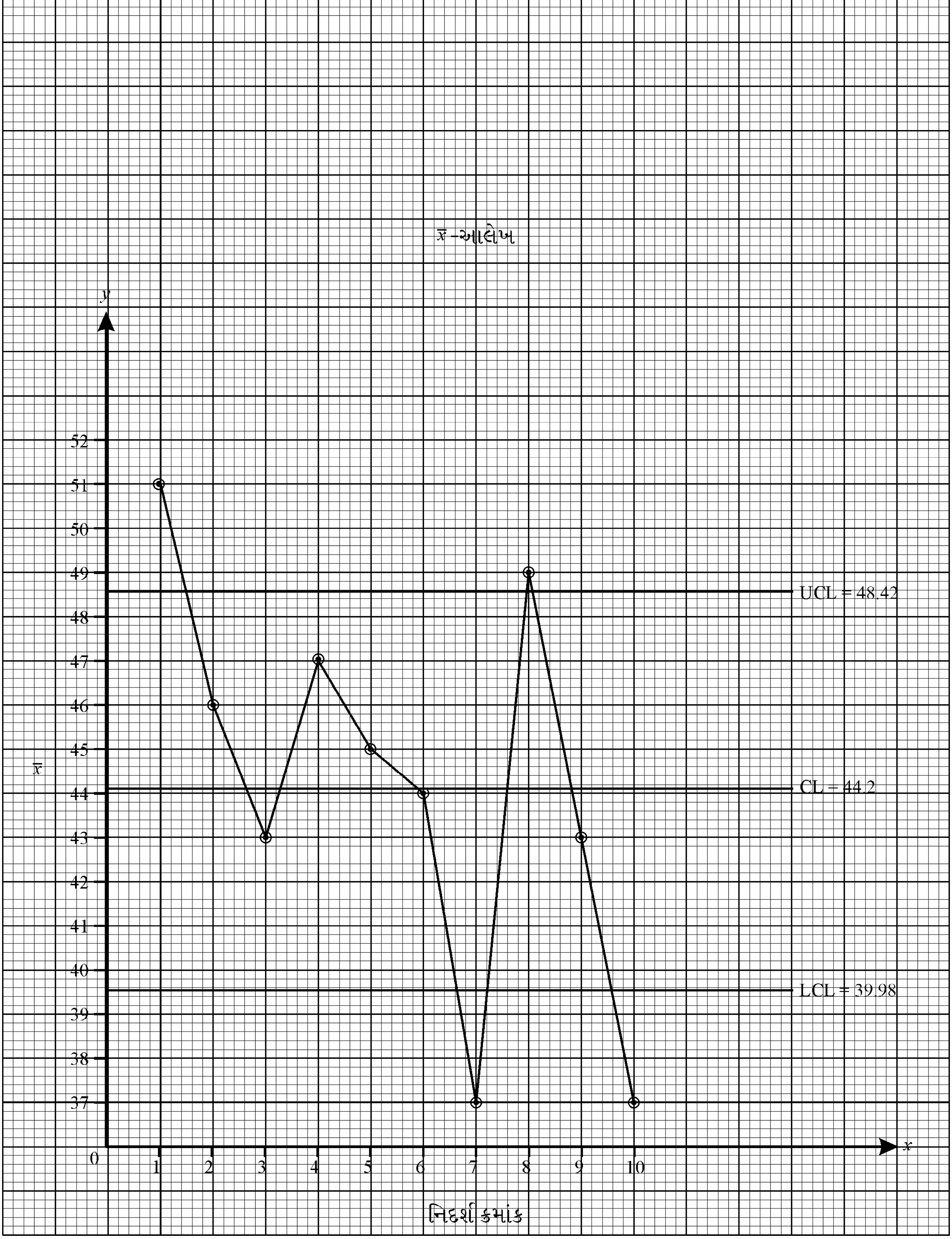
આલેખ-4 અહીં (પેજ નંબર - 102 પર)

નિર્ણય :

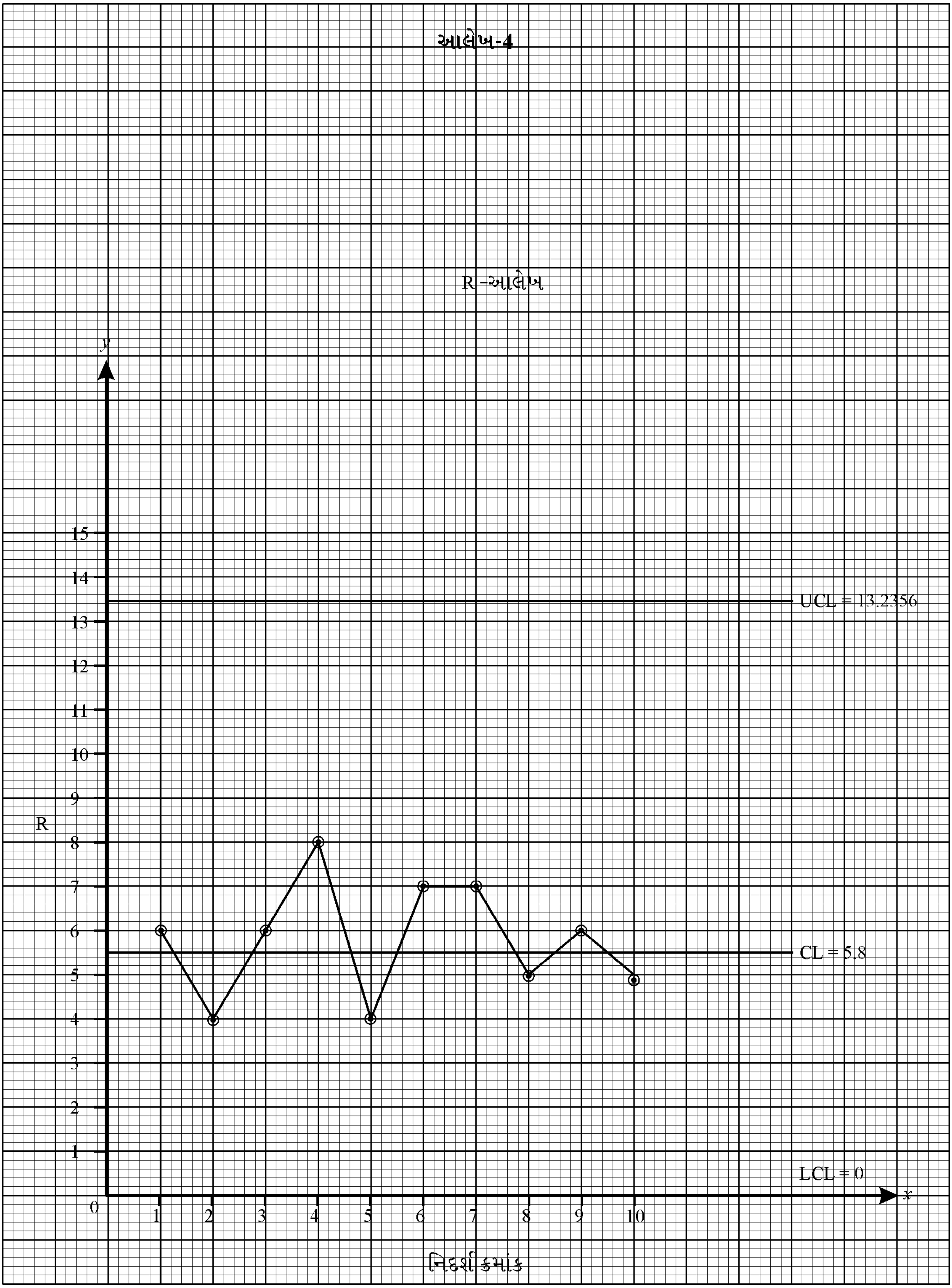
(1) $\bar{x}$ -આલેખમાં જોઈ શકાય છે કે નિદર્શ નંબર-1 અને 8 ના બિંદુઓ ઉપલી નિયંત્રણ સીમાની ઉપર આવેલ છે તથા નિદર્શ નંબર-7 અને 10 ના બિંદુઓ નીચલી નિયંત્રણ સીમાની નીચે આવેલ છે. તેથી મધ્યક ($\bar{x}$) ને અનુલક્ષીને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં નથી એમ કહી શકાય. આ માટે નિર્દેશી શકાય તેવાં કારણો શોધી અને દૂર કરી ઉત્પાદન પ્રક્રિયાને નિયંત્રણમાં લાવી શકાય.

(2) R-આલેખમાં બધા જ નિદર્શ બિંદુઓ બંને નિયંત્રણ સીમાની વચ્ચે આવેલા છે. તેથી વિસ્તાર (R) ને અનુલક્ષીને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં છે તેમ કહી શકાય.

આલેખ-3



$\overline{x}$ -આલેખ
y
52
51
50
49
48
47
46
45
44
43
42
41
40
39
38
37
0
$\overline{x}$
UCL = 48.42
CL = 44.2
LCL = 39.98
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x
નિદર્શ ક્રમાંક


આલેખ-4
R -આલેખ
y
R
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
UCL = 13.2356
CL = 5.8
LCL = 0
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
નિદર્શ ક્રમાંક

દા.-3 નીચેની માહિતી પરથી $\bar{x}$ અને R ના આલેખો દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશે અભિપ્રાય આપો.

[$n = 6$ માટે $A_2 = 0.483$, $D_3 = 0$, $D_4 = 2.004$]

નિદર્શ નંબર :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
મધ્યક ($\bar{x}$) :	603	569	629	680	641	651	586	711	665	689
વિસ્તાર (R) :	251	309	188	176	200	490	171	134	167	219

જવાબ : આપેલ માહિતી પરથી સૌપ્રથમ આપણે $\bar{\bar{x}}$ અને $\bar{R}$ મેળવીશું.

નિદર્શ નંબર :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
મધ્યક ($\bar{x}$) :	603	569	629	680	641	651	586	711	665	689	$= 6424 = \Sigma\bar{x}$
વિસ્તાર (R) :	251	309	188	176	200	490	171	134	167	219	$= 2305 = \Sigma R$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}}{m} \qquad \bar{R} = \frac{\sum R}{m}$$

$$= \frac{6424}{10} \qquad = \frac{2305}{10}$$

$$= 642.4 \qquad = 230.5$$

$\bar{x}$ -આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓ

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $\bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}$

$= 642.4 + (0.483)(230.5)$

UCL = 753.73

CL = મધ્ય રેખા = $\bar{x}$ = 642.4

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $\bar{x} - A_2\bar{R}$

LCL = 642.4 – (0.483) (230.5)

LCL = 531.07

આલેખ-5 અહીં (પેજ નંબર - 104 પર)

R-આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓ

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $D_4\bar{R}$

$= (2.004)(230.5)$

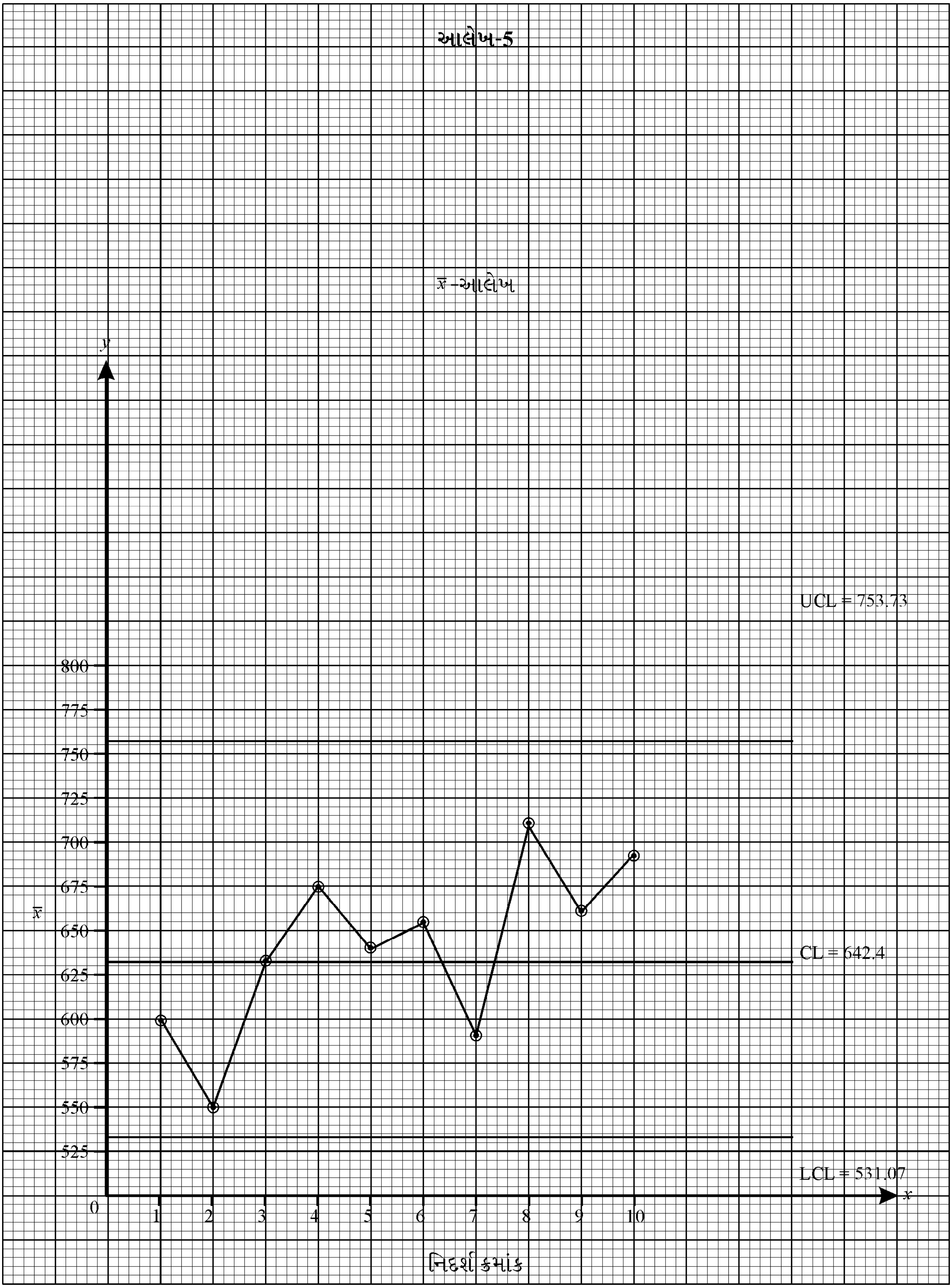
$= 461.922$

CL = મધ્ય રેખા = $\bar{R}$ = 230.5

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $D_3\bar{R}$

$= (0)(230.5)$

$= 0$


આલેખ-5
$\bar{x}$ -આલેખ
y
UCL = 753.73
800
775
750
725
700
675
$\bar{x}$
650
CL = 642.4
625
600
575
550
525
LCL = 531.07
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
નિદર્શ ક્રમાંક

આલેખ-6 અહીં (પેજ નંબર - 106 પર)

નિર્ણય :

(1) $\overline{x}$ -આલેખમાં બધા જ નિદર્શ બિંદુઓ બંને નિયંત્રણ સીમાની વચ્ચે આવેલા છે. તેથી મધ્યક ($\overline{x}$) ને અનુલક્ષીને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં છે તેમ કહી શકાય.

(2) R-આલેખમાં નિદર્શ નંબર-6 નું બિંદુ ઉપલી નિયંત્રણ સીમાની ઉપર આવેલ છે. તેથી વિસ્તાર (R) ને અનુલક્ષીને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં નથી તેમ કહી શકાય. આ માટે નિર્દેશી શકાય તેવાં કારણો શોધી અને તેને દૂર કરી ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં લાવી શકાય.

14.6.2 ગુણાત્મક આલેખો

ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ઉત્પાદિત વસ્તુની ગુણવત્તા, વસ્તુના ગુણધર્મ અથવા લક્ષણ પરથી મેળવવામાં આવે છે ત્યારે ગુણાત્મક આલેખોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જેમ કે કાચનો ગ્લાસ સારો છે કે નહિ, સિમેન્ટની સ્ટ્રેન્થ (મજબુતાઈ) સારી છે કે નહીં, T.V. ની પિક્ચર ગુણવત્તા સારી છે કે નહીં વગેરે. એટલે કે વસ્તુના અવલોકનોના માપ લેવાના બદલે ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં વસ્તુ સારી છે કે નહી તે તપાસવામાં આવે છે.

ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ઉત્પાદિત વસ્તુ ધારા ધોરણ મુજબના ગુણધર્મ ધરાવે તો તે સારી વસ્તુ ગણવામાં આવે છે. નહિંતર તે વસ્તુ ખામીવાળી છે તેમ કહેવાય છે. આમ ઉત્પાદિત વસ્તુ ખામીવાળી અથવા ખામીરહિત એમ બે વિભાગમાં વહેંચવામાં આવે ત્યારે ગુણાત્મક આલેખોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

ગુણાત્મક આલેખો મુખ્યત્વે નીચે મુજબના હોય છે :

(1) p-આલેખ : ખામી પ્રમાણ માટેનો આલેખ

(2) np-આલેખ : ખામીવાળી વસ્તુઓની સંખ્યા માટેનો આલેખ

(3) c-આલેખ : એકમદીઠ ખામીઓની સંખ્યા માટેનો આલેખ

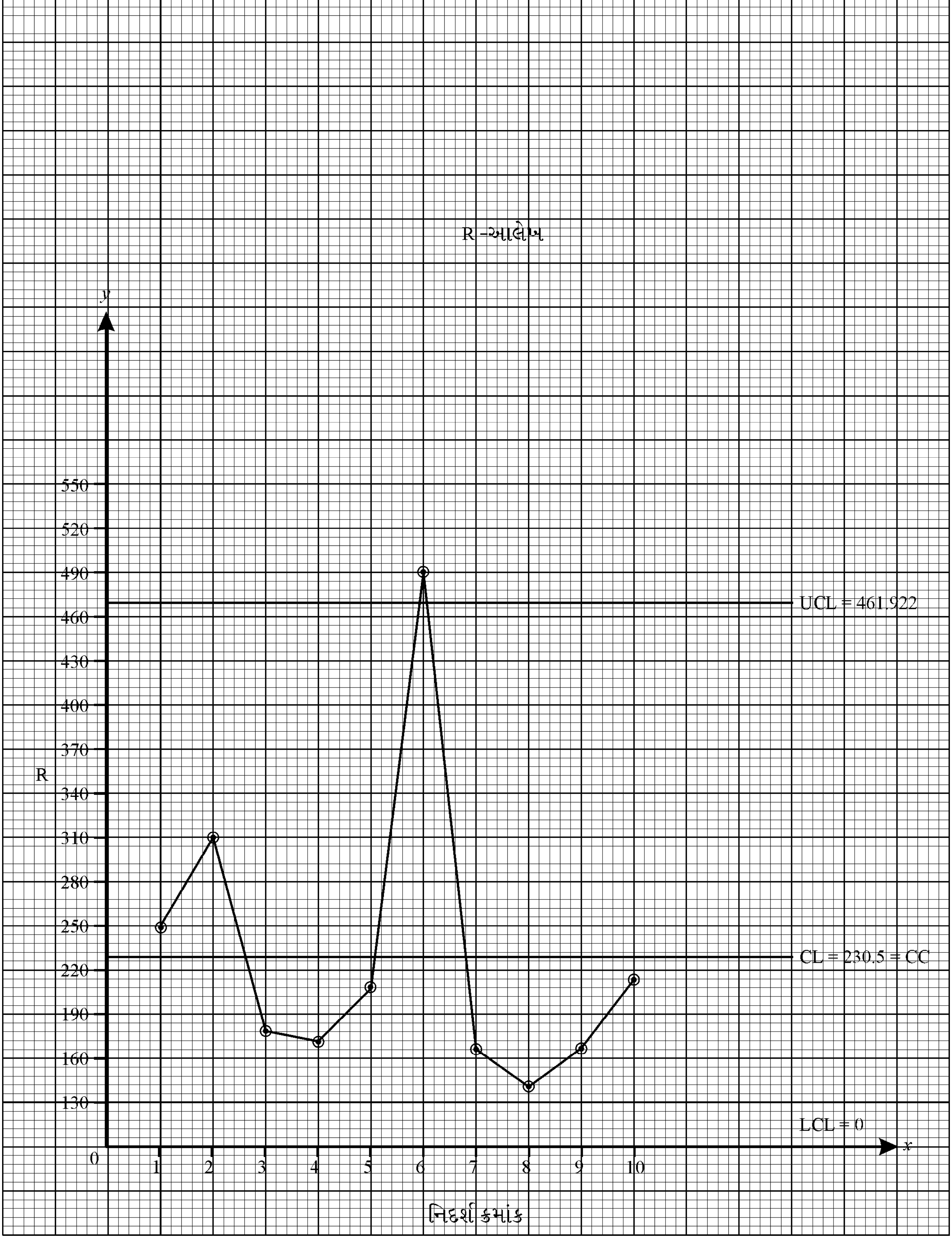
(1) p-આલેખ : જ્યારે ઉત્પાદિત વસ્તુ ખામીવાળી અથવા ખામીરહિત એમ બે વિભાગમાં વહેંચાયેલી હોય છે. ત્યારે ગુણાત્મક આલેખનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ આલેખ દોરવામાં માટે, જ્યારે ઉત્પાદન પ્રક્રિયા ચાલુ હોય ત્યારે આગળ જણાવ્યા મુજબ ઉપસમૂહમાંથી n નિદર્શો લેવામાં આવે છે. આ નિદર્શોમાંથી કેટલા નિર્દશો ખામીરહિત છે અને ખામીવાળા છે તે વસ્તુનું નિરીક્ષણ કરીને ગણવામાં આવે છે.

એટલે કે કોઈપણ ઉત્પાદન પ્રક્રિયા દરમ્યાન n વસ્તુઓનો એક નિદર્શ લેવામાં આવે છે અને તેમાં d વસ્તુઓ ખામીવાળી જણાય છે. તો નિદર્શનું ખામી પ્રમાણ, જે p વડે દર્શાવવામાં આવે છે તે $p = d/n$ વડે શોધાય છે.

$$\text{ખામી પ્રમાણ} = p = \frac{\text{નિદર્શમાં ખામીવાળી વસ્તુઓની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શમાં કુલ વસ્તુઓની સંખ્યા}} = \frac{d}{n}$$

સમયાંતરે લીધેલા નિદર્શો ઉપરથી દરેક નિદર્શ માટે p ની કિંમત

આલેખ-6


R -આલેખ
y
550
520
490
460
430
400
370
R
340
310
280
250
220
190
160
130
0
UCL = 461.922
CL = 230.5 = CC
LCL = 0
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
નિદર્શ ક્રમાંક

ગણવામાં આવે છે. ઉત્પાદન પ્રક્રિયા ખામી પ્રમાણ p ના સંદર્ભમાં નિયંત્રણમાં છે કે નહીં, તે નક્કી કરવા માટે p ના સંભાવના વિતરણનો અભ્યાસ કરવો જરૂરી છે.

જો સમગ્ર ઉત્પાદન પ્રક્રિયા માટે ખામી પ્રમાણ p' વડે દર્શાવવામાં આવે તો ખામી પ્રમાણ p નું વિતરણ દ્વિપદી વિતરણ બને છે જેનો મધ્યક p^1 અને પ્રમાણિત વિચલન $\sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}}$ થાય છે.

સંભાવના વિતરણના નિયમ અનુસાર, જેમ નિદર્શમાં એકમોની સંખ્યા n મોટી લેવામાં આવે, ત્યારે દ્વિપદી વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. આ નિયમ અનુસાર (પ્રામાણ્ય વિતરણના 3σ) ને ખામી પ્રમાણ p માટેના આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓ નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.

$$\text{LCL} = \text{નીચલી નિયંત્રણ સીમા} = p' - 3\sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}}$$

$$\text{CL} = \text{મધ્યરેખા} = p'$$

$$\text{UCL} = \text{ઉપલી નિયંત્રણ સીમા} = p' + 3\sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}}$$

અહીં p' એ સમગ્ર ઉત્પાદન પ્રક્રિયા માટેનું ખામી પ્રમાણ છે અને તેની કિંમત અજ્ઞાત હોય છે તેથી ઉપરના સમીકરણમાં p' ને બદલે m નિદર્શો ઉપરથી ખામી પ્રમાણ p ની મધ્યકિંમત $\overline{p}$ ને લેવામાં આવે છે. જ્યાં

$$\overline{p} = \frac{\sum p}{m}.$$

ઉપરની નિયંત્રણ સીમામાં p' ને 1 બદલે $\overline{p}$ મુકતા,

$$\text{LCL} = \text{નીચલી નિયંત્રણ સીમા} = \overline{p} - 3\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$$

$$\text{CL} = \text{મધ્યરેખા} = \overline{p}$$

$$\text{UCL} = \text{ઉપલી નિયંત્રણ સીમા} = \overline{p} + 3\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$$

ઉપરોક્ત સીમાઓ શોધ્યા પછી, p-આલેખ માટે આલેખ પત્ર ઉપર યોગ્ય સ્કેલ લઈ x-ધરી ઉપર નિદર્શ ક્રમ (Sam*p*le Number) અને y-ધરી ઉપર p ની કિંમતો લેવામાં આવે છે. ત્યારબાદ આલેખ પત્ર પર મધ્યરેખા અને બંને નિયંત્રણ સીમાઓની કિંમત મુજબ x-ધરીને સમાંતર ત્રુટક રેખાઓ દોરવામાં આવે છે. ત્યારબાદ અવલોકન કોષ્ટકમાંથી નિદર્શની p ની કિંમત લઈ તેને બિંદુ સ્વરૂપે આલેખ પર દર્શાવી અને બિંદુઓ જોડવાથી p-આલેખ તૈયાર થઈ જશે.

p-આલેખ તૈયાર થયા પછી, ઉત્પાદન પ્રક્રિયાનો નિર્ણય લેવામાં આવે છે.

જો આ આલેખમાં નિદર્શના બધા જ બિંદુઓ બંને નિયંત્રણ સીમાઓની વચ્ચે આવેલા હોય અને મધ્યરેખાની બંને બાજુ યદચ્છ રીતે પડેલા હોય, તો ઉત્પાદન પ્રક્રિયા આંકડાકીય ગુણવત્તા નિયંત્રણમાં છે અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ચલન (Variation) યાદચ્છિક કારણને લીધે છે તેમ કહી શકાય.

જો આલેખમાં નિદર્શનના એક અથવા વધારે બિંદુઓ બંનેમાંથી કોઈપણ નિયંત્રણ રેખાની બહાર પડતા હોય, તો ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં નથી અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ચલન (Variation) નિર્દેશી શકાય તેવા કારણોને લીધે છે તેમ કહી શકાય.

(2) np-આલેખ

ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાંથી લીધેલા નિદર્શો માટે ખામીપ્રમાણ p ને બદલે નિદર્શમાં ખામીવાળી વસ્તુઓની સંખ્યા ($np = \mathrm{d}$) લેવામાં આવે છે. આ આલેખને np આલેખ કહેવામાં આવે છે. જો ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં લીધેલા n એકમોના નિદર્શ માટે ખામીવાળી વસ્તુઓની સંખ્યા $\mathrm{d} = np$ હોય તો d નું વિતરણ દ્વિપદી વિતરણ થાય છે અને તેનો મધ્યક np^1 અને પ્રમાણિત વિચલન $\sqrt{np'(1-p')}$ થશે. p-આલેખમાં દર્શાવ્યા મુજબ આ પ્રાચલો પ્રમાણિત વિતરણને અનુસરશે.

np-આલેખ માટેની નિયંત્રણ સીમાઓ નીચે મુજબ મળશે.

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $n\overline{p} - 3\sqrt{n\overline{p}\,(1-\overline{p})}$

CL = મધ્યરેખા = $n\overline{p}$

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $n\overline{p} + 3\sqrt{n\overline{p}\,(1-\overline{p})}$

ઉપરોક્ત સીમાઓ શોધ્યા પછી, આલેખ પત્ર ઉપર આલેખની જેમ જ np આલેખ દોરી અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયાનો નિર્ણય લેવામાં આવે છે.

→ p અને np આલેખના મુખ્ય ઉપયોગો નીચે પ્રમાણે છે :

(1) આ આલેખથી ઉત્પાદક તેના ઉત્પાદિત એકમોમાં સરેરાશ કેટલા ખામીવાળા છે તે જાણી શકે છે.

(2) આ આલેખ ઉપરથી ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં નક્કી કરેલ ખામીપ્રમાણ જળવાયું છે કે નહીં તે જાણી શકાય છે.

જો ખામી પ્રમાણ જળવાયું ન હોય, તો તેના કારણો શોધી તે દૂર કરવામાં આવે છે.

(3) આ આલેખ પરથી ગુણવત્તાના અનેક લક્ષણોનું નિરીક્ષણ થઈ શકે છે.

(4) આ આલેખ માટે મેળવેલ નિયંત્રણ સીમાઓનો ભવિષ્યની ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ઉપયોગમાં લઈ શકાય છે.

દા.-4 ઉત્પાદન પ્રક્રિયા દરમ્યાન રોજ 200 બોલપેનનો નિદર્શ લઈ નિરીક્ષણ કરવામાં આવતા, 10 દિવસો દરમ્યાન ખામીવાળી બોલપેનની સંખ્યા અનુક્રમે 8, 12, 2, 20, 10, 15, 6, 20, 13, 8 મળે છે. આ માહિતી ઉપરથી p અને np આલેખ દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશેનું તારણ જણાવો.

જવાબ :

નિદર્શ નંબર	નિરીક્ષિત બોલપેન(n)	ખામીવાળી બોલપેન (d)	$p = d/n$
1	200	8	0.04
2	200	12	0.06
3	200	2	0.01
4	200	20	0.1
5	200	10	0.05
6	200	15	0.075
7	200	6	0.03
8	200	20	0.1
9	200	13	0.065
10	200	8	0.04
			$\Sigma p = 0.57$

$$\bar{p} = \frac{\sum p}{m}$$

$$= \frac{0.57}{10} = 0.057$$

p-આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓ

$$\text{UCL} = \text{ઉપલી નિયંત્રણ સીમા} = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$= 0.057 + 3\sqrt{\frac{(0.057)(1-0.057)}{200}}$$

$$\text{UCL} = 0.057 + 3(0.016) = 0.106$$

$$\text{CL} = \text{મધ્ય રેખા} = \bar{p} = 0.057$$

$$\text{LCL} = \text{નીચલી નિયંત્રણ સીમા} = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

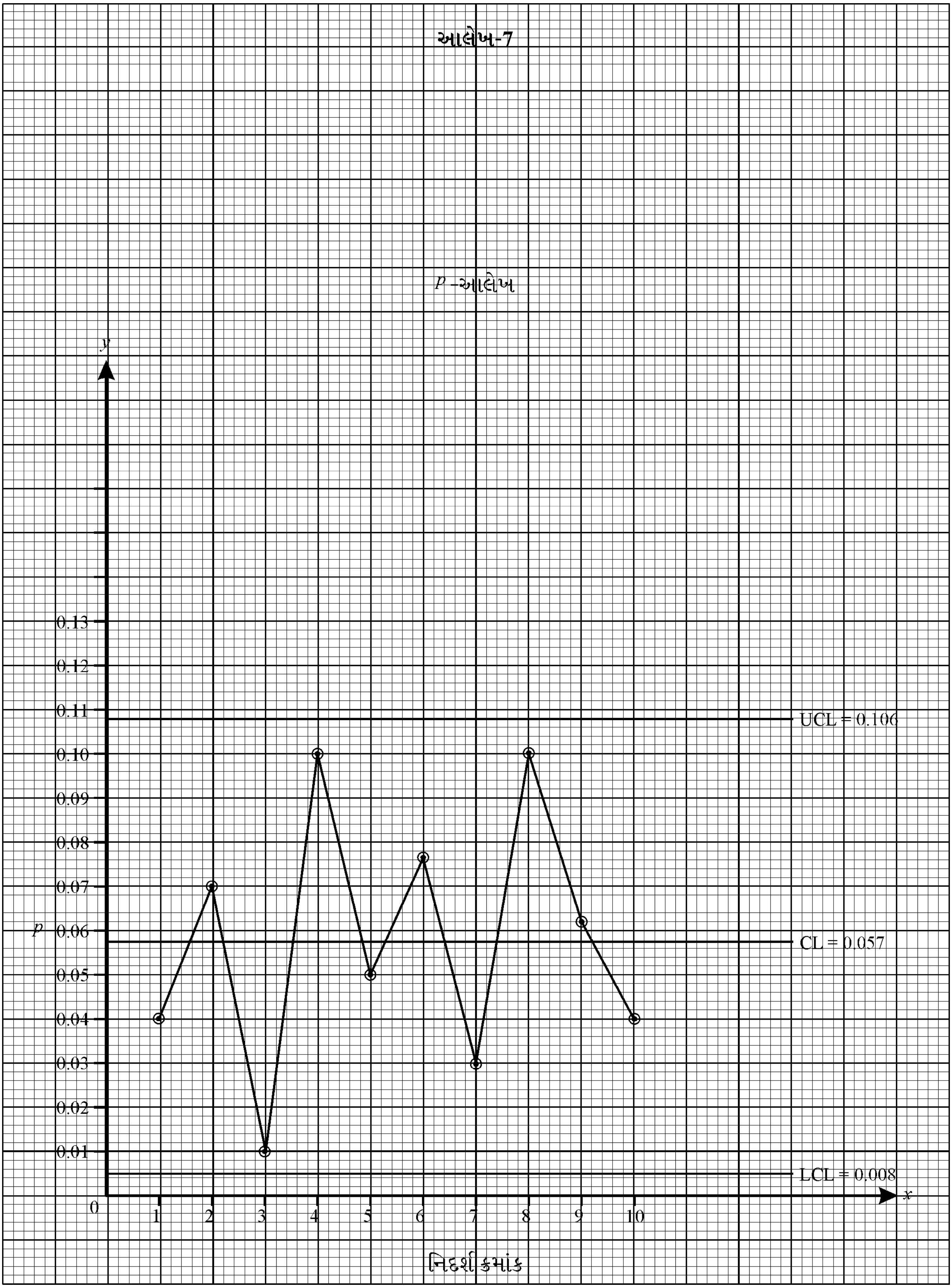
$$\text{LCL} = 0.057 - 3\sqrt{\frac{(0.057)(1-0.057)}{200}}$$

$$\text{LCL} = 0.057 - 3(0.016) = 0.008$$

આલેખ-7 અહીં (પેજ નંબર - 110 પર)

np-આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓ

$$\text{UCL} = \text{ઉપલી નિયંત્રણ સીમા} = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$



આલેખ-7
p -આલેખ
y
p
0.13
0.12
0.11
0.10
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
UCL = 0.106
CL = 0.057
LCL = 0.008
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x
નિદર્શ ક્રમાંક

$= 200(0.057) + 3\sqrt{200(0.057)(1-0.057)}$

$= 11.4 + 3(3.2787)$

$= 21.2361$

CL = મધ્ય રેખા = $n\overline{p}$ = 200(0.057) = 11.4

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $n\overline{p} - 3\sqrt{n\overline{p}(1-\overline{p})}$

$= (200)(0.057) - 3\sqrt{200(0.057)(1-0.057)}$

$= 11.4 - 3(3.2787)$

$= 1.5639$

આલેખ-8 અહીં (પેજ નંબર - 112 પર)

નિર્ણય : p અને np આલેખમાં બધા જ નિદર્શ બિંદુઓ બંને નિયંત્રણ સીમાની વચ્ચે આવેલા છે. તેથી p અને np ને અનુલક્ષીને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં છે તેમ કહી શકાય.

દા.-5 નીચે આપેલ માહિતી પરથી p અને np આલેખ દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશેનું તારણ જણાવો.

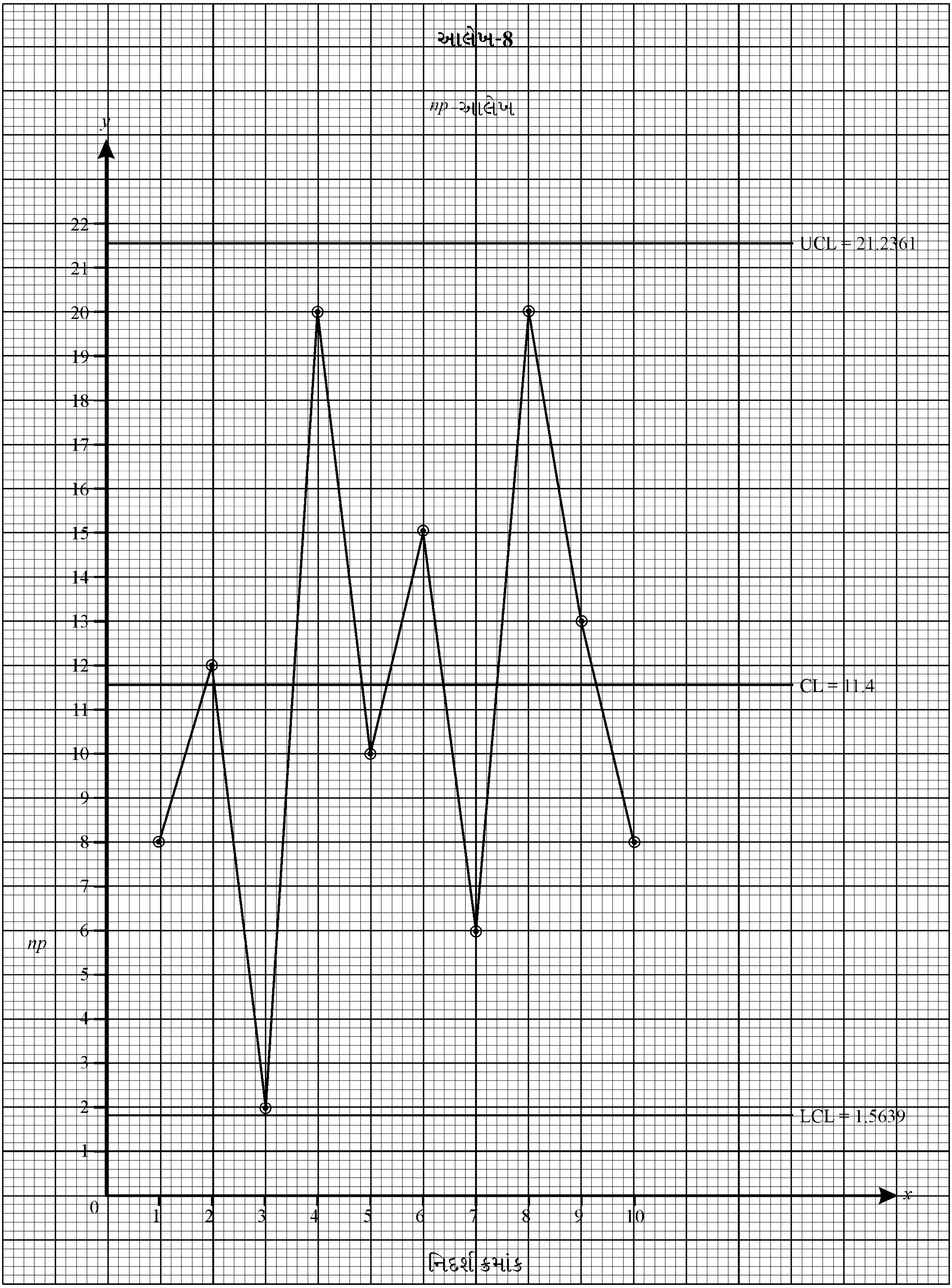
નિદર્શ નંબર :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
નિરીક્ષણ કરેલ વસ્તુઓ :	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400
ખામીવાળી વસ્તુઓ :	24	23	22	23	24	24	24	21	23	22

જવાબ :

નિદર્શ નંબર	નિરીક્ષીત વસ્તુ (n)	ખામીવાળી બોલપેન (d)	$p = d/n$
1	400	24	0.06
2	400	23	0.0575
3	400	22	0.055
4	400	23	0.0575
5	400	24	0.06
6	400	24	0.06
7	400	24	0.06
8	400	21	0.0525
9	400	23	0.0575
10	400	22	0.055
			$\Sigma p = 0.575$

$$\overline{p} = \frac{\Sigma p}{m}$$

$$= \frac{0.575}{10} = 0.0575$$



આલેખ-8
np આલેખ
y
np
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
UCL = 21.2361
CL = 11.4
LCL = 1.5639
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
નિદર્શ ક્રમાંક

p-આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓ

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $\overline{p} + 3\sqrt{\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$

$$= 0.0575 + 3\sqrt{\frac{(0.0575)(1-0.0575)}{400}}$$

$$UCL = 0.0575 + 3(0.0116) = 0.092$$

CL = મધ્ય રેખા = $\overline{p} = 0.0575$

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $\overline{p} - 3\sqrt{\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$

$$LCL = 0.0575 - 3\sqrt{\frac{(0.0575)(1-0.0575)}{400}}$$

$$LCL = 0.0575 - 3(0.0116) = 0.0225$$

આલેખ-9 અહીં (પેજ નંબર - 114 પર)

np-આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓ

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $n\overline{p} + 3\sqrt{n\overline{p}(1-\overline{p})}$

$$= 400(0.0575) + 3\sqrt{400(0.0575)(1-0.0575)}$$

$$= 23 + 3(4.656)$$

$$= 36.9677$$

CL = મધ્ય રેખા = $n\overline{p} = 400(0.0575) = 23$

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $n\overline{p} - 3\sqrt{n\overline{p}(1-\overline{p})}$

$$= (400)(0.0575) - 3\sqrt{400(0.0575)(1-0.0575)}$$

$$= 23 - 3(4.656)$$

$$= 9.0323$$

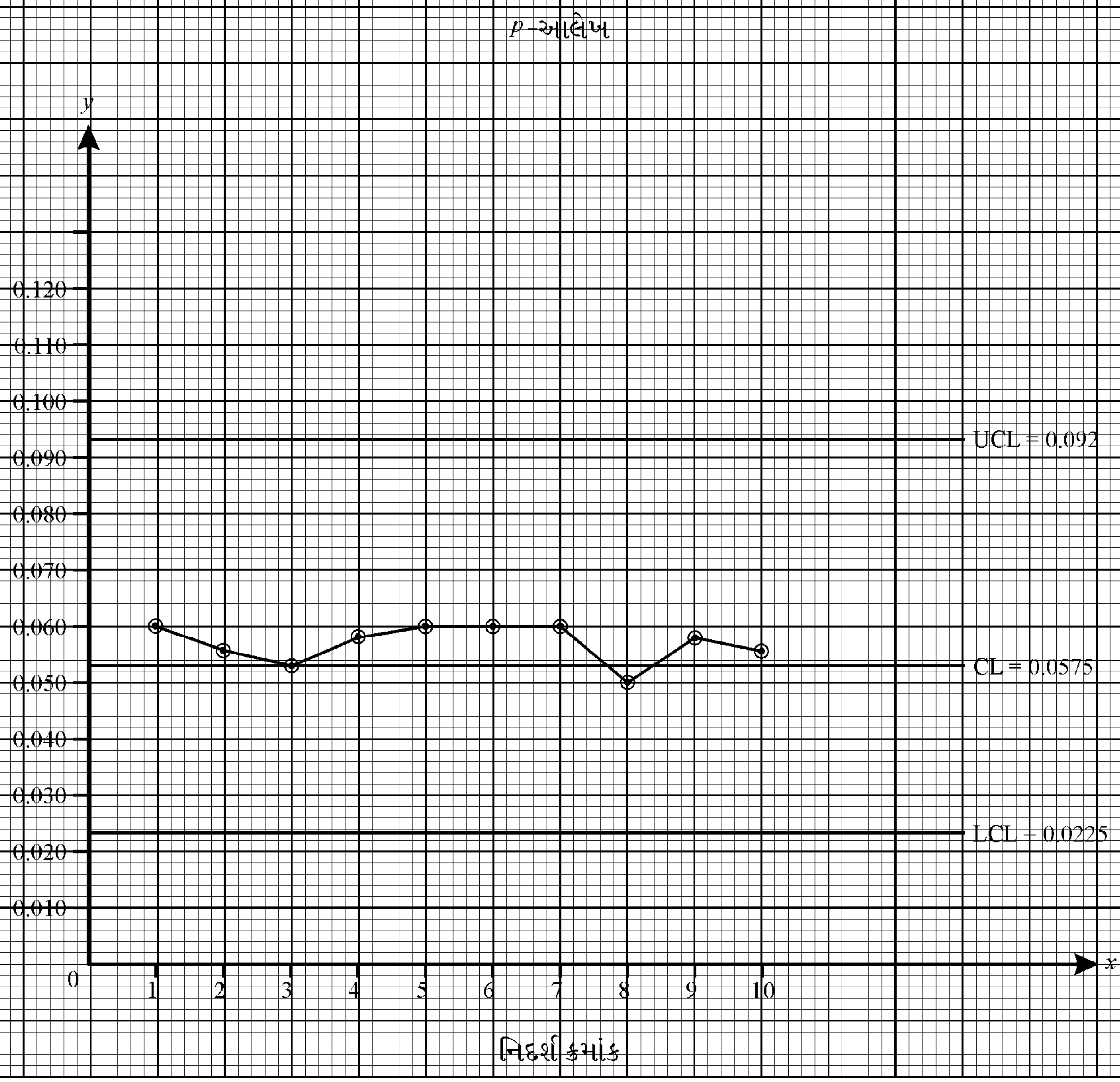
આલેખ-10 અહીં (પેજ નંબર - 115 પર)

નિર્ણય : p અને np આલેખમાં બધા જ નિદર્શ બિંદુઓ બંને નિયંત્રણ સીમાની વચ્ચે આવેલા છે. તેથી p અને np ને અનુલક્ષીને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં છે તેમ કહી શકાય.

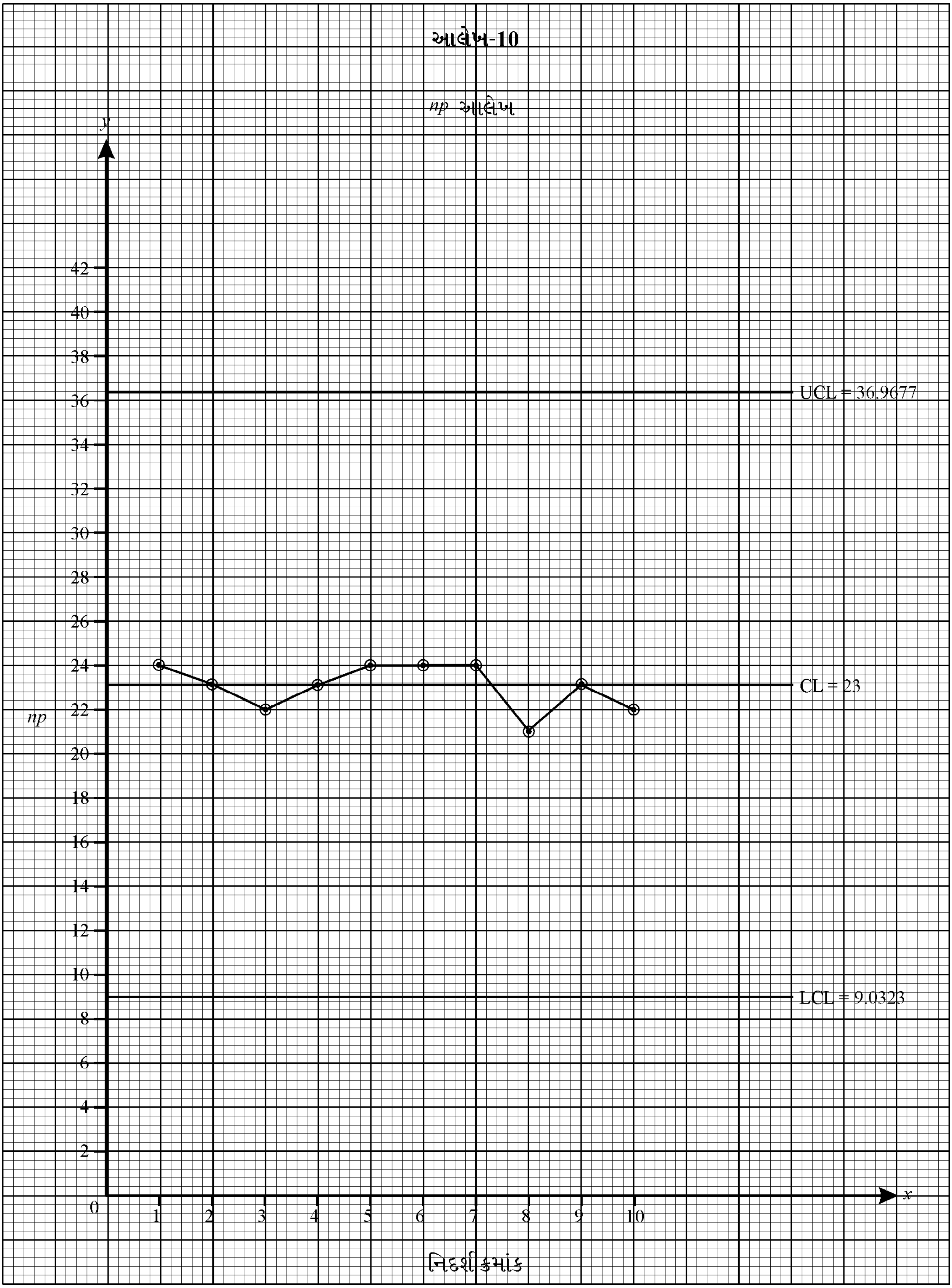
(3) c-આલેખ

ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં જ્યારે n નિદર્શ (Sample) માંથી કેટલા (d) ખામીવાળા છે. તે શોધી અને તેના પરથી p અથવા np આલેખ શોધવામાં આવે છે. એટલે કે $n = 100$ નિદર્શમાંથી ધારો કે d = 2 નિદર્શ ખામીવાળા છે. આ પ્રકારની પદ્ધતિમાં p અથવા np આલેખનો ઉપયોગ કરાય છે.

આલેખ-9



p-આલેખ
y
p
0.120
0.110
0.100
0.090
0.080
0.070
0.060
0.050
0.040
0.030
0.020
0.010
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x
UCL = 0.092
CL = 0.0575
LCL = 0.0225
નિદર્શ ક્રમાંક


આલેખ-10
np આલેખ
y
42
40
38
36
34
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
np
UCL = 36.9677
CL = 23
LCL = 9.0323
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x
નિદર્શ ક્રમાંક

ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાંથી જ્યારે એક જ એકમ લઈ અને તેમાં કેટલી ખામી છે તે શોધી અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં છે કે નહીં તે જાણવા માટે c-આલેખનો ઉપયોગ થાય છે.

ધારો કે ઉત્પાદક મોબાઈલ ફોનનું ઉત્પાદન કરે છે. તો ઉત્પાદક ઉત્પાદિત વસ્તુ ખામીવાળી છે કે નહીં તે જાણવા માટે નિદર્શ તરીકે એક જ મોબાઈલ ફોન આખો તપાસી તેના કેટલા (parts) ભાગમાં ખામી છે તે તપાસે છે. અહીં એક મોબાઈલ ફોનમાં મળતી ખામીની સંખ્યાને c વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આ ખામીની સંખ્યા c પરથી ખામી સંખ્યા (c) નો આલેખ દોરવામાં આવે છે.

વ્યવહારિક રીતે જ્યારે ઉત્પાદિત વસ્તુનું એક એકમ ઘણા બધા (parts) ભાગોનું બનેલું હોય ત્યારે આ આલેખનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જેમ કે T.V. Set, Scooter, Car, Washing Machine વગેરે વસ્તુઓ અનેક (parts) ભાગની બનેલી હોય છે.

વ્યવહારિક રીતે જ્યારે આવી વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરવામાં આવે છે. ત્યારે તેમાં ખામીઓ ખૂબ જ ઓછી અથવા નહિવત હોય છે. આથી ઉત્પાદિત વસ્તુઓમાંથી લીધેલા કોઈપણ એકમમાં ખામીઓ હોવાની સંભાવના ઘણી ઓછી હોય છે. દરેક એકમમાં રહેલ ખામીઓની સંખ્યાને c વડે દર્શાવાય છે અને તે પોયસન વિતરણ (Poisson Distribution) ને અનુસરે છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે પોયસન વિતરણમાં મધ્યક અને વિચરણની કિંમત સરખી હોયછે. તેથી ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાંથી લીધેલા m નિદર્શો ઉપરથી વસ્તુની એકમ દીઠ ખામી સંખ્યા c મેળવી, તેનો મધ્યક $\overline{c}$ ગણવામાં આવે છે. અહીં c ની કિંમત પોયસન વિતરણને અનુસરતી હોવાથી મધ્યક = વિચરણ = $\overline{c}$ થશે. તેથી c નું પ્રમાણિત વિચલન $\sqrt{\overline{c}}$ થશે.

આ કિંમતો ઉપરથી, c આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓ નીચેના સમીકરણ ઉપરથી મેળવી શકાય.

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $\overline{c} - 3\sqrt{\overline{c}}$

CL = મધ્યરેખા = $\overline{c}$

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $\overline{c} + 3\sqrt{\overline{c}}$

ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાંથી સમયાંતરે વસ્તુના એક એકમના m નિદર્શો લઈ અને દરેક વસ્તુનું અવલોકન કરી તેમાં દરેક એકમમાં કેટલી ખામી (c) છે. તે શોધવામાં આવે છે. m નિદર્શોમાંથી આ રીતે મળેલી ખામી (c) નો મધ્યક $\overline{c}$ મેળવવામાં આવે છે. આ મધ્યક ઉપરથી, ઉપર મુજબની નિયંત્રણ સીમાઓ મેળવવામાં આવે છે.

ત્યારબાદ આલેખ પત્રમાં x-અક્ષ ઉપર નિદર્શોના ક્રમ (Sample No.) અને y-અક્ષ ઉપર c ની કિંમતો લેવામાં આવે છે. ત્યારબાદ આલેખ

પર મધ્યરેખા અને બંને નિયંત્રણ સીમાઓની કિંમત મુજબ x-ધરીને સમાંતર ત્રુટક રેખાઓ દોરવામાં આવે છે. ત્યારબાદ અવલોકન કોષ્ટકમાંથી એકમ નિદર્શની ખામીઓની સંખ્યા (c) ને બિંદુ સ્વરૂપે આલેખ પર દર્શાવી અને તે બિંદુઓ જોડવાથી c આલેખ તૈયાર થઈ જશે.

c-આલેખ તૈયાર પછી ઉત્પાદન પ્રક્રિયાનો નિર્ણય લેવામાં આવે છે.

જો આ આલેખમાં નિદર્શના બધા જ બિંદુઓ બંને નિયંત્રણ સીમાઓની વચ્ચે આવેલા હોય અને મધ્યરેખાની બંને બાજુ યદચ્છ રીતે પડેલા હોય, તો ઉત્પાદન પ્રક્રિયા આંકડાકીય ગુણવત્તા નિયંત્રણમાં છે અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ચલન (Variation) યાદચ્છિક કારણને લીધે છે તેમ કહી શકાય.

જો આલેખમાં નિદર્શનના એક અથવા વધારે બિંદુઓ બંનેમાંથી કોઈપણ નિયંત્રણ રેખાની બહાર પડતા હોય, તો ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં નથી અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ચલન (Variation) નિર્દેશી શકાય તેવા કારણોને લીધે છે તેમ કહી શકાય.

દા.-6 એક કારખાનામાં દરરોજ 10 મશીન બનાવવામાં આવે છે. તે દરેકનું નિરીક્ષણ કરતા તેમાં નીચે મુજબની ખામીઓ મળે છે.

5, 7, 3, 6, 4, 4, 12, 5, 8, 4

આ માહિતી ઉપરથી c-આલેખ દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશેનું તારણ કાઢો.

જવાબ : આપણને દરેક મશીનમાં કેટલી ખામી છે તેની માહિતી આપવામાં આવેલ છે. તેથી આપણે ખામીની સંખ્યાને c વડે દર્શાવી $\overline{c}$ ની કિંમત શોધીશું.

નિદર્શ નંબર	1	2	3	4	5	6	7	8	9 10
ખામીની સંખ્યા (c)	5	7	3	6	4	4	12	5	84 = 58 = Σc

$$\therefore\ \overline{c} = \frac{\sum c}{m}$$

$$= \frac{58}{10} = 5.8$$

c-આલેખની સીમાઓ

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $\overline{c} + 3\sqrt{\overline{c}}$

$$= 5.8 + 3\sqrt{5.8}$$

$$= 5.8 + 3(2.4083)$$

$$= 13.0249$$

CL = મધ્ય રેખા = $\overline{c}$ = 5.8

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $\overline{c} - 3\sqrt{\overline{c}}$

$= 5.8 - 3\sqrt{5.8}$

$= 5.8 - 3(2.4028) = -1.4249 \cong 0$

આલેખ-11 અહીં (પેજ નંબર - 119 પર)

નિર્ણય : c-આલેખમાં બધા જ નિદર્શ બિંદુઓ બંને નિયંત્રણ સીમાની વચ્ચે આવેલા છે. તેથી c-આલેખને અનુલક્ષીને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં છે તેમ કહી શકાય.

દા.-7 10 મોબાઈલ ફોનમાં ખામીઓની સંખ્યા ઉત્પાદક દ્વારા નીચે પ્રમાણે નોંધવામાં આવી છે.

2, 5, 2, 4, 4, 18, 0, 4, 10, 18

આ માહિતી ઉપરથી c-આલેખ દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશેનું તારણ આપો.

જવાબ :

નિદર્શ નંબર	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ખામીની સંખ્યા (c)	2	5	2	4	4	18	0	4	10	18=67=Σc

$\therefore\ \bar{c} = \dfrac{\sum c}{m}$

$= \dfrac{67}{10} = 6.7$

c-આલેખની સીમાઓ

UCL = ઉપલી નિયંત્રણ સીમા = $\bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}$

$= 6.7 + 3\sqrt{6.7}$

$= 6.7 + 3(2.588)$

$= 14.464$

CL = મધ્ય રેખા = $\bar{c} = 6.7$

LCL = નીચલી નિયંત્રણ સીમા = $\bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}$

$= 6.7 - 3\sqrt{6.7}$

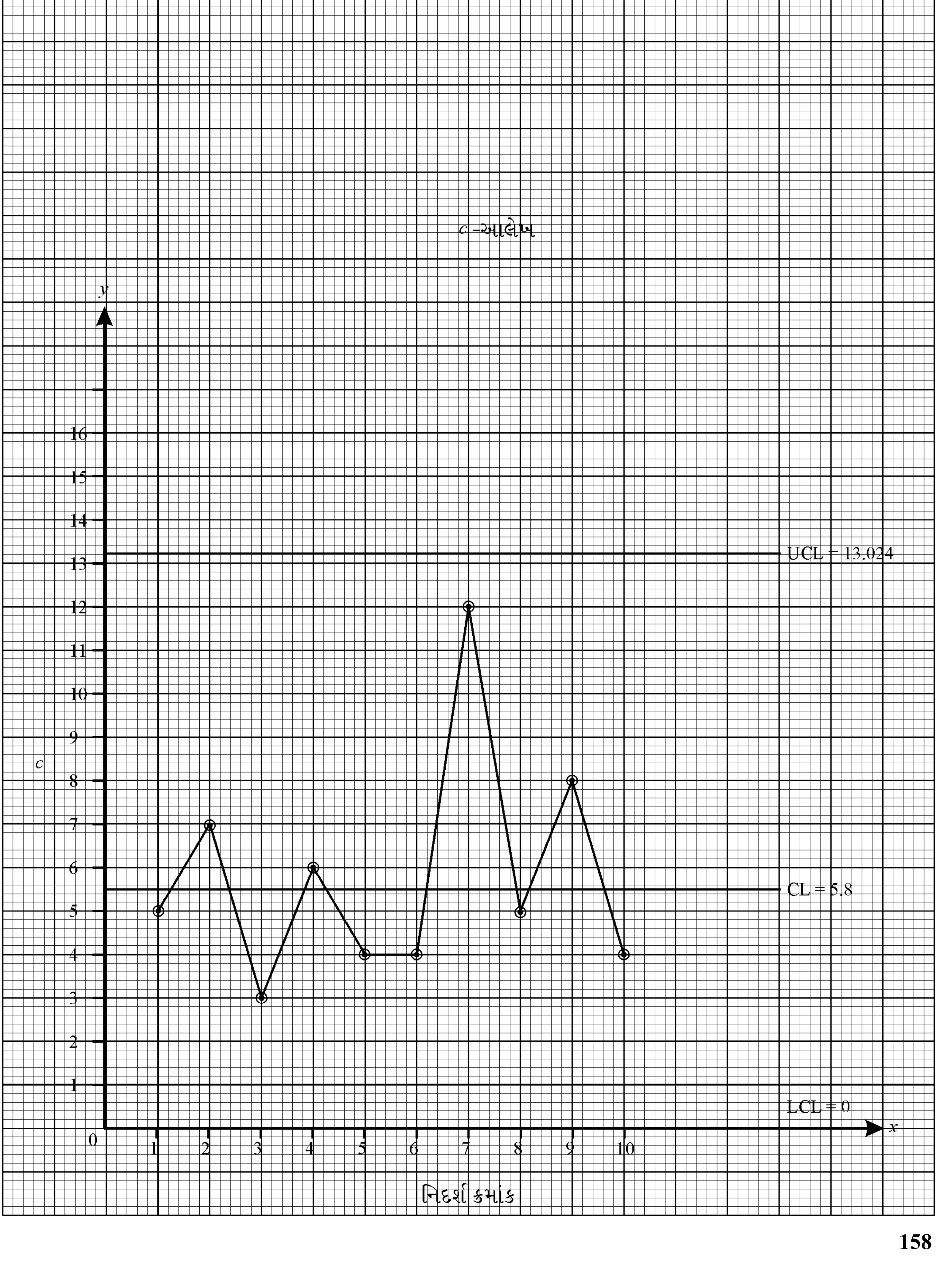
$= 6.7 - 3(2.588)$

$= \cong 0$

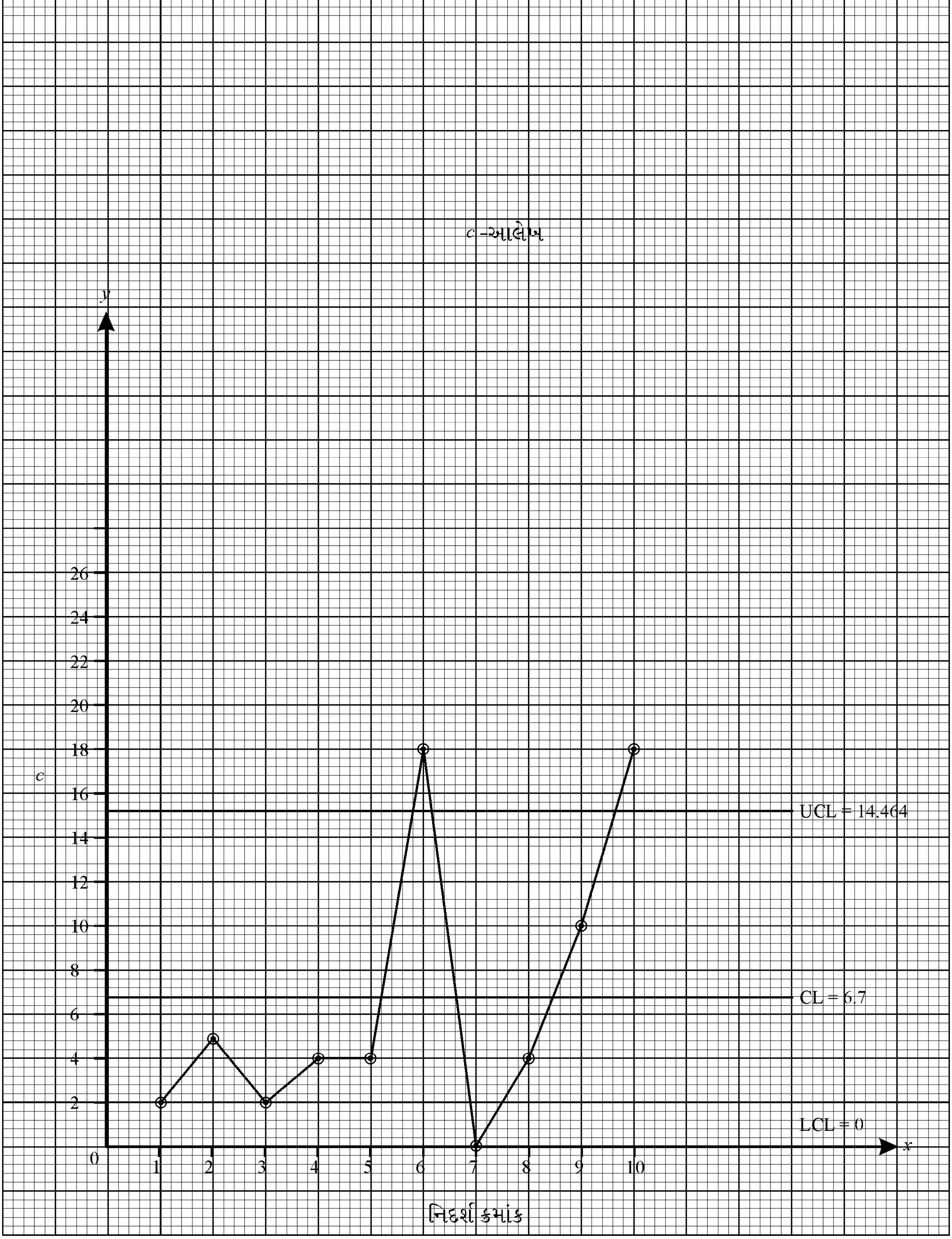
આલેખ-12 અહીં (પેજ નંબર - 120 પર)

નિર્ણય : c-આલેખમાં જોઈ શકાય છે કે નિદર્શ નં. 6 અને 10 ના બિંદુઓ ઉપલી નિયંત્રણ સીમાની બહાર આવેલ છે. તેથી c ને આલેખને અનુલક્ષીને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં નથી એમ કહી શકાય.

આલેખ-11


c -આલેખ
y
c
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
UCL = 13.024
CL = 5.8
LCL = 0
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
નિદર્શ ક્રમાંક

આલેખ-12


c -આલેખ
y
c
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
UCL = 14.464
CL = 6.7
LCL = 0
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
નિદર્શ ક્રમાંક

14.7 ચલનાત્મક અને ગુણાત્મક આલેખ વચ્ચેના તફાવત

	ચલનાત્મક આલેખ	ગુણાત્મક આલેખ
(1)	આ આલેખમાં $\overline{x}$ અને R આલેખનો ઉપયોગ થાય છે.	આ આલેખમાં p, np અને c આલેખોનો ઉપયોગ થાય છે.
(2)	$\overline{x}$ અને R આલેખની નિયંત્રણ સીમા પ્રામાણ્ય વિતરણ (Normal Distribution) ને અનુસરે છે.	p અને np આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓ દ્વિપદી વિતરણ તથા c-આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓ પોયસન વિતરણને અનુસરે છે.
(3)	આ આલેખનો ઉપયોગ વસ્તુનું માપ લઈ શકાતું હોય ત્યારે થાય છે.	આ આલેખનો ઉપયોગ વસ્તુ ખામીવાળી છે કે નહીં તેવા લક્ષણો જોઈ શકાતા હોય ત્યારે થાય છે.
(4)	$\overline{x}$ અને R આલેખો વધુ સંવેદનશીલ છે.	p, np અને c આલેખો ચલનાત્મક આલેખ ઓછા સંવેદનશીલ છે.
(5)	સમય અને ખર્ચ વધુ થાય છે.	સમય અને ખર્ચ ચલનાત્મક આલેખ કરતા ઓછા થાય છે.
(6)	$\overline{x}$ આલેખનો ઉપયોગ વસ્તુની સરેરાશ ગુણવત્તા માટે થાય છે.	p અને np આલેખનો ઉપયોગ વસ્તુમાં ખામી પ્રમાણ માટે થાય છે.

14.8 સ્વાધ્યાય

- **સૈદ્ધાંતિક પ્રશ્નો :**

(1) આંકડાકીય ગુણવત્તા નિયંત્રણ એટલે શું ?

(2) આંકડાકીય ગુણવત્તા નિયંત્રણ સવિસ્તાર સમજાવો.

(3) આંકડાકીય ગુણવત્તા નિયંત્રણના ઉપયોગો અને તેનું મહત્ત્વ સમજાવો.

(4) ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ગુણવત્તાના ચલનનાં કારણોની ચર્ચા કરો.

(5) ગુણવત્તામાં ચલન થવાનાં કારણો સવિસ્તાર સમજાવો.

(6) ગુણવત્તાનું ચલન એટલે શું ? ગુણવત્તાના ચલનના પ્રકાર ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

(7) ગુણવત્તા નિયંત્રણના ઉપયોગો ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

(8) ચલ માટેના આલેખોની રચના સમજાવો.

(9) ખામી સંખ્યા આલેખની રચના સમજાવો.

(10) $\overline{x}$, R આલેખના ઉપયોગો વર્ણવો.

(11) p અને np આલેખના ઉપયોગો વર્ણવો.

(12) c આલેખના ઉપયોગો વર્ણવો.

(13) ચલનાત્મક અને ગુણાત્મક આલેખ વચ્ચેનો તફાવત આપો.

- **ટૂંકનોંધ લખો :**

(1) આંકડાકીય ગુણવત્તા નિયંત્રણ

(2) ચલ માટેના આલેખો. (Charts for Variable)

(3) ગુણાત્મક આલેખો. (Chart for Attributes)

(4) ગુણવત્તા આલેખ માટેની નિયંત્રણ સીમાઓ.

(5) સાનુક્રમનો સિદ્ધાંત

- **બહુવૈકલ્પિક પ્રશ્નો :**

1. ગુણવત્તા નિયંત્રણની પદ્ધતિ ………… એ શોધી હતી.

   (a) ફિશર (b) બાઉલી (c) શ્યુહાર્ટ (d) કેલી

2. ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ………… હોય તો, ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં છે તેમ કહેવાય.

   (a) યાદચ્છિક ચલન (b) નિર્દેશી શકાય તેવું ચલન

   (c) યાદચ્છિક અને નિર્દેશી શકાય (d) ગુચ્છ ચલન

3. સામાન્ય રીતે ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં ચલન ………… ના કારણે હોય છે.

   (a) યાદચ્છિક (b) નિર્દેશી શકાય

   (c) યાદચ્છિક અને નિર્દેશી શકાય (d) અચળ

4. આંકડાશાસ્ત્રીય ગુણવત્તા નિયંત્રણ પદ્ધતિમાં, નિયંત્રણ સીમાઓની ગણતરી ………… દ્વારા થાય છે.

   (a) σ (b) 2σ (c) 3σ (d) 4σ

5. $\bar{x}$ -આલેખમાં $n = 12$, $\bar{\bar{x}} = 138.6$, $\bar{R} = 7.4$, $A_2 = 0.266$ હોય તો UCL = ………… .

   (a) 136.63 (b) 138.6 (c) 140.57 (d) 145.23

6. $\bar{x}$ -આલેખની ઉપલી નિયંત્રણ સીમા 33.6902 અને $\bar{\bar{x}} = 27.275$ હોય તો LCL = ………… .

   (a) 27.275 (b) 5.6 (c) 23.6902 (d) 20.8598

7. R-આલેખની ઉપલી નિયંત્રણ સીમા 58.5789 અને $\bar{R} = 25.67$ હોય તો D_4 = ………… .

   (a) 2.004 (b) 2.282 (c) 13.6902 (d) 2.8598

8. c-આલેખમાં ઉપલી નિયંત્રણ સીમા અને નીચલી નિયંત્રણ સીમા અનુક્રમે 10.69 અને 1.89 હોય તો $\bar{c}$ = ………… .

   (a) 3 (b) 3.4 (c) 4 (d) 4.4

9. np-આલેખની ઉપલી નિયંત્રણ સીમા .... છે.

(a) $n\overline{p} + 3\sqrt{n\overline{p}\,(1-\overline{p})}$ (b) $n\overline{p} - 3\sqrt{n\overline{p}\,(1-\overline{p})}$

(c) $n\overline{p} + 3\sqrt{\overline{p}\,(1-\overline{p})}$ (d) $n\overline{p} - 3\sqrt{\overline{p}\,(1-\overline{p})}$

10. c-આલેખની નીચલી નિયંત્રણ સીમા .... છે.

(a) $\overline{c}$ (b) $\overline{c} + 3\sqrt{\overline{c}}$ (c) $\overline{c} - 3\sqrt{\overline{c}}$ (d) $\overline{c} + \sqrt{\overline{c}}$

જવાબ :

(1) - C	(2) - A	(3) - C	(4) - C	(5) - C
(6) - D	(7) - B	(8) - D	(9) - A	(10) - C

- **ટૂંકા પ્રશ્નો :**

(1) $\overline{x}$ અને R આલેખનો ઉપયોગ ક્યારે કરી શકાય છે ?

(2) p અને np આલેખનો ઉપયોગ ક્યારે કરી શકાય છે ?

(3) c આલેખનો ઉપયોગ ક્યારે કરી શકાય છે ?

(4) $\overline{x}$ અને R આલેખ કયા સંભાવના વિતરણને અનુસરે છે ?

(5) p અને np આલેખ કયા સંભાવના વિતરણને અનુસરે છે ?

(6) c આલેખ કયા સંભાવના વિતરણને અનુસરે છે ?

(7) ખામી પ્રમાણ એટલે શું ?

(8) $\overline{x}$ અને R આલેખોની નિયંત્રણ સીમાઓના સમીકરણ લખો.

(9) p અને np આલેખોની નિયંત્રણ સીમાઓના સમીકરણ લખો.

(10) c આલેખની નિયંત્રણ સીમાઓના સમીકરણ લખો.

(11) ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાં થતા ચલનના મુખ્ય પ્રકાર જણાવો.

(12) $\overline{x}$ આલેખમાં UCL = 440 અને LCL = 120 હોય તો CL ની કિંમત શોધો. (જવાબ : CL = 280)

(13) p આલેખ માટે, n = 100 અને p = 0.02 હોય તો તેના UCL, CL અને LCL ની કિંમત શોધો. (જવાબ : LCL = 0, CL = 0.02, UCL = 0.062)

(14) $\overline{x}$ આલેખના UCL = 40.12 અને $\overline{\overline{x}}$ = 30.12 હોય, તો LCL ની કિંમત શોધો. (જવાબ : 20.12)

(15) c આલેખમાં UCL = 18 અને LCL = 0 હોય તો CL અથવા $\overline{c}$ ની કિંમત શોધો. (જવાબ : $\overline{c}$ = 9)

- **તફાવત આપો :**

(1) $\overline{x}$ આલેખ અને R આલેખ

(2) p આલેખ અને c આલેખ

(3) ચલનાત્મક આલેખ અને ગુણાત્મક આલેખ

(4) યાદચ્છિક ચલન અને નિર્દેશી શકાય તેવું ચલન.

- **દાખલાઓ :**

(1) એક ઉત્પાદક ખીલીનું ઉત્પાદન કરે છે. ઉત્પાદન પ્રક્રિયા દરમ્યાન મેળવાયેલ ખીલીની લંબાઈ નીચે મુજબ આપેલ છે. તે ઉપરથી $\bar{x}$ અને R આલેખ તૈયાર કરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશે પ્રતિક્રિયા આપો.

(n = 3 માટે A_2 = 1.023, D_3 = 0, D_4 = 2.575)

નિદર્શ	ખીલીની લંબાઈ (m.m.)		
નંબર	x_1	x_2	x_3
1	32	37	42
2	30	32	40
3	39	52	29
4	50	42	31
5	41	45	34
6	50	29	20
7	44	52	36
8	23	32	44

(જવાબ : $\bar{x}$ -આલેખ માટે LCL = 19.8475, CL = 37.75, UCL = 55.6525
R-આલેખ માટે LCL = 0, CL = 17.5, UCL = 45.0625
બંને આલેખના સંદર્ભમાં ઉત્પાદન પ્રક્રિયા નિયંત્રણ હેઠળ છે.)

(2) નીચે આપેલ માહિતી પરથી $\bar{x}$ અને R ના આલેખ દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશે જણાવો.

નિદર્શ	પ્લાસ્ટિકના પાઈપની લંબાઈ				
નંબર	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	77	80	72	78	78
2	76	79	74	73	73
3	76	77	76	74	72
4	74	78	77	76	75
5	80	73	76	76	75
6	81	76	78	79	76
7	75	77	76	77	75
8	79	75	77	75	78
9	76	75	75	75	74
10	71	73	71	74	74

(n =5, A_2 = 0.577, D_3 = 0, D_4 = 2.115)

(જવાબ : $\bar{x}$ -આલેખ માટે LCL = 78.75, CL = 75.68, UCL = 73.01

R-આલેખ માટે LCL = 0, CL = 4.6, UCL = 9.75

$\bar{x}$ -આલેખના સંદર્ભમાં પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં નથી. R આલેખના સંદર્ભમાં પ્રક્રિયા નિયંત્રણમાં છે.)

(3) નીચે આપેલ માહિતી પરથી $\bar{x}$ અને R ના આલેખ દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશે જણાવો.

(n =5, A_2 = 0.577, D_3 = 0, D_4 = 2.115)

નિદર્શ નંબર	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
સરેરાશ ($\bar{x}$)	11	12	11	12	11	10	10	9	11	10
વિસ્તાર (R)	7	4	8	5	7	4	8	4	7	9

(જવાબ : $\bar{x}$ -આલેખ માટે UCL = 14.3351, CL = 10.7, LCL = 7.0649
R-આલેખ માટે UCL = 13.3245, CL = 6.3, LCL = 0)

(4) નીચે આપેલ માહિતી પરથી # અને # ના આલેખ દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશે જણાવો.

(n =5, A_2 = 0.577, D_3 = 0, D_4 = 2.115)

નિદર્શ નંબર	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
સરેરાશ ($\bar{x}$)	5	7	5	8	7	4	8	5	7	6
વિસ્તાર (R)	5	11	4	12	7	8	9	4	7	7

(જવાબ : $\bar{x}$ -આલેખ માટે UCL = 10.4698, CL = 6.2, LCL = 1.9302
R-આલેખ માટે UCL = 15.651, CL = 7.4, LCL = 0)

(5) નીચેની માહિતી પરથી p-આલેખ દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશે જણઆવો.

દિવસ :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
તપાસેલી વસ્તુની સંખ્યા :	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
ખામીવાળી વસ્તુની સંખ્યા :	4	8	2	0	1	2	12	8	0	3

(જવાબ : p-આલેખ માટે LCL = 0, CL = 0.08, UCL = 0.195)

(6) નીચેની માહિતી પરથી p અને np આલેખો દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશે જણાવો.

નિદર્શ નંબર :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
તપાસેલી વસ્તુની સંખ્યા :	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400
ખામીવાળી વસ્તુની સંખ્યા :	24	23	22	23	24	24	24	21	23	22

(જવાબ : p-આલેખ માટે UCL = 0.0924, CL = 0.0575, LCL = 0.023
np-આલેખ માટે UCL = 96.17, CL = 72.4883, LCL = 48.805)

(7) નીચેની માહિતી પરથી p અને np આલેખો દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશે જણાવો.

નિદર્શ નંબર :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
તપાસેલી વસ્તુની સંખ્યા :	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
ખામીવાળી વસ્તુની સંખ્યા :	2	1	1	2	3	4	3	1	4	3

(જવાબ : p-આલેખ માટે UCL = 0.1386, CL = 0.048, LCL = 0
np-આલેખ માટે UCL = 6.93, CL = 2.4, LCL = 0)

(8) એક ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાંથી પ્રત્યેકમાં 100 વસ્તુઓ હોય તેવા 10 નિદર્શો લેવામાં આવ્યા છે અને પ્રત્યેક નિદર્શમાંથી ખામીવાળી વસ્તુઓની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે નોંધવામાં આવેલ છે.

14, 18, 21, 13, 21, 17, 17, 26, 22, 16

આ માહિતી માટે યોગ્ય નિયંત્રણ આલેખ દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશે જણાવો.

(જવાબ : np-આલેખ માટે UCL = 30.14, CL = 18.5, LCL = 6.85)

(9) 10 સાઈકલમાં માલૂમ પડેલી ખામીઓ નીચે પ્રમાણે છે. c-આલેખ દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશે જણાવો.

સાઈકલ નંબર	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ખામીઓની સંખ્યા	5	7	3	6	4	4	12	5	8	4

(જવાબ : c-આલેખ માટે UCL = 13.0249, CL = 5.8, LCL = 0)

(10) એક કંપની મોબાઈલ બનાવે છે. 10 મોબાઈલ ફોનના નિદર્શમાંથી મળેલ ખામીઓની સંખ્યા નીચે મુજબ છે.

3, 0, 2, 8, 4, 2, 1, 3, 7, 1

આ માહિતી પરથી c-આલેખ દોરો અને ઉત્પાદન પ્રક્રિયા વિશે જણાવો.

(જવાબ : c-આલેખ માટે UCL = 8.3820, CL = 3.1, LCL = 0)

BAOU
Education for All

યુનિવર્સિટી ગીત

સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ
સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ
સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ

શિક્ષણ, સંસ્કૃતિ, સદ્‌ભાવ, દિવ્યબોધનું ધામ
ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી નામ;
સૌને સૌની પાંખ મળે, ને સૌને સૌનું આભ,
દશે દિશામાં સ્મિત વહે હો દશે દિશે શુભ-લાભ.

અભણ રહી અજ્ઞાનના શાને, અંધકારને પીવો ?
કહે બુદ્ધ આંબેડકર કહે, તું થા તારો દીવો;
શારદીય અજવાળા પહોંચ્યાં ગુર્જર ગામે ગામ
ધ્રુવ તારકની જેમ ઝળહળે એકલવ્યની શાન.

સરસ્વતીના મયૂર તમારે ફળિયે આવી ગહેકે
અંધકારને હડસેલીને ઉજાસના ફૂલ મહેંકે;
બંધન નહીં કો સ્થાન સમયના જવું ન ઘરથી દૂર
ઘર આવી મા હરે શારદા દૈન્ય તિમિરના પૂર.

સંસ્કારોની સુગંધ મહેંકે, મન મંદિરને ધામે
સુખની ટપાલ પહોંચે સૌને પોતાને સરનામે;
સમાજ કેરે દરિયે હાંકી શિક્ષણ કેરું વહાણ,
આવો કરીયે આપણ સૌ
ભવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ...
દિવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ...
ભવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ

DR. BABASAHEB AMBEDKAR OPEN UNIVERSITY
(Established by Government of Gujarat)
'Jyotirmay' Parisar,
Sarkhej-Gandhinagar Highway, Chharodi, Ahmedabad-382 481
Website : www.baou.edu.in